

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики
Кафедра Теоретической Астрофизики и Квантовой Теории Поля

Выпускная квалификационная работа на степень магистра

Аномальное смешивание тензорных токов

Выполнила студент 6 курса Аристова А.В.
Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Горский А.С.

Москва, 2015

Содержание

1	Введение	1
2	Киральный магнитный эффект: условия для возникновения	2
3	Киральный магнитный эффект: аксиальная аномалия и энергетический баланс	3
4	Киральный магнитный эффект: аксион и эффективное действие	4
5	Киральный магнитный эффект: киральная кинетическая теория	6
6	Киральная магнитная волна	10
7	Киральный вращательный эффект и киральная вращательная волна	12
8	Аналог кирального магнитного эффекта для тензорного поля	12

1 Введение

В последние годы большой интерес вызывают эффекты, связанные с макроскопическими проявлениями квантовой теории поля. К таким эффектам относятся: киральный вращательный эффект [12], киральный магнитный эффект ([1],[2],[7]), эффект разделения кирального заряда [8], киральная магнитная волна [3], киральная вращательная волна [6]. Обычно в основе каждого из таких эффектов лежит треугольная диаграмма, которая приводит к возникновению новых членов в эффективном лагранжиане во внешних полях. И каждый из этих эффектов связан с определённой аномалией. Например, киральный магнитный эффект - с аксиальной аномалией, киральный вращательный эффект - с гравитационной и т.д.

Все эти эффекты могут так или иначе помочь изучить свойства КХД. Киральный магнитный эффект представляет в этом качестве особую ценность, поскольку одним из условий его возникновения является наличие кирального хипотенциала, создаваемого переходами между топологически различными состояниями. Кроме того, тот факт, что выражение для киральной аномалии не зависит от петлевых поправок, приводит к тому, что выражение для кирального магнитного эффекта верно как в режиме слабой, так и в режиме сильной связи (см. [14]).

Данная работа содержит обзор некоторых подходов к изучению эффектов такого типа, а также вычисления для аналогичного эффекта во внешнем тензорном поле.

2 Киральный магнитный эффект: условия для возникновения

Киральный магнитный эффект — это эффект возникновения электрического тока, параллельного магнитному полю. Такой эффект может наблюдаться в кварк-глюонной плазме в сильных магнитных полях. Для его возникновения необходимо наличие эффективного кирального химпотенциала; его возникновение может быть связано с топологическим бэкграундом (например, со сфалеронами - глюонными конфигурациями, которые являются аналогами инстантонов, только при высоких температурах - когда энергии становится достаточно для "перепрыгивания" через потенциальный барьер, а не туннелирования, см. [15]), а сама плазма должна находиться в состоянии деконфайнмента. [1] Наличие кирального химпотенциала означает присутствие в плотности лагранжиана дополнительного слагаемого вида $\mu_5 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi$. Такого слагаемое приводит к наличию ненулевой плотности правых частиц и левых античастиц. В этом легко убедиться следующим образом: рассмотрим спектр уравнения Дирака (для простоты обозначим направление импульса решения за ось z). Тогда спектр имеет следующий вид (индекс R или L обозначают спиральность соответствующего решения, индекс +/- — то, положительна или отрицательна проекция спина на ось z):

$$\omega_{R\pm} = \pm p_z - \mu_5 \quad (1)$$

$$\omega_{L\pm} = \mp p_z + \mu_5 \quad (2)$$

Это и означает, что в наименьшем энергетическом состоянии имеются правые частицы и левые античастицы с импульсами, меньшими по модулю чем μ_5 . Уже на этом уровне понимания мы можем привести простейшее объяснение причин возникновения кирального магнитного эффекта. Будем для простоты считать, что речь идёт о положительно заряженных частицах, а магнитное поле направлено вдоль оси z . Тогда за счёт взаимодействия магнитного момента со внешним полем возникает дополнительное слагаемое в гамильтониане, пропорциональное с положительным коэффициентом $-\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$. И тогда итоговое выражение для спектра приобретает вид:

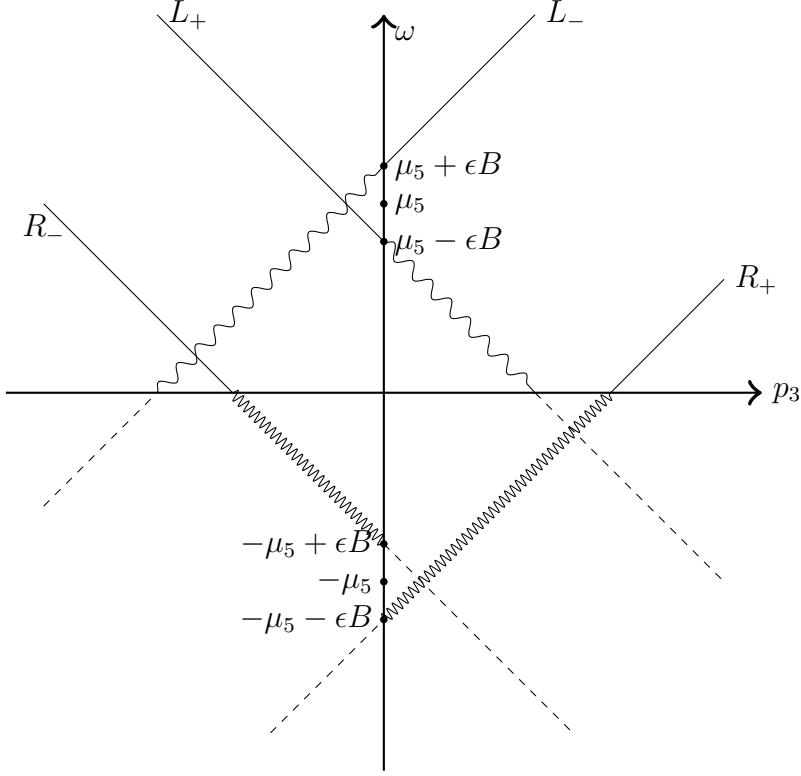
$$\omega_{R+} = p_z - \mu_5 - \epsilon B \quad (3)$$

$$\omega_{R-} = -p_z - \mu_5 + \epsilon B \quad (4)$$

$$\omega_{L+} = -p_z - \mu_5 - \epsilon B \quad (5)$$

$$\omega_{L-} = p_z - \mu_5 + \epsilon B \quad (6)$$

Отсюда видно, что в основном состоянии параллельно B движется больше частиц, чем античастиц: имеются античастицы с импульсами только от 0 до $\mu_5 - \epsilon B$, а частицы — с импульсами от 0 до $\mu_5 + \epsilon B$ (см. рисунок; волнистыми линиями обозначены присутствующие в основном состоянии античастицы, угловатыми линиями — частицы). По аналогичной причине антипараллельно B движется больше античастиц, чем частиц. Легко видеть, что это означает возникновение электрического тока вдоль B .



Обсудим разные способы получить точное выражение для кирального магнитного эффекта.

3 Киральный магнитный эффект: аксиальная аномалия и энергетический баланс

Простейший (но оставляющий много вопросов) способ получить выражение для кирального магнитного эффекта состоит в следующем [1]. Представим, что наша система находится во внешних магнитном и электрическом полях. Обозначим e заряд фермиона. Тогда по формуле для аксиальной аномалии:

$$\frac{d^4 N_5}{dt d^3 x} = \frac{e^2}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (7)$$

Заметим, что в присутствии кирального химпотенциала превращение левых частиц в правые, вызванное аномалией, становится энергетически не бесплатным: на превращение одной левой частицы в правую требуется $\mu_R - \mu_L = 2\mu_5$ энергии. Это означает «поглощение» энергии со следующей скоростью на единицу объёма:

$$\frac{d^4 W}{dt d^3 x} = \frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (8)$$

Возникает закономерный вопрос: откуда берётся эта энергия? Естественный ответ на этот вопрос — это потенциальная энергия движущихся в направлении меньшего потенциала электрических зарядов. Приравнивая два выражения для энергии, получаем:

$$\frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (9)$$

Поскольку это равенство выполняется при всех значениях E , мы получаем выражение для плотности электрического тока:

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} \mathbf{V} \quad (10)$$

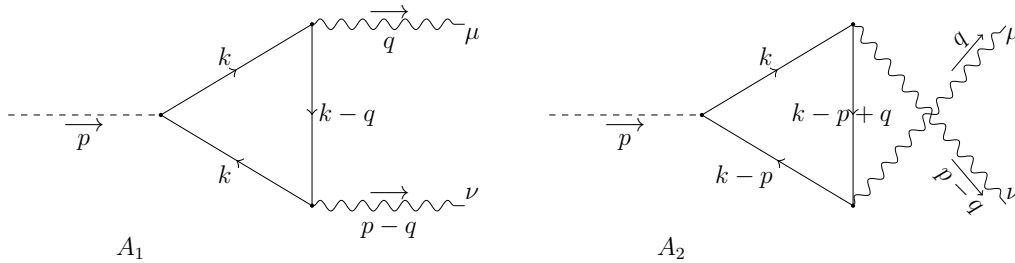
Мы видим, что за возникновение кирального магнитного эффекта ответственна как киральная аномалия КХД, так и киральная аномалия в электромагнетизме: первая приводит к возникновению μ_5 , а вторая — к возникновению тока.

4 Киральный магнитный эффект: аксион и эффективное действие

Существует ещё один изящный способ получения ответа для кирального магнитного эффекта, связывающий его с результатами Голдстоуна и Вильчека. (И показывающий независимость эффекта от массы фермиона). Идея состоит в следующем: наличие кирального хипотенциала можно воспринимать как следствие наличия в плотности лагранжиана взаимодействия с аксионным полем.

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi} [i(\partial_\mu - ieA_\mu)\gamma^\mu - me^{ia(x)\gamma^5}] \psi \quad (11)$$

В такой ситуации $\mu_5 = \partial_t a$. Поэтому мы можем получить интересующий нас результат из теории взаимодействия фермионов с аксионом и электромагнитным полем. Найдём аномальный лагранжиан для системы, содержащей фермион, во внешних электромагнитном и аксионном полях. [9] Для этого нам нужно понять, как устроена эффективная "тройная вершина". В лидирующем порядке вклад дают две треугольные диаграммы.



Введём обозначения: p — импульс аксиона, q — импульс фотона с поляризацией μ , $p-q$ — импульс фотона с поляризацией ν . Тогда две интересующие нас амплитуды

равны (множитель (-1) — стандартный множитель для фермионной петли):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \left(i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} i e \gamma_\mu i \frac{\not{k} - \not{q} + m}{(k - q)^2 - m^2 + i\epsilon} i e \gamma_\nu i \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k - p)^2 - m^2 + i\epsilon} (-im) \gamma_5 \right) = \\
&= -e^2 m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{(\not{k} + m) \gamma_\mu (\not{k} - \not{q} + m) \gamma_\nu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma_5}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k - q)^2 - m^2 + i\epsilon)((k - p)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$A_2 = -e^2 m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{(\not{k} + m) \gamma_\nu (\not{k} - \not{p} + \not{q} + m) \gamma_\mu (\not{k} - \not{p} + m) \gamma_5}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k - p + q)^2 - m^2 + i\epsilon)((k - p)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (13)$$

Вычислим следы от числителей этих выражений. Используем тот факт, что

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5) = -4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (14)$$

а вклады от произведений с другим количеством обычных гамма матриц равны нулю. Поэтому числитель в A_1 равен:

$$\begin{aligned}
&-e^2 m^2 (-4i) [k^\alpha (k - q)^\beta \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} + k^\alpha (k - p)^\delta \epsilon_{\alpha\mu\nu\delta} + (k - q)^\beta (k - p)^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta}] = \\
&= 4ie^2 m^2 [-k^\alpha q^\beta \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} - k^\alpha p^\delta \epsilon_{\alpha\mu\nu\delta} - k^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} + q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} - k^\delta q^\beta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta}] = 4ie^2 m^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \quad (15)
\end{aligned}$$

Числитель в A_2 :

$$-e^2 m^2 (-4i) [k^\alpha (k - p + q)^\beta \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} + k^\alpha (k - p)^\delta \epsilon_{\alpha\mu\nu\delta} + (k - p + q)^\beta (k - p)^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta}] = 4ie^2 m^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \quad (16)$$

Теперь, если бы мы были заинтересованы в точных выражениях для A_1 и A_2 , нам нужно бы было ввести фейнмановские параметры, проинтегрировать по новому импульсу l , а затем и по фейнмановским параметрам. Но наша задача проще. Поскольку нас интересует эффективный лагранжин системы в постоянном электромагнитном поле и при постоянном киральном хипотенциале, то из всего разложения $A_1 + A_2$ в ряд по импульсам нам нужен только член, пропорциональный pq . Это значит, что интеграл нам нужно взять в нулевом порядке по p и q . После введения фейнмановских параметров новый импульс обозначим l .

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4ie^2 m^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \int \frac{2d^4l}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3 (2\pi)^4} = \\
&= 4ie^2 m^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \frac{-2i}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{\Delta} = \frac{e^2 m^2}{4\pi^2} q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{\Delta} \quad (17)
\end{aligned}$$

Поскольку $\Delta = m^2 + o(1)$, интеграл по y и z даёт в интересующем нас порядке множитель $\frac{1}{m^2}$, и мы получаем следующий результат:

$$A_1 = \frac{e^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta}}{4\pi^2} \quad (18)$$

$$A_1 + A_2 = \frac{e^2 q^\beta p^\delta \epsilon_{\mu\beta\nu\delta}}{2\pi^2} \quad (19)$$

Отсюда мы получаем, что полное выражение для амплитуды два фотона — аксион имеет вид:

$$\frac{-e^2}{2\pi^2}(-iq^\beta)(-ip^\delta)\varepsilon^{*\mu}(q)\varepsilon^{*\nu}(p-q)\epsilon_{\mu\beta\nu\delta} \quad (20)$$

И отсюда мы находим, что аномальная плотность лагранжиана равна:

$$\mathcal{L}_{anom} = \frac{e^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}A_\rho\partial_\sigma a\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (21)$$

Вычислим ток, вызванный наличием этой добавки. Заметим, что:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{anom}}{\delta A_\rho} = \frac{e^2}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\sigma a \quad (22)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{anom}}{\delta(\partial_\mu A_\rho)} = \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\rho\alpha\beta}A_\alpha\partial_\beta a \quad (23)$$

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_{anom}}{\delta(\partial_\mu A_\rho)} = \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\rho\alpha\beta}\partial_\mu A_\alpha\partial_\beta a + \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\rho\alpha\beta}A_\alpha\partial_\mu\partial_\beta a = \frac{e^2}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\rho\alpha\beta}F_{\mu\alpha}\partial_\beta a \quad (24)$$

Поэтому полная поправка к уравнениям движения равна:

$$\frac{e^2}{8\pi^2}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\sigma a - \epsilon^{\mu\rho\alpha\beta}F_{\mu\alpha}\partial_\beta a) = \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\sigma a \quad (25)$$

И «уравнения Максвелла» принимают вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\sigma a = j^\rho \quad (26)$$

Т.к. речь идёт о системе в постоянном внешнем поле, они дают нам выражение для аномального тока:

$$j^\rho = \frac{e^2}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\partial_\sigma a \quad (27)$$

В данном случае $\partial_0 a = \mu_5$, и, положив B направленным вдоль оси z , мы получаем уже привычное нам выражение:

$$j^3 = \frac{e^2}{4\pi^2}2\epsilon^{1230}F_{12}\partial_0 a = \frac{e^2\mu_5}{2\pi^2}B \quad (28)$$

5 Киральный магнитный эффект: киральная кинетическая теория

Подход, позволяющий обсуждать подобные эффекты в отсутствие термодинамического равновесия — киральная кинетическая теория. [4] Особенный интерес он представляет ещё и потому, что в нём киральный магнитный эффект возникает благодаря наличию кривизны Берри для вейлевских фермионов в импульсном пространстве, что

указывает на наличие глубокой связи между аксиальной аномалией и монополюм Берри (про связь между аксиальной аномалией и монополюм Берри см. [4], [16]). Мы будем работать с кинетическим уравнением

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = C[f] \quad (29)$$

Здесь $f(t, x, p)$ — это функция распределения. Это уравнение описывает режим, в котором столкновения редки, а между столкновениями движение можно считать классическим. В дальнейшем столкновения нас вообще не будут интересовать и мы будем считать, что $C[f] = 0$.

Рассмотрим гамильтониан для безмассовой вейлевской частицы вида:

$$H = \sigma \mathbf{p} \quad (30)$$

Для получения классических уравнений движения воспользуемся формализмом фейнмановского интеграла. Запишем амплитуду перехода из состояния со спином i в состояние со спином f за некоторое время.

$$\langle f | e^{iH(t_f - t_i)} | i \rangle = \left[\int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} - \sigma \mathbf{p}) dt \right\} \right]_{fi} \quad (31)$$

Эта запись подразумевает, что мы берём упорядоченное вдоль пути произведение матриц $\exp\{-i\sigma \mathbf{p} \Delta t\}$ и интегрируем по всем путям в фазовом пространстве $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$. Безмассовые частицы, которые мы описываем, имеют определённое значение спиральности (состояниям с противоположной спиральностью соответствуют античастицы). Поэтому чтобы понять, как устроено движение частиц, нам нужно получить матрицу перехода в спиральном базисе.

При отсутствии взаимодействия этих частиц со внешними полями оператор эволюции диагонален в спиральном базисе (и из диагональных компонент без труда получаем действие, описывающее поведение частиц и античастиц — состояний с положительной и отрицательной спиральностью соответственно). Для того, чтобы переходить к классическому пределу в присутствии внешних полей, нужно, чтобы недиагональные компоненты под экспонентой были малы по сравнению с диагональными. Например, при наличии магнитного поля это означает, что $e|\mathbf{B}| \ll |\mathbf{p}|^2$.

Мы можем произвести переход к спиральному базису в каждой точке с помощью унитарной матрицы $\mathbf{V}_{\mathbf{p}}$, такой, что:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{p}}^\dagger \sigma \mathbf{p} \mathbf{V}_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}| \sigma_3 \quad (32)$$

Если импульсы в два соседних момента времени t_1 и t_2 равны \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 соответственно, то мы можем вставить в наше выражение в фейнмановском интеграле единичные матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned} \dots \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \exp\{-i\sigma \mathbf{p}_2 \Delta t\} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \times \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \exp\{-i\sigma \mathbf{p}_1 \Delta t\} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots = \\ = \dots \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2} \exp\{-i|\mathbf{p}_2| \sigma_3 \Delta t\} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} \exp\{-i|\mathbf{p}_1| \sigma_3 \Delta t\} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Если разница между импульсами $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ мала, то мы можем записать возникающее между экспонентами унитарное преобразование в следующем виде:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} = \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger (\mathbf{V}_{\mathbf{p}_2} + \mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} - \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}) = 1 + \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}^\dagger (\mathbf{V}_{\mathbf{p}_1} - \mathbf{V}_{\mathbf{p}_2}) \approx 1 - \Delta \mathbf{p} \mathbf{V}_{\mathbf{p}}^\dagger \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{V}_{\mathbf{p}} \approx \exp(-i \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}} \Delta \mathbf{p}) \quad (34)$$

где $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}}$ — это эрмитов оператор 2×2 вида:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}} = -i \mathbf{V}_{\mathbf{p}}^\dagger \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{V}_{\mathbf{p}} \quad (35)$$

Используя полученный результат, мы можем переписать интересующую нас амплитуду перехода в следующем виде:

$$\langle f | e^{iH(t_f - t_i)} | i \rangle = \left[\mathbf{V}_{\mathbf{p}_f} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} - |\mathbf{p}| \sigma_3 - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}}) dt \right\} \mathbf{V}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \right]_{fi} \quad (36)$$

Для дальнейших вычислений нам нужно понять, что из себя представляет набор матриц $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}}$. Если сравнить уравнение на $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}}$ с определением связности Берри в импульсном пространстве (где мы рассматриваем импульс как параметр, от которого зависят собственные состояния гамильтониана), то несложно заметить, что:

$$\hat{a}_{\mathbf{p},i} = \begin{pmatrix} -A_{+,i} & 0 \\ 0 & -A_{-,i} \end{pmatrix} \quad (37)$$

где индекс i нумерует пространственные координаты, \mathbf{A}_{\pm} — связность Берри для состояний с положительной/отрицательной спиральностью. Введём обозначение $[\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}}]_{11} \equiv \mathbf{a}_{\mathbf{p}}$. Тогда, используя хорошо известное выражение для связности Берри в импульсном пространстве, получаем:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{p}} = -\mathbf{A}_+ = \frac{1}{2|p|(|p| - p_3)} (p_2, -p_1, 0) \quad (38)$$

$$\mathbf{b} \equiv \nabla_{\mathbf{p}} \times \mathbf{a}_{\mathbf{p}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2|\mathbf{p}|^2}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (39)$$

Этот результат означает, что для действие для частицы в электромагнитном поле приобретает следующий вид:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} + e \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} - e \Phi - |p| - \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}}) dt \quad (40)$$

где e — заряд частицы.

Проварьрируем это действие по $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$:

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} [(\delta \mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{p} \cdot (\delta \dot{\mathbf{x}}) + e \mathbf{A} \cdot (\delta \dot{\mathbf{x}}) + e \dot{\mathbf{x}} \partial_i \mathbf{A} \cdot (\delta x_i) - e \partial_i \Phi \cdot (\delta x_i) - \frac{\mathbf{p}}{|p|} \cdot (\delta \mathbf{p}) - \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \cdot (\delta \dot{\mathbf{p}}) - \dot{\mathbf{p}} \partial_i \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \cdot (\delta p_i)] dt \quad (41)$$

После интегрирования по частям получаем:

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} (\delta p_i)(\dot{x}_i - \hat{p}_i - \dot{\mathbf{p}}\partial_i \mathbf{a}_{\mathbf{p}})dt + \int_{t_i}^{t_f} (\delta x_i)(-\dot{p}_i - e\dot{A}_i - e\dot{\mathbf{x}}\partial_i \mathbf{A} - e\partial_i \Phi)dt \quad (42)$$

Отсюда легко находим уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{b} \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -e\dot{\mathbf{A}} - e\nabla\Phi + e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \quad (44)$$

Видно, что в отсутствии внешнего электромагнитного поля все эффекты, связанные с наличием фазы Берри, пропадают, поскольку $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Решая уравнения движения, получаем:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}} + e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{E} \times \mathbf{b} - e\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{B}) + e\mathbf{B}(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \quad (45)$$

Отсюда окончательно находим:

$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{E} \times \mathbf{b} + e\mathbf{B}(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \quad (46)$$

$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + e\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} + e^2\mathbf{b}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad (47)$$

где $\sqrt{G} = 1 + e\mathbf{b}\mathbf{B}$. Подставляя эти уравнения в (29) можно найти окончательное уравнение на функцию распределения.

Воспользуемся этими результатами для получения выражения для кирального магнитного эффекта.

Естественным было бы начать с написания закона сохранения числа частиц (теорема Лиувилля). Однако здесь нам стоит быть аккуратными: для данной системы координаты x_i и p_i не являются каноническими, и фазовый объём $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}/(2\pi^3)$ не сохраняется.

Более «правильным» объёмом в данной ситуации является фазовый объём $\sqrt{G}d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}/(2\pi^3)$. Можно показать [5] (учитывая уравнения Максвелла), что он удовлетворяет уравнению Лиувилля с источником:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{G} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\sqrt{G}\dot{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\sqrt{G}\dot{\mathbf{p}}) = 2\pi e^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \delta^3(\mathbf{p}) \quad (48)$$

Источник в правой части возникает из-за монополя Берри: $\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b} = 2\pi \delta^3(\mathbf{p})$.

В результате выражение для плотности электрического тока имеет вид:

$$\mathbf{j} = e \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{G} f \dot{\mathbf{x}} \quad (49)$$

Подставляя сюда уравнение на $\dot{\mathbf{x}}$, получаем:

$$\mathbf{j} = e \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \hat{\mathbf{p}} + e^2 \mathbf{E} \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \mathbf{b} + e^2 \mathbf{B} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b} \quad (50)$$

Первое слагаемое - это обычное выражение для тока, второе - аномальный холловский ток. Оба они обращаются в ноль для состояний с изотропным распределением

импульса, например в состоянии равновесия. А вот последнее слагаемое - это интересующее нас выражение для неравновесного КМЭ.

Посмотрим, какой ответ получится, если вычислить значение тока для распределения Ферми-Дирака при нулевой температуре. Обозначим $E = |\mathbf{p}|$. Тогда имеем:

$$\mathbf{j}_{CME} = e^2 \mathbf{V} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b} = e^2 \mathbf{V} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{f}{2|\mathbf{p}|^2} = \frac{e^2 \mathbf{V}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty f(E) dE \quad (51)$$

В интересующей нас ситуации получаем:

$$\mathbf{j}_{CME} = \frac{e^2 \mu \mathbf{V}}{(2\pi)^2} \quad (52)$$

Отличие ответа в два раза и то, что в нём фигурирует μ , не должно нас смущать, поскольку мы имеем дело с вейлевскими частицами, и в данном случае μ — это аналог μ_5 .

6 Киральная магнитная волна

Одним из интересных следствий наличия в кварк-глюонной плазме в состоянии деконфайнмента во внешнем магнитном поле кирального магнитного эффекта и эффекта разделения кирального заряда является возникновение коллективного возбуждения нового типа, которое называют киральной магнитной волной (поскольку для её возникновения необходимо приложить магнитное поле). [3] Эта волна представляет собой распространяющиеся колебания плотности электрического и аксиального заряда.

Эффект разделения кирального заряда заключается в следующем. В присутствии внешнего магнитного возникает плотность аксиального тока, равная (см. [8])

$$\mathbf{j}_5 = \frac{e^2 \mu}{2\pi^2} \mathbf{V} \quad (53)$$

Пояснить на пальцах, почему возникает волна такого типа, можно так. Предположим, что в какой-то точке возникла флуктуация плотности электрического заряда. Это колебание приведёт к локальным колебаниям плотности аксиального тока (по формуле для эффекта разделения кирального заряда). Из-за этого возникнут колебания плотности кирального заряда, которые приведут к возникновению колебаний плотности электрического тока. Они в свою очередь приведут к пространственным колебаниям плотности электрического заряда. Таким образом, возникает волна, представляющая собой взаимосвязанные колебания плотностей электрического и аксиального зарядов. Это длинноволновая гидродинамическая мода, дисперсионное соотношение для которой выглядит как дисперсионное соотношение для звуковой волны:

$$\omega = \mp v_\chi k - i D_L k^2 + \dots \quad (54)$$

Выведем уравнение для киральной магнитной волны. В данном разделе будем понимать под j не сами плотности тока, а плотности тока, поделённые на электрический заряд. Это будет удобно тем, что тогда электрический заряд не входит в выражение j^0 через плотность числа частиц. Запишем уравнения для КМЭ и ЭРКЗ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{j}_V \\ \vec{j}_A \end{pmatrix} = \frac{e\vec{B}}{2\pi^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_V \\ \mu_A \end{pmatrix} \quad (55)$$

Нас интересуют линеаризованные колебания j_A и j_V . Будем считать, что плазма нейтральна, и мы имеем дело только с малыми колебаниями вблизи нуля. Запишем линейное разложение химпотенциалов по j_A^0 и j_V^0 .

$$\begin{pmatrix} \mu_V \\ \mu_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_V}{\partial j_V^0} & \frac{\partial \mu_V}{\partial j_A^0} \\ \frac{\partial \mu_A}{\partial j_V^0} & \frac{\partial \mu_A}{\partial j_A^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_V^0 \\ j_A^0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}((j^0)^2) = \begin{pmatrix} \alpha_{VV} & \alpha_{VA} \\ \alpha_{AV} & \alpha_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_V^0 \\ j_A^0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}((j^0)^2) \quad (56)$$

Заметим, что

$$\mu_i = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial j_i^0} \quad (57)$$

где \mathcal{F} — это плотность свободной энергии. Поэтому мы получаем, что матрица, состоящая из α имеет следующий вид:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial j_i^0 \partial j_j^0} \quad (58)$$

Если мы имеем дело с \mathcal{P} -чётной КХД, то $\alpha_{AV} = \alpha_{VA} = 0$ в нейтральной плазме (т.к. при \mathcal{P} -преобразовании меняют знак). Кроме того, будем считать, что $\alpha_{VV} = \alpha_{AA} = \alpha$. (Это приближение будет хорошо работающим в кирально-симметричной фазе). Тогда мы получаем, что:

$$\begin{pmatrix} \vec{j}_V \\ \vec{j}_A \end{pmatrix} = \frac{e\vec{B}\alpha}{2\pi^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_V^0 \\ j_A^0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Диагонализуем эту систему, перейдя к киральному базису:

$$j_L^\mu \equiv \frac{1}{2}(j_V^\mu - j_A^\mu), \quad j_R^\mu \equiv \frac{1}{2}(j_V^\mu + j_A^\mu) \quad (60)$$

После чего приходим к двум независимым соотношениям:

$$\vec{j}_{L,R} = \pm \left(\frac{e\vec{B}\alpha}{2\pi^2} \right) j_{L,R}^0 \quad (61)$$

где знак зависит от киральности тока, о котором идёт речь. Полученное выражение верно в длинноволновом приближении, когда химпотенциал меняется достаточно медленно и можно пренебречь диффузией. Для того, чтобы прийти к волновому уравнению, подставим полученные уравнения в закон сохранения заряда $\partial_\mu j_{L,R}^\mu = 0$. Тогда, если поле B направлено вдоль оси z , мы получаем:

$$(\partial_0 \pm \frac{e\vec{B}\alpha}{2\pi^2} \partial_3) j_{R,L}^0 = 0 \quad (62)$$

Легко видеть, что решениями этого уравнения являются волны, скорость распространения которых равна:

$$v_\chi = \frac{eB\alpha}{2\pi^2} = \frac{eB}{4\pi^2} \left(\frac{\partial \mu_L}{\partial j_L^0} \right) = \frac{eB}{4\pi^2} \left(\frac{\partial \mu_R}{\partial j_R^0} \right) \quad (63)$$

причём колебания плотности правых частиц распространяются по направлению магнитного поля, а левые — против.

7 Киральный вращательный эффект и киральная вращательная волна

Киральные вращательные эффекты - одни из эффектов-родственников кирального магнитного эффекта и эффекта разделения кирального заряда. Заключаются они в следующем: во вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ плазме возникают электрический и аксиальный токи, параллельные $\boldsymbol{\omega}$ и равные:

$$\mathbf{J}_V = \frac{1}{\pi^2} \mu \mu_5 \boldsymbol{\omega} \quad (64)$$

$$\mathbf{J}_A = \left[\frac{1}{6} T^2 + \frac{1}{2\pi^2} (\mu^2 + \mu_5^2) \right] \boldsymbol{\omega} \quad (65)$$

Эти эффекты связаны с гравитационной аномалией (так же, как КМЭ и ЭРКЗ связана с аксиальной). Однако есть два (точнее, как минимум два) способа увидеть, что по сути это очень похожие эффекты.

Первый способ связан с треугольными диаграммами с вершинами j_5^μ , $e A_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ и $\mu_{\nu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ (для КМЭ) и j_5^μ , $\mu_{\nu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ и $\mu_{\nu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ (для КВЭ). Мы не будем приводить здесь соответствующие вычисления, однако заметим, что различие в 2 раза в числовых коэффициентах в выражениях для КМЭ и КВЭ связано с симметричностью треугольной диаграммы для КВЭ. [10]

Второй способ приходит из киральной кинетической теории. Рассмотрим кусочек жидкости, движущийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно лабораторной системы отсчёта. Тогда в линейном порядке по $\boldsymbol{\omega}$ уравнение на импульс приобретает вид (по сути нас интересует только сила Кориолиса):

$$\dot{\mathbf{p}} = 2|\mathbf{p}|\dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (66)$$

Видно, что результат воздействия этой силы эквивалентен результату воздействия «магнитного поля», равного $\mathbf{B} = \frac{2|\mathbf{p}|\boldsymbol{\omega}}{e}$. Поэтому, пользуясь результатами из раздела 5, получаем, что для распределения Ферми-Дирака: [4]

$$\mathbf{j}_{CVE} = \boldsymbol{\omega} \int \frac{2d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b} |\mathbf{p}| = \boldsymbol{\omega} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{f}{|\mathbf{p}|} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{4\pi^2} \int_0^\infty f(E) 2E dE = \frac{\mu^2 \boldsymbol{\omega}}{(2\pi)^2} \quad (67)$$

Кроме того, во вращающейся плазме возникает гидродинамическая бесщелевая мода, похожая на киральную магнитную волну - киральная вращательная волна. [6]

8 Аналог кирального магнитного эффекта для тензорного поля

Задача, которую мы хотим решить, состоит в следующем: найти и изучить эффекты, аналогичные киральному магнитному эффекту, в присутствии внешнего тензорного поля H_{abc} (потенциалом для которого является поле B_{ab}).

Для этого мы вычисляем матричный элемент для треугольной диаграммы, где вершины возникают из членов $\bar{\psi}\sigma^{ab}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_d\psi$ и $\bar{\psi}\psi$. Импульсы между вершинами равны p , $p+t$ и $p+k$. (k — это импульс поля H_{abc} , t — импульс фотона). Тогда искомым матричный элемент приобретает вид:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(\sigma^{ab}i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^d i \frac{\not{p} + \not{t} + m}{(p+t)^2 - m^2 + i\epsilon} m i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon}) \quad (68)$$

Используем технику фейнмановских параметров для знаменателя.

$$\frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+t)^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \quad (69)$$

где

$$D = x(p^2 - m^2 + i\epsilon) + y((p+t)^2 - m^2 + i\epsilon) + z((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon) = p^2 - m^2 + 2ypt + 2zpk + yt^2 + zk^2 + i\epsilon \quad (70)$$

Мы определяем новую переменную

$$q = p + ty + zk \quad (71)$$

чтобы выделить полный квадрат:

$$D = q^2 - \Delta + i\epsilon \quad (72)$$

где

$$\Delta = m^2 + 2yzt k - (y - y^2)t^2 - (z - z^2)k^2 \quad (73)$$

Прежде чем выражать числитель через новые переменные, вычислим все следы. Числитель имеет вид:

$$p_c(p+t)_e(p+k)_f Tr([\gamma^a, \gamma^b] \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f) + m^2 p_c Tr([\gamma^a, \gamma^b] \gamma^c \gamma^d) + m^2 (p+t)_e Tr([\gamma^a, \gamma^b] \gamma^d \gamma^e) + m^2 (p+k)_f Tr([\gamma^a, \gamma^b] \gamma^d \gamma^f) \quad (74)$$

Здесь есть две части: содержащая след шести гамма матриц и всё остальное. Начнём с первой части. Хорошо известно, что:

$$Tr(\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f) = 4[g^{ab}(g^{cd}g^{ef} - g^{ce}g^{df} + g^{cf}g^{de}) - g^{ac}(g^{bd}g^{ef} - g^{be}g^{df} + g^{bf}g^{de}) + g^{ad}(g^{bc}g^{ef} - g^{ce}g^{bf} + g^{cf}g^{be}) - g^{ae}(g^{cd}g^{bf} - g^{bc}g^{df} + g^{cf}g^{bd}) + g^{af}(g^{cd}g^{be} - g^{ce}g^{bd} + g^{bc}g^{de})] \quad (75)$$

В выражении $[\gamma^a, \gamma^b] \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f$ слагаемые, симметричные относительно перестановки $a - b$, исчезнут, а антисимметричные удвоятся. Это означает, что:

$$Tr([\gamma^a, \gamma^b] \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f) = 8[-g^{ac}(g^{bd}g^{ef} + g^{bf}g^{de}) + g^{ad}(g^{bc}g^{ef} + g^{cf}g^{be}) - g^{ae}(g^{cd}g^{bf} + g^{cf}g^{bd}) + g^{af}(g^{cd}g^{be} + g^{bc}g^{de})] \quad (76)$$

Используя эту формулу, мы можем переписать первую часть числителя подынтегрального выражения:

$$8[(p+t)(p+k)[g^{ad}p^b - g^{bd}p^a] + p(p+k)[g^{ad}(p+t)^b - g^{bd}(p+t)^a] + (p+t)^d[p^b(p+k)^a - p^a(p+k)^b] + p^d[(p+k)^a(p+t)^b - (p+k)^b(p+t)^a]] \quad (77)$$

Упрощая, получаем следующий результат:

$$8[g^{ad}[p^b(2p^2 + 2pk + tp + tk) + t^b(p^2 + pk)] - g^{bd}[p^a(2p^2 + 2pk + tp + tk) + t^a(p^2 + pk)] + p^d[2(k^ap^b - k^bp^a) + p^at^b - p^bt^a + (k^at^b - k^bt^a)] + t^d[k^ap^b - k^bp^a]] \quad (78)$$

Вторая же часть числителя, содержащая только следы от четырёх гамма матриц, равна:

$$8m^2[(-g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc})p_c + (-g^{ad}g^{be} + g^{ae}g^{bd})(p+t)_e + (-g^{ad}g^{bf} + g^{af}g^{bd})(p+k)_f] = 8m^2[-g^{ad}(p^b + t^b + k^b) + g^{bd}(p^a + t^a + k^a)] \quad (79)$$

Полное выражение для числителя:

$$8m[g^{ad}[p^b(2p^2 + 2pk + tp + tk - m^2) + t^b(p^2 + pk - m^2) - k^bm^2] - g^{bd}[p^a(2p^2 + 2pk + tp + tk - m^2) + t^a(p^2 + pk - m^2) - k^am^2] + p^d[2(k^ap^b - k^bp^a) + p^at^b - p^bt^a + (k^at^b - k^bt^a)] + t^d[k^ap^b - k^bp^a]] \quad (80)$$

Теперь нам нужно сделать замену переменной:

$$p = q - ty - zk \quad (81)$$

Мы можем упростить выражение, которое получится (заменить его на другое, приводящее к такому же ответу), используя следующие факты:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^a}{D^3} = 0 \quad (82)$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^aq^b}{D^3} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}g^{ab}q^2}{D^3} \quad (83)$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^aq^bq^c}{D^3} = 0 \quad (84)$$

Коэффициент перед q^2 равен:

$$8m(g^{ad}[-3zk^b + t^b(\frac{3}{2} - 3y)] - g^{bd}[-3zk^a + t^a(\frac{3}{2} - 3y)]) \quad (85)$$

Остальные слагаемые:

$$g^{ad}[(-yt^b - zk^b)(2yzt^k - 2ytk - 2zk^2 - yt^2 - ztk + tk - m^2) + t^b(yzt^k - ytk - zk^2 - m^2) - k^bm^2] - g^{bd}[(-yt^a - zk^a)(2yzt^k - 2ytk - 2zk^2 - yt^2 - ztk + tk - m^2) + t^a(yzt^k - ytk - zk^2 - m^2) - k^am^2] + yt^d(t^ak^b - k^at^b) + (yt^d + zk^d)(2y + z - 1)(k^at^b - t^ak^b) \quad (86)$$

Мы видим, что данный матричный элемент расходится и что он не удовлетворяет условию поперечности. Посмотрим, сходится ли поперечная часть. Для этого формально свернём расходящуюся часть по индексу d с проектором $\Pi_d^c = \frac{t^c t_d}{t^2} - g_d^c$, а затем по индексу c с проектором $\Pi_c^d = \frac{t^d t_c}{t^2} - g_c^d$. Закономерно на месте g^{ad} возникает $g^{ad} - \frac{t^a t^d}{t^2}$. Получаем:

$$8m((g^{ad} - \frac{t^a t^d}{t^2})[-3zk^b + t^b(\frac{3}{2} - 3y)] - (g^{bd} - \frac{t^b t^d}{t^2})[-3zk^a + t^a(\frac{3}{2} - 3y)]) \quad (87)$$

Видим, что выделение поперечной части диаграммы не спасает нас от расходимости. Но главная проблема — это отсутствие поперечности.

С аналогичными проблемами мы сталкиваемся и при вычислении немного другой диаграммы, где вместо тензорного поля — псевдотензорное.

Выражение для интересующего нас матричного элемента имеет вид:

$$e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{Tr(\gamma^5[\gamma^a, \gamma^b](\gamma^c p_c + m)\gamma^d(\gamma^e(p+t)_e + m)(\gamma^f(p+k)_f + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+t)^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (88)$$

Числитель состоит из двух частей: с четырьмя и с шестью гаммами. Первая часть равна:

$$-8im^2(\epsilon^{abcd}p_c + \epsilon^{abde}(p+t)_e + \epsilon^{abdf}(p+k)_f) = -8im^2\epsilon^{abde}(p+t+k)_e \quad (89)$$

Для второй части нам понадобится выражение для $Tr(\gamma^5[\gamma^a, \gamma^b]\gamma^c\gamma^d\gamma^e\gamma^f)$. Воспользуемся тем, что

$$Tr(\gamma^5\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\gamma^e\gamma^f) = 4i(-\epsilon^{abcd}g^{ef} + \epsilon^{abce}g^{df} - \epsilon^{abcf}g^{de} - \epsilon^{cdef}g^{ab} + \epsilon^{bdef}g^{ac} - \epsilon^{adef}g^{bc}) \quad (90)$$

Поэтому:

$$Tr(\gamma^5[\gamma^a, \gamma^b]\gamma^c\gamma^d\gamma^e\gamma^f) = -8i(\epsilon^{abcd}g^{ef} - \epsilon^{abce}g^{df} + \epsilon^{abcf}g^{de} - \epsilon^{bdef}g^{ac} + \epsilon^{adef}g^{bc}) \quad (91)$$

И второе слагаемое в числителе равно:

$$\begin{aligned} & -8i[\epsilon^{abcd}p_c(p+t)(p+k) - \epsilon^{abce}p_c(p+t)_e(p+k)^d + \epsilon^{abcf}p_c(p+k)_f(p+t)^d - \\ & - \epsilon^{bdef}(p+t)_e(p+k)_f p^a + \epsilon^{adef}(p+t)_e(p+k)_f p^b] = -8i[\epsilon^{abcd}p_c(p^2 + tp + kp + tk) - \\ & - \epsilon^{abce}p_c t_e(p+k)^d + \epsilon^{abcf}p_c k_f(p+t)^d + (\epsilon^{adef}p^b - \epsilon^{bdef}p^a)(p+t)_e(p+k)_f] \end{aligned} \quad (92)$$

Весь числитель:

$$\begin{aligned} & -8i[\epsilon^{abcd}[p_c(p^2 + tp + kp + tk) - m^2(p+t+k)_c] - \epsilon^{abce}p_c t_e(p+k)^d + \epsilon^{abcf}p_c k_f(p+t)^d + \\ & + (\epsilon^{adef}p^b - \epsilon^{bdef}p^a)(p+t)_e(p+k)_f] \end{aligned} \quad (93)$$

Теперь вводим фейнмановские параметры и делаем замену

$$p = q - ty - zk \quad (94)$$

Коэффициент перед q^2 (после упрощения и использования того, что в подынтегральном выражении можно заменять $q^a q^b$ на $\frac{1}{4}q^2 g^{ab}$):

$$-2i\epsilon^{abcd}(k_c(2 - 2z) - 2yt_c) \quad (95)$$

Видим, что проблема с непоперечностью матричного элемента есть и здесь.

Список литературы

- [1] K. Fukushima, D.E. Kharzeev, H.J. Warringa, *The chiral magnetic effect*, arXiv:0808.3382v1 [hep-ph], 2008
- [2] D.E. Kharzeev, *The chiral magnetic effect and anomaly-induced transport*, arXiv:1312.3348v2 [hep-ph], 2013
- [3] D.E. Kharzeev, H.-U. Yee, *Chiral magnetic wave*, arXiv:hep-th/1012.6026v2 [hep-th], 2011
- [4] M.A. Stephanov, Y. Yin, *Chiral kinetic theory*, arXiv: 1207.0747v1 [hep-th], 2012
- [5] C. Duval, Z. Horvath, P.A. Horvathy, L. Martina, *Berry phase corrections to electron density in solids and "exotic" dynamics*, arXiv:cond-mat/0506051v5, 2005
- [6] Y. Jiang, X.-G. Huang, J. Liao *Chiral vortical wave and induced flavor charge transport in a rotating quark-gluon plasma*, arXiv:1504.03201v1 [hep-ph], 2015
- [7] K. Fukushima, *Views of the chiral magnetic effect*, arXiv:1209.5064v2 [hep-ph], 2012
- [8] M.A. Metlitski, A.R. Zhitinsky, *Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter*, arXiv:hep-ph/0505072v1, 2005
- [9] J. Goldstone, F. Wilczek, *Fractional quantum numbers on solitons*, Phys. Rev. Let. 47, 986 (1981)
- [10] V.P. Kirilin, A.V. Sadofiev, V.I. Zakharov, *Chiral vortical effect in superfluid*, arXiv:1203.6312v3 [hep-th], 2012
- [11] V.I. Zakharov, *Chiral magnetic effect in hydrodynamic approximation*, arXiv:1210.2186v1 [hep-ph], 2012
- [12] D.T. Son, P. Surowka, *Hydrodynamics with triangle anomalies*, arXiv:0906.5044v2 [hep-th], 2009
- [13] G. Basar, G.V. Dunne, D.E. Kharzeev *Chiral magnetic spiral*, arXiv:1003.3464v1 [hep-ph], 2010
- [14] C. Hoyos, T. Nishioka, A. O'Bannon *A chiral magnetic effect from AdS/CFT with flavor*, arXiv:1106.4030v1 [hep-th], 2011
- [15] N. S. Manton, Phys. Rev. D 28 2019, 1983.
- [16] K. Fujikawa, *Quantum anomaly, geometric phase and their basic differences*, arXiv:hep-th/0511142v2 8 Jan 2006