

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)  
Факультет Общей и Прикладной Физики

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики  
Кафедра Теоретической астрофизики и квантовой теории поля

---

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Использование процедур сглаживания для изучения  $SU(2)$   
глюодинамики

Е. В. Аникин  
Научный руководитель — д. ф.-м. н. В. В. Брагута

Москва, 2015

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	.....	3
<b>2</b>	<b>Схема решёточных вычислений</b>	<b>4</b>
2.1	Калибровочная теория на решётке .....	4
2.2	Вычисление средних величин с помощью методов Монте-Карло .....	5
<b>3</b>	<b>Градиентный спуск и кулинг в калибровочной теории</b>	<b>6</b>
3.1	Градиентный спуск .....	6
3.1.1	Решение модифицированного уравнения спуска .....	7
3.1.2	Средние от локальных операторов .....	8
3.1.3	Численное интегрирование уравнения спуска .....	8
3.2	Кулинг .....	9
<b>4</b>	<b>Применения градиентного спуска</b>	<b>10</b>
4.1	Иллюстрация сглаживающего действия градиентного спуска .....	10
4.2	Топологическая восприимчивость .....	10
4.2.1	Решётка $6^3 \times 6$ .....	11
4.2.2	Решётка $32^3 \times 16$ .....	12
4.3	Сравнение кулинга и градиентного спуска .....	12
4.4	Определение масштаба .....	12
4.5	Плотность энтропии .....	16
<b>5</b>	<b>К нахождению вязкости</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>18</b>

## Аннотация

В настоящей работе описаны применения градиентного спуска и кулинга для изучения  $SU(2)$  на решётке. Разработаны программы, выполняющие градиентный спуск и кулинг, и с их помощью воспроизведены результаты статей [1], [4], [5], [6]. Вычислены корреляторы тензора энергии-импульса в зависимости от времени спуска.

## 1 Введение

Квантовая хромодинамика — общепризнанная теория сильных взаимодействий, замечательно описывающая явления в физике высоких энергий. Однако получить предсказания о явлениях при низкой энергии очень сложно, потому что при низких энергиях КХД становится теорией с большой константой связи, и фейнмановская теория возмущений перестаёт работать. Подходом, который позволяет получать предсказания даже при больших константах связи, является решёточная формулировка КХД, где от полей в непрерывном евклидовом пространстве-времени переходят к полям на большой, но конечной решётке с шагом  $a$ . Физические предсказания для нулевых температур получают в пределе  $a \rightarrow \infty$  и бесконечных размеров решётки. Если временной размер решётки остаётся конечным, то это соответствует конечной температуре  $(N_t a)^{-1}$ . Решёточная формулировка также даёт естественное ультрафиолетовое обрезание на масштабе импульсов порядка  $1/a$ .

На решётках можно вычислять статистические средние от физических величин как функциональные интегралы, используя методы Монте-Карло. Это требует больших вычислительных мощностей и применения суперкомпьютеров. Мощности, имеющиеся на настоящий момент, обеспечивают широкое применение решёточной КХД для исследования конфайнмента, кварк-глюонной плазмы и свойств адронов: например, масса протона посчитана с погрешностью меньше 2%.

Градиентный спуск — недавно предложенный метод, позволяющий существенно продвинуться в изучении решёточной КХД. Градиентный спуск сглаживает полевые конфигурации, устраняя флуктуации на масштабах импульса больше  $(8t)^{-\frac{1}{2}}$ , где  $t$  — время спуска. В работах [1] показано, что физические величины, вычисленные после градиентного спуска, не зависят от обрезания и выражаются через перенормированные величины. Эти свойства делают градиентный спуск чрезвычайно привлекательным: во-первых, для многих физических величин сложно найти перенормировочные множители (например, для тензора энергии-импульса), во-вторых, на сглаженных конфигурациях погрешности измерения становятся значительно меньше. Наконец, топологический за-

ряд вообще не имеет смысла для разрывных конфигураций, но после градиентного спуска становится хорошо определён.

Кулинг — более старый метод, уже давно применяющийся для изучения топологических свойств теории. Он во многом похож на градиентный спуск, более того, в ряде случаев можно показать их эквивалентность. Но, вообще говоря, к кулингу следует относиться с осторожностью, потому что это скорее полуэмпирический рецепт, чем обоснованный метод. Напротив, у градиентного спуска есть ясное аналитическое обоснование.

## 1.1

В данной работе с помощью градиентного спуска вычисляются топологическая восприимчивость и энтропия в  $SU(2)$  на решётке  $32^3 \times 16$  при  $\beta = 2.81$ .

## 2 Схема решёточных вычислений

### 2.1 Калибровочная теория на решётке

В этом и следующем разделах кратко изложены основные положения теории. С ними можно более подробно ознакомиться в монографии [2] и в книге [3].

Чистая глюодинамика описывается неабелевой калибровочной теорией с вектор-потенциалом  $A_\mu \in \mathfrak{su}(N)$ ,  $\mu = 1 \dots 4$ . Истинная, физическая глюодинамика соответствует  $N = 3$ ; случай  $N = 2$ , который рассматривается в данной работе, проще, но сохраняет основные физические особенности теории. Лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_0^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$$A_\mu = -ig_0 A_\mu^b T_b,$$

где  $F_{\mu\nu}$  - тензор напряжённости поля,  $T_b$  - генераторы алгебры  $\mathfrak{su}(N)$ .

Чтобы сформулировать решёточную версию теории, рассмотрим в пространстве-времени четырёхмерную решётку с шагом  $a$  и припишем каждой паре соседних узлов матрицу  $U_\mu(x) \in SU(N)$  (её называют линковой переменной). Она связана с вектор-потенциалом:

$$U_\mu \approx e^{-iaA_\mu}$$

Простейшее действие, зависящее от линковых переменных, и переходящее при  $a \rightarrow 0$  в 2.1, — вильсоновское действие:

$$S_w = \frac{2n}{g_0^2} \sum_{\mu, \nu, x} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\mu\nu}(x)\right)$$

$$U_{\mu\nu} = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x) \quad (2.2)$$

Суммирование производится по всем плакетам, то есть замкнутым циклам из четырёх линков. Естественным образом можно распространить определение 2.2 и на отрицательные значения  $\mu, \nu$ .

Величины  $U_{\mu\nu}$  выражаются через тензор напряжённости поля как

$$U_{\mu\nu} = 1 - a^2 F_{\mu\nu} + o(a^2)$$

Отсюда получаем решёточную формулу для  $F_{\mu\nu}$ :

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4a^2}(V_{\mu,\nu} + V_{\nu,-\mu} + V_{-\nu,\mu} + V_{-\mu,-\nu})$$

$$V_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}(U_{\mu,\nu} - U_{\mu,\nu}^\dagger)$$

## 2.2 Вычисление средних величин с помощью методов Монте-Карло

В непрерывной теории средние от квантовомеханических операторов вычисляются так:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[A_\mu] \mathcal{O} \exp(-S[A_\mu])$$

Здесь  $Z$  — статистическая сумма:

$$Z = \int \mathcal{D}[A_\mu] \exp(-S[A_\mu])$$

В решёточной формулировке континуальный интеграл становится конечномерным:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) e^{-S(U)}$$

Здесь  $dU$  — мера Хаара на группе  $SU(N)$ . На решётке функциональный интеграл, в отличие от континуума, хорошо определён и может быть найден напрямую численно с помощью методов Монте-Карло.

Идея методов Монте-Карло такова: генерируется большое количество полевых конфигураций с вероятностями, пропорциональными  $e^{-S(U)}$ . Затем вычисляется среднее арифметическое от физической величины по сгенерированным конфигурациям. Главная задача, таким образом, — сгенерировать набор конфигураций с заданным распределением. Методы Heatbath и Metropolis решают эту задачу с помощью марковской цепи. А именно, элементарный шаг марковской цепи — это преобразование всего одной линковой переменной. При подходящем законе преобразования в пределе бесконечного количества шагов получается нужное распределение. Например, в методе Heatbath линковая переменная  $U_1$  заменяется на другую с распределением  $\exp(-S(U_1, \bar{U}))$ , где переменные  $\bar{U}$  "заморожены". Для группы  $SU(2)$  метод Heatbath легко реализуется, и этот метод использовался для генерации конфигураций в настоящей работе.

## 3 Градиентный спуск и кулинг в калибровочной теории

### 3.1 Градиентный спуск

Градиентный спуск в непрерывной  $SU(N)$  теории определяется уравнениями

$$\dot{B}_\mu = D_\nu G_{\nu\mu} \quad (3.3)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu], D_\mu = \partial_\mu + [B_\mu, \cdot] \quad (3.4)$$

Точка здесь означает производную по времени спуска  $t$  (оно не имеет никакого отношения к физическому времени  $x_0$ ). Уравнения определяют эволюцию поля  $B_\mu$  в направлении градиента действия

$$S = \frac{1}{4} \int G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a d^4x$$

Аналогично можно определить градиентный спуск на решётке. Простейшее действие в решёточной КХД - вильсоновское действие:

$$S_w = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \text{ReTr}(1 - U(p))$$

Здесь  $g_0$  - константа связи, а суммирование производится по всем плакетам. Часто используют обозначение  $\beta = 2/g_0^2$ . Уравнения спуска в этом случае принимают вид

$$\dot{V} = Z(V)V \quad (3.5)$$

$$Z(V) = \frac{1}{2}(W_\mu U_\mu^\dagger - U_\mu W_\mu^\dagger)$$

Здесь  $W_\mu$  — так называемый staple,

$$W_\mu(x) = \sum_{\nu \neq \mu} [U_\nu(x)U_\mu(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x + \hat{\mu}) + U_\nu^\dagger(x - \hat{\nu})U_\mu(x - \hat{\nu})U_\nu(x - \hat{\nu} + \hat{\mu})] \quad (3.6)$$

Градиентный спуск оказывает на полевые конфигурации сглаживающее действие, а физические величины, вычисленные при положительном времени спуска, не требуют перенормировки, то есть не зависят от обрезания или шага решётки. Это можно показать, решая уравнение спуска по теории возмущений. В работе [1] решают не уравнение

3.3, а модифицированное уравнение

$$\dot{B}_\mu = D_\nu G_{\nu\mu} + \lambda D_\mu \partial_\nu B_\nu, \quad (3.7)$$

решение которого получается из решения 3.3 калибровочным преобразованием

$$B_\mu = \Lambda B_\mu \Lambda^{-1} + \Lambda \partial_\mu \Lambda^{-1},$$

$$\dot{\Lambda} = -\lambda \partial_\nu B_\nu \Lambda$$

Здесь  $\lambda$  - произвольный параметр. Выбор  $\lambda = 0$  ведёт к трудностям в применении теории возмущений; удобно положить  $\lambda = 1$ . Выбор  $\lambda$ , конечно, не влияет на физические результаты, потому что все физические наблюдаемые калибровочно инвариантны.

### 3.1.1 Решение модифицированного уравнения спуска

В рамках теории возмущений решение уравнения 3.7 следует искать в виде ряда

$$B_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} g_0^k B_{\mu,k},$$

где  $B_\mu = A_\mu$  в начальный момент времени. Подстановка в уравнение 3.7 при  $\lambda = 1$  даёт бесконечную систему

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\mu,N} - \partial_\nu \partial_\nu B_{\mu,N} &= R_N \\ R_N &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} [B_{\nu,k} \partial_\nu B_{\mu,N-k}] - \sum_{k=1}^{N-1} [B_{\nu,k} \partial_\mu B_{\nu,N-k}] + \sum_{k+l+m=N} [B_{\nu,k} [B_{\nu,l} B_{\mu,m}]] \end{aligned}$$

В частности,  $R_1 = 0$ , и уравнение на  $B_{\mu,1}$  — просто уравнение теплопроводности:

$$\dot{B}_{\mu,1} - \partial_\nu \partial_\nu B_{\mu,1} = 0$$

Его решение —

$$B_\mu(t, x) = \int d^D y \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{D}{2}}} B_\mu(0, y) \quad (3.8)$$

Остальные уравнения могут быть легко решены с помощью функций Грина уравнения теплопроводности.

Теперь напрямую видно, что градиентный спуск оказывает сглаживающее действие, то есть усредняет переменные по сфере радиуса порядка  $\sqrt{8t}$ .

В реальных вычислениях должны выполняться два условия. Во-первых,  $\sqrt{8t} > a$ :



усреднение на масштабе, меньшем шага решётки, не имеет смысла. Во-вторых,  $\sqrt{8t} < L$ , где  $L$  — размер решётки: в противном случае будут сказываться эффекты конечного объёма.

### 3.1.2 Средние от локальных операторов

Если некоторая физическая величина выражена через поля  $B_\mu(x, t)$  при ненулевом времени  $t$ , то по формулам типа (3.8) её можно выразить через  $B_\mu(x, 0)$ , а затем вычислить её среднее по обычным правилам. Оказывается, такие средние конечны и выражаются через перенормированные операторы. Именно поэтому градиентный спуск позволяет получать физические предсказания: физические величины при  $t > 0$  не зависят от регуляризации и, следовательно, могут быть посчитаны на решётке.

Вычисления с градиентным спуском проходят следующим образом. Как было сказано, средние от локальных операторов при  $t > 0$  выражаются через перенормированные физические величины (пусть, для определённости, энтропию). Если выражение, связывающее оператор и энтропию, получено как разложение по теории возмущений по  $t$ , то энтропия может быть найдена взятием предела  $t \rightarrow 0$ . На решётке всё сказанное приобретает смысл только тогда, когда  $a$  мало по сравнению с  $\sqrt{8t}$ . Таким образом, нужно взять достаточно большую решётку и настолько малое  $a$ , чтобы при  $\sqrt{8t} > 2a$  время  $t$  ещё можно было считать малым, и при взятии предела ограничиться областью  $\sqrt{8t} > 2a$ .

### 3.1.3 Численное интегрирование уравнения спуска

На конечной решётке пространство всех полей - конечная степень калибровочной группы и, следовательно, само является группой Ли. Соответствующая этой группе алгебра Ли - прямая сумма алгебр, соответствующих каждой линковой переменной. С этой точки зрения уравнение спуска 3.5 - линейное уравнение первого порядка, и его можно записать в виде

$$\dot{V} = Z(V)V,$$

где  $V$  - элемент группы Ли, а  $Z(V)$  - элемент алгебры Ли. Для интегрирования уравнения можно использовать метод Рунге-Кутты, который позволяет последовательно получить значения линковых переменных при временах, равных  $n\epsilon$ , по формулам:

$$W_0 = V(t),$$

$$W_1 = \exp \left[ \frac{1}{4} Z_0 \right] W_0,$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \exp \left[ \frac{8}{9} Z_1 - \frac{17}{36} Z_0 \right] W_1, \\
V(t + \epsilon) &= \exp \left[ \frac{3}{4} Z_2 - \frac{8}{9} Z_1 + \frac{17}{36} Z_0 \right] W_2, \\
Z_i &= \epsilon Z(W_i)
\end{aligned}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что ошибка на шаге интегрирования порядка  $\epsilon^4$ . На практике оказывается, что при шаге 0.01 ошибка не превышает  $10^{-6}$ .

## 3.2 Кулинг

Процедура кулинга для  $SU(2)$  процедура устроена так: производится обход всех линковых переменных решётки, и для каждого линка делается замена

$$U_\mu \longrightarrow W_\mu, \quad (3.9)$$

где  $W_\mu$  определена формулой 3.6. Шагом кулинга называется полный обход линков решётки. Замена 3.9 минимизирует часть действия, связанную с  $U_\mu$ . Эта часть записывается как

$$S_w = \beta \sum_{p \ni U_\mu} \left( 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_p(x) \right)$$

Легко видеть, что это выражение равно  $\beta \left( 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_\mu W_\mu^\dagger \right)$ , которое минимизируется при  $U_\mu = W_\mu$ . Как и градиентный спуск, кулинг сглаживает полевые конфигурации, поэтому он тоже использовался для исследования топологических свойств калибровочной теории.

В работе [4] детально сравниваются градиентный спуск и кулинг и показано, что они дают почти неразличимые результаты для действия и топологического заряда. При этом один полный шаг кулинга эквивалентен времени  $t = 3$  градиентного спуска, то есть  $n_c \sim 3t$ .

Кулинг гораздо быстрее и проще в реализации, чем градиентный спуск. Однако его применимость менее обоснована, более того, иногда кулинг сильно искажает физическую картину. Например, он нарушает сдвиговую инвариантность, и с его помощью нельзя исследовать свойства тензора энергии-импульса.

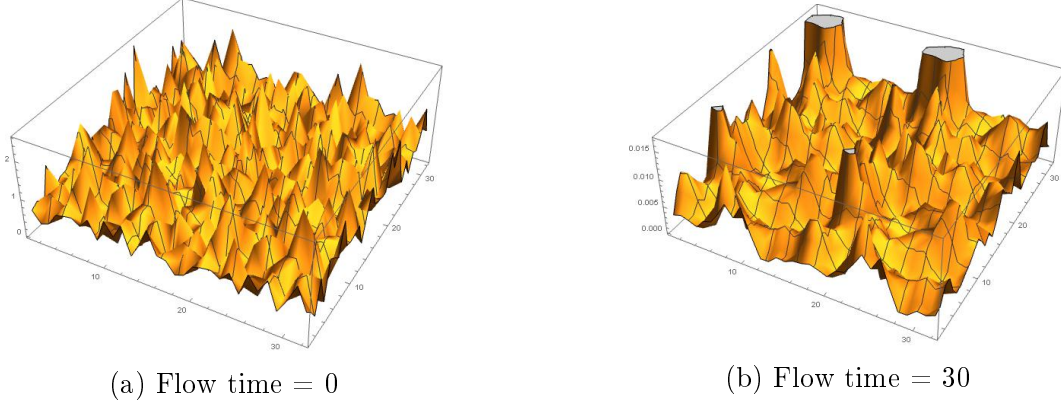


Рис. 1: Сглаживающее действие градиентного спуска

## 4 Применения градиентного спуска

Для изучения градиентного спуска была разработана программа, реализующая метод Рунге-Кутты. Дальнейшие вычисления, если не оговорено иное, проделаны на решётке  $32^3 \times 16$  для  $\beta = 2.81$ , для которой  $a = 0.034$  фм. Конфигурации были сгенерированы с помощью алгоритма Heatbath с оверрелаксацией. Чтобы исключить автокорреляцию, между измерениями делалось 300 шагов Heatbath и по  $N_t/2$  шагов оверрелаксации на шаг Heatbath. Термализация состояла из 5000 шагов.

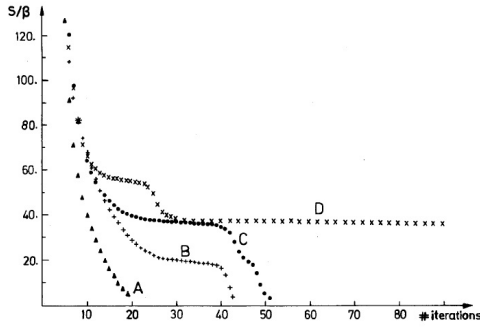
### 4.1 Иллюстрация сглаживающего действия градиентного спуска

Для проверки сглаживающего действия были вычислены средние  $1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\mu\nu}$  по пространственным направлениям для каждой точки решётки для времен спуска, равных 0 и 30. (Эти средние пропорциональны напряжённости хромоманнитного поля). Время  $t = 30$  на нашей решётке соответствует  $\sqrt{8t} = N_t$ . На рисунках - графики этих средних на срезе решётки. Напряжённость исходной конфигурации сильно осциллирует, а после применения градиентного спуска становится гладкой.

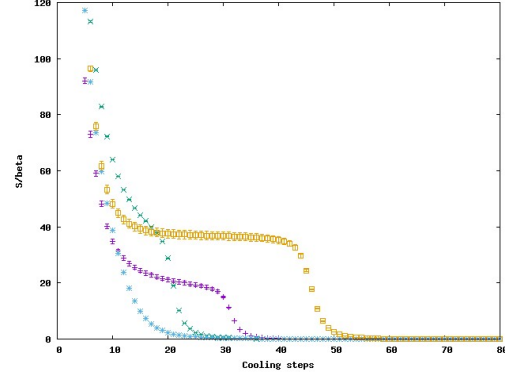
### 4.2 Топологическая восприимчивость

Топологическим зарядом называется величина

$$Q = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (4.10)$$



(a) Работа [5]



(b) Наши результаты

Рис. 2: Зависимость действия от шага кулинга для отдельных конфигураций. По горизонтальной оси отложены шаги кулинга, по вертикальной —  $S/\beta$ . Плато на графиках соответствуют инстантонным решениям.

В континууме для всех конфигураций, у которых поле стремится к нулю на бесконечности, топологический заряд — целое число. Это связано с существованием инстантонов, нетривиальных решений уравнений поля в евклидовом времени. Однако на практике топологический заряд становится целым только после применения сглаживающих процедур, потому что конфигурации, сгенерированные с помощью вильсоновского действия, получаются сильно осциллирующими.

Интерес представляет величина топологической восприимчивости  $\chi$ , определённая как

$$\chi = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} \quad (4.11)$$

#### 4.2.1 Решётка $6^3 \times 6$

Работа [5] — одна из первых, где кулинг применяется для изучения топологических свойств вакуума. В этой работе проводятся измерения действия и топологического заряда на 40 конфигурациях  $6^3 \times 6$ ,  $\beta = 2.81$  при шагах кулинга от 0 до 80. Типичные зависимости действия от шага кулинга показаны на рисунке 2а. На отдельных графиках наблюдаются характерные плато, причём значения действия на этих плато пропорциональны  $\approx 2\pi^2\beta$  — действию инстантона. Соответственно, эти конфигурации можно интерпретировать как одно- или многоинстантонные решения.

Для проверки корректности разработанной программы результаты [5] были воспроизведены, а именно, были сгенерированы 40 конфигураций на такой же решётке, и для них построены точно такие же зависимости. Как и ожидалось, они полностью аналогичны [5], см. рисунок 2b.

Чтобы проследить, каким образом градиентный спуск приводит к выделению то-

пологических секторов, удобно строить гистограммы распределения топологического заряда. Оказывается, что с ростом времени спуска заряд, хотя и не становится полностью целочисленным, приобретает острые пики в распределении, близкие к целым числам. Для решётки  $6^3 \times 6$  и 20 шагов кулинга такая гистограмма показана на рис. 3.

#### 4.2.2 Решётка $32^3 \times 16$

Для решётки  $32^3 \times 16$ ,  $\beta = 2.81$  построены гистограммы распределения топологического заряда для разных времён спуска (рис. 4), а также график топологической восприимчивости в зависимости от времени спуска (рис. 5). Видно, что топологические сектора разделяются при  $t \sim 0.5$ , а при больших  $t$  распределение состоит из острых пиков.

Плато в графике топологической восприимчивости соответствует физическому значению  $\chi$ . Топологическая восприимчивость здесь равна  $156 \pm 6$ , что разумно согласуется с работой [7], где для  $T/T_c = 1.2$  получено значение равное  $\approx 180$  MeV.

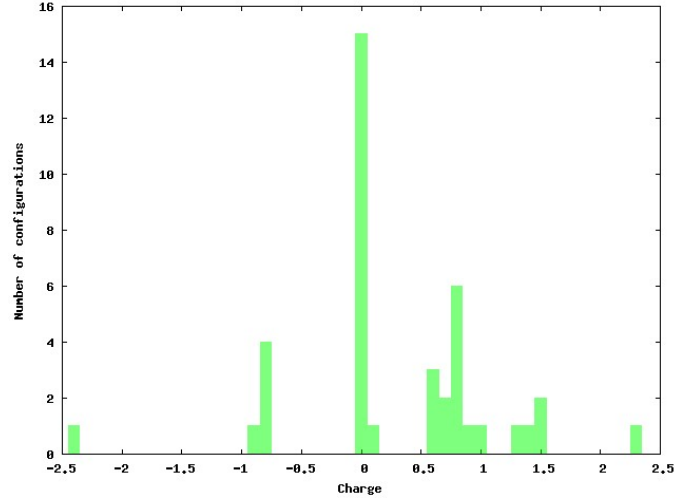


Рис. 3: Гистограмма распределения топологического заряда на решётке  $6^3 \times 6$  для  $n_c = 20$

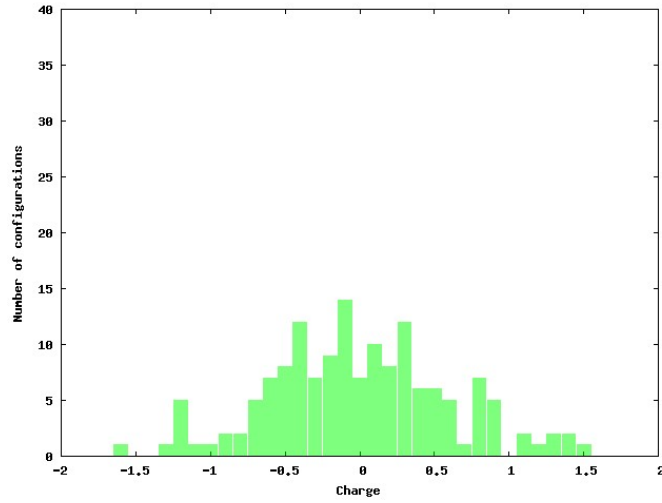
### 4.3 Сравнение кулинга и градиентного спуска

Кулинг и градиентный спуск сравнивались в зависимостях среднего действия на решётке  $6^3 \times 6$  (см. рис. 6). Как видно, графики отличаются друг от друга незначительно.

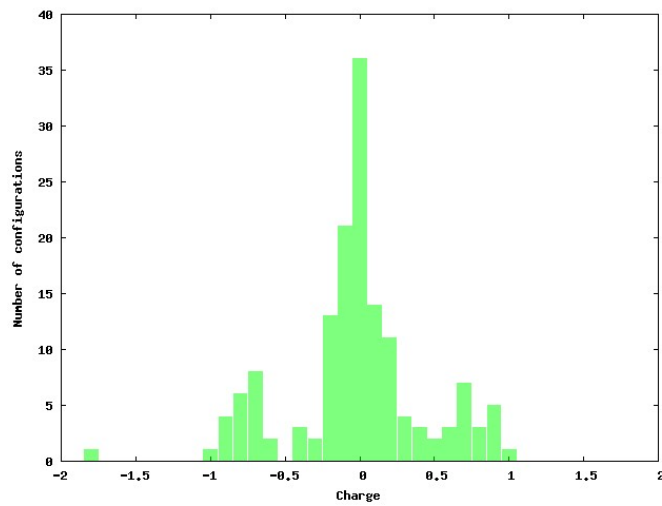
На рисунке 5, помимо зависимости  $\chi$  от  $3t$ , есть зависимость  $\chi$  от шага кулинга  $n_c$ . Эти две зависимости, как и утверждается в [1], почти неразличимы.

### 4.4 Определение масштаба

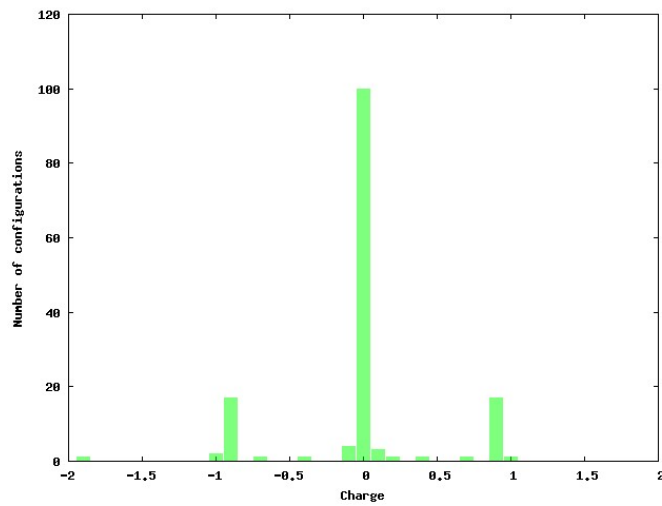
Одна из проблем, которые постоянно возникают в решёточных вычислениях — определение размера решётки в физических единицах. Дело в том, что в функцию  $\beta(a)$



(a)  $t = 0.3$



(b)  $t = 0.6$



(c)  $t = 1.5$

Рис. 4: Гистограммы распределения топологического заряда для  $t = 0.3, 0.6, 1.5$  на решётке  $32^3 \times 16$

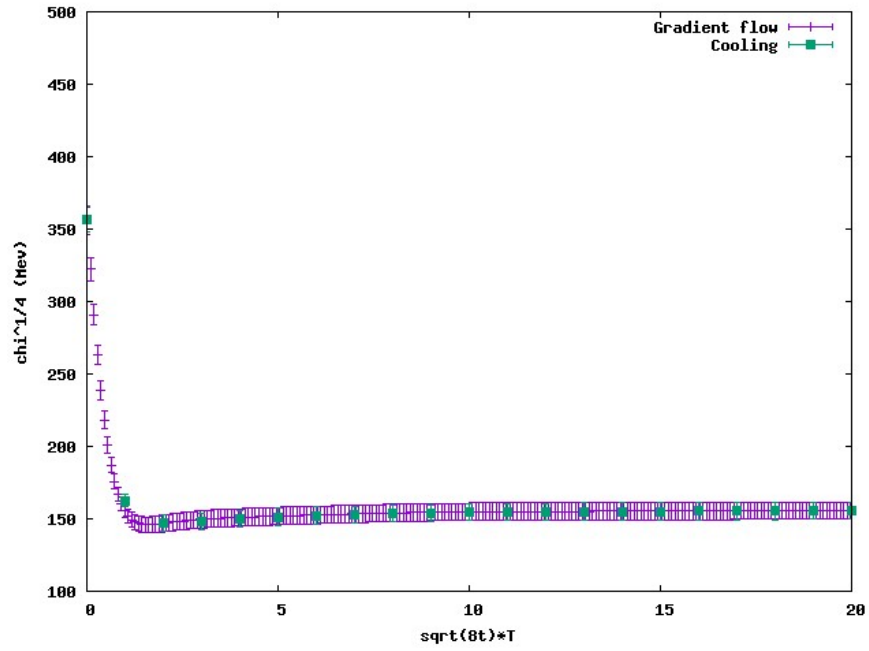


Рис. 5: Зависимость топологической восприимчивости от  $t$

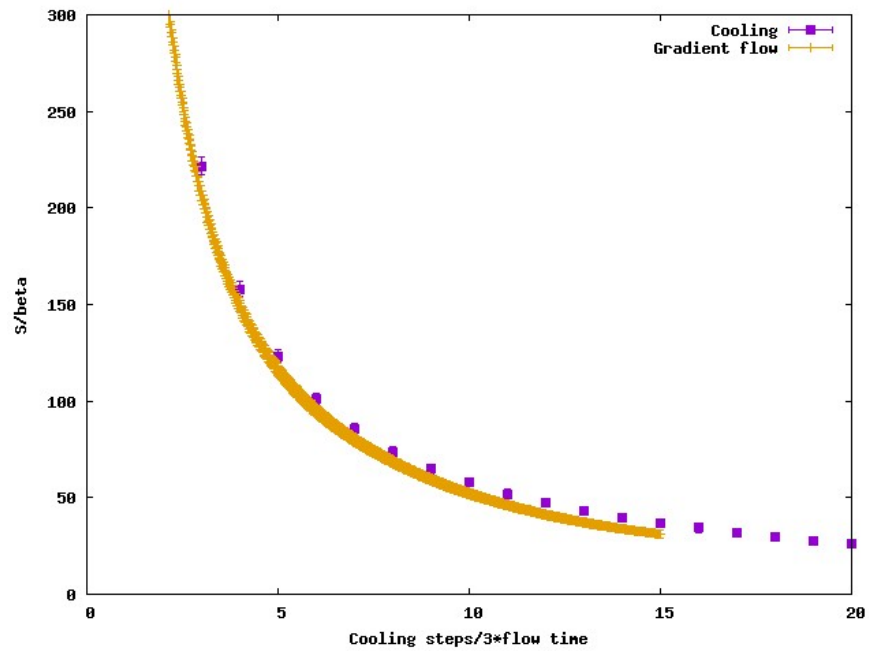
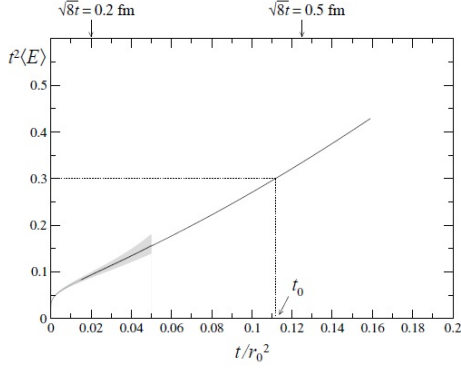
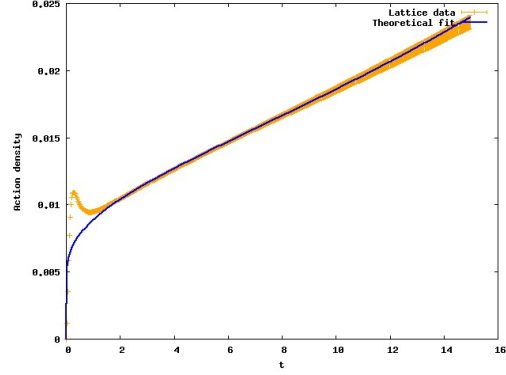


Рис. 6: Сравнение зависимостей действия на решётке  $6^3 \times 6$  от кулинга и градиентного спуска



(a) Работа [1]



(b) Наши результаты

Рис. 7: Зависимость  $t^2 E$ , где  $E$  — действие, от  $t$ . На левом рисунке сплошная чёрная линия — решёточная кривая, закрашенная серая — теоретическая кривая. На правом рисунке жёлтая линия — экспериментальная кривая, синяя — теоретический фит.

входит произвольный размерный параметр (масштаб)  $\Lambda$ , который можно определить только из сравнения с экспериментом.  $\Lambda$  входит и в выражение для бегущей константы связи  $\alpha(q)$ .

$$\alpha(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)} \left( 1 - \frac{2\beta_1 \log\left(\log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right)}{\beta_0^2 \log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)} + O\left(\frac{1}{\log^2\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}\right) \right)$$

Обычно для определения масштаба на решётке измеряют натяжение струны, а затем приравнивают его физическому значению. Оказывается, градиентный спуск даёт другой способ определения масштаба. А именно, для оператора  $E = \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu}$  можно получить выражение во втором порядке теории возмущений:

$$E = \frac{3(N^2 - 1)}{32\pi t^2} \alpha(q) (1 + k_1 \alpha(q) + O(\alpha^2)) \quad (4.12)$$

$$k_1 = \frac{N}{4\pi} \left( \frac{11}{3} \gamma_E + \frac{52}{9} - 3 \log 3 \right)$$

С другой стороны,  $E$  можно вычислить на решётке. Фитируя вычисленную зависимость формулой 4.12, можно определить масштаб  $\Lambda$  в решёточных единицах.

В [1], см. рис.7, показано, что зависимость действия от  $t$  при малых  $t$  прекрасно описывается формулой 4.12. В данной работе действие тоже хорошо фитируется этой формулой.  $\Lambda$  получается равной 202 MeV.



## 4.5 Плотность энтропии

Для тензора  $U_{\mu\nu} = G_{\mu\rho}^a G_{\nu\rho}^a - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}G_{\rho\sigma}$  при малых  $t$  справедливо выражение [6]

$$U_{\mu\nu}(t, x) = \alpha_U(t) \left[ T_{\mu\nu}^R - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}T_{\rho\rho}^R \right] + O(t), \quad (4.13)$$

$$\alpha_U(t) = \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 [1 + 2b_0\bar{s}_1\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2 + O(\bar{g}^4)],$$

$$\bar{s}_1 = \frac{7}{16} + \frac{1}{2}\gamma_E - \log 2,$$

$$b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} N_c,$$

где  $\bar{g}(q)$  — бегущая константа связи в схеме MS, а в первом равенстве опущены операторы размерности 6 и выше. Легко получить, что энтропия будет выражаться как

$$s/T = \frac{1}{\alpha_U(t)} \left( -\langle U_{00} \rangle + \frac{1}{3} \sum_k \langle U_{kk} \rangle \right) \quad (4.14)$$

Правая часть последнего равенства конечна и не зависит от регуляризации. Поэтому можно использовать решёточную регуляризацию; тогда истинная энтропия — предел правой части при  $t \rightarrow 0$ , причём на решётке  $\sqrt{8t}$  должно быть больше  $2a$ .

Этот метод был применён в работе [6]. На рисунке 8а — зависимость энтропии от  $t$  из этой работы. В настоящей работе построен аналогичный график (рис. 8b) с использованием определённой выше константы  $\Lambda$ . В соответствии с рассуждениями параграфа 3.1.2 нас интересует область  $\sqrt{8t} > 2a$ , то есть  $\sqrt{8t}T > 0.125$ . Там наблюдается плато, из которого видно, что  $s/T^3 = 1.4 \pm 0.1$ . Такой же результат ( $s/T^3 = 1.4$ ) можно получить из [8], где энтропия вычисляется другим способом.

## 5 К нахождению вязкости

Для определения вязкости должна использоваться формула Кубо, связывающая вязкость с мнимой частью запаздывающего коррелятора тензора энергии-импульса. Эта мнимая часть называется спектральной плотностью:

$$\rho(\omega, q) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle T_{12} T_{12} \rangle_{\text{ret}}(\omega, q) \quad (5.15)$$

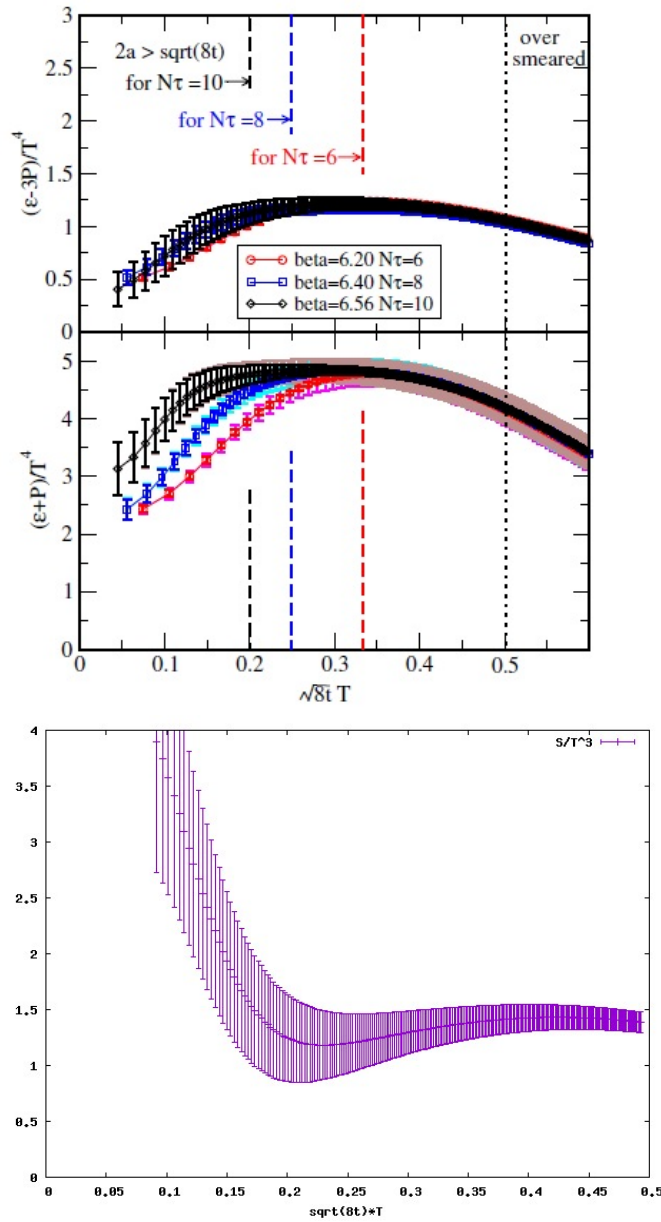


Рис. 8: На верхнем рисунке — зависимости  $\frac{e-3p}{T^4}$  и  $\frac{e+p}{T^4}$ , на нижнем — зависимость  $\frac{s}{T^3}$  от  $\sqrt{8t} \cdot T$

На решётке вычисляется аналитическое продолжение 5.15:

$$p_0 \rightarrow i\omega$$

$$C_{12,12}(x_0, p) = \beta^5 \int d^3x e^{ipx} \langle T_{12}(0) T_{12}(x_0, x) \rangle$$

$C_{12,12}$  связано со спектральной плотностью соотношением

$$C_{12,12} = \int d\omega \rho(\omega) \frac{\cosh \omega(\frac{1}{2}\beta - x_0)}{\sinh \frac{\beta\omega}{2}} \quad (5.16)$$

Вязкость получается из спектральной плотности как

$$\eta = \pi \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho(\omega)}{\omega}$$

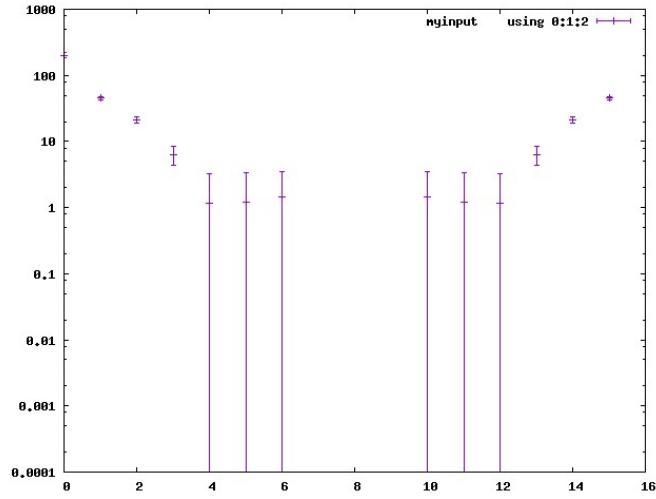
Спектральная плотность может быть определена при больших  $\omega$  по теории возмущений. Результат отказывается таким:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{10} \frac{N_c^2 - 1}{(4\pi)^2} \frac{\omega^4}{\tanh \frac{1}{4}\omega\beta}$$

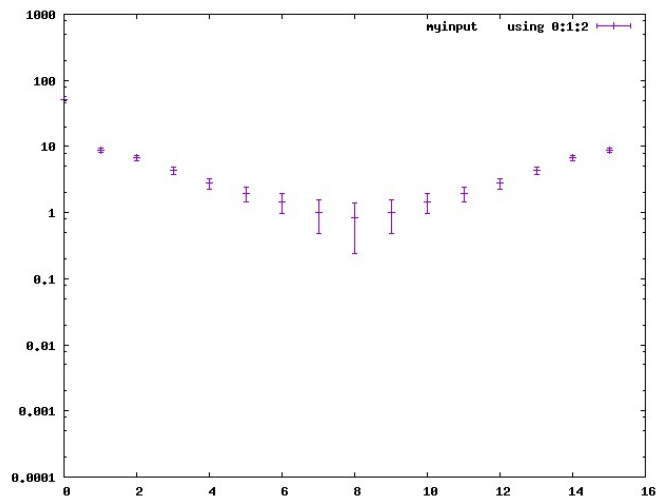
Про поведение  $\rho$  при низких энергиях а priori ничего не известно. Вообще говоря, для определения  $\rho$  остаётся только решать интегральное уравнение 5.16. Однако есть надежда, что под действием градиентного спуска вид функции  $\rho(\omega)$  упростится, и можно будет извлечь вязкость. Более подробное исследование будет проведено в следующих работах. Некоторые корреляторы тензора энергии-импульса представлены на рисунке 9.

## 6 Заключение

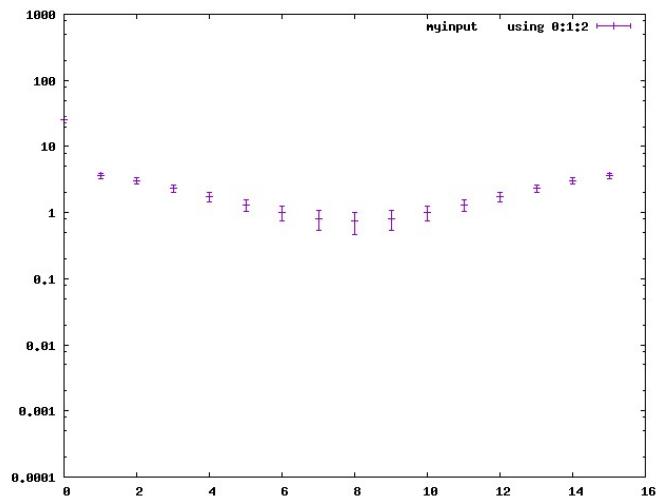
Подводя итоги, можно сказать, что теперь мы готовы к решению более серьёзных задач, связанных с градиентным спуском. Написанная программа, выполняющая градиентный спуск, отлажена, и получены результаты, согласующиеся с общеизвестными. В дальнейшем хотелось бы подробно исследовать влияние градиентного спуска на корреляторы тензора энергии-импульса.



(a)  $t = 0.9$



(b)  $t = 2.25$



(c)  $t = 3.6$

Рис. 9: Корреляторы тензора энергии-импульса для разных значений  $t$

## Список литературы

- [1] M. Lüscher, “Properties and uses of Wilson flow in lattice QCD,” [arXiv:1006.4518[hep-lat] ].
- [2] I. Montvay, G. Muenster, “Quantum fields on a lattice”
- [3] M. Creutz. “Quarks, gluons and lattices”
- [4] C. Bonati and M. D’Elia, “Comparison of the gradient flow with cooling in  $SU(3)$  pure gauge theory,” Phys. Rev. D **89** (2014) 10, 105005 [arXiv:1401.2441 [hep-lat]].
- [5] E. M. Ilgenfritz, M. L. Laursen, G. Schierholz, M. Muller-Preussker and H. Schiller, “First Evidence for the Existence of Instantons in the Quantized  $SU(2)$  Lattice Vacuum,” Nucl. Phys. B **268** (1986) 693.
- [6] M. Asakawa *et al.* [FlowQCD Collaboration], “Thermodynamics of  $SU(3)$  gauge theory from gradient flow on the lattice,” Phys. Rev. D **90** (2014) 1, 011501 [arXiv:1312.7492 [hep-lat]].
- [7] V. G. Bornyakov, E. V. Luschevskaya, S. M. Morozov, M. I. Polikarpov, E.-M. Ilgenfritz and M. Muller-Preussker, “The Topological structure of  $SU(2)$  gluodynamics at  $T > 0$ : An Analysis using the Symanzik action and Neuberger overlap fermions,” Phys. Rev. D **79** (2009) 054505 [arXiv:0807.1980 [hep-lat]].
- [8] J. Engels, F. Karsch and K. Redlich, “Scaling properties of the energy density in  $SU(2)$  lattice gauge theory,” Nucl. Phys. B **435** (1995) 295 [hep-lat/9408009].