Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и
квантовой теории поля

Диссипация и нестабильности в киральных средах

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:
студент 121 группы
Авдошкин Александр Сергеевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Захаров В.И.

Долгопрудный
2015

Содержание

1 Введение

Киральные эффекты возникают в разных областях применения квантовой теории поля. Например, в кварк-глюонной плазме в физике высоких энергий и в Вейлевских полуметаллах и Дираковских металлах в физике конденсированного состояния [1]. Киральные эффекты есть макроскопические проявления киральной аномалии, которая заключается в несохранении на квантовом уровне аксиального тока безмассовых фермионов. Одним из примеров является киральный магнитный эффект (КМЭ), ток вдоль магнитного поля в равновесии:

$$j_{\mu}^{el} = \sigma_M B_{\mu}, \tag{1.1}$$

где u^{μ} -4-скорость элемента жидкости, а $B_{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u^{\nu}F^{\alpha\beta}$ - магнитное поле в системе покоя. Впервые этот эффект был получен как линейный отклик свободных фермионов на внешнее поле [2]. Но затем выведен в гидродинамике как прямое следствие аномального несохранения тока [3]. В обоих случая

$$\sigma_M = \frac{e^2\mu_5}{2\pi^2}, \tag{1.2}$$

где $\mu_5 = \mu_L - \mu_R$ - химический потенциал по киральному заряду.
Примечательным свойством киральных эффектов является бездиссипативность. Проще всего это можно увидеть, обратив время в обеих частях равенства (1.1). Для обыкновенной проводимости ($\vec{j}^{el} = \sigma_E\vec{E}$) обе части равенства имеют разную временную четность поэтому $\sigma_E \to -\sigma_E$, но знак проводимости фиксируется соотношениями Онсагера, поэтому обыкновенная проводимость есть необратимый диссипативный эффект. Для КМЭ четность обеих частей одинакова, что по аналогии с эффектом Холла говорит о недиссипативности явления. Более явно недиссипативность видна в кинетическом подходе к описанию киральных сред, где они возникают как следствие нетривиальной фазы Берри и не связаны с наличием интеграла столкновений[4].

2 Неаномальная гидродинамика

Гидродинамика - это универсальное описание инфракрасного поведения теорий. Она опирается на предложение о локальном равновесии и медленном изменении параметров равновесия. Правильными степенями свободы в гидродинамическом пределе являются локальные параметры равновесия и скорость локальной системы покоя u_μ, нормированной условием $u_\mu u^\mu = -1$. При отсутствии сохраняющихся токов локальное равновесие описывается 1 термодинамическим потенциалом (например, температурой T). При наличии сохраняющихся токов j^a_μ для описания равновесия необходимо добавить соответствующее количество химических потенциалов μ^a. Для описания динамики перечисленных степеней свободы достаточно уравнений сохранения тензора энергии-импульса (ТЭИ) и токов (количество степеней свободы совпадает с количеством уравнений):

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0;\ \partial_\mu (j^a)^\mu = 0, \tag{2.1}$$

где $T^{\mu\nu}$ и $(j^a)^\mu$ должны быть выражены через вышеупомянутые степени свободы.
В силу предположения о медленности изменения параметров равновесия естественным малым параметром в гидродинамике являются градиенты термодинамических величин и локальной скорости.

2.1 Гидродинамика в нолевом порядке

В нулевом порядке по градиентам вид ТЭИ и токов фиксируется рассмотрением системы покоя жидкости(см. [6, 27]):

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, (j^a)^\mu = \rho^a u^\mu, \tag{2.2}$$

где ϵ - плотность энергии в системе покоя, p - давление, ρ^a -плотность заряда в системе покоя жидкости.

2.2 Гидродинамика в высших порядках

В высших порядках по градиентам ТЭИ и токи получают соответствующие поправки:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}, (j^a)^\mu = \rho^a u^\mu + \nu^\mu. \tag{2.3}$$

Форма этих поправок зависит от определения системы покоя жидкости. Популярным выбором является система отсчета Ландау $u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, $u_\mu \nu^\mu = 0$. В нашем рассмотрении большую роль будет играть "энтропийная"система отсчета $s^\mu = su^\mu$.

В системе отсчета Ландау поправки первого порядка принимают вид:

$$\tau^{\mu\nu} = -\eta P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\partial_\mu u^\mu) - \zeta P^{\mu\nu}\partial_\mu u^\mu, \tag{2.4}$$

$$\nu^\mu = -\sigma T P^{\mu\nu}\partial_\nu(\mu/T), \tag{2.5}$$

где $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ - проектор на подпространство ортогональное скорости. Соотношения Онсагера диктуют коэффициентам ν, ζ, σ быть неотрицательными. Отличие от нуля любого из этих коэффициентов приводит к производству энтропии и диссипации в среде. Ток энтропии фиксируется неотрицательной дивергенцией[27]

$$s^\mu = su^\mu - \frac{\mu}{T}\nu^\mu. \tag{2.6}$$

3 Аномальная гидродинамика

3.1 Гидродинамика с одним аномальным током

В присутствии внешнего ЭМ поля и аномалии гидродинамические уравнения (2.1) перепишутся как[3]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda;\ \partial_\mu j^\mu = CE \cdot B. \tag{3.1}$$

В этом случае обычный ток энтропии уже не отвечает неотрицательной дивергенции:

$$\partial_\mu (su^\mu - \frac{\mu}{T}\nu^\mu) = -\frac{1}{T}\partial_\mu u_\nu \tau^{\mu\nu} - \nu^\mu(\partial_\mu \frac{\mu}{T} - \frac{E_\mu}{T}) - C\frac{\mu}{T}E \cdot B. \tag{3.2}$$

Последнее слагаемое может придать всему выражению любой знак. Это можно исправить рассмотрев нарушающие четность градиентные поправки:

$$\nu^\mu = -\sigma T P^{\mu\nu}\partial_\nu \left(\frac{\mu}{T}\right) + \sigma E^\mu + \xi\omega^\mu + \xi_B B^\mu; \tag{3.3}$$

$$s^\mu = su^\mu - \frac{\mu}{T}\nu^\mu + D\omega^\mu + D_B B^\mu, \tag{3.4}$$

где $\omega^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu \partial_\alpha u_\beta$.
Рассмотрение идеальной гидродинамики однозначно фиксирует искомые транспортные коэффициенты:

$$\xi = C\left(\mu^2 - \frac{2}{3}\frac{\rho\mu^3}{\epsilon + p}\right);\ \xi_B = C\left(\mu - \frac{1}{2}\frac{\rho\mu^2}{\epsilon + p}\right). \tag{3.5}$$

3.2 Аномальная гидродинамика с векторным и аксиальным токами

В более реалистичной гидродинамической модели [7]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j^V_\lambda;\ \partial^\mu j^V_\mu = 0;\ \partial^\mu j^A_\mu = CE \cdot B \tag{3.6}$$

аналогично получаем

$$\nu^\mu_a = \frac{\mu}{2\pi^2}B^\mu + \left(\frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right)\omega^\mu; \tag{3.7}$$

$$\nu^\mu_v = \frac{\mu_5}{2\pi^2}B^\mu + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2}\omega^\mu. \tag{3.8}$$

Следует обратить внимание на редукцию от формул (3.7) и (3.8) к неаномальной гидродинамике

$$e \to 0,\ \ \mu_5 \to 0. \tag{3.9}$$

В аксиальном токе остается неисчезающий вклад пропорциональный вортисити

$$j_a^\mu = \left(\frac{\mu^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right)\omega^\mu. \tag{3.10}$$

Сохранение этого вклада - нетривиальное ограничение на динамику среды. К рассмотрению этого ограничения мы вернемся позднее.

4 Эффективная теория поля

При добавлении химического потенциала исходный гамильтониан получает добавку:

$$\hat{H} \to \hat{H} - \mu\hat{Q} - \mu_5\hat{Q}^A. \tag{4.1}$$

Для лагранжиана соответствующее изменение имеет обратный знак:

$$\delta L = -\delta H = \mu\hat{Q} + \mu_5\hat{Q}^A. \tag{4.2}$$

Для среды из фермионов плотности векторного и аксиального зарядов имеют вид $q = \bar{\psi}\gamma_0\psi, q^A = \bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi$. Поскольку химические потенциалы вводятся по отношению к системе покоя жидкости окончательная добавка к плотности лагранжиана имеет вид:

$$\delta\mathcal{L} = \mu u^\alpha\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi + \mu_5 u^\alpha\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi. \tag{4.3}$$

При $\mu_5 = 0$ эта добавка эквивалентна замене

$$eA_\mu \to eA_\mu + \mu u_\mu. \tag{4.4}$$

Рассмотрим, как это отразится на уравнении аномалии.
Обычное аномальное уравнение

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{e^2}{2\pi^2}\tilde{F}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{4.5}$$

может быть переписано как сохранение расширенного кирального заряда

$$Q^A = Q^A_{naive} + \frac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H},\ \frac{d}{dt}Q^A = 0, \tag{4.6}$$

где $\mathcal{H} = \int d^3x\vec{A}\cdot\vec{B}$, $Q^A = \int d^3xj^0$. Замена (4.4) приводит к дальнейшей модификации заряда:

$$Q^A_{hydro} = Q^A_{naive} + Q^A_{mh} + Q^A_{mfh} + Q^A_{fh}, \tag{4.7}$$

где, например,

$$Q_{fh} = \frac{1}{4\pi^2}\int d^3xj^0_{fh}, \tag{4.8}$$

$$j^\mu_{fh} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mu u_\mu\partial_\alpha(\mu u_\beta). \tag{4.9}$$

5 Сохранение спиральностей в классической магнитогидродинамике

Сохранение полученных спиральностей по отдельности интенсивно обсуждалось в контексте обычной магнитогидродинамике. Здесь будут воспроизведены основные результаты [8, 10] Основное уравнение для изучения поведения спиральностей - это релятивистская версия уравнения Эйлера

$$(p+\epsilon)a^{\mu} = (-\partial^{\mu}p - u^{\mu}u^{\nu}\partial_{\nu}p) = -P^{\mu\nu}\partial_{\nu}p, \tag{5.1}$$

где $a^{\mu} = u^{\nu}\partial_{\nu}u^{\mu}$ - это ускорение. Электрическое поле считаем выключенным. Также нам удобно использовать соотношение Гиббса-Дюхема:

$$dp = \rho d\mu + sdT. \tag{5.2}$$

Теперь изучим поведение различных частей аксиального тока в кирально нейтральной заряженной жидкости.
После некоторых преобразований можно показать, что j^{α}_{fh}, связанный с потоковой спиральностью, имеет следующую дивергенцию:

$$\partial_{\alpha}j^{\alpha}_{fh} = \frac{2T^2\mu s}{p+\epsilon}\omega^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right). \tag{5.3}$$

Таким образом, если $\frac{\mu}{T} = const$ (например, $T \to 0$), то этот вклад в аксиальный ток сохраняется сам по себе.

Теперь обратимся к смешанной магнитно-потоковой спиральности в отсутствие электрического поля. Дивергенция соответствующего тока

$$(j^{\alpha}_{fmh})_{,\alpha} \; = \; 1/4\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\ . \tag{5.4}$$

Следующий шаг - это выразить $F_{\alpha\beta}$ в терминах B_{μ}, когда $E_{\nu} = 0$:

$$F_{\alpha\beta} \; = \; \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}B^{\gamma}u^{\delta}\ . \tag{5.5}$$

Используя это мы приходим к

$$(j^{\alpha}_{fmh})_{,\alpha} \; = \; \frac{T^2\mu s}{p+\epsilon}B^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right) \quad , \tag{5.6}$$

и ток снова сохраняется, если $T \to 0$ или $\dfrac{\mu}{T} = const$.

Наконец, рассмотрим магнитную спиральность. Соответствующий 4-ток определяется как

$$j^{\alpha}_{mh} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\beta}F_{\gamma\delta} \quad . \tag{5.7}$$

Дивергенция этого тока пропорциональна произведению магнитного и электрического полей B_{μ} и E_{μ},

$$(j^{\alpha}_{mh})_{,\alpha} \;=\; -2B^{\mu}E_{\mu} \;, \tag{5.8}$$

и мы находим, что $Q_{mh} = \frac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H}$.

Выражение (5.8) кинематично по природе. Динамическая предпосылка, которая обеспечивает сохранение тока j^{α}_{mh} - это, в случае $T = 0$, зануление E^{μ}:

$$E_{\mu} \;\to\; 0, \;\; if \;\; \sigma_E \;\to\; \infty \;. \tag{5.9}$$

Также легко вычислить скорость диссипации магнитной спиральности при нулевой температуре и конечной проводимости σ_E в классической гидродинамике [9]:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \;=\; \frac{-2}{\sigma_E}\int d^3x\; \vec{B}\cdot\mathbf{curl}\;\vec{B} \quad , \tag{5.10}$$

детали вывода можно найти в [8].

В самом общем случае для сохранения суммы всех трех спиральностей находим

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha}(\mu B^{\alpha} + \mu^2\omega^{\alpha}) + \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \\
= -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta})u_{\beta}(\tilde{F}_{\alpha\gamma} + \tilde{\omega}_{\alpha\gamma})u^{\gamma} = \\
= -\frac{sT}{2(\epsilon+p)}\left(E^{\alpha} - TP^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right)(\tilde{F}_{\alpha\gamma} + \tilde{\omega}_{\alpha\gamma})u^{\gamma}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

и аналогичный результат для термальной части потоковой спиральности:

$$\partial_{\mu}(T^2\omega^{\mu}) = \frac{2T^2\rho}{\epsilon+p}\omega^{\mu}\left(E_{\mu} - T\partial_{\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right). \tag{5.12}$$

Таким образом, ограничения накладываемые на сохранение спиральностей выполнены, если отвечающая за проводимость величина $E^\alpha - TP^{\alpha\beta}\partial_\beta\left(\frac{\mu}{T}\right)$ обращается в ноль. Это соответствует пределу $\sigma \to \infty$.
Также необходимо заметить, что вязкость аналогично приводит к диссипации спиральности, поэтому вне предела идеальной жидкости нужно дополнительно потребовать $\eta \to 0$.
Еще одна особенность, которая объединяет разные типы спиральностей - это то, что соответствующие заряды связаны с числом зацеплений магнитных и потоковых вихрей. В частности, потоковая спиральности - это мера зацепленности потоковых вихрей между собой [21]. Потоково-магнитная спиральности измеряет количество зацеплений между потоковыми вихрями и магнитными линиями тока. И, наконец, магнитная спиральность можно записать в терминах переплетения линий токов магнитного поля.

Отношение различных типов спиральностей к топологии служит источником теорем о неперенормируемости. В частности (**??**) в случае магнитостатики переписать как топологическую 3d массу фотона. Если рассмотреть ток в форме $J_i(x) = I\int d\tau\delta^3(\vec{x}-\vec{x}(\tau)\dot{x}_i(\tau)$, то член взаимодействия двух токовых колец

$$V = \frac{2II'}{\sigma_M}\int_C\int_{C'} dx^i dy^j \epsilon_{ijk}\frac{(x-y)^k}{4\pi|x-y|^3}\ , \tag{5.13}$$

где σ_M определена в (1.1). Интеграл в (5.13) очевидно пропорционален коэффициенту зацепления Гаусса двух контуров тока. Более того, можно показать[14], что член взаимодействия (5.13) не перенормируется в любом порядке электромагнитных взаимодействий.
В итоге, рассмотрение киральной аномалии в гидродинамике приводит ко включению в сохраняющийся аксиальный заряд потоковой, магнитной и смешанной спиральностей. Все три спиральности сохраняются в идеальной гидродинамике. Киральная аномалия объединяет все спиральности, которые ранее рассматривались лишь раздельно.

6 Нестабильности киральной плазмы

В работе [13] было показано, что в среде с $\mu_5 \neq 0$ будет генерироваться ЭМ поле. В терминах спиральностей это отвечает переходу $Q_{naive} \to Q_{mh}$. В киральной среде с степенями свободы жидкости естественно ожидать также нестабильностей вида $Q_{naive} \to Q_{fh}$ и $Q_{mh} \to Q_{fh}$, так как в термальном равновесии различные степени свободы возбуждены одинаково. Отсюда также можно сделать заключение о конечной точке упомянутых нестабильности, система будет стремиться прийти в состояние, где все спиральности одного масштаба:

$$Q^A_{naive} \sim Q^A_{mh} \sim Q^A_{mfh} \sim Q^A_{fh} \,. \tag{6.1}$$

Здесь стоит упомянуть несколько моментов:

- Состояние с $Q^A_{naive} \neq 0, Q^A_{fh} = Q^A_{mh} = Q^A_{fmh} = 0$ может распасться не только в регион с ненулевой магнитной спиральностью[**?**, 13, 14], но также в регионы с макроскопическим вращением плазмы так, что $Q^A_{fh} \neq 0$.

- В частности, можно ожидать, что не только primordial магнитное поле могло произойти из исходной асимметрии между левым и правым, но и таким же образом могло появиться спиральное движение на космологическом масштабе.

- Интересно вновь отметить, что переходы между различными типами спиральностей обсуждались в литературе независимо от киральных сред. В то же время расширенный аксиальный заряд (4.9) позволяет изучать эти нестабильности систематически. В частности, в статье [24] присутствует подробное обсуждение генерации магнитного поля из исходного спирального движения. На нашем языке это отвечает нестабильности:

$$Q^A_{fh} \to Q^A_{mh}.$$

- Новое утверждение, которое дает рассмотрение киральной среды - это переход $Q_{naive} \neq 0$ в другие компоненты аксиального заряда (4.9).

7 Заключение

Рассмотрим сперва предел нулевой электромагнитной константы связи, $\alpha_{el} \to 0$. Тогда сохранение аксиального заряда (4.9) подразумевает, что классически киральные среды - это идеальные жидкости без диссипации

$$(\sigma_E)_{classical} \to \infty \,, (\eta)_{classical} \to 0 \,, \quad (\alpha_{el} \to 0 \,), \tag{7.1}$$

где η - это вязкость.

Заметим, что условие (7.1) применимо вне равновесия. При этом, если условие (7.1) удовлетворено, то нет ничего удивительного в наличии бездиссипативного тока (1.1) в равновесии.

Также было показано, что покоящаяся киральная жидкость нестабильна по отношению к генерации вихрей. Этому имеются косвенные подтверждения в решеточных симуляциях. Конкретнее, в [11] показано, что в состоянии идеальной жидкости, не содержащем вихрей, вихри генерируются (при конечной температуре). В нашей работе обсуждалось сходное явление, когда в среде с ассиметрией между правым и левым генерируется преимущественно правые или левые вихри в зависимости от знака химического потенциала μ_5. Ввиду дуальности между между идеальными невращательными жидкостями без химического потенциала при нулевой температуре и жидкостями с химическим потенциалом и конечной температурой (см., например, [12]) можно рассматривать явление, найденное в [11], как неявное подтверждение идеи о спонтанной генерации ненулевой макроскопической спиральности в киральных жидкостях с $\mu_5 \neq 0$.

Список литературы

[1] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, Nucl. Phys.**A 803** (2008) 227, arXiv:0711.0950 [hep-ph];
K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, Phys. Rev. **D 78** (2008) 074033, arXiv:0808.3382 [hep-ph].
D. Kharzeev, Phys. Lett. **B 633**, (2006) 260, hep-ph/0512239.

[2] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **22** (1980) 3080.

[3] D. T. Son and P. Surowka, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 191601, arXiv:0906.5044 [hep-th] .

[4] D. T. Son and N. Yamamoto, (2012) , arXiv:1210.8158 [hep-th] .

[5] P. Kovtun, "Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theo ries 2012, arxiv:1205.5040 [hep-th]

[6] Landau and Lifschiz, Theoretical Physics, vol. 6, Hydrodynamics

[7] The Chiral magnetic effect in hydrodynamical approach A.V. Sadofyev, M.V. Isachenkov, Phys.Lett. B697 (2011) 404-406, arxiv:1010.1550 [hep-th]

[8] J. D. Bekenstein, Astrophys. Journ. 319, 207 (1987).

[9] H.K. Moffatt, J. Fluid Mech., **35** (1969) 117; in *Fluid Dynamics* ed. R. Ballan and J.-L. Peube, (New York; Gordon and Beach), p.149

[10] J. D. Bekenstein, G. Betschart, Phys.Rev. D74 (2006) 083009; A.H. Taub, Phys.Rev. 94 (1954) 1468вЂ“1470;
B. Carter, Comm. Math. Phys. 30 (07, 1973) 261вЂ“286;
J. D. Brown, Class.Quant.Grav. 10 (1993) 1579вЂ“1606.

[11] T. Burch, G. Torrieri, e-Print: arXiv:1502.05421 [hep-lat].

[12] “Null energy condition and superluminal propagation S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis, R. Rattazzi, JHEP 0603 (2006) 025, e-Print: hep-th/0512260.

[13] Y. Akamatsu and N. Yamamoto, Phys.Rev.Lett. 111 (2013) 052002.

[14] Z.V. Khaidukov, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev , V.I. Zakharov, arXiv:1307.0138 [hep-th].

[15] I. Amado, K. Landsteiner and F. Pena-Benitez, JHEP **1105**, 081 (2011);
K. Landsteiner, E. Megias, F. Pena-Benitez, Phys.Rev.Lett. 107 (2011) 021601.

[16] D. E. Kharzeev, K. Landsteiner, A. Schmitt, and H.-U. Yee, Lect. Notes Phys. 871, 1 (2013);
D. E. Kharzeev, arXiv:1312.3348 [hep-ph].

[17] T. Andrade, S. Fischetti, D. Marolf, S. F. Ross, M. Rozali. arXiv:1312.2839 [hep-th].

[18] K. Landsteiner, E. Megias, and F. Pena-Benitez, Lect. Notes Phys. 871, 433 (2013).

[19] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, (Brown U.). Phys. Lett. B130 (1983) 389.

[20] P. Yodzis, Phys. Rev. D3, 2941 (171)

[21] Y.K. Moffatt, *J. Fluid Dynamics* **35** 117 (1969)

[22] S. Golkar and D. T. Son, arXiv:1207.5806 [hep-th].

[23] Defu Hou, Hui Liu, Hai-cang Ren, JHEP 1105:046, (2011).

[24] S.I. Vainshtein, Ya. B. ZelвЂ™dovich, *Sov. Phys. Usp.* **15** 159 (1972)

[25] M. Krusius, T. Vachaspati, G.E. Volovik, arXiv:cond-mat/9802005; G.E. Volovik, The Universe in a Helium Droplet, 'International Series of Monographs on Physics'

[26] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987)

[27] P. Kovtun, D.T. Son, A.O. Starinets, (Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 111601, e-Print: hep-th/0405231 .

[28] D. T. Son, N. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. 109, 181602 (2012);
D. T. Son, N. Yamamoto, Phys. Rev. D87, 085016 (2013);
J. -W. Chen, S. Pu, Q. Wang, and X. -N. Wang, arXiv:1210.8312 [hep-th].

[29] V. I. Arnold, C. R. Acad Sci. Paris 261, 17 (1965);
S. Childress, J. Math. Phys.11, 3063 (1970);
N. Kleeorin, I. Rogachevskii, D. Sokoloff, and D. Tomin, Phys. Rev. E 79, 046302 (2009).

[30] D.V. Deryagin, D.Y. Grigoriev and V.A. Rubakov, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 659 (1992).