

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

Аналитическое и численное изучение перенормировок в графене

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:
студент 121 группы
Никита Юрьевич Астраханцев

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Брагута В.В.

Долгопрудный
2015

Содержание

1	Введение	3
2	Статсумма и правила Фейнмана	5
2.1	Геометрия	5
2.2	Гамильтониан сильной связи со взаимодействием	5
2.3	Спектр электронов в графене без взаимодействия	8
2.4	Статсумма	9
2.5	Пропагаторы	10
2.6	Вершины	12
3	Однопетлевые поправки к электронному пропагатору	13
4	Однопетлевые поправки к пропагатору "фотона" и диэлектрическая проницаемость графена	16
5	Обсуждение и заключение	18

1 Введение

Данная работа основана на нашей статье [23]. Графен — это двумерный кристал, состоящий из атомов углерода, расположенных в вершинах гексагональной решётки [1, 2]. Он привлекает к себе большое внимание благодаря уникальным свойствам электронов в такой системе; большинство из этих эффектов связано с существованием двух конических точек в спектре электрона (Ферми точек) и с тем, что электроны ведут себя как безмассовые Дираковские фермионы в окрестности этих точек [3, 4, 5, 6, 7]. Таким образом, существует интересная и продуктивная связь между фундаментальной физикой и наукой о материалах в виде графена [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Эффективная ”скорость света” (скорость Ферми) для Дираковских фермионов в графене довольно мала, $v_F \sim c/300$, и взаимодействие между квазичастицами может быть приближено мгновенным Кулоновским потенциалом с эффективной константой взаимодействия¹ $\alpha_{eff} \sim \alpha(c/v_F) \sim 300/137 \sim 2$. Такое взаимодействие будет сильным, и это также является причиной большого количества явлений в графене [12]. В рамках модели Дирака, ещё до экспериментального получения графена, было показано, что дальнедействующий характер Кулоновского взаимодействия приводит к перенормировке скорости Ферми, которая расходится при нулевой температуре [14]; это предсказание недавно было подтверждено экспериментально [15, 16].

В то же время, модель Дирака предсказывает многочастичную перенормировку электронных свойств лишь для слабой связи и с логарифмической точностью. Высшие поправки были рассмотрены в работах [17, 18], но всё ещё в рамках модели Дирака. Для того, чтобы количественно верно предсказать перенормировку, необходимо работать в рамках решёточной модели с реалистичным потенциалом взаимодействия V_{xy} (вместо Кулоновского), принимая во внимание его экранирование за счёт σ -электронов. Эффект экранирования Кулоновского потенциала, вычисленный из первых принципов в [19], может быть параметризован феноменологически. Эта модификация потенциала на малых расстояниях сильно меняет некоторые свойства графена (например, фазовую диаграмму [20]).

Авторы работ [20, 21, 22] уже ранее провели изучение свойств графена методом моделирования Монте-Карло в модели, основанной на гамильтониане сильной связи без разложения вблизи Ферми-точек. В рамках такого более прогрессивного подхода можно ввести произвольный феноменологический потенциал V_{xy} . Используя гамильтониан сильной связи на гексагональной решётке, мы будем строить теорию возмущений по степеням V_{xy} , то есть исследовать эту модель аналитически. Мы верим, что таким образом построенная аналитика будет важна и интересна по следующим причинам.

¹В этой работе используются единицы $\hbar = 1$

Эта теория имеет больше общего с реальной физикой графена, чем эффективная теория, основанная на разложении вблизи Ферми-точек. К примеру, гамильтониан сильной связи хранит такую информацию, как геометрия гексагональной решётки и естественный масштаб энергии, которая отсутствует в эффективной теории. Более того, появляется возможность включить феноменологический потенциал, который описывает физику лучше, чем голый Кулоновский потенциал.

В дополнение, теория, основанная на гамильтониане сильной связи и феноменологическом взаимодействии V_{xy} , может быть без труда улучшена. К примеру, в рамках данной модели можно аналитически изучать эффекты учёта более далёких связей между электронами или ненулевого химического потенциала. Обратим внимание, что такого нельзя сделать в моделировании методом Монте-Карло из-за известной проблемы знака. Наконец, если электронные свойства других наноматериалов будут сформулированы в терминах гамильтониана сильной связи и феноменологического потенциала, будет очень просто применить результаты данной работы к их изучению.

Решёточное моделирование показало себя как очень эффективный и быстро развивающийся подход к изучению свойств графена [20, 21, 22, 24, 25, 26]. Важным свойством моделирования является то, что оно производится на конечной решётке, при конечной температуре и с конечными ошибками дискретизации. Для того, чтобы проверить результаты такого моделирования и оценить ошибки дискретизации в области слабой связи, будет полезно построить теорию возмущений, которая бы приняла во внимание все вышеперечисленные эффекты.

Строго говоря, теория с произвольным потенциалом не перенормируема, так как она содержит четырёхфермионное взаимодействие. Тем не менее, решёточная формулировка даёт нам ультрафиолетовый (расстояние между атомами углерода) и инфракрасный (конечный размер решётки) масштабы обрезания. По этой причине теория, сформулированная на гексагональной решётке, хорошо определена.

Наконец, стоит заметить, что, так как взаимодействие в графене сильно, приложение теории возмущений будет обсуждаться в конце работы. Тем не менее, мы полагаем, что даже на однопетлевом уровне можно изучить очень важные физические эффекты. Можно также ожидать, что теория возмущений, построенная в этой работе, будет с хорошей точностью описывать многочастичные эффекты так же, как и метод случайной фазы, основанный на эффективной теории графена [18].

2 Статсумма и правила Фейнмана

2.1 Геометрия

Мы рассматриваем гексагональную решётку с топологией тора. Пример такой решётки, состоящий из $L_x \times L_y = 6 \times 6$ шестиугольников, показан на Рис.1. Гексагональная решётка есть композиция двух треугольных подрешёток A и B . Вершины, принадлежащие к подрешёткам A и B , нарисованы как квадраты и треугольники соответственно. Декартовы координаты (x, y) каждой вершины могут быть параметризованы тремя числами (s, ξ_1, ξ_2) , где $s = A/B$ — индекс подрешётки, и $\xi_1 = 0 \dots L_x - 1$, $\xi_2 = 0 \dots L_y - 1$, таким образом

$$x = \sqrt{3}a\xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\xi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a\delta_{s,B}, \quad (2.1)$$

$$y = \frac{3}{2}a\xi_2 - \frac{1}{2}a\delta_{s,B}. \quad (2.2)$$

Топология тора требует следующего обобщения $\vec{\xi}$ координат:

$$(\xi_1 + L_x, \xi_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2 + L_y) \rightarrow (\xi_1 + L_y/2, \xi_2). \quad (2.3)$$

Каждый элемент подрешётки A соединён с тремя элементами подрешётки B . Векторы $\vec{\rho}_b$ в ξ -координатах, соединяющие точку $(\alpha, \vec{\xi})$ с соседями $(\beta, \vec{\xi} + \vec{\rho}_b)$, есть:

$$\vec{\rho}_1 = (0, 0), \quad \vec{\rho}_2 = (-1, 1), \quad \vec{\rho}_3 = (-1, 0). \quad (2.4)$$

В x -координатах эти $\vec{\rho}_b$ векторы имеют вид:

$$\vec{\rho}_1 = (0, 0), \quad \vec{\rho}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a \right), \quad \vec{\rho}_3 = \left(-\sqrt{3}a, 0 \right). \quad (2.5)$$

2.2 Гамильтониан сильной связи со взаимодействием

Электронные свойства графена могут быть описаны в рамках гамильтониана сильной связи:

$$\hat{H}_{\text{tb}} = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_{\langle xy \rangle} (\hat{c}_{\sigma,x}^\dagger \hat{c}_{\sigma,y} + \hat{c}_{\sigma,y}^\dagger \hat{c}_{\sigma,x}), \quad (2.6)$$

где суммирование производится по соседним вершинам x и y , здесь $t \approx 2.7$ eV — константа связи. Операторы $\hat{c}_{\sigma,x}^\dagger$, $\hat{c}_{\sigma,x}$ создают и уничтожают электроны со спином $\sigma = \uparrow, \downarrow$ в вершине x . Заметим, что можно рассмотреть и

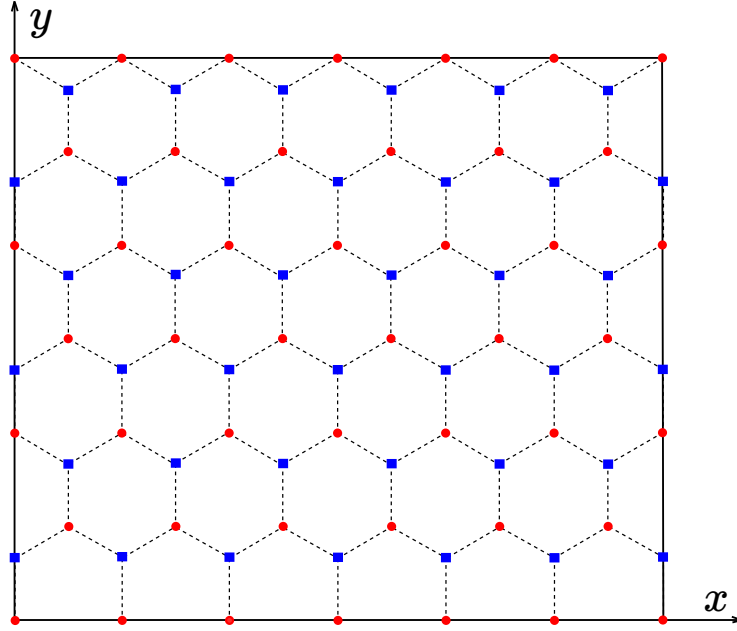


Рис. 1: $L_x \times L_y = 6 \times 6$ лист графена. Вершины, принадлежащие подрешёткам A и B , показаны как квадраты и круги соответственно.

более дальнее взаимодействие между электронами (2.6), но для простоты мы ограничиваем взаимодействие до ближайших соседей.

Мы выбираем вакуумное состояние, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\hat{c}_{\uparrow,x} |0\rangle = 0, \quad \hat{c}_{\downarrow,x}^\dagger |0\rangle = 0, \quad (2.7)$$

таким образом, в данном состоянии в каждой вершине находится электрон со спином $\sigma = \downarrow$ и нет электронов со спином $\sigma = \uparrow$. Так как наша основная цель заключается в вычислении статсуммы \mathcal{Z} , которая содержит суммирование по всем состояниям системы, выбор вакуума $|0\rangle$ не повлияет на физические результаты.

Удобно переписать гамильтониан в терминах операторов рождения и уничтожения для электронов и дырок, имеющих вид:

$$\hat{a}_x = \hat{c}_{+,x}, \quad \hat{b}_x = \pm \hat{c}_{-,x}^\dagger. \quad (2.8)$$

Знак "плюс" берётся для $x \in A$, и знак "минус" — для $x \in B$, где A и B — индексы треугольных подрешёток. После такого переобозначения вакуумное состояние удовлетворяет условиям $\hat{a}_x |0\rangle = \hat{b}_x |0\rangle = 0$. Таким образом, мы рассматриваем отсутствие валентного электрона как положительно заряженную дырку и дополнительный электрон, как отрицательно заряженную частицу. В терминах новых операторов гамильтониан сильной связи принимает форму:

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle xy \rangle} \left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{b}_y^\dagger \hat{b}_x + H.c. \right). \quad (2.9)$$

Оператор заряда теперь записывается как:

$$\hat{q}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x. \quad (2.10)$$

Легко убедиться в том, что $\hat{q}_x |0\rangle = 0$, что говорит об электронейтральности вакуума.

В некоторых приложениях [20, 21] вводится дополнительный массовый член:

$$\hat{H}_m = \sum_x (\pm mc^2) \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \sum_x (\pm mc^2) \hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x, \quad (2.11)$$

здесь знак "плюс" берётся для подрешётки A , и знак "минус" — для подрешётки B . Этот член явно нарушает симметрию между подрешётками.

Для того, чтобы изучить влияние химического потенциала на свойства графена, мы добавляем слагаемое

$$\hat{H}_\mu = \mu \sum_x (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x). \quad (2.12)$$

Известно, что взаимодействие между электронами играет очень важную роль. Часть гамильтониана, отвечающая взаимодействию, имеет вид:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} V_{xy} \hat{q}_x \hat{q}_y. \quad (2.13)$$

Кулоновский потенциал V часто используется для описания взаимодействия. Тем не менее, было показано [19], что истинный потенциал V_{xy} существенно отклоняется от Кулоновского закона на малых расстояниях, что сильно влияет на физические свойства [20].

Целью данной работы является изучение свойств системы электронов, описываемой гамильтонианом:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -t \sum_{\langle xy \rangle} \left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{b}_y^\dagger \hat{b}_x + H.c. \right) + \sum_x (\pm mc^2) \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \\ & + \sum_x (\pm mc^2) \hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x + \mu \sum_x (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x) + \frac{1}{2} \sum_{x,y} V_{xy} \hat{q}_x \hat{q}_y, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где V_{xy} — произвольный феноменологический потенциал взаимодействия, рассматриваемый как возмущение.

2.3 Спектр электронов в графене без взаимодействия

Если взаимодействие пренебрежимо мало², можно без труда найти спектр гамильтониана и его собственные функции, которые записываются, как:

$$\psi_{\vec{k}}^{\zeta}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_A^{\zeta}(\vec{k}) \\ c_B^{\zeta}(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (2.15)$$

где $\zeta = \pm 1$ — дополнительный индекс, обозначающий частицы ($\zeta = +1$) и античастицы ($\zeta = -1$). Первая компонента вектора соответствует подрешётке A , аналогично вторая компонента соответствует подрешётке B . Зона Бриллюэна импульсов \vec{k} :

$$k_x = \frac{2\pi m_x}{\sqrt{3}aL_x}, \quad k_y = \frac{2\pi m_y}{3a(L_y/2)}. \quad (2.16)$$

Индексы $m_x = 0, \dots, L_x - 1$, $m_y = 0, \dots, L_y - 1$ дают нам полный набор собственных функций для листа графена с топологией тора.

Энергетический спектр гамильтониана теперь:

$$E_{\zeta}(\vec{k}) = \zeta \sqrt{m^2 c^4 + |\varphi(\vec{k})|^2}, \quad \text{where } \varphi(\vec{k}) = t \sum_{b=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{\rho}_b}. \quad (2.17)$$

Компоненты волновой функции:

$$\begin{aligned} c_A^{\zeta}(\vec{k}) &= \sqrt{\frac{E(\vec{k}) + \zeta mc^2}{2E(\vec{k})L_x L_y}}, \\ c_B^{\zeta}(\vec{k}) &= -\zeta e^{-i \arg \varphi(\vec{k})} \sqrt{\frac{E(\vec{k}) - \zeta mc^2}{2E(\vec{k})L_x L_y}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Заметим, что существуют два специальных импульса \vec{k}_F , таких, что $\varphi(\vec{k}_F) = 0$ и $E(\vec{k}_F) = \pm mc^2$, называемых точками Дирака. Их индексы: $(m_x, m_y) = (2L_x/3, 0)$ и $(L_x/3, L_y/2)$.

Для безмассовых фермионов ($m = 0$) в окрестности точек Дирака энергетический спектр квазичастиц имеет вид:

$$\begin{aligned} E(\vec{k}) &= v_F |\vec{k} - \vec{k}_F|, \\ v_F^0 &= \frac{3}{2} ta \approx \frac{c}{343} = 0.87 \cdot 10^6 \frac{m}{s}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Линечный спектр фермионных возбуждений играет главную роль в эффективной теории графена.

²В этом разделе мы рассматриваем графен с нулевым химическим потенциалом

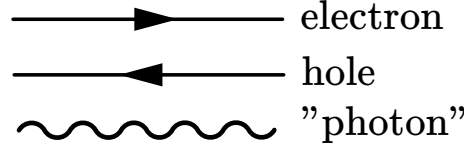


Рис. 2: Графическое представление пропагаторов различных квазичастиц.

2.4 Статсумма

Рассмотрим лист графена $L_x \times L_y$ при температуре T . Для того, чтобы записать статсумму, нужно справиться с четырёхфермионным оператором взаимодействия, содержащимся в гамильтониане (2.14). Потому, до вычисления статсуммы, член взаимодействия должен быть разложен при помощи преобразования Хаббарда-Стратоновича:

$$\begin{aligned} & \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \hat{q}_x V_{xy} \hat{q}_y \right) = \\ & = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi_x V_{xy}^{-1} \varphi_y - i \sum_x \varphi_x \hat{q}_x \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

В конечном выражении мы ввели поле Хаббарда φ , которое переносит взаимодействие. Мы также опустили определитель V , который не важен для наших вычислений.

Теперь нет трудности записать статсумму в терминах функционального интеграла. Для этого мы разбиваем Евклидово время $\tau_E \in [0, \beta]$, $\beta = 1/T$ на N_τ частей размера $\delta\tau = \beta/N_\tau$. Вы вводим поля электронов $(\bar{\eta}, \eta)$, дырок $(\bar{\psi}, \psi)$ и поле Хаббарда φ (которое далее будет называться "фотон") в каждой вертине решётки $L_x \times L_y \times \beta$. Граничные условия в Евклидовом времени периодические для "фотона" φ и антипериодические для фермионных полей $(\bar{\eta}, \eta)$, $(\bar{\psi}, \psi)$. Пространственные граничные условия симметричны для всех полей.

Окончательно, статсумма данной модели записывается как [20, 21]:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\mathcal{S}_{em}(\varphi) - \sum_{\sigma,x,y} \bar{\eta}(x) \mathcal{M}_{x,y}(\varphi) \eta(y) - \sum_{\sigma,x,y} \bar{\psi}(x) \bar{\mathcal{M}}_{x,y}(\varphi) \psi(y)}, \quad (2.21)$$

где матрица $\mathcal{M}_{l_1, l_2, \sigma}(x, y)$ имеет вид (здесь $l_1 = A, B$ и $l_2 = A, B$ — индексы

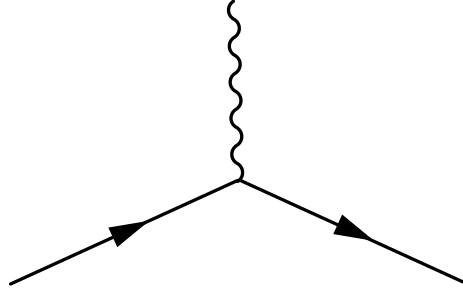


Рис. 3: Вершина взаимодействия электрона и поля "фотона".

подрешёток):

$$\mathcal{M}_{l_1, l_2}(x, y) = \left(\delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{x^0, y^0} - e^{i\delta\tau\varphi_{l_1}(x)} e^{\delta\tau\mu} \delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} + t\delta\tau e^{\delta\tau\mu} \left[e^{i\delta\tau\varphi_A(x)} \delta_{l_1, A} \delta_{l_2, B} \sum_{i=1}^3 \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} \delta_{\vec{x} + \vec{\rho}_i, \vec{y}} + e^{i\delta\tau\varphi_B(x)} \delta_{l_1, B} \delta_{l_2, A} \sum_{i=1}^3 \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} \delta_{\vec{x} - \vec{\rho}_i, \vec{y}} \right] + mc^2 \delta\tau e^{\delta\tau\mu} \left[e^{i\delta\tau\varphi_A(x)} \delta_{l_1, A} \delta_{l_2, A} \delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} - e^{i\delta\tau\varphi_B(x)} \delta_{l_1, B} \delta_{l_2, B} \delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} \right] \right), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{S}_{em}(\varphi) = \frac{\delta\tau}{2} \sum_{x, y} \varphi(x) V_{xy}^{-1} \varphi(y). \quad (2.23)$$

Теперь, чтобы получить выражение для фермионного оператора \bar{M} необходимо взять формулу для M и провести замену $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\mu \rightarrow -\mu$. Обратим внимание, что в формуле (2.23) суммирование ведётся по всем координатам (ξ_1, ξ_2) и по всем индексам подрешёток, поэтому потенциал взаимодействия V_{xy} является матрицей

$$V_{xy} = \begin{pmatrix} V^{AA}(x, y) & V^{AB}(x, y) \\ V^{BA}(x, y) & V^{BB}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

В пределе $\delta\tau \rightarrow 0$ выражение (2.21) соответствует статсумме листа графена $L_x \times L_y$ при температуре T . В некоторых приложениях, например моделировании методом Монте-Карло [20, 21], используется небольшой, но конечный шаг $\delta\tau$. Некоторые из формул, записанных ниже, подразумевают конечный шаг $\delta\tau$ для того, чтобы иметь возможность оценить ошибки дискретизации.

2.5 Пропагаторы

Используя выражение для статсуммы (2.21), можно написать пропагаторы свободной теории для соответствующих полей (см. Рис. 2).

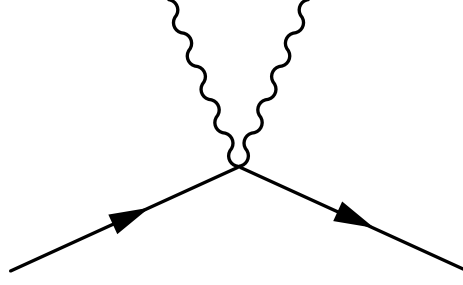


Рис. 4: Взаимодействие электрона с двумя "фотонами"

1. Пропагатор электрона

$$\begin{aligned}
\langle \eta(y) \bar{\eta}(x) \rangle &= M_0^{-1}(x, y) = \\
&= \frac{1}{L_t L_x L_y} \sum_{k^0, \vec{k}} \frac{e^{ik(x-y)}}{(1 - e^{ik^0 \delta\tau} e^{\delta\tau\mu})^2 - \delta\tau^2 E^2(\vec{k}) e^{2ik^0 \delta\tau} e^{2\delta\tau\mu}} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 - (1 + mc^2 \delta\tau) e^{ik^0 \delta\tau} e^{2\delta\tau\mu} & \varphi(\vec{k}) \delta\tau e^{ik^0 \delta\tau} \\ \varphi^*(\vec{k}) \delta\tau e^{ik^0 \delta\tau} & 1 - (1 - mc^2 \delta\tau) e^{ik^0 \delta\tau} e^{\delta\tau\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

где функция $\varphi(\vec{k})$ была введена в (2.17).

Заметим, что матрица $M_0^{-1}(x, y)$ является 2×2 матрицей в "пространстве подрешёток",

$$M_0^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} M_0^{AA}(x, y) & M_0^{AB}(x, y) \\ M_0^{BA}(x, y) & M_0^{BB}(x, y) \end{pmatrix},$$

её элементы соответствуют распространению внутри одной подрешётки (AA и BB) и между подрешётками (AB и BA).

2. Дырочный пропагатор $\langle \eta(y) \bar{\eta}(x) \rangle$ может быть получен из пропагатора электрона подстановкой $\mu \rightarrow -\mu$.

3. Пропагатор поля фотона φ

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\vec{x}, x^0) \varphi(\vec{y}, y^0) \rangle &= \frac{1}{\delta\tau} \delta_{x^0, y^0} \hat{V}(\vec{x}, \vec{y}) = \\
&= \frac{1}{\delta\tau L_\tau L_x L_y} \sum_{k^0, \vec{k}} e^{ik(x-y)} \begin{pmatrix} \tilde{V}^{AA}(\vec{k}) & \tilde{V}^{AB}(\vec{k}) \\ \tilde{V}^{BA}(\vec{k}) & \tilde{V}^{BB}(\vec{k}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Потенциал V мгновенный и действует в одном слое Евклидоваго времени.

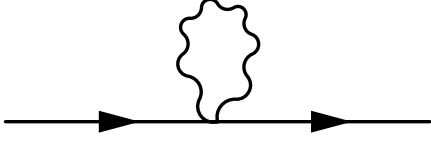


Рис. 5: Диаграмма, дающая вклад в собственную энергию $\Sigma_1(p)$



Рис. 6: Диаграмма, дающая вклад в собственную энергию $\Sigma_2(p)$

Используя выражения для статсуммы и для пропагаторов, можно показать, что в пределе $\delta\tau \rightarrow 0$ заряд листа графена $\langle Q \rangle$ равен

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= - \sum_x \left(\text{Tr} (M_{xx}^{-1}) - \text{Tr} (\bar{M}_{xx}^{-1}) \right) = \\ &= 2 \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{e^{\beta(E(\vec{k})-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E(\vec{k})+\mu)} + 1} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

как и должно быть.

2.6 Вершины

Статсумма (2.21) принимает во внимание взаимодействия между электронами/дырками и "фотонами". Вершины взаимодействия "фотонов" с электронами могут быть получены с произвольной точностью через разложение фермионного оператора

$$\begin{aligned} \delta M_{l_1, l_2}(x, y) &= (e^{i\delta\tau\varphi_{l_1}(x)} - 1) e^{\delta\tau\mu} \left(-\delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} + t\delta\tau \left[\delta_{l_1, A}, \delta_{l_2, B} \sum_{i=1}^3 \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} \delta_{\vec{x} + \vec{\rho}_i, \vec{y}} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta_{l_1, B} \delta_{l_2, A} \sum_{i=1}^3 \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} \delta_{\vec{x} - \vec{\rho}_i, \vec{y}} \right] + mc^2 \delta\tau [\delta_{l_1, A} \delta_{l_2, A} \delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0} - \delta_{l_1, B} \delta_{l_2, B} \delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0}] \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

по степеням $\delta\tau$. Простейшая вершина взаимодействия показана на Рис. 3. Используя (2.27), можно показать, что в лидирующем приближении в $\delta\tau$ -разложении, эта вершина может быть записана, как

$$V^{(3)} = (-i\delta\tau) \sum_{l_1, l_2, x, y} (\delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0}) \bar{\psi}_{l_1}(x) \varphi_{l_1}(x) \psi_{l_2}(y), \quad (2.28)$$

где l_1, l_2 — индексы подрешёток.

Следующая вершина, которая необходима для дальнейшего анализа и описывает взаимодействие между электроном и двумя "фотонами", показана на Рис. 4.

В лидирующем приближении она может быть записана, как

$$V^{(4)} = \frac{\delta\tau^2}{2} \sum_{l_1, l_2, x, y} (\delta_{\vec{x}, \vec{y}} \delta_{l_1, l_2} \delta_{x^0 + \delta\tau, y^0}) \bar{\psi}_{l_1}(x) \varphi_{l_1}^2(x) \psi_{l_2}(y). \quad (2.29)$$

Существуют и другие вершины, связывающие электрон с 3, 4, ..., n, ... "фотонами" (так как поле φ находится в экспоненте). Тем не менее, они оказываются подавлены дополнительными степенями $\delta\tau$ и не дают вклада в финальный ответ в пределе $\delta\tau \rightarrow 0$. В этой секции мы вывели только вершины взаимодействия электронов. Вершины для дырок могут быть выведены аналогично.

3 Однопетлевые поправки к электронному пропагатору

Для начала мы собираемся рассмотреть однопетлевые поправки при нулевом химическом потенциале и конечной температуре. Однопетлевые поправки к пропагатору электрона могут быть записаны в терминах энергетической функции $\Sigma(p)$:

$$M^{-1}(p) = \frac{1}{M_0(p) - \Sigma(p)}. \quad (3.1)$$

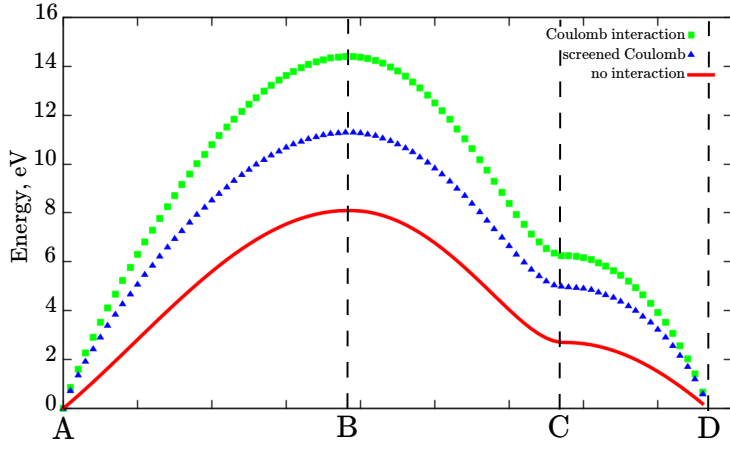
В лидирующем приближении есть две диаграммы, показанные на Рис. 5, 6 дающие вклад в $\Sigma(p)$:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p) &= +\frac{1}{2}\delta\tau \begin{pmatrix} V_{00} & 0 \\ 0 & V_{00} \end{pmatrix} e^{ip^0\delta\tau}, \\ \Sigma_2(p) &= -\Sigma_1(p) + \frac{e^{ip^0\delta\tau}\delta\tau}{2L_xL_y} \sum_{\vec{k}} \tanh\left(\frac{E(\vec{k})}{2T}\right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\frac{mc^2}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AA}(\vec{p} - \vec{k}) & \frac{\varphi(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AB}(\vec{p} - \vec{k}) \\ \frac{\varphi^*(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{BA}(\vec{p} - \vec{k}) & \frac{mc^2}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{BB}(\vec{p} - \vec{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

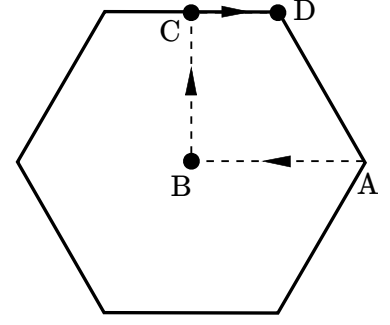
Обратный свободный пропагатор $M_0(p)$ записывается в следующем виде (см. формулу (2.25)):

$$M_0(p) = \begin{pmatrix} 1 - e^{ip^0\delta\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{ip^0\delta\tau} \end{pmatrix} + e^{ip^0\delta\tau}\delta\tau \begin{pmatrix} mc^2 & \varphi(\vec{p}) \\ \varphi^*(\vec{p}) & -mc^2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

Конечное выражение для $\Sigma(p)$ есть:



(a) Профиль свободной и перенормированной энергии $E(\vec{k})$.



(b) Профиль спектра рисуется вдоль многоугольника $ABCD$.

Рис. 7: Энергетический спектр электрона с потенциалом Кулона, с экранированным потенциалом Кулона [19] и без взаимодействия. Вычисление было проведено при $T = 0.1$ eV на большой решётке.

$$\Sigma(p) = \Sigma_1(p) + \Sigma_2(p) = \frac{e^{ip^0\delta\tau}\delta\tau}{2L_xL_y} \sum_{\vec{k}} \tanh\left(\frac{E(\vec{k})}{2T}\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\frac{mc^2}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AA}(\vec{p}-\vec{k}) & \frac{\varphi(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AB}(\vec{p}-\vec{k}) \\ \frac{\varphi^*(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{BA}(\vec{p}-\vec{k}) & \frac{mc^2}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{BB}(\vec{p}-\vec{k}) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) видно, что однопетлевые поправки сводятся к перенормировке массы m и функции $\varphi(\vec{p})$. Перенормированная масса теперь зависит от точки в зоне Бриллюэна и имеет вид:

$$m^R(\vec{p}) = m + \frac{m}{2L_xL_y} \sum_{\vec{k}} \tanh\left(\frac{E(\vec{k})}{2T}\right) \times \frac{1}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AA}(\vec{p}-\vec{k}). \quad (3.4)$$

Выражение для перенормированной функции $\varphi^R(\vec{p})$ теперь:

$$\varphi^R(\vec{p}) = \varphi(\vec{p}) + \frac{1}{2L_xL_y} \sum_{\vec{k}} \tanh\left(\frac{E(\vec{k})}{2T}\right) \times \frac{\varphi(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AB}(\vec{p}-\vec{k}). \quad (3.5)$$

Таким образом, однопетлевые поправки сохраняют форму пропагатора (2.25) и лишь заменяют свободную массу m и функцию $\varphi(\vec{p})$ на перенормированные аналоги (3.4), (3.5). Отсюда можно сделать вывод, что спектр квазичастиц в однопетлевом приближении имеет вид $E^2 = (m^R c^2)^2 + (\varphi^R)^2$. Чтобы оценить величину этих поправок, на Рис. 7 мы построили профиль спектра

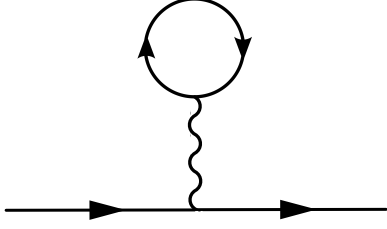


Рис. 8: Диаграмма Хартри, вносящая вклад в пропагатор электрона при $\mu \neq 0$.

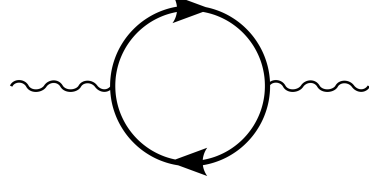


Рис. 9: Диаграмма поляризации вакуума для поправки к пропагатору фотона.

для Кулоновского взаимодействия, для экранированного Кулона [19] и без взаимодействия. Вычисление было проведено при $T = 0.1 \text{ eV}$ на большой решётке.

Формулы (3.4) и (3.5) могут быть использованы для воспроизведения хорошо известных результатов эффективной теории графена и обобщения их на случай ненулевой температуры. Для этого мы рассматриваем большую решётку $L_x, L_y \rightarrow \infty$ с Кулоновским взаимодействием между электронами вблизи Ферми-точки. Тогда формулы (3.4) и (3.5) записываются:

$$m^R(\vec{p} = \vec{p}_F) = m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(v_F/c)} \left[\log \left(\frac{v_F \Lambda}{2cT} \right) + \gamma - \log \pi/4 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right] \right),$$

$$v_F^R = v_F \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{(v_F/c)} \left[\log \left(\frac{v_F \Lambda}{2cT} \right) + \gamma - \log \pi/4 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \right] \right). \quad (3.6)$$

где Λ — ультрафиолетовое обрезание, $\gamma \approx 0.577\dots$ — постоянная Эйлера. Эти формулы находятся в соответствии с предсказаниями эффективной теории с логарифмической точностью [14, 27].

В процессе вывода формул (3.6) мы провели интегрирование по двумерной сфере радиуса Λ . Мы также предполагали, что $mc^2 \ll T$, а масштаб Λ много больше всех остальных энергетических масштабов. Отметим, что теория регуляризуется температурой в инфракрасной области. Кроме того, отношение обрезаний Λ/T под логарифмом умножается на v_f/c , что существенно уменьшает перенормировку скорости Ферми.

Для изучения эффектов конечной плотности мы рассмотрим однопетлевые поправки при нулевой температуре и конечном химическом потенциале. В дополнение к диаграммам, показанным на Рис. 5, 6, имеется вклад за счёт взаимодействия с вакуумом, изображённый на Рис. 8. Как и прежде, однопетлевые поправки при ненулевом μ приводят к перенормировке параметров свободного пропагатора, сохраняя его структуру. К примеру, масса и функция φ в однопетлевом приближении могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
m^R(\vec{p}) &= m + \frac{m}{2L_x L_y} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AA}(\vec{p} - \vec{k}) \theta(E(\vec{k}) - \mu), \\
\varphi^R(\vec{p}) &= \varphi(\vec{p}) + \frac{1}{2L_x L_y} \sum_{\vec{k}} \frac{\varphi(\vec{k})}{E(\vec{k})} \tilde{V}^{AB}(\vec{p} - \vec{k}) \theta(E(\vec{k}) - \mu). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

В пределе бесконечной решётки $L_x, L_y \rightarrow \infty$, Кулоновского взаимодействия и линейного спектра электронов, формулы (3.7) записываются в виде

$$\begin{aligned}
m^R(\vec{p} = \vec{p}_F) &= m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(v_F/c)} \log \left[\frac{v_F \Lambda}{c\mu} \right] \right), \\
v_F^R &= v_F \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{(v_F/c)} \log \left[\frac{v_F \Lambda}{c\mu} \right] \right). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

По аналогии со случаем ненулевой температуры, химический потенциал играет роль инфракрасного обрезания. Стоит заметить, что существуют четыре масштаба, способных играть роль инфракрасного обрезания: масса фермиона m , химический потенциал, температура и обратный размер решётки. Мы полагаем, что в инфракрасном пределе теория регуляризуется наибольшим из них. Формулы (3.6), (3.7) учитывают эти эффекты точно.

Формулы (3.6) могут быть записаны в виде (3.8), если вместо масштаба Λ используется другой ультрафиолетовый масштаб $\Lambda' = 2e^\gamma/\pi \cdot \Lambda \sim 1.13 \cdot \Lambda$ и химический потенциал заменяется температурой.

По этой причине при температуре, равной химическому потенциалу, температурная перенормировка немного больше той, что возникает за счёт химического потенциала. При описанном рассмотрении мы не принимали во внимание эффекты Дебаевского экранирования потенциала на больших расстояниях и экранирование Кулона на маленьких расстояниях, что будет сделано в следующем разделе.

4 Однопетлевые поправки к пропагатору "фотона" и диэлектрическая проницаемость графена

В этом разделе мы вычислим однопетлевые поправки к мгновенному пропагатору "фотона" $\langle \varphi(\vec{x}, x^0) \varphi(\vec{y}, y^0) \rangle$.

Эти поправки в импульсном пространстве могут быть представлены в

терминах поляризационного оператора $\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^{AA} & \mathcal{P}^{AB} \\ \mathcal{P}^{BA} & \mathcal{P}^{BB} \end{pmatrix}$, так как

$$\begin{aligned} \tilde{V}^R(\vec{k}) &= \frac{1}{\hat{\epsilon}(\vec{k})} \times \tilde{V}(\vec{k}) \\ \hat{\epsilon}(\vec{k}) &= 1 - \tilde{V}(\vec{k}) \times \hat{\mathcal{P}}(\vec{k}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\tilde{V}^R(\vec{k})$, $\tilde{V}(\vec{k})$ — перенормированные и голые спектры потенциала, которые являются 2×2 матрицами в пространстве подрешёток. В пределе $\delta\tau \rightarrow 0$ и в однопетлевом приближении только диаграмма на Рис. 9 вносит вклад.

Выражение для поляризационного оператора в одной петле записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{AA}(\vec{k}) = \mathcal{P}^{BB}(\vec{k}) &= \frac{1}{L_x L_y} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{E^2(\vec{p}-\vec{k}) - E^2(\vec{p})} \left(\frac{m^2 c^4 + E^2(\vec{p})}{E(\vec{p})} \tanh \frac{E(\vec{p})}{2T} - \frac{m^2 c^4 + E^2(\vec{p}-\vec{k})}{E(\vec{p}-\vec{k})} \tanh \frac{E(\vec{p}-\vec{k})}{2T} \right), \\ \mathcal{P}^{AB}(\vec{k}) = \mathcal{P}^{*BA}(\vec{k}) &= \frac{1}{L_x L_y} \sum_{\vec{p}} \frac{\varphi(\vec{p})\varphi^*(\vec{p}-\vec{k})}{E^2(\vec{p}-\vec{k}) - E^2(\vec{p})} \left(\frac{1}{E(\vec{p})} \tanh \frac{E(\vec{p})}{2T} - \frac{1}{E(\vec{p}-\vec{k})} \tanh \frac{E(\vec{p}-\vec{k})}{2T} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя (4.1), (4.2), можно показать, что на больших расстояниях и при низкой температуре выражение для потенциала на всех подрешётках приобретает форму:

$$\tilde{V}^R(\vec{k}) = \frac{2\pi\alpha c}{\epsilon_0} \frac{1}{(|\vec{k}| + m_D c)}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{(v_F/c)}, \\ m_D &= \frac{8\alpha \log 2}{\epsilon_0 v_F^2} T. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теперь можно видеть, что при нулевой температуре потенциал взаимодействия экранируется диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , что находится в соответствии с ПСФ результатом [13]. При ненулевой температуре возникает двумерное Дебаевское экранирование с Дебаевской массой m_D , что находится в согласии с [28].

Аналогично можно исследовать, как ненулевая плотность влияет на проницаемость графена. Чтобы получить выражение для поляризационного оператора в этом случае, нужно использовать формулы (4.2) и сделать подстановку $\tanh(E/2T) \rightarrow \theta(E - \mu)$. Нетрудно понять, что на больших расстояниях выражение для потенциала принимает форму (4.3) с ϵ , полученным из (4.4), и массой Дебая

$$m_D = \frac{4\alpha}{\epsilon_0 v_F^2} |\mu|. \quad (4.5)$$

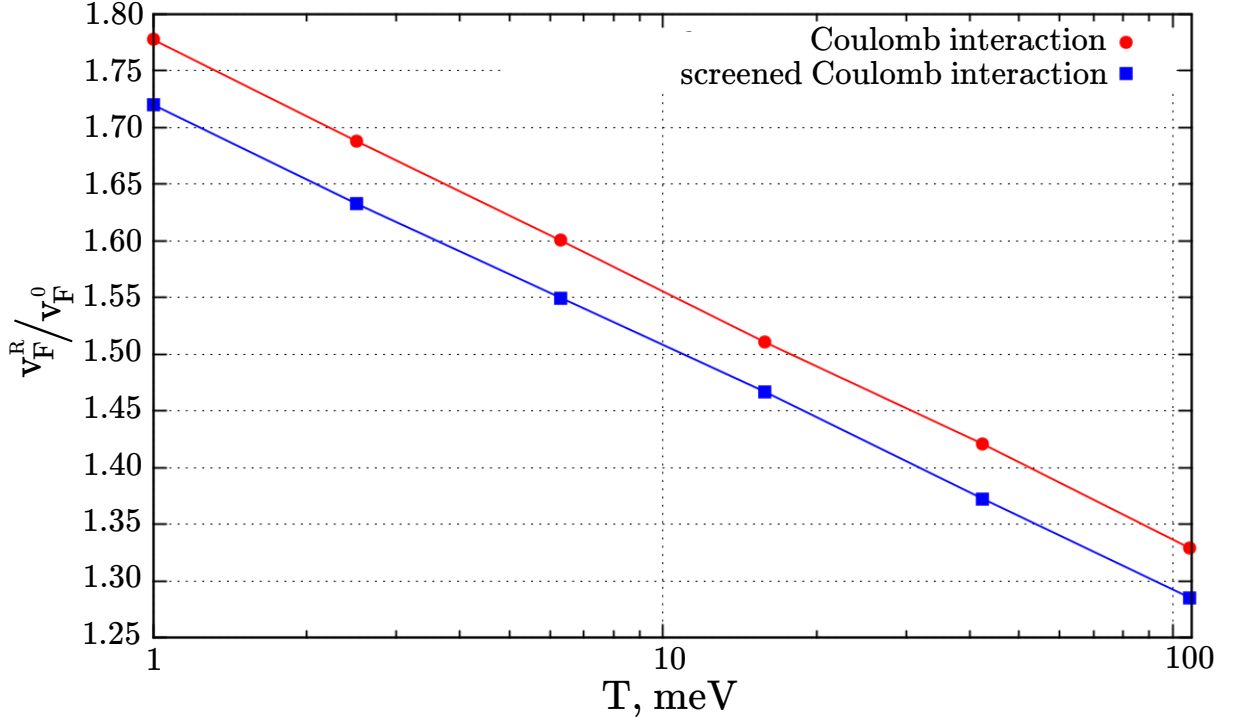


Рис. 10: Перенормировочный фактор Ферми скорости как функция температуры для графена, лежащего на нитриде бора для Кулоновского и экранированного Кулоновского потенциалов [19].

Последнее выражение согласуется с ПСФ [13].

Наконец, мы строим график проницаемости графена ϵ , полученной из (4.1), (4.2), как функцию r в единицах расстояния между атомами a (Рис. 11). Вычисление было проведено для подвешенного графена со взаимодействием из статьи [20] и для различных параметров: $T = 0, \mu = 0$, $T = 0, \mu = 0.026$ eV ($n \sim 6.5 \cdot 10^{10}$ cm⁻²) и $T = 0.026$ eV, $\mu = 0$. Для того, чтобы сравнить наши результаты с ПСФ, мы строим проницаемость из формулы (4.4). На малых расстояний мы сравнили наши результаты с результатами моделирования Монте-Карло [29]. Результаты Монте-Карло моделирования находятся в хорошем согласии с однопетлевыми расчётами.

Из Рис. 11 видно, что при нулевой температуре ϵ стартует от значения ~ 2 при $r = 0$ и достигает значения ϵ_0 (4.4) при $r/a > 5$. При ненулевой температуре или химическом потенциале проницаемость растёт с расстоянием. Это поведение можно отнести к эффекту Дебаевского экранирования.

5 Обсуждение и заключение

Эта работа посвящена теории возмущений, которая может быть использована для изучения свойств графена при конечной температуре и химическом потенциале. Она основана на гамильтониане сильной связи на гекса-

гональной решётке с произвольным потенциалом взаимодействия между электронами, который рассматривается как возмущение. Мы построили статсумму для такой теории, вывели правила Фейнмана и выражения для пропагаторов.

Как пример приложения такой теории, мы вычислили однопетлевые поправки к пропагатору электрона. Было показано, что эти поправки приводят к перенормировке голой массы и функции $\varphi(\vec{k})$, сохраняя структуру пропагатора. Используя этот результат, мы вычислили спектр электронов, перенормированную массу и скорость Ферми.

Чтобы оценить величину перенормировки, на Рис. 10 мы построили перенормировочный фактор для скорости Ферми как функцию температуры для графена, лежащего на нитриде бора, с Кулоновским и экранированным Кулоновским взаимодействием [19]. В прочесе вычисления мы учли экранирование потенциалов (4.1). Результаты могут быть с хорошей точностью описаны формулой

$$v_F^R(T)/v_F^0 = \left(1 + A \cdot \log \left[\frac{\Lambda}{\mu} \right] \right) \quad (5.1)$$

где для Кулоновского взаимодействия $A = 0.096$, $\Lambda = 3.2$ eV, и для экранированного Кулона $A = 0.093$, $\Lambda = 2.4$ eV. Эффективное обрезание Λ оказывается чувствительно к значению потенциала на малых расстояниях, в отличии от коэффициента A . Значение коэффициента A хорошо описывается выражением $A \approx \alpha c / (4v_F \epsilon') = 0.094$, $\epsilon' = (\epsilon_{BN} + 1)/2 + \epsilon_0 - 1 = 6.7$.

В дополнение мы рассмотрели поправки к электронному пропагатору для ненулевого химического потенциала. Было показано, что, как и в случае ненулевой температуры, структура пропагатора сохраняется, а перенормируются лишь уже существующие параметры. В частности, мы получили формулы для перенормировки скорости Ферми и голой массы для этого случая.

В статье [16] перенормировка скорости Ферми изучалась через измерение квантовой ёмкости при различных химических потенциалах. В этих экспериментах лист графена был обёрнут в нитрид бора, который уменьшал силу взаимодействия между электронами. Это позволяет ожидать, что теория возмущений хорошо работает в данном случае, и мы можем сравнить наши результаты с результатами [16]. Результаты измерений скорости Ферми хорошо фидируются формулой

$$\begin{aligned} v_F(\mu) &= v_F(\mu_0) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\epsilon(v_F/c)} \log \left[\frac{\mu_0}{\mu} \right] \right) = \\ &= v_F(\mu_0) \left(1 + A \log \left[\frac{\mu_0}{\mu} \right] \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $v_F(\mu_0) = 0.85 \times 10^6$ m/s, $\mu_0 = 3.2$ eV ($n_0 = 10^{15}$ cm⁻²), $\epsilon \simeq 8$ и $A = 0.081$.

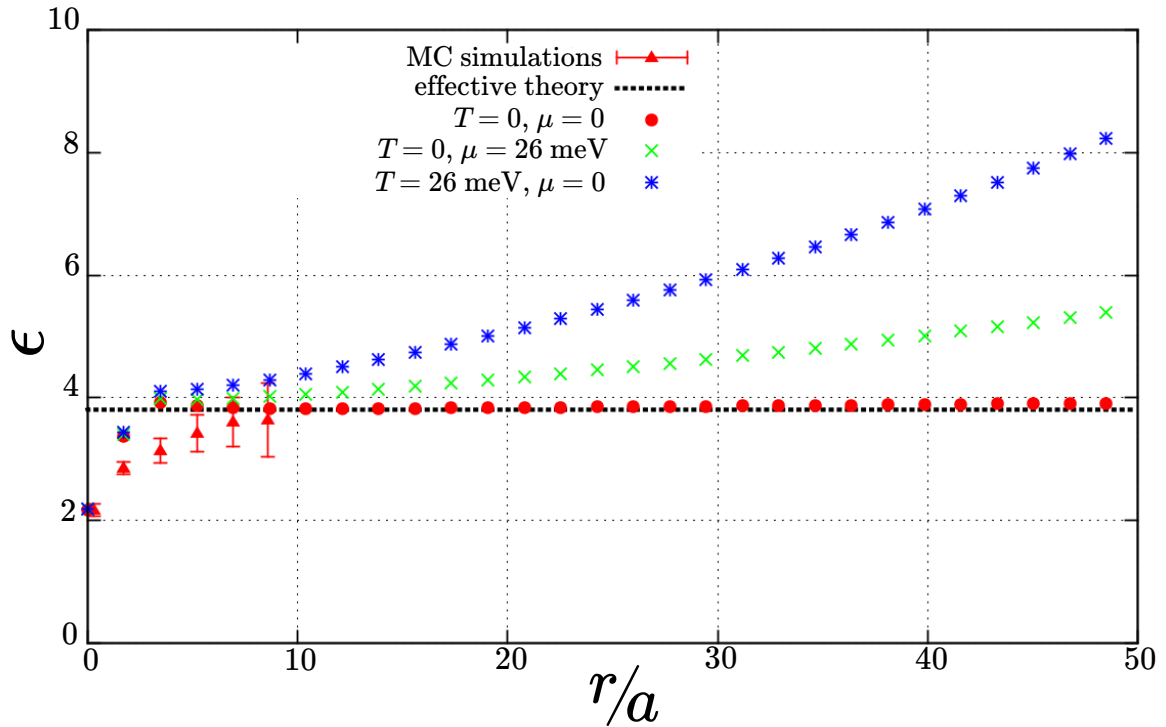


Рис. 11: Проницаемость подвешенного графена ϵ как функция расстояния r в единицах межатомного расстояния a для различных внешних условий. Пунктирная линия соответствует ПСФ выражению (4.4). Красные треугольники — результаты моделирования Монте-Карло.

В вычислениях мы использовали формулы (3.7) со взаимодействием, экранированным диэлектрической проницаемостью (4.1). Потенциал на малых расстояниях был взят из работы [19] и разделен на $\epsilon_{BN} \simeq 4.5$. На больших расстояниях мы взяли потенциал Кулона, делённый на ϵ_{BN} . Результаты вычислений хорошо фитируются формулой (5.2) с параметрами: $\mu_0 = 2.9$ eV, $A = 0.072$. Эти значения находятся в неплохом соответствии с работой [16]. В дополнение мы провели вычисление параметров μ_0, A для обычного Кулоновского потенциала, делённого на ϵ_{BN} . Наш результат $\mu_0 = 5.2$ eV, $A = 0.077$. Снова видно, что значение константы μ_0 чувствительно к значениям потенциала на малых расстояниях.

Также интересно сравнить перенормировку скорости Ферми при ненулевом химическом потенциале и при ненулевой температуре. Для этого мы вычислили температурную перенормировку скорости Ферми для листа графена, обёрнутого в нитрид бора, для Кулоновского и экранированного Кулоновского потенциалов. Результаты описываются формулой (5.1) с параметрами: для Кулоновского взаимодействия $A = 0.075$, $\Lambda = 4.5$ eV и для экранированного Кулоновского взаимодействия $A = 0.073$, $\Lambda = 3.05$ eV.

Другим примером приложения теории возмущений является вычисление поправок к потенциалу, сделанное в предыдущей секции. Мы вывели

выражения для проницаемости при ненулевой температуре, при ненулевом химическом потенциале и для произвольного взаимодействия.

Хорошо известно, что электроны в графене формируют сильнодействующую систему. Поэтому имеет смысл задаться вопросом, как наши результаты изменяются под действием высших поправок. Авторы работы [18] рассмотрели следующий порядок в рамках эффективной теории. Их главный результат заключается в утверждении, что учёт первой петли при вычислении второй петли уменьшает перенормировку за счёт эффективного уменьшения константы связи в одной петле — известный результат в теории поля. Это позволяет нам ожидать хорошую точность формул (3.4), (3.5), (3.7) с однопетлевым потенциалом (4.1), (4.2) даже в подвешенном графене.

Авторы работы [17] также рассмотрели следующий порядок к поляризационному оператору в рамках эффективной теории. В этом порядке значение проницаемости примерно на 30 % меньше однопетлевого результата, что не очень много. Более того, результаты Монте-Карло моделирования [29] говорят о том, что поправки более высоких порядков могут быть даже меньше, чем 30 %. Поэтому мы ожидаем хорошую точность формул (4.1), (4.2).

Список литературы

- [1] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, *Science* **306**, 666 (2004).
- [2] A. K. Geim and K. S. Novoselov, *Nature Materials* **6**, 183 (2007).
- [3] P. R. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
- [4] J. W. McClure, *Phys. Rev.* **104**, 666 (1956).
- [5] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [6] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, and A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005).
- [7] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim, *Nature* **438**, 201 (2005).
- [8] M. I. Katsnelson and K. S. Novoselov, *Solid State Commun.* **143**, 3 (2007).
- [9] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1337 (2008).
- [10] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
- [11] M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, and F. Guinea, *Phys. Rep.* **496**, 109 (2010).
- [12] V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1067 (2012).
- [13] M. I. Katsnelson, *Graphene: Carbon in Two Dimensions* (Cambridge University Press, 2012).
- [14] J. Gonzalez, F. Guinea and M. A. H. Vozmediano, *Nucl. Phys. B* **424**, 595 (1994).
- [15] D. C. Elias, R. V. Gorbachev, A. S. Mayorov, S. V. Morozov, A. A. Zhukov, P. Blake, L. A. Ponomarenko, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. Guinea, and A. K. Geim, *Nature Phys.* **7**, 701 (2011).
- [16] G. L. Yu, R. Jalil, B. Belle, A. S. Mayorov, P. Blake, F. Schedin, S. V. Morozov, L. A. Ponomarenko, F. Chiappini, S. Wiedmann, U. Zeitler, M. I. Katsnelson, A. K. Geim, K. S. Novoselov, and D. C. Elias, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **110**, 3282 (2013).
- [17] I. Sodemann and M. M. Fogler, *Phys. Rev. B* **86**, 115408 (2012).

- [18] J. Hofmann, E. Barnes, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **113**, 105502 (2014).
- [19] T. O. Wehling, E. Sasioglu, C. Friedrich, A. I. Lichtenstein, M. I. Katsnelson, and S. Blugel, Phys. Rev. Lett. **106**, 236805 (2011).
- [20] M. V. Ulybyshev, P. V. Buividovich, P^oPSPiP»Pë and M. I. Polikarpov, Phys. Rev. Lett. **111**, 056801 (2013).
- [21] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, Phys. Rev. B **86**, 245117 (2012).
- [22] D. Smith and L. von Smekal, Phys. Rev. B **89**, no. 19, 195429 (2014).
- [23] N. Y. Astrakhantsev, V. V. Braguta and M. I. Katsnelson, arXiv:1506.00026 [cond-mat.str-el].
- [24] J.E. Drut and T.A. Lähde, Phys. Rev. Lett. **102**, 026802 (2009); Phys. Rev. B **79**, 165425 (2009); Phys. Rev. B **79**, 241405 (2009);
- [25] W. Armour, S. Hands, and C. Strouthos, Phys. Rev. B **81**, 125105 (2010); Phys. Rev. B **84**, 075123 (2011).
- [26] P. V. Buividovich, E. V. Luschevskaya, O. V. Pavlovsky, M. I. Polikarpov and M. V. Ulybyshev, Phys. Rev. B **86**, 045107 (2012).
- [27] V.N. Kotov, V.M. Pereira, and B. Uchoa, Phys. Rev. B **78**, 075433 (2008).
- [28] V. V. Braguta, S. N. Valgushev, A. A. Nikolaev, M. I. Polikarpov and M. V. Ulybyshev, Phys. Rev. B **89**, no. 19, 195401 (2014).
- [29] N. Yu. Astrakhantsev, V. V. Braguta, M. I. Katsnelson, A. A. Nikolaev, M. V. Ulybyshev, O. E. Soloveva, to be published.