Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической и экспериментальной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

«Интегрируемые спиновые цепочки с дальнодействием»

студента 121 группы
Бекетова М.Е.
Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Забродин А. В.

Долгопрудный 2015

Содержание

1 Введение

В данной работе рассматривается замечательная связь, существующая между квантовыми интегрируемыми системами и интегрируемыми системами классической механики. Речь идет о квантовой модели спиновой цепочки, наиболее ранним и известным примером которой служит однородная изотропная (XXX) модель Гейзенберга, первое полное решение спектральной задачи для которой было дано в статье [1] и знаменовало появление метода, известного как анзац Бете [1],[2]; и о классической интегрируемой модели взаимодействующих частиц, движущихся на прямой, носящей название модели Руйсенаарса-Шнайдера (RS) [3].

Первые упоминания о подобного рода спектральной связи, или, иначе, квантово – классического соответствия, имеют место в работах [4],[5], где оно обозначено для более широкого класса, нежели данный конкретный случай. Мы здесь будем опираться на утверждения из работ [6],[7], строго демонстрирующие наличие такой связи, более детально разобранной также в [8]-[10].

Стиль повествования в данной работе таков, что параллельно рассматриваются два последовательных по сложности случая - изотропной XXX и анизотропной XXZ моделей. Конкретно, в реферативной форме представлены результаты для XXX и рационального случая RS, подытоженные в статье [11], после чего аналогичный ход рассуждения проводится уже для анизотропной XXZ и тригонометрической RS. Собственно, изначально проделанная работа имела целью послужить тригонометрическим аналог статьи [11].

Основные излагаемые утверждения служат проверке гипотезы о сдвижке корней в XXZ и ей двойственной тригонометрической RS, отсутствующей в случае XXX - рациональной RS. С целью упрощения выкладок эта проверка производится в особой точке свободных фермионов, существование которой качественно отличает случаи XXZ и XXX друг от друга.

Все необходимые для формулировки результатов понятия определяются в нескольких первых главах. Процесс их самостоятельной проверки, осознания и последующего изожения имел для автора большую образовательную ценность.

Обозначения

В последующих выкладках, точнее, в первой половине, где речь идет о квантовых моделях, заглавными латинскими буквами обозначаются, как правило, операторы над пространством состояний системы. В особых случаях, когда необходимо подчеркнуть разницу между оператором и его собственным значением, оператор выделяется как $\hat{H}$. Тождественный оператор там, где это нужно, выделяется так же – $\hat{1}$. Все выкладки проводятся с $\hbar = 1$, что легко восстанавливается при желании изучить поведение моделей в классическом пределе.

2 Модель Гейзенберга

Модель Гейзенберга, или модель спиновой цепочки, представляет собой одномерную решетку, в узлах которой находятся N частиц со спинами $1/2$, взаимодействие между которыми ограничивается ближайшими соседями. Операторы спинов S_j^α, где j нумерует узел решетки, а $\alpha = x, y, z$ отвечают проекциям на разные декартовы оси координат, представляются в виде

$$S_j^\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma_j^\alpha, \tag{2.1}$$

где операторы σ_j^α действуют на jых узлах решетки как стандартным образом определенные матрицы Паули

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

и как тождественный оператор - на других узлах. Операторы S_j^α подчиняются коммутационным соотношениям для SU(2)

$$\left[S_j^\alpha, S_k^\beta\right] = i\hbar\delta_{jk}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}S_j^\gamma, \tag{2.3}$$

где δ_{jk} - символ Кронекера, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ - символ Леви-Чивиты. В дальнейшем для удобства мы будем полагать $\hbar = 1$ - несмотря на квантовый характер процессов, для алгебраической структуры последующего повествования это несущественно. Повышающие и понижающие операторы

$$S_j^\pm = S_j^x \pm iS_j^y \tag{2.4}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[S_j^z, S_k^\pm\right] = \pm\delta_{jk}S_j^\pm, \quad \left[S_j^+, S_k^-\right] = 2\delta_{jk}S_j^z. \tag{2.5}$$

Соответствующие им матрицы Паули

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом разделе мы описываем преимущественно модель с периодическими граничными условиями, то есть

$$S_{j+N}^\alpha = S_j^\alpha, \tag{2.6}$$

в последующих же разделах это условие изменится, что будет оговорено отдельно.

В общем случае, когда вклады проекций спинов на разные оси в энергию различны, что условно обозначается в названии модели индексом XYZ, гамильтониан для цепочки из N спинов дается выражением

$$\hat{H}_{XYZ} = \sum_{j=1}^{N}\left[J_{j(j+1)}^x S_j^x S_{j+1}^x + J_{j(j+1)}^y S_j^y S_{j+1}^y + J_{j(j+1)}^z S_j^y S_{j+1}^y\right], \tag{2.7}$$

где $J_{j(j+1)}^x, J_{j(j+1)}^y, J_{j(j+1)}^x$ - константы взаимодействия ближайших соседей. Случай, когда эти константы различны, называется неоднородным. И, соответственно, однородным, когда они одинаковы. В дальнейшем, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать индексы у $J^{\alpha}_{j(j+1)} \equiv J_\alpha$, так как всегда будет понятно, о каком случае идет речь. Случаи $J_x = J_y = J_z$ и $J_x = J_y \neq J_z$ называются соответственно XXX и XXZ моделями. Нас в дальнейшем будет интересовать преимущественно XXZ модель, в связи с чем мы переименуем параметры, положив $J_x = J_y = J,\ J_z = J/\Delta$, где Δ - параметр анизотропии.

В гильбертовом пространстве состояний каждого из спинов $\mathcal{H}_j$ базисные векторы $|\uparrow\rangle_j$ и $|\downarrow\rangle_j$ являются собственными для оператора S^z_j

$$\begin{aligned} &S^z_j\,|\uparrow\rangle_j = \tfrac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_j\,, \ &&S^z_j\,|\downarrow\rangle_j = -\tfrac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_j\,,\\ &S^-_j\,|\uparrow\rangle_j = |\downarrow\rangle_j\,, &&S^-_j\,|\downarrow\rangle_j = 0,\\ &S^+_j\,|\uparrow\rangle_j = 0, &&S^+_j\,|\downarrow\rangle_j = |\uparrow\rangle_j\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь гамильтониан (2.7) для однородной XXZ модели перепишется в виде

$$H_{XXZ} = J\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\big(S^+_j S^-_{j+1} + S^-_j S^+_{j+1}\big) + \Delta\left(S^z_j S^z_{j+1} - \frac{1}{4}\right)\right], \tag{2.9}$$

где последнее слагаемое поправлено на $1/4$, чтобы давать ненулевой вклад в состоянии, когда соседние спины противонаправлены.

Очевидно, случай $\Delta = 1$ представляет собой XXX модель; случай $\Delta = 0$ называют XX моделью; случай $\Delta \to \infty$ эквивалентен модели Изинга. Случай $J > 0$ отвечает антиферромагнетику, $J < 0$ - ферромагнетику. При $|\Delta| > 1$ и $J\Delta < 0$ ($J\Delta > 0$) цепочка ведет себя как ферромагнетик (антиферромагнетик) вдоль оси z. Так как ферромагнетики в природе встречаются реже, физически наиболее релевантен случай $J > 0$, с теоретической же точки зрения интереснее всего случай $|\Delta| < 1$. В отсутствие внешнего поля в спектре имеется характерная щель при $|\Delta| > 1$, исчезющая при $|\Delta| = 1$.

Полное пространство состояний данной модели $\mathcal{H} = \otimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ имеет размерность 2^N. Тогда операторы S^α_j имеют формально вид $S^\alpha_j = 1^{\otimes(j-1)} \otimes S^\alpha \otimes 1^{\otimes(N-j)}$, действуя нетривиально только на узлах с номерами j. Вакуумом мы в дальнейшем будем называть состояние

$$|0\rangle = \otimes_{j=1}^{N}\,|\uparrow\rangle \tag{2.10}$$

со всеми спинами "вверх". Всякое базисное состояние тогда получается действием соответствующих понижающих операторов на вакуум.

3 Трансфер-матрица, уравнение Янга-Бакстера

Частные случаи модели Гейзенберга - хорошо известные примеры интегрируемых систем. Интегрируемость означает, что для такой системы существует набор интегралов движения - величин, сораняющихся при инволюции. То есть, в Гамильтоновой формулировке, существует набор операторов $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, ...$, коммутирующих с гамильтонианом $[\hat{H}, \mathcal{O}_i] = 0,\ \forall i$, и между собой

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] = 0, \quad \forall i, j.$$

В дальнейшем мы определим для различных случаев модели Гейзенберга оператор, называемый трансфер-матрицей $\mathcal{T}(\lambda)$, являющейся функцией некого параметра λ, называемого спектральным параметром. Наиболее замечательное ее свойство заключается в том, что она является производящей функцией этих интегралов движения

$$\mathcal{T}(\lambda) = \exp\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}\mathcal{O}_k(\lambda-\lambda_0)^k\Big), \tag{3.1}$$

где c_k, λ_0 - некие константы. Иными словами, всякий интеграл движения можно легко получить, зная трансфер-матрицу

$$\mathcal{O}_k = 1/c_k\frac{d^k}{d\lambda^k}\log\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{3.2}$$

Из этого свойства и из коммутационных свойств интегралов движения очевидно, что для различных значений спектрального параметра

$$[\mathcal{T}(\lambda), \mathcal{T}(\mu)] = 0. \tag{3.3}$$

В дальнейшем мы будем отыскивать трансфер-матрицы различных моделей, взяв след в дополнительном пространстве состояний $\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{H}_j$ от другого оператора, называемого квантовой матрицей монодромии

$$\mathcal{T}(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}T(\lambda), \tag{3.4}$$

имеющей вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Ее элементами в этом представлении являются операторы над $\mathcal{H}$, сама же она действует, таким образом, на $\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{H}$. Обозначим

$$T_1(\lambda) = T(\lambda)\otimes\hat{1}, \quad T_2(\lambda) = \hat{1}\otimes T(\lambda) \tag{3.6}$$

операторы, действующие на $\mathcal{H}_0^{(1)}\otimes\mathcal{H}_0^{(2)}\otimes\mathcal{H}$. Тогда из коммутационного свойства трансфер-матриц (3.3) и свойств следа от тензорного произведения $\mathrm{Tr}(A\otimes B) = \mathrm{Tr}A\cdot\mathrm{Tr}B$ следует, что

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0^{(1)}\otimes\mathcal{H}_0^{(2)}}[T_1(\lambda), T_2(\mu)] = 0, \tag{3.7}$$

а значит, из инвариантности следа относительно циклической перестановки, существововование такого обратимый оператор над $\mathcal{H}_0^{(1)}\otimes\mathcal{H}_0^{(2)}$, что

$$R_{12}(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)R_{12}^{-1}(\lambda,\mu) = T_2(\lambda)T_1(\mu), \tag{3.8}$$

является достаточным условием (3.7). Домножив справа (3.8) на $R_{12}(\lambda,\mu)$, получим

$$R_{12}(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu) = T_2(\lambda)T_1(\mu)R_{12}(\lambda,\mu). \tag{3.9}$$

Такой оператор называют R-матрицей, он подчиняется набору условий, образуя замечательную алгебраическую структуру, называемую алгеброй Янга-Бакстера. Действие оператора перестановки P_{12} на тождество (3.8) приводит к

$$(R_{21}(\mu,\lambda))^{-1}T_1(\lambda)T_2(\mu) = T_2(\mu)T_1(\lambda)(R_{21}(\mu,\lambda))^{-1}. \tag{3.10}$$

Откуда получаем $R_{12}(\lambda,\mu) = f(\lambda,\mu)(R_{21}(\mu,\lambda))^{-1}$. Ясно тогда, что $f(\lambda,\mu) = f(\mu,\lambda)$, а значит $[R_{12}(\lambda,\mu), R_{21}(\mu,\lambda)] = 0$. R-матрицу, таким образом, можно нормировать, положив $f(\lambda,\mu) = 1$, тогда

$$R_{12}(\lambda,\mu)R_{21}(\mu,\lambda) = \hat{1}. \tag{3.11}$$

Теперь, определив

$$\begin{aligned} T_1(\lambda) &= T(\lambda)\otimes\hat{1}\otimes\hat{1},\\ T_2(\lambda) &= \hat{1}\otimes T(\lambda)\otimes\hat{1},\\ T_3(\lambda) &= \hat{1}\otimes\hat{1}\otimes T(\lambda), \end{aligned} \tag{3.12}$$

получим, наконец, из эквивалентности следующих выражений

$$\begin{aligned} T_1T_2T_3 = R_{23}^{-1}T_1T_3T_2R_{23} = R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}T_3T_1T_2R_{13}R_{23} = R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}R_{12}^{-1}T_3T_2T_1R_{12}R_{13}R_{23}\\ T_1T_2T_3 = R_{12}^{-1}T_1T_3T_2R_{12} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}T_3T_1T_2R_{13}R_{12} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}R_{23}^{-1}T_3T_2T_1R_{23}R_{13}R_{12} \end{aligned} \tag{3.13}$$

уравнение Янга-Бакстера

$$R_{12}(\lambda,\mu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{23}(\mu,\nu) = R_{23}(\mu,\nu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{12}(\lambda,\mu). \tag{3.14}$$

4 Алгебраический анзац Бете

Исторически первым способом нахождения спектра модели Гейзенберга является метод координатного Бете-анзаца [1], в котором вид собственных состояний гамильтониана угадывался в каждом из неперемешивающихся секторов (сектором модели называют количество перевернутых "вниз" спинов). Уже для сектора с двумя перевернутыми спинами, где таких собственных состояний C_N^2, этот метод приводит к громоздким выкладкам, поэтому впоследствии был изобретен [12] куда менее затратный и куда более богатый алгебраический подход.

Первым интресным нам обобщением тривиального случая диагональной R-матрицы будет такая

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b(\lambda,\mu) & c(\lambda,\mu) & 0\\ 0 & c(\lambda,\mu) & b(\lambda,\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $b(\lambda,\mu),\ c(\lambda,\mu)$ - функции спектральных параметров λ и μ, которые положены различными только для ясности того, что R-матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера. Как следствие, они входят в эти функции антисимметрично, т.е. $R(\lambda,\mu)$ не меняется при замене $\lambda \leftrightarrow -\mu$, поэтому во всех дальнейших выкладках мы всегда будем пользоваться функциями только одного спектрального параметра λ, обратную же редукцию можно совершить заменой $\lambda \to \lambda - \mu$. Обозначения a, b, c, d выбраны такими, т.к. эти функции суть собственные значения операторов, называемых, соответственно, A, B, C, D.

Эта матрица представима в виде

$$R(\lambda,\mu) = \frac{1+b(\lambda,\mu)}{2}\hat{1}\otimes\hat{1} + \frac{1-b(\lambda,\mu)}{2}\sigma^z\otimes\sigma^z + c(\lambda,\mu)(\sigma^+\otimes\sigma^- + \sigma^-\otimes\sigma^+).$$

Ранее мы выяснили, что она подчиняется тождеству (3.11)

$$R_{12}(\lambda,\mu)R_{21}(\mu,\lambda) = 1,$$

откуда имеем

$$b(\lambda,\mu)b(\mu,\lambda)+c(\lambda,\mu)c(\mu,\lambda)=1, \quad b(\lambda,\mu)c(\mu,\lambda)+c(\lambda,\mu)b(\mu,\lambda)=0, \tag{4.2}$$

а также

$$(b(\lambda,\mu)-b(\lambda,\nu))c(\mu,\nu)+c(\lambda,\mu)c(\lambda,\nu)b(\mu,\nu)=0,$$
$$c(\lambda,\mu)(b(\lambda,\nu)-b(\mu,\nu))-b(\lambda,\mu)c(\lambda,\nu)c(\mu,\nu)=0,$$
$$(1-b(\lambda,\mu)b(\mu,\nu))c(\lambda,\nu)-c(\lambda,\mu)c(\mu,\nu)=0,$$

то есть ряд условий на функции b и c. Из условия, связывающего матрицу монодромии

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

с R-матрицей

$$R_{12}(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)=T_2(\lambda)T_1(\mu)R_{12}(\lambda,\mu),$$

следует ряд тождеств, связывающих действия операторов-компонент первой. Подробно все эти тождества выведены и перечислены в приложении, для разъяснения метода алгебраического анзаца сейчас нам потребуются следующие два:

$$A(\mu)B(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}B(\lambda)A(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}B(\mu)A(\lambda), \tag{4.4}$$

$$D(\lambda)B(\mu)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}B(\mu)D(\lambda)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}B(\lambda)D(\mu), \tag{4.5}$$

где ввиду особенной простоты рассматриваемых далее случаев XXX и XXZ модели функции двух параметров зависят в действительности только от их разности, т.е $b(\lambda,\mu)\equiv b(\lambda-\mu)$ и $c(\lambda,\mu)\equiv c(\lambda-\mu)$.

Суть алгебраического Бете-анзаца заключается в нахождении собственных состояний трансфер-матрицы (3.4)

$$\mathcal{T}(\lambda)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}T(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda).$$

В результате этой процедуры интегралы движения, производящей функцией которых она является, приводятся к диагональному виду. Вид матрицы монодромии и коммутационные соотношения на ее элементы подразумевает, что B и C выполняют, соответственно, роль понижающего и повышающего оператора.

Как и в методе координатного анзаца, начинаем с вакуума - $|0\rangle$. Это состояние - собственное для A и D и аннигилируется понижающим оператором C :

$$A(\lambda)\,|0\rangle=a(\lambda)\,|0\rangle\,, \quad D(\lambda)\,|0\rangle=d(\lambda)\,|0\rangle\,, \quad C(\lambda)\,|0\rangle=0.$$

Соответствующее собственное значение трансфер-матрицы

$$\tau(\lambda)\,|0\rangle=\tau_0(\lambda)\,|0\rangle=(a(\lambda)+d(\lambda))\,|0\rangle\,. \tag{4.6}$$

Все прочие собственные состояния трансфер-матрицы теперь можно получить последовательным действием повышающего оператора, переходя, таким образом, в нужный сектор:

$$|\{\lambda_j\}_M\rangle\equiv\prod_{j=1}^{M}B(\lambda_j)\,|0\rangle\,. \tag{4.7}$$

Чтобы убедиться в том, что эти состояния собственные, подействуем на них операторами A и D, воспользовавшись при этом соотношениями (4.4),(4.5), чтобы пронести их вправо:

$$A(\lambda)\prod_{j=1}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle = \Omega^A\prod_{j=1}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle + \sum_{i=1}^{M}\Omega_i^A B(\lambda)\prod_{j\neq i}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle,$$

где обозначено

$$\Omega^A = a(\lambda)\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{b(\lambda_j-\lambda)},\quad \Omega_i^A = -a(\lambda_i)\frac{c(\lambda_i-\lambda)}{b(\lambda_i-\lambda)}\prod_{j\neq i}^{M}\frac{1}{b(\lambda_j-\lambda_i)},$$

и аналогично

$$D(\lambda)\prod_{j=1}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle = \Omega^D\prod_{j=1}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle + \sum_{i=1}^{M}\Omega_i^D B(\lambda)\prod_{j\neq i}^{M}B(\lambda_j)\left|0\right\rangle,$$

где

$$\Omega^D = d(\lambda)\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{b(\lambda-\lambda_j)},\quad \Omega_i^D = -d(\lambda_i)\frac{c(\lambda-\lambda_i)}{b(\lambda-\lambda_i)}\prod_{j\neq i}^{M}\frac{1}{b(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Тогда так построенные состояния (4.7) будут собственными для трансфер матрицы единственно если выполняются условия

$$\Omega_i^A + \Omega_i^D = 0 \quad \forall i,$$

что, с учетом соотношений (4.2), выполняется тождественно, если

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)}\prod_{j\neq i}^{M}\frac{b(\lambda_j-\lambda_i)}{b(\lambda_i-\lambda_j)} = 1. \tag{4.8}$$

Так мы получили уравнения Бете в довольно общем случае недиагональной R-матрицы. Соответствующее собственное значение трансфер-матрицы на таких полученных повышением состояниях:

$$\tau_M(\lambda) = \Omega^A + \Omega^D = d(\lambda)\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{b(\lambda-\lambda_j)} + a(\lambda)\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{b(\lambda_j-\lambda)}. \tag{4.9}$$

5 Спектр и вычеты трансфер-матрицы, уравнения Бете

Мы работаем с R-матрицей вида

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda,\mu) & c(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & c(\lambda,\mu) & b(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где для трех различных случаев имеем

$$b(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+\eta},\quad c(\lambda) = \frac{\eta}{\lambda+\eta} \text{ – XXX, случай } |\Delta| = 1, \tag{5.2}$$

$$b(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda+\eta)}, \quad c(\lambda) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda+\eta)} \text{ – XXZ, случай } \ |\Delta = \cosh(\eta)| < 1, \tag{5.3}$$

$$b(\lambda) = \frac{\sin(\lambda)}{\sin(\lambda+\eta)}, \quad c(\lambda) = \frac{\sin(\eta)}{\sin(\lambda+\eta)} \text{ – XXZ, случай } \ |\Delta = \cos(\eta)| > 1. \tag{5.4}$$

Для XXX-модели гамильтониан не зависит от параметра анизотропии η, однако мы в своих выкладках будем его удерживать для прозрачности аналогии между XXX и XXZ. Для последней мы будем работать в области $|\Delta| < 1$. Матрица монодромии определяется тогда как

$$T(\lambda, \{\xi_i\}) = L_N(\lambda, \xi_N) \dots L_2(\lambda, \xi_2) L_1(\lambda, \xi_1) \tag{5.5}$$

произведение N операторов $L_j(\lambda, \xi_j) = R_{0j}(\lambda - \xi_j)$, действующих нетривиально на $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_j$, где параметры ξ_i, как видно, суть поправки к спектральному параметру λ на каждом из узлов. Они называются параметрами неоднородности, так как содержат в себе разницу между константами взаимодействия $J_{i(i+1)}$ модели.

5.1 XXX-модель

В случае XXX-модели оператор Лакса L_j легко разложить в линейную комбинацию единичного оператора $\hat{1}_{0j}$ и оператора перестановки P_{0j} пространств $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_j$:

$$L_j(\lambda, \xi_j) = R_{0j}(\lambda - \xi_j) = \frac{\lambda - \xi_j}{\lambda - \xi_j + \eta} \hat{1}_{0j} + \frac{\eta}{\lambda - \xi_j + \eta} P_{0j}, \tag{5.6}$$

где в матричном виде

$$\hat{1}_{0j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{0j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Тогда матрица монодромии принимает вид

$$T(\lambda) = \Big(\prod_{j=1}^{N} (\lambda - \xi_j + \eta)^{-1} \Big) [(\lambda - \xi_N)\hat{1} + \eta P]_{0N} \dots [(\lambda - \xi_1)\hat{1} + \eta P]_{01} \tag{5.8}$$

Для начала проверим связь (3.2) между логарифмической производной трансфер-матрицы и гамильтонианом, положив для простоты случай однородным $\xi_j = \xi, \ \forall j$. Некоторые полезные нам очевидные свойства оператора перестановки:

$$P_{0j}^2 = \hat{1}_{0j}, \quad P_{jk} P_{kl} = P_{jl} P_{jk}, \quad \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} P_{0j} = \hat{1}_j.$$

В таком случае, в точке $\lambda = \xi$ трансфер-матрица есть

$$\mathcal{T}(\xi) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} T(\xi) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}(P_{0N} \dots P_{02} P_{01}) = (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} P_{01}) P_{1N} \dots P_{13} P_{12} = U, \tag{5.9}$$

где U - оператор циклического сдвига всей решетки. Теперь чтобы найти второй интеграл движения

$$\frac{d}{d\lambda} \log \mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi} = (\mathcal{T}(\xi))^{-1} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi},$$

необходимо знать производную оператора Лакса

$$\frac{d}{d\lambda}L_j(\lambda,\xi)=\eta^{-1}[\hat{1}-P]_{0j},$$

откуда

$$\begin{aligned}\eta\frac{d}{d\lambda}\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}&=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\big([\hat{1}-P]_{0N}P_{0(N-1)}\dots P_{01}+\dots+P_{0N}\dots P_{02}[\hat{1}-P]_{01}\big)=\\&=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\big(P_{01}[\hat{1}-P]_{1N}P_{1(N-1)}\dots P_{12}+P_{01}P_{1N}[\hat{1}-P]_{1(N-1)}\dots P_{12}+\dots\big)+\\&+\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\big(P_{N(N-1)}P_{N(N-2}\dots P_{N2}[\hat{1}-P]_{N1}P_{0N}\big).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Из последнего равенства ясно, что

$$\eta(\mathcal{T}(\xi))^{-1}\frac{d}{d\lambda}\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}=\sum_{j=1}^{N}[P_{j(j+1)}-\hat{1}_{j(j+1)}].$$

Используя теперь тот факт, что

$$\sum_{\alpha=x,y,z}\sigma_j^\alpha\otimes\sigma_{j+1}^\alpha=2P_{j(j+1)}-\hat{1}_{j(j+1)},\tag{5.11}$$

получим, наконец, что действительно

$$Q_1\propto\frac{d}{d\lambda}\log\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=x,y,z}\frac{1}{2}(\sigma_j^\alpha\sigma_{j+1}^\alpha-\hat{1})=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=x,y,z}\Big(S_j^\alpha S_{j+1}^\alpha-\frac{1}{4}\Big)=\hat{H}_{XXX}.\tag{5.12}$$

Собственные значения трансфер-матрицы (4.9) в неоднородном случае даются выражением

$$\tau(\lambda)=\prod_{k=1}^{M}\frac{\lambda-\lambda_k-\eta}{\lambda-\lambda_k}+\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda-\xi_j}{\lambda-\xi_j+\eta}\prod_{k=1}^{M}\frac{\lambda-\lambda_k+\eta}{\lambda-\lambda_k}.\tag{5.13}$$

До сих пор в нашей задаче собственные значения операторов A и B были равны

$$a(\lambda)=1,\quad d(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}b(\lambda-\xi_j),$$

однако для дальнейших рассуждений нам будет удобно сменить нормировку, чтобы устранить особенности этих функций в точках $\xi_j-\eta$, переопределив

$$\tilde{a}(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\xi_j+\eta),\quad \tilde{d}(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\xi_j).\tag{5.14}$$

В наших обозначениях это равносильно умножению матрицы монодромии на

$$\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\xi_j+\eta).\tag{5.15}$$

Помимо этого, мы также переопределим матрицу монодромии, произведя поворот (называемый далее "твист"):

$$\tilde{\mathcal{T}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}(gL_N \dots L_2 L_1), \tag{5.16}$$

который сохраняет коммутационные соотношения (3.3) трансфер-матрицы, так как для любого такого $g \in GL(2)$ верно, что $(g \otimes g)R = R(g \otimes g)$. Это преобразование можно расценивать как изменение граничных условий (2.6) нашей задачи. Мы для простоты будем считать, что g - диагональная матрица

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

В случае однородной цепочки физически это преобразование можно трактовать как разные вклады в гамильтониан двух разных проекций спина, взяв корень из $g = g_0^N$ и разнеся такие операторы внутри следа, по одному g_0 на узел. Легко проверить, что уравнения Бете (4.8) не изменят свой вид при таком преобразовании и суть

$$\frac{g_1}{g_2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda_i - \xi_j + \eta}{\lambda_i - \xi_j} = \prod_{k \neq i}^{M} \frac{\lambda_i - \lambda_k + \eta}{\lambda_i - \lambda_k - \eta}. \tag{5.18}$$

Собственные значения трансфер-матрицы $\tilde{\mathcal{T}}$ теперь

$$\tilde{\tau}(\lambda) = g_1 \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \xi_j + \eta) \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda - \lambda_k - \eta}{\lambda - \lambda_k} + g_2 \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \xi_j) \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda - \lambda_k + \eta}{\lambda - \lambda_k}. \tag{5.19}$$

Изучим теперь поведение повернутой (5.16) трансфер-матрицы, нормированной на полином

$$\prod_{j=1}^{N} (\lambda - \xi_j), \tag{5.20}$$

в точках ξ_j. Вид собственных значений (5.19) предполагает, что должно быть справедливо разложение

$$\frac{\tilde{\mathcal{T}}(\lambda)}{\prod_j (\lambda - \xi_j)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda - \xi_j + \eta}{\lambda - \xi_j} \hat{H}_j = \sum_{j=1}^{N} \Big(\hat{H}_j + \frac{\eta}{\lambda - \xi_j} \hat{H}_j \Big), \tag{5.21}$$

здесь не зависящие от λ операторы $\hat{H}_j$ - вычеты трансфер-матрицы. Они, как выяснится в дальнейшем, играют особенно важную роль. Необходимо отметить, что сейчас для простоты рассматривается случай, когда все ξ_j попарно различны, то есть в них трансфер-матрица имеет полюса не старше первого порядка. Ясно, что трансфер-матрица не имеет особенностей в точках λ_i, так как они устранены уравнениями Бете (5.18). Из явного выражения (5.8) для матрицы монодромии вид этих вычетов

$$\hat{H}_j = \left(1 + \eta \frac{P_{jN}}{(\xi_j - \xi_N)}\right) \dots \left(1 + \eta \frac{P_{j(j+1)}}{(\xi_j - \xi_{j+1})}\right) g_j \left(1 + \eta \frac{P_{j(j-1)}}{(\xi_j - \xi_{j-1})}\right) \dots \left(1 + \eta \frac{P_{j1}}{(\xi_j - \xi_1)}\right) \tag{5.22}$$

дается разложением на простые дроби, справедливым для полюсов первого порядка. Их собственные значения получаются аналогично из собственных значений (5.19) трансфер-матрицы

$$H_j = g_1 \prod_{l \neq j}^{N} \frac{\xi_j - \xi_l + \eta}{\xi_j - \xi_l} \prod_{k=1}^{M} \frac{\xi_j - \lambda_k - \eta}{\xi_j - \lambda_k}. \tag{5.23}$$

Разложение (5.21) справедливо, в силу известной теоремы для функций комплексного переменного, в $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\xi_j\}$. Из предельного поведения перенормированного (5.15),(5.20) оператора Лакса (5.6) в $\lambda \to \pm\infty$

$$\tilde{L}_j(\pm\infty, \xi_j) = \hat{1}_{0j} \tag{5.24}$$

получим, что матрица монодромии вырождается в тожественный оператор $\tilde{T}(\pm\infty) = g \cdot (\hat{1}_0 \otimes \hat{1})$, то есть

$$\frac{\tilde{\mathcal{T}}(\pm\infty)}{\prod_j(\pm\infty - \xi_j)} = \operatorname{Tr} g \cdot \hat{1}. \tag{5.25}$$

Таким образом, рассмотрев предельное поведение разложения трансфер-матрицы (5.21) в $\lambda \to \pm\infty$, мы продемонстрируем справедливость теоремы Коши о полной сумме вычетов

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{H}_j = \operatorname{Tr} g \cdot \hat{1}, \tag{5.26}$$

а значит для собственных значений $\hat{H}_j$ должно быть верно важное для нас в дальнейшем тождество

$$\sum_{j=1}^{N} H_j = \operatorname{Tr} g. \tag{5.27}$$

Разумеется, последнее получается прямым путем из разложения (5.21) и (5.19), так как наборы собственных векторов трансфер-матрицы и ее вычетов $\hat{H}_j$ совпадают. Такой ход не доказывает полностью теорему Коши, но будет, тем не менее, нам удобен впоследствии.

5.2 XXZ-модель

Теперь, после рассмотрения сравнительно простого XXX-случая, проведем те же процедуры с более XXZ. Оператор Лакса теперь имеет вид

$$L_j(\lambda, \xi_j) = R_{0j}(\lambda - \xi_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\lambda-\xi_j)}{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)} & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)} & 0 \\ 0 & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)} & \frac{\sinh(\lambda-\xi_j)}{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Нам, как и в случае с XXX-моделью, удобно представить этот оператор в виде следующей линейной комбинации

$$L_j(\lambda, \xi_j) = \frac{1}{\sinh(\lambda - \xi_j + \eta)} \big(l_j^1 \hat{1}_{0j} + l_j^P P_{0j} + l_j^z \sigma_0^z \otimes \sigma_j^z \big), \tag{5.29}$$

где коэффициенты разложения равны

$$\begin{gathered} l_j^1 = \frac{1}{2}(\sinh(\lambda - \xi_j + \eta) + \sinh(\lambda - \xi_j) - \sinh\eta), \\ l_j^P = \sinh\eta, \\ l_j^z = \frac{1}{2}(\sinh(\lambda - \xi_j + \eta) - \sinh(\lambda - \xi_j) - \sinh\eta). \end{gathered} \tag{5.30}$$

Тогда матрица монодромии - это упорядоченное произведение

$$T(\lambda)=\prod_{j=N}^{j=1}\frac{1}{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)}\big(l_j^1\hat{1}_{0j}+l_j^P P_{0j}+l_j^z\sigma_0^z\otimes\sigma_j^z\big). \tag{5.31}$$

Как и ранее, сперва рассмотрим однородный случай $\xi_j=\xi,\ \forall j$, и убедимся, что воспроизводится гамильтониан XXZ-модели. Трансфер-матрица в точке ξ

$$\mathcal{T}(\xi)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}T(\xi)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}(P_{0N}\dots P_{01})=P_{1N}\dots P_{12}=U\ -$$

оператор полного циклического сдвига цепочки. Теперь отыщем

$$Q_1\propto\frac{d}{d\lambda}\log\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}.$$

Для этого вычислим

$$\frac{d}{d\lambda}L_j(\lambda,\xi)|_{\lambda=\xi}=\frac{1}{\sinh\eta}(\cosh^2(\eta/2)\hat{1}-\cosh\eta\,P-\sinh^2(\eta/2)\sigma_0^z\otimes\sigma_j^z),$$

откуда

$$\sinh\eta\,\frac{d}{d\lambda}\log\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}=\sum_{j=1}^{N}[\cosh^2(\eta/2)P-\cosh\eta\,\hat{1}-\sinh^2(\eta/2)\sigma^z\otimes\sigma^z]_{j(j+1)}, \tag{5.32}$$

т.к. после взятия следа операторы Лакса останутся локальными и после домножения на обратный оператор их можно переставлять из-за коммутации. Таким образом, получили

$$\sinh\eta\,\frac{d}{d\lambda}\log\mathcal{T}(\lambda)|_{\lambda=\xi}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}(\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z+\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y+\cosh\eta\,\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z-\cosh\eta\,\hat{1}), \tag{5.33}$$

что в точности равно $\hat{H}_{XXZ}$, с учетом $\Delta=\cosh\eta$.

Вернемся теперь к неоднородному случаю и перенормируем трансфер-матрицу подобно тому, как это происходило в случае XXX-модели, выбрав

$$\tilde{a}(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}\sinh(\lambda-\xi_j+\eta),\quad \tilde{d}(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}\sinh(\lambda-\xi_j), \tag{5.34}$$

тогда матрица монодромии домножится на $\prod_{j=N}^{j=1}(\sinh(\lambda-\xi_j+\eta))$. После действия твиста

$$\tilde{\mathcal{T}}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}(gL_{0N}\dots L_{02}L_{01}) \tag{5.35}$$

уравнения Бете (4.8) не изменят свой вид

$$\frac{g_1}{g_2}\prod_{j=1}^{N}\frac{\sinh(\lambda_i-\xi_j+\eta)}{\sinh(\lambda_i-\xi_j)}=\prod_{k\neq i}^{M}\frac{\sinh(\lambda_i-\lambda_k+\eta)}{\sinh(\lambda_i-\lambda_k-\eta)}. \tag{5.36}$$

Собственные значения трансфер-матрицы $\tilde{\mathcal{T}}$ теперь даются

$$\tilde{\tau}(\lambda)=g_1\prod_{j=1}^{N}\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)\prod_{k=1}^{M}\frac{\sinh(\lambda-\lambda_k-\eta)}{\sinh(\lambda-\lambda_k)}+g_2\prod_{j=1}^{N}\sinh(\lambda-\xi_j)\prod_{k=1}^{M}\frac{\sinh(\lambda-\lambda_k+\eta)}{\sinh(\lambda-\lambda_k)}. \tag{5.37}$$

Нас, как и ранее, интересует разложение нормированной трансфер-матрицы:

$$\frac{\widetilde{\mathcal{T}}(\lambda)}{\prod_j \sinh(\lambda-\xi_j)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\sinh(\lambda-\xi_j+\eta)}{\sinh(\lambda-\xi_j)}\hat{H}_j = \sum_{j=1}^{N} \big(\cosh\eta + \sinh\eta\, \coth(\lambda-\xi_j)\big)\hat{H}_j. \tag{5.38}$$

Возникший гиперболический котангенс отвечает тому, что период по λ вдоль мнимой оси у левой части равенства есть $i\pi$, но не $2i\pi$ – таков период и у нормированных собственных значений трансфер-матрицы, так как $\sinh(z+i\pi) = -\sinh(z)$. Собственные значения этих вычетов можно найти, не выписывая их явно, т.к. функция $1/\sinh z$ имеет в нуле полюс первого порядка, как и $1/z$, и вычет $\mathrm{Res}|_{z=0}(1/\sinh z) = 1$. Поэтому собственные значения

$$H_j = g_1 \prod_{l\neq j}^{N} \frac{\sinh(\xi_j-\xi_l+\eta)}{\sinh(\xi_j-\xi_l)} \prod_{k=1}^{M} \frac{\sinh(\xi_j-\lambda_k-\eta)}{\sinh(\xi_j-\lambda_k)}. \tag{5.39}$$

Вид операторов $\hat{H}_j$ дается, в соответствии с (5.29),(5.30), следующим выражением

$$\hat{H}_j = \tilde{R}_{jN}(\xi_j-\xi_N)\dots\tilde{R}_{j(j+1)}(\xi_j-\xi_{j+1})g_j\tilde{R}_{j(j-1)}(\xi_j-\xi_N)\dots\tilde{R}_{j1}(\xi_j-\xi_1), \tag{5.40}$$

где переобозначено

$$\tilde{R}_{jk}(\xi_j-\xi_k) = \tilde{l}^{1}_{jk}\hat{1}_{jk} + \tilde{l}^{P}_{jk}P_{jk} + \tilde{l}^{z}_{jk}\sigma^z_j\otimes\sigma^z_k, \tag{5.41}$$

и коэффициенты разложения (5.30)

$$\begin{aligned} \tilde{l}^{1}_{jk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh(\xi_j-\xi_k+\eta)}{\sinh(\xi_j-\xi_k)} + 1 - \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_j-\xi_k)}\right), \\ \tilde{l}^{P}_{jk} &= \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_j-\xi_k)}, \\ \tilde{l}^{z}_{jk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sinh(\xi_j-\xi_k+\eta)}{\sinh(\xi_j-\xi_k)} - 1 - \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_j-\xi_k)}\right). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Разложение (5.38) справедливо, как и в случае с XXX, в $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{\xi_j \pm i\pi k\},\ k\in\mathbb{Z}$, т.е. особых точек счетно много и $\lambda=\infty$, соответственно, не является изолированной. Предельное поведение в $\lambda\to\pm\infty$ перенормированного (5.34),(5.38) оператора Лакса (5.29) дается

$$\tilde{L}_j(\pm\infty,\xi_j) = \tfrac{1}{2}(e^{\pm\eta}+1)\hat{1}_{0j} + \tfrac{1}{2}(e^{\pm\eta}-1)\sigma^z_0\otimes\sigma^z_j, \tag{5.43}$$

откуда можно получить предельный вид трансфер-матрицы (5.35), чем подтвердить теорему Коши аналогично XXX случаю. Мы ограничимся, однако, получением соотношения на собственные числа вычетов $\hat{H}_j$, а именно, для разложения (5.38) в пределе имеем

$$\frac{\tilde{\tau}(\pm\infty)}{\prod_j \sinh(\pm\infty-\xi_j)} = \sum_{j=1}^{N}(\cosh\eta\pm\sinh\eta)H_j, \tag{5.44}$$

после чего, заметив, что собственные значения (5.37) трансфер-матрицы равны

$$\frac{\tilde{\tau}(\pm\infty)}{\prod_j \sinh(\pm\infty-\xi_j)} = g_1 e^{\pm\eta(N-M)} + g_2 e^{\pm\eta M},$$

выясним, наконец, аналог тождества (5.27) для случая XXZ:

$$\sum_{j=1}^{N} H_j = g_1\frac{\sinh(\eta N-\eta M)}{\sinh\eta} + g_2\frac{\sinh(\eta M)}{\sinh\eta}. \tag{5.45}$$

5.3 Точка свободных фермионов

Интересной особенностью XXZ-модели, существенно отличающей ее от XXX-модели, является существование т.н. точки свободных фермионов, соответствующей $\eta = i\pi/2$. Физически $\eta = i\pi/2$ отвечает, ввиду $\Delta = \cosh(i\pi/2) = 0$, гамильтониану

$$\hat{H}_{XX} = J \sum_{j=1}^{N} (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y). \tag{5.46}$$

Такая модель называется уже XX-моделью ($J = J_x = J_y$). Свое название точка свободных фермионов получила потому, что (5.46), будучи выписан через повышающие и понижающие операторы, напоминает систему невзаимодействующих фермионов. Чтобы были корректно соблюдены коммутационные соотношения для фермионов, однако, необходимо эти преобразовать, доопределив каждому из них определенную фазу. Такое приведение к форме рождения-уничтожения называется преобразованием Йордана-Вигнера [14], оно позволяет, в частности, легко диагонализовать гамильтониан XX модели даже в присутствии внешнего поля.

Алгебраически поведение в этой точке особенно тем, что правая часть уравнений Бете

$$\frac{g_1}{g_2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sinh(\lambda_i - \xi_j + \eta)}{\sinh(\lambda_i - \xi_j)} = \prod_{k \neq i}^{M} \frac{\sinh(\lambda_i - \lambda_k + \eta)}{\sinh(\lambda_i - \lambda_k - \eta)}.$$

из-за периодичности $\sinh(z + i\pi) = -\sinh(z)$ гиперболических функций существенно упрощается:

$$\frac{g_1}{g_2} \prod_{j=1}^{N} i \coth(\lambda_i - \xi_j) = (-1)^{M-1} \tag{5.47}$$

В особо простом случае однородной модели, когда $\xi_j = \xi, \ \forall j$, это уравнение на корни N-ой степени из комплексного числа:

$$\big(i \coth(\lambda_i - \xi)\big)^N = \frac{g_2}{g_1}(-1)^{M-1}.$$

В дальнейшем мы часто будем переписывать те или иные тождества в этой точке свободных фермионов ввиду заметного их упрощения. Заметим, что аналитическое решение уравнений Бете для неоднородной модели, тем не менее, не упрощается в этой точке так существенно, чтобы иметь преимущество перед численными методами.

6 Связь с моделью Руйсенаарса-Шнайдера

Как было уже упомянуто во Введении, основным освещаемым в данной работе фактом является наличие связи между подробно рассмотренными выше квантовыми моделями магнетиков с известным примером классической интегрируемой модели - моделью Руйсенаарса-Шнайдера [3], которую далее для краткости будем называть RS-моделью. В последующих разделах мы, в том числе, введем необходимые для этого утверждения определения, следуя аналогии между XXX и XXZ случаями модели Гейзенберга.

6.1 XXX-модель и рациональная RS-модель

RS-модель представляет собой интегрируемую модель классической механики. Она описывает движение N точек на прямой со взаимодействием. Гамильтониан модели выглядит в рациональном случае так:

$$\mathscr{H} = \eta^{-1} \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta p_i} \prod_{k\neq i}^{N} \frac{q_i - q_k + \eta}{q_i - q_k}. \tag{6.1}$$

Эту модель часто называют релятивистской деформацией известной модели Калоджеро-Мозера [15], в которую она переходит в пределе $\eta \to 0$ (η поэтому еще называют обратной скоростью света в этой модели). Уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial_{p_i}\mathscr{H}, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i}\mathscr{H} \tag{6.2}$$

связывают скорости с импульсами

$$\dot{q}_i = -e^{-\eta p_i} \prod_{k\neq i}^{N} \frac{q_i - q_k + \eta}{q_i - q_k},$$

откуда уравнения движения

$$\ddot{q}_i = -\sum_{k\neq i} \frac{2\eta^2 \dot{q}_i \dot{q}_k}{(q_i - q_k)((q_i - q_k)^2 - \eta^2)}.$$

Хорошо известно, что RS-модель интегрируема, высшие интегралы движения даются следам степеней матрицы, называемой матрицей Лакса этой модели

$$\mathscr{H}_k = \eta^{-1}\mathrm{Tr}(\mathcal{L}^k). \tag{6.3}$$

Ее матричные элементы

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\eta \dot{q}_i}{q_i - q_j + \eta} \tag{6.4}$$

зависят от набора $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$. Уравнения движения системы эквивалентны [16] уравнению Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [M, \mathcal{L}], \tag{6.5}$$

где введена матрица

$$M_{ij} = \Big(\sum_{k\neq i} \frac{\eta \dot{q}_k}{q_i - q_k} - \sum_{k} \frac{\eta \dot{q}_k}{q_i - q_k + \eta} \Big)\delta_{ij} + \frac{\eta \dot{q}_i}{q_i - q_j}(1 - \delta_{ij}).$$

Из этого уравнения следует, таким образом, что все собственные значения матрицы Лакса - интегралы движения. Матрицу Лакса удобно представить в виде произведения

$$\mathcal{L} = \dot{Q} \cdot C, \tag{6.6}$$

где $Q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots q_N)$ и

$$C_{ij} = \frac{\eta}{q_i - q_j + \eta} - \tag{6.7}$$

т.н. матрица Коши.

Теперь, когда даны все необходимые определения, проясним утверждение о связи квантовой XXX-модели и рациональной модели RS. Если в приведенном выше выражении для матрицы Лакса заменить формально координаты q_i точек системы на ранее нами рассматриваемые ξ_i - параметры неоднородности, ассоциированные с узлами решетки

$$q_i \to \xi_i,\ \forall i,$$

параметр анизотропии η отождествить с обратной скоростью света η (потому, собственно, так и вводилось это обозначение), полагая при этом, разумеется, что размер решетки N совпадает с числом материальных точек, после чего положить

$$\dot{q}_i = 1/\eta H_i(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M), \tag{6.8}$$

где H_i - собственные значения вычетов трансфер матрицы XXX-модели, нами ранее полученные, то после этих преобразований матрица Лакса примет вид

$$\mathcal{L}(\{\xi_i\}, \{H_i\}) = \mathrm{diag}(H_1, H_2, \ldots H_N) \cdot C, \tag{6.9}$$

где $C = C(\{\xi_i\})$ - матрица Коши. Утверждение состоит в том, что собственные значения матрицы Лакса полностью определяются теперь элементами матрицы твиста, а именно, в инвариантном секторе M перевернутых спинов, ее спектр

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \big(\underbrace{g_1, \ldots, g_1}_{N-M}, \underbrace{g_2, \ldots, g_2}_{M}\big), \tag{6.10}$$

откуда, к тому же, высшие гамильтонианы RS-модели даются выражением

$$\eta \mathscr{H}_k = (N-M) g_1^k + M g_2^k.$$

В общем же случае матрица Лакса модели RS не приводится к диагональному виду и содержит Жордановы клетки.

Строгое доказательство утверждения (6.10) для рассматриваемого сейчас рационального случая дано в статье [6]. Опишем его вкратце.

Рассматривается более общий случай $g \in GL(n)$, который очевидным образом редуцируется к $g \in GL(2)$. От текущих обозначений все дальнейшие выкладки могут отличаться только глобальной сменой знака. Утверждается, что если определить две такие матрицы

$$\underset{N\times N}{\mathcal{L}_{ij}}(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M, g_1) = \frac{g_1 \eta}{\xi_i - \xi_j + \eta} \prod_{k\neq j}^{N} \frac{\xi_j - \xi_k + \eta}{\xi_j - \xi_k} \prod_{\gamma=1}^{M} \frac{\xi_j - \lambda_\gamma}{\xi_j - \lambda_\gamma + \eta} \tag{6.11}$$

и

$$\underset{M\times M}{\tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}}(\{\lambda_l\}_M, \{\xi_l\}_N, g_1) = \frac{g_1 \eta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + \eta} \prod_{\gamma\neq\beta}^{M} \frac{\lambda_\beta - \lambda_\gamma - \eta}{\lambda_\beta - \lambda_\gamma} \prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_\beta - \xi_k}{\lambda_\beta - \xi_k - \eta}, \tag{6.12}$$

то их характеристические полиномы <u>на уравнениях Бете</u> (5.18) связаны тождеством:

$$\det_{N\times N}\Big(\mathcal{L}_{ij}(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M, g_1) - \lambda\Big) = (g_1 - \lambda)^{N-M} \det_{M\times M}\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(\{\lambda_l\}_M, \{\xi_l\}_N, g_1) - \lambda\Big). \tag{6.13}$$

Доказательство этого факта опирается на ряд технических лемм, в основе которых лежат теоремы об инвариантности определителя относительно смены базиса, т.е представимости матрицы Лакса в виде некой комбинации матриц весьма специального вида, после чего доказательство апеллирует к устранимости полюсов вида

$$\frac{1}{\xi_i - \xi_j} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\xi_i - \xi_j + \eta}$$

у некоторых возникших в ходе доказательства матриц и полюсов вида

$$\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j + \eta}$$

у им двойственных (в вышеобозначенном смысле $\tilde{\mathcal{L}} \leftrightarrow \mathcal{L}$). В случае $g \in GL(n)$ в [6], ясно, тождество (6.13) применяется $2n$ раз, в результате чего доказывается, что собственными значениями матрицы Лакса выступают элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ матрицы $g \in GL(n)$ в кратностях, соответствующих секторам. В нашем же случае $GL(2)$, разумеется, сектор однозначно определяется числом перевернутых спинов M, посему достаточно двухкратного применения такого тождества, после чего, в полном соответствии с (6.10),

$$\det_{N\times N}\Big(\mathcal{L}_{ij}(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M, g_1) - \lambda\delta_{ij}\Big) = (g_1 - \lambda)^{N-M}(g_2 - \lambda)^M. \tag{6.14}$$

6.2 XXZ-модель и тригонометрическая RS-модель

Существование подобной связи между анизотропной моделью спиновой цепочки и тригонометрическим случаем классической интегрируемой модели Руйсенаарся является главным утверждением данной работы. В последующих разделах, после необходимых определений, будет выявлена полезность ранее полученных выражений (5.27),(5.45) для подтверждения нижеизлагаемой гипотезы.

Матрица Лакса тригонометрического случая RS-модели выглядит так

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\sinh\eta}{\sinh(q_i - q_j + \eta)} e^{\eta p_i} \prod_{k\neq i}^{N} \frac{\sinh(q_i - q_k - \eta)}{\sinh(q_i - q_k)}. \tag{6.15}$$

Гамильтониан системы, таким образом,

$$\mathscr{H} = \mathrm{Tr}\,\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} e^{\eta p_i} \prod_{k\neq i}^{N} \frac{\sinh(q_i - q_k - \eta)}{\sinh(q_i - q_k)}.$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \partial_{p_i}\mathscr{H}, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i}\mathscr{H}$$

связывают скорости с импульсами

$$\dot{q}_i = \eta e^{\eta p_i} \prod_{k\neq i}^{N} \frac{\sinh(q_i - q_k - \eta)}{\sinh(q_i - q_k)}. \tag{6.16}$$

Матрица Лакса

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\sinh\eta}{\sinh(q_i - q_j + \eta)} \eta^{-1} \dot{q}_i \tag{6.17}$$

доставляет - точно так же, как и в рациональном случае RS-модели, - набор интегралов движения системы [3]

$$\mathscr{H}_k = (\sinh\eta)^{-1}\mathrm{Tr}(\mathcal{L}^k).$$

Инволюция системы однозначно описывается уравнением Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [M, \mathcal{L}],$$

где матрицу M_{ij} можно получить из уравнений движения. Как и ранее, матрицу Лакса удобно представить в виде произведения

$$\mathcal{L} = \dot{Q} \cdot C, \tag{6.18}$$

где $Q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots q_N)$ и

$$C_{ij} = \eta^{-1}\frac{\sinh\eta}{\sinh(q_i - q_j + \eta)} \ -$$

матрица Коши.

Как и в прошлом случае, теперь производится формальная замена

$$q_i \to \xi_i, \ \dot{q}_i \to \eta H_i, \tag{6.19}$$

где ξ_i - параметры неоднородности XXZ модели, H_i - собственные значения вычетов трансфер-матрицы, то есть матрица Лакса выглядит теперь как

$$\mathcal{L}(\{\xi_i\}, \{H_i\}) = \mathrm{diag}(H_1, H_2, \dots, H_N) \cdot C. \tag{6.20}$$

Утверждается, что связь между классической RS-моделью и моделью Гейзенберга сохраняется и в тригонометрическом случае, а именно, что после такого преобразования

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \big(\underbrace{\dots, e^{-2\eta}g_1, g_1, e^{2\eta}g_1, \dots,}_{(N-M)\nmid 2}\underbrace{\dots, e^{-\eta}g_2, e^{\eta}g_2, \dots,}_{M\,|\,2}\big), \tag{6.21}$$

где, как видно, в отличие от рационального случая, спектральные компоненты раздвинуты кратные $e^{2\eta}$ интервалы (четности M и N выбраны для наглядности). Ясно потому, что наиболее полным и адекватным задаче доказательством существования этой связи было бы повторение конструкции доказательства аналога детерминантного тождества (6.13) из предыдущей главы. А именно, что для матриц

$$\underset{N\times N}{\mathcal{L}_{ij}}(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M, g_1) = \frac{g_1 \sinh\eta}{\sinh(\xi_i - \xi_j + \eta)} \prod_{k\neq j}^{N} \frac{\sinh(\xi_j - \xi_k + \eta)}{\sinh(\xi_j - \xi_k)} \prod_{\gamma=1}^{M} \frac{\sinh(\xi_j - \lambda_\gamma)}{\sinh(\xi_j - \lambda_\gamma + \eta)} \tag{6.22}$$

и

$$\underset{M\times M}{\tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}}(\{\lambda_l\}_M, \{\xi_l\}_N, g_1) = \frac{g_1 \sinh\eta}{\sinh(\lambda_\alpha - \lambda_\beta + \eta)} \prod_{\gamma\neq\beta}^{M} \frac{\sinh(\lambda_\beta - \lambda_\gamma - \eta)}{\sinh(\lambda_\beta - \lambda_\gamma)} \prod_{k=1}^{N} \frac{\sinh(\lambda_\beta - \xi_k)}{\sinh(\lambda_\beta - \xi_k - \eta)} \tag{6.23}$$

на уравнениях Бете (5.36) будет выполняться тождество, связывающее их характеристические полиномы

$$\underset{N\times N}{\det}\Big(\mathcal{L}_{ij}(\{\xi_l\}_N, \{\lambda_l\}_M, g_1) - \lambda\delta_{ij}\Big) = \det(g_1 S - \lambda\delta_{km}) \underset{M\times M}{\det}\Big(\tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(\{\lambda_l\}_M, \{\xi_l\}_N, g_1) - \lambda\delta_{\alpha\beta}\Big), \tag{6.24}$$

где введена дополнительная диагональная матрица размера $N - M \times N - M$

$$S_{ij} = \delta_{ij} \exp[\eta(N + 1 - 2i)], \tag{6.25}$$

которая, как видно, осуществляет эту сдвижку спектра. Доказательство этого результата (6.24) принадлежит одному из авторов статьи [6]. Ясно, что в случае XXZ модели аналогичным образом доказательство будет опираться на устранимость полюсов вида

$$\frac{1}{\sinh(\xi_i - \xi_j)} \;\; \text{и} \;\; \frac{1}{\sinh(\xi_i - \xi_j + \eta)}$$

у некоторых возникших в ходе доказательства матриц и полюсов вида

$$\frac{1}{\sinh(\lambda_i - \lambda_j)} \;\; \text{и} \;\; \frac{1}{\sinh(\lambda_i - \lambda_j + \eta)}$$

у им двойственных, так как все предыдущие шаги доказательства не зависят существенно от вида этих функций – рациональных, гиперболических, тригонометрических. Поведение же функции $1/\sinh z$ в точке $z = 0$, как уже отмечалось выше, совпадает с поведением функции $1/z$ в смысле устранимости особенностей, поэтому алгоритм доказательства останется неизменным.

Необходимость вышеупомянутой раздвижки спектра (6.21) матрицы Лакса на числа $e^{2\eta}$ можно продемонстрировать, не прибегая к тождеству (6.24). Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы Лакса

$$\det_{N\times N}(\mathcal{L}_{ij} - z\delta_{ij}) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k = 0. \tag{6.26}$$

Согласно основной теореме алгебры, оно имеет N корней $z_j \in \mathbb{C}$. Из вида матрицы Лакса (6.20) имеем $\mathcal{L}_{ii} = H_i$, тогда для суммы и произведения корней (6.26) по теореме Виета получаем, ввиду $c_N = (-1)^N,\ c_{N-1} = (-1)^{N-1}\sum_j H_j$,

$$\sum_{j=1}^{N} z_j = -c_{N-1}/c_N = \sum_{j=1}^{N} H_j, \quad \prod_{j=1}^{N} z_j = (-1)^N \det C \cdot \prod_{j=1}^{N} H_j, \tag{6.27}$$

где C - матрица Коши. Заметим теперь, что после смены знаков под аргументом правые части выражений (5.39) для H_j в произведении дают произведение всех левых частей уравнений Бете (5.36), правые части которых в произведении взаимоуничтожаются из-за симметрии. Остается, таким образом, лишь

$$\prod_{j=1}^{N} H_j = g_1^{N-M} g_2^{M} \prod_{j=1}^{N} \left(\prod_{l\neq j}^{N} \frac{\sinh(\xi_j - \xi_l + \eta)}{\sinh(\xi_j - \xi_l)} \right), \tag{6.28}$$

то есть, если верно (6.21), то из-за симметричной сдвижки в произведении всех собственных чисел наличие последней нельзя однозначно установить. Однако для суммы собственных чисел H_j полученное нами ранее выражение (5.45) согласуется с таким видом спектра, доставляя сумму членов двух геометрических прогрессий

$$g_1 \sum_{k=-\lfloor (N-M)/2 \rfloor}^{+\lfloor (N-M)/2 \rfloor} e^{2k\eta} + g_2 \sum_{k=-M/2}^{M/2} e^{2k\eta} = g_1 \frac{\sinh(\eta N - \eta M)}{\sinh \eta} + g_2 \frac{\sinh(\eta M)}{\sinh \eta}. \tag{6.29}$$

Нам кажется важным теперь проверить явно правильность гипотезы о виде спектра для случаев небольших N и M.

6.2.1 Спектр для случая $N = 2$

Ниже мы произведем эту проверку для особенно простого случая $N = 2, M = 1$. Уравнения Бете принимают вид

$$\frac{\sinh(\lambda_1 - \xi_1 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \xi_1)} \frac{\sinh(\lambda_1 - \xi_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \xi_2)} = \frac{g_2}{g_1},$$

собственные значения вычетов трансфер-матрицы принимают вид

$$H_1 = g_1 \frac{\sinh(\xi_1 - \xi_2 + \eta)}{\sinh(\xi_1 - \xi_2)} \frac{\sinh(\xi_1 - \lambda_1 - \eta)}{\sinh(\xi_1 - \lambda_1)},$$

$$H_2 = g_1 \frac{\sinh(\xi_2 - \xi_1 + \eta)}{\sinh(\xi_2 - \xi_1)} \frac{\sinh(\xi_2 - \lambda_1 - \eta)}{\sinh(\xi_2 - \lambda_1)}.$$

Матрица Лакса

$$\mathcal{L} = \mathrm{diag}(H_1, H_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sinh \eta}{\sinh(\xi_1 - \xi_2 + \eta)} \\ \frac{\sinh \eta}{\sinh(\xi_2 - \xi_1 + \eta)} & 1 \end{pmatrix}$$

ее характеристическое уравнение

$$\det(\mathcal{L} - z) = (H_1 - z)(H_2 - z) - H_1 H_2 \frac{\sinh^2 \eta}{\sinh(\xi_1 - \xi_2 + \eta) \sinh(\xi_2 - \xi_1 + \eta)} = 0.$$

Произведение его корней

$$z_1 z_2 = H_1 H_2 \Big(1 - \frac{\sinh^2 \eta}{\sinh(\xi_1 - \xi_2 + \eta) \sinh(\xi_2 - \xi_1 + \eta)}\Big) = H_1 H_2 \det C$$

в точке $\eta = i\pi/2$ это

$$z_1 z_2 = i^2 g_1 g_2 \coth(\xi_1 - \xi_2) \coth(\xi_2 - \xi_1) \tanh^2(\xi_1 - \xi_2) = g_1 g_2.$$

Сумма корней

$$x_1 + x_2 = H_1 + H_2 = g_1 + g_2,$$

то есть спектр матрицы Лакса есть в точности

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = (g_1, g_2),$$

что не отличается от рационального случая. Для проверки факта раздвижки спектра ниже проверим для $N = 3, M = 2$.

6.2.2 Спектр для случая $N = 3$

Рассмотрим теперь случай $N = 3,\ M = 2$. Уравнения Бете

$$\frac{\sinh(\lambda_1-\xi_1+\eta)}{\sinh(\lambda_1-\xi_1)}\frac{\sinh(\lambda_1-\xi_2+\eta)}{\sinh(\lambda_1-\xi_2)}\frac{\sinh(\lambda_1-\xi_3+\eta)}{\sinh(\lambda_1-\xi_3)}=\frac{g_2}{g_1}\frac{\sinh(\lambda_1-\lambda_2+\eta)}{\sinh(\lambda_1-\lambda_2-\eta)},$$

$$\frac{\sinh(\lambda_2-\xi_1+\eta)}{\sinh(\lambda_2-\xi_1)}\frac{\sinh(\lambda_2-\xi_2+\eta)}{\sinh(\lambda_2-\xi_2)}\frac{\sinh(\lambda_2-\xi_3+\eta)}{\sinh(\lambda_2-\xi_3)}=\frac{g_2}{g_1}\frac{\sinh(\lambda_2-\lambda_1+\eta)}{\sinh(\lambda_2-\lambda_1-\eta)}.$$

Собственные значения вычетов трансфер-матриц

$$H_1=g_1\frac{\sinh(\xi_1-\xi_2+\eta)}{\sinh(\xi_1-\xi_2)}\frac{\sinh(\xi_1-\xi_3+\eta)}{\sinh(\xi_1-\xi_3)}\frac{\sinh(\xi_1-\lambda_1-\eta)}{\sinh(\xi_1-\lambda_1)}\frac{\sinh(\xi_1-\lambda_2-\eta)}{\sinh(\xi_1-\lambda_2)},$$

$$H_2=g_1\frac{\sinh(\xi_2-\xi_1+\eta)}{\sinh(\xi_2-\xi_1)}\frac{\sinh(\xi_2-\xi_3+\eta)}{\sinh(\xi_2-\xi_3)}\frac{\sinh(\xi_2-\lambda_1-\eta)}{\sinh(\xi_2-\lambda_1)}\frac{\sinh(\xi_2-\lambda_2-\eta)}{\sinh(\xi_2-\lambda_2)},$$

$$H_3=g_1\frac{\sinh(\xi_3-\xi_1+\eta)}{\sinh(\xi_3-\xi_1)}\frac{\sinh(\xi_3-\xi_2+\eta)}{\sinh(\xi_3-\xi_2)}\frac{\sinh(\xi_3-\lambda_1-\eta)}{\sinh(\xi_3-\lambda_1)}\frac{\sinh(\xi_3-\lambda_2-\eta)}{\sinh(\xi_3-\lambda_2)}.$$

Матрица Лакса

$$\mathcal{L}=\mathrm{diag}(H_1,H_2,H_3)\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_1-\xi_2+\eta)} & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_1-\xi_3+\eta)}\\ \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_2-\xi_1+\eta)} & 1 & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_2-\xi_3+\eta)}\\ \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_3-\xi_1+\eta)} & \frac{\sinh\eta}{\sinh(\xi_3-\xi_1+\eta)} & 1\end{pmatrix}.$$

Ее характеристический полином в точке $\eta = i\pi/2$

$$\det(\mathcal{L}-z)=(H_1-z)(H_2-z)(H_3-z)+\frac{2H_1H_2H_3}{\cosh(\xi_1-\xi_2)\cosh(\xi_2-\xi_3)\cosh(\xi_1-\xi_3)}-$$

$$-(H_1-z)\frac{H_2H_3}{\cosh^2(\xi_2-\xi_3)}-(H_2-z)\frac{H_1H_3}{\cosh^2(\xi_1-\xi_3)}-(H_3-z)\frac{H_1H_3}{\cosh^2(\xi_1-\xi_2)}.$$

Произведение корней

$$-z_1z_2z_3=H_1H_2H_3\det C,$$

где

$$H_1H_2H_3=(-1)^3i^6g_1g_2^2\coth^2(\xi_1-\xi_2)\coth^2(\xi_1-\xi_3)\coth^2(\xi_2-\xi_3),$$

а

$$\det C=\tanh^2(\xi_1-\xi_2)\tanh^2(\xi_1-\xi_3)\tanh^2(\xi_2-\xi_3),$$

откуда

$$z_1z_2z_3=g_1g_2^2.$$

Сумма корней

$$z_1+z_2+z_3=H_1+H_2+H_3,$$

равна из (5.45)

$$\sum_i H_i=g_1+g_2\frac{\sinh 2\eta}{\sinh\eta}=g_1,$$

где $\eta = i\pi/2$, т.е $e^\eta = i$. Для кубического уравнения мы не вправе заключить, что

$$\mathrm{Spec}\mathcal{L}=(\omega_1,i\omega_2,-i\omega_2),$$

Так как до полной определенности системы уравнений не хватает суммы попарных произведений корней, однако ключевой для повествования момент - раздвижку спектра - мы продемонстировали.

7 Заключение

В данной работе приведен, в соответствии с заявленной во введении целью, достаточно подробный анализ замечательного явления связи межу квантовыми и классическими интегрируемыми системами. Важным конкретным промежуточным результатом является, в частности, соотношение (6.7) для суммы вычетов трансфер-матрицы в рациональном случае, представляющее собой операторный вариант теоремы Коши (6.7); позволившее догадаться о существовании ее аналога, полученного потом для суммы собственных значений вычетов трансфер-матрицы в тригонометрическом случае (5.45), что в конечном итоге позволило произвести проверку необходимости гипотезы о виде спектра матрицы Лакса (6.21). Это демонстрирует правильность такого последовательного подхода к изучению подобных моделей а также возможность получения аналогичного результата для более общего, эллиптического случая.

Возможным продолженем работы по данной тематике видится изучение связи таких моделей с различными сюжетами в теории поля, а также с вышеупомянутой процедурой фермионизации Йордана-Вигнера, имеющей богатый геометрический смысл.

Благодарности

Автор данной работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю, Забродину Антону Владимировичу, за вводные лекции по интегрируемым системам, сделавшие возможным постановку такой задачи, детальное ее освещение и многочисленные ценные замечания; а также Зотову Андрею Владимировичу за крайне полезные обсуждения промежуточных результатов.

8 Приложение

В главе об алгебраическом анзаце Бете упоминалось тождество

$$R_{12}(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)=T_2(\mu)T_1(\lambda)R_{12}(\lambda,\mu),$$

связывающее R-матрицу следующего вида

$$R(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&b(\lambda,\mu)&c(\lambda,\mu)&0\\0&c(\lambda,\mu)&b(\lambda,\mu)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

с матрицей монодромии (4.3). Для $T_1(\lambda), T_2(\mu)$ тогда имеем явно

$$T_1(\lambda)=\begin{pmatrix}A(\lambda)&0&B(\lambda)&0\\0&A(\lambda)&0&B(\lambda)\\C(\lambda)&0&D(\lambda)&0\\0&C(\lambda)&0&D(\lambda)\end{pmatrix},\quad T_2(\mu)=\begin{pmatrix}A(\mu)&B(\mu)&0&0\\C(\mu)&D(\mu)&0&0\\0&0&A(\mu)&B(\mu)\\0&0&C(\mu)&D(\mu)\end{pmatrix}.$$

Не выписывая крайне громоздкого вида получившегося матричного тождества, приведем полученные из него поэлементным равенством соотношения:

$$[A(\lambda),A(\mu)]=[B(\lambda),B(\mu)]=[C(\lambda),C(\mu)]=[D(\lambda),D(\mu)]=0,$$

$$[A(\lambda),D(\mu)]=\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}\big(C(\mu)B(\lambda)-C(\lambda)B(\mu)\big),$$

$$[D(\lambda),A(\mu)]=\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}\big(B(\mu)C(\lambda)-B(\lambda)C(\mu)\big),$$

$$[B(\lambda),C(\mu)]=\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}\big(D(\mu)A(\lambda)-D(\lambda)A(\mu)\big),$$

$$[C(\lambda),B(\mu)]=\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}\big(A(\mu)D(\lambda)-A(\lambda)D(\mu)\big),$$

$$A(\mu)B(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}B(\lambda)A(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}B(\mu)A(\lambda),$$

$$B(\mu)A(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}A(\lambda)B(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}A(\mu)B(\lambda),$$

$$A(\mu)C(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}C(\lambda)A(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}C(\mu)A(\lambda),$$

$$C(\mu)A(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}A(\lambda)C(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}A(\mu)C(\lambda),$$

$$C(\mu)D(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}D(\lambda)C(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}D(\mu)C(\lambda),$$

$$D(\mu)C(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}C(\lambda)D(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}C(\mu)D(\lambda),$$

$$D(\mu)B(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}B(\lambda)D(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}B(\mu)D(\lambda),$$

$$B(\mu)D(\lambda)=\frac{1}{b(\lambda-\mu)}D(\lambda)B(\mu)-\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}D(\mu)B(\lambda).$$

Список литературы

[1] H.Bethe, *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Zeitschr. fur Physik **71** (1931) 205-226

[2] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, London, Academic Press, 1982

[3] S.N.M. Ruijsenaars, H.Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370-405

[4] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Gaudin Hamiltonians generate the Bethe algebra of a tensor power of vector representation of gl_N* , St. Petersburg Math. J. **22** (2011) 463-472 [arXiv:0904.2131]; E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Bethe algebra of Gaudin model, Calogero-Moser space and Cherednik algebra*, Int. Math. Res. Not. **2014** (2014) Issue 5 1174-1204 [arXiv:0906.5185].

[5] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *KZ characteristic variety as the zero set of classical Calogero-Moser Hamiltonians*, SIGMA **8** (2012) 072 (11 pages) [arXiv:1201.3990]; E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Bethe subalgebras of the group algebra of the symmetric group*, [arXiv:1004.4248]; E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Spaces of quasi-exponentials and representations of the Yangian $Y(gl_N)$*, [arXiv:1303.1578].

[6] A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, *Spectrum of quantum transfer matrices via classical many-body systems*, JHEP **01** (2014) 070, [arXiv:1310.6958].

[7] Z. Tsuboi, A. Zabrodin, A. Zotov *Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems*, JHEP **05** (2015) 086 [arXiv:1412.2586]

[8] A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, *Classical tau-function for quantum spin chains*, JHEP **1309** (2013) 064 [arXiv:1112.3310].

[9] A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, *The master T-operator for the Gaudin model and the KP hierarchy*, Nucl. Phys. **B883** (2014) 173-223 [arXiv:1306.1111].

[10] A. Zabrodin, *The master T-operator for inhomogeneous XXX spin chain and mKP hierarchy* SIGMA **10** (2014) 006 (18 pages), [arXiv:1310.6988].

[11] A. Zabrodin *Quantum spin chains and integrable many-body systems of classical mechanics* [arXiv:1409.4099]

[12] L. Faddeev, E. Sklyanin, L. Takhtajan, *The quantum inverse problem method. I*, Theor. Math. Phys. **40** (1980) 688;
V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge U.K., 1997.

[13] L. Faddeev, L. Takhtajan, *The spectrum and scattering of excitations in the onedimensional isotropic Heisenberg model*, Zap. Nauch. Semin. LOMI **109** (1981) 134-178.

[14] P. Jordan, E. Wigner, *Über das Paulische Äquivalenzverbot*, Zeitschrift für Physik **47**, No. 9. (1928), 631-651

[15] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12** (1971) 419-436;
J. Moser, *Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations*, Adv. Math. **16** (1976) 354-370.

[16] M. Olshanetsky, A. Perelomov, *Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Reps. **71** (1981) 313-400.