Министерство образования и науки

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и
квантовой теории поля

Солитон на доменной стенке и спин-орбитальное взаимодействие

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнила:
студентка 121 группы
Блянкинштейн Наталья Игоревна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Горский А.С.

Москва
2015

Содержание

1 Введение **3**

2 Постановка задачи **4**

2.1 Модель 4
2.2 Q-лампы 5
2.3 Доменная стенка 7
2.4 Спин-орбитальное взаимодействие 8

3 Методы исследования **10**

3.1 Теория возмущений 11
3.2 Адиабатическое приближение 12

4 Результаты **14**

5 Заключение **16**

6 Список литературы **17**

1 Введение

Топологические дефекты (солитоны) возникают во многих задачах теории поля, космологии, теории конденсированного состояния. Особый интерес представляют модели, в которых присутствуют дополнительные неабелевы внутренние степени свободы, локализованные на солитонах: стенках, струнах, монополях и т.п. Примерами таких работ являются [1]–[6]. Следующим возможным шагом является изучение теорий с солитонами на солитонах: в данной работе — Q-лампов на доменной стенке.

Q-лампами называются решения нелинейной O(3) σ-модели с дополнительным потенциальным членом некоторого вида. Эти солитоны были обнаружены Р. Лизом [7] и имеют одновременно ненулевые топологический и нётеровский заряды. Свойства таких конфигураций существенно отличаются от решений "чистой"σ-модели даже при малой константе связи у доп. потенциала, то есть в случае малого возмущения. Механизм их построения был обобщен на произвольные σ-модели Е. Абрахамом [8]. Достижение же Р. Лиза состоит в том, что ему удалось найти явный вид решений для O(3) σ-модели со специально выбранным потенциалом, а также исследовать устойчивость и рассеяния этих солитонов.

Одной из особенностей Q-лампов является тот факт, что в этой модели существуют стационарные многосолитонные решения, которые можно интерпретировать как невзаимодействующие частицы (это верно для неподвижной изначально конфигурации). Вопрос, на который отвечает данная работа, поставлен так: появится ли взаимодействие, и если да, то какое, если добавить в среде (в балке, во всем пространстве) спин-орбитальное взаимодействие.

2 Постановка задачи

2.1 Модель

Рассматривается модель со скалярными полями $\phi \in \Re$ и $\chi_i \in \Re,\ i = 1, 2, 3$ в 3+1–мерном пространстве-времени, допускающая существование доменной стенки и неабелевых внутренних степеней свободы, локализованных на ней. Лагранжиан такой теории

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \lambda(\phi^2 - v^2)^2, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi_i\partial^\mu\chi_i - \gamma((\phi^2 - \mu^2)\chi_i\chi_i + \beta(\chi_i\chi_i)^2) - \frac{1}{2}\alpha^2(\chi_i\chi_i - \chi_3\chi_3). \tag{2.3}$$

Для построения доменной стенки будем искать решения с разделенными переменными в виде $\phi = \phi(x_3)$, $\chi_i = \chi(x_3)S_i(t, x, y)$, где $S_iS_i = 1$, и поле S_i будет соответствовать O(3) σ-модели. В этом случае лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \frac{1}{2}\chi^2\partial_p S_i\partial^p S_i - \frac{1}{2}(\chi')^2 - \gamma((\phi^2 - \mu^2)\chi^2 + \beta\chi^4) - \frac{1}{2}\alpha^2\chi^2(1 - S_3^2) = \\ = \mathcal{L}_{wall} + 2\chi^2\mathcal{L}_{lump}, \tag{2.4}$$

где $p = 0, 1, 2$, штрихом обозначено дифференцирование по координате x_3 и

$$\mathcal{L}_{lump} = \frac{1}{4}\partial_p S_i\partial^p S_i - \frac{1}{4}\alpha^2(1 - S_3^2). \tag{2.5}$$

Можно выписать уравнения движения для действия (2.1):

$$\phi'' = 4\lambda(\phi^2 - v^2)\phi + 2\gamma\chi^2\phi, \tag{2.6}$$

$$\chi'' - 2\gamma(\phi^2 - \mu^2)\chi - 4\beta\gamma\chi^3 + 4\chi\mathcal{L}_{lump} = 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_p\partial^p u - \frac{2u^*\partial_p u\partial^p u}{1 + uu^*} + \frac{\alpha^2 u(1 - uu^*)}{1 + uu^*} = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим роль отдельных членов лагранжиана.

2.2 Q-лампы

Действие в трёхмерном пространстве-времени с лагранжианом (2.5) подробно исследовал Роберт Лиз в работе [7]: ему удалось найти явный вид солитонных решений, имеющих одновременно топологический и нётеровский заряды, причем первый связан с гомотопической группой $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, а последний с равномерным вращением во внутреннем пространстве (вокруг направления S_3; вообще говоря, потенциальное слагаемое нарушает O(3) симметрию модели до O(2)). Такие солитоны получили название "Q-лампы"(англ. "Q-lumps") по аналогии с "Q-шарами"Коулмана [9]. Они не запрещены теоремой Деррика (см., например, [10]), так как не являются статическими и стабилизированы наличием заряда. Выпишем явно эти решения и некоторые их свойства.

Для удобства перейдем от действительных полей S_i к комплексным u, u^* с помощью стереографической проекции: $u = \frac{S_1+iS_2}{1-S_3}$, тогда

$$\mathcal{L}_{lump} = \frac{\partial_p u \partial^p u^*}{(1+uu^*)^2} - \frac{\alpha^2 uu^*}{(1+uu^*)^2}. \tag{2.9}$$

Выражения для топологического, нётеровского зарядов и полной энергии выглядят как

$$N = \frac{1}{4\pi}\int \overrightarrow{S}\cdot[\partial_x \overrightarrow{S} \times \partial_y \overrightarrow{S}]d^2x = \frac{i}{2\pi}\int \frac{\partial_x u^* \partial_y u - \partial_x u \partial_y u^*}{(1+uu^*)^2} d^2x, \tag{2.10}$$

$$Q = \int \frac{1}{2}(S_2\partial_t S_1 - S_1 \partial_t S_2) d^2x = i\int \frac{u^*\partial_t u - u\partial_t u^*}{(1+uu^*)^2} d^2x, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{E}_{lump} = \int \frac{\partial_t u \partial_t u^* + \partial_i u \partial_i u^* + \alpha^2 uu^*}{(1+uu^*)^2} d^2x \tag{2.12}$$

и связаны соотношением Богомольного

$$\mathcal{E}_{lump} \geq 2\pi|N| + |\alpha Q|. \tag{2.13}$$

Таким образом, конфигурации, лежащие на границе имеют наименьшую энергию в секторе с заданными зарядами, и за счет сохранения зарядов классически устойчивы. Эта граница достигается при следующих условиях:

$$\partial_i u \pm i\varepsilon_{ij}\partial_j u = 0 \qquad \text{и} \qquad \partial_t u \pm i\alpha u = 0, \tag{2.14}$$

что сразу дает явный вид решений:

$$u(t,x,y) = u_0(x,y)\,\mathrm{e}^{\pm i\alpha t}, \qquad u_0(x,y) = u_0(x \pm iy), \tag{2.15}$$

причем для конечности энергии следует также потребовать, чтобы функция $u_0(z = x + iy)$ была (анти-)рациональной. В этом случае степень функции задает топологический заряд N конфигурации, а нётеровский заряд Q принимает конечное значение при $|N| \geq 2$.

Так, например, $u(t, z = x + iy) = \left(\frac{\lambda}{z}\right)^k \mathrm{e}^{i\alpha t}$ – радиально симметричный солитон с топ. зарядом k, а анзац $u(t, z) = \frac{\beta z + \gamma}{z^2 + \delta z + \epsilon}\,\mathrm{e}^{i\alpha t}$ содержит в себе все решения с топ. зарядом 2. Конфигурации, имеющие несколько достаточно удаленных друг от друга полюсов, можно интерпретировать как многочастичные и исследовать процессы рассеяния на пространстве модулей в переделе низких энергий, аналогично работам [12], [13], изучающим рассеяние монополей и вихрей, а особенно [14] и [15] о солитонах O(3) σ-модели.

2.3 Доменная стенка

Член $\mathcal{L}_{wall} = -\frac{1}{2}(\phi')^2 - \lambda(\phi^2 - v^2)^2 - \frac{1}{2}(\chi')^2 - \gamma((\phi^2 - \mu^2)\chi^2 + \beta\chi^4)$ позволяет составить статичную доменную стенку из полей $\phi(x_3)$ и $\chi(x_3)$: так, видно, что при $\chi(x_3) = 0$ решением уравнения движения (2.6) для $\phi(x_3)$ является обычный кинк $\phi(x_3) = -v\tanh\frac{m_\phi}{2}(x_3 - x_{30})$, однако такая конфигурация неустойчива ([2]). Устойчивая же будет иметь ненулевое ожидаемое значение $\sqrt{\frac{\mu^2}{2\beta}}$ внутри стенки (вблизи $x_3 = x_{30}$). Профили функций $\phi(x_3)$, $\chi(x_3)$, изображенные на рис. 2.1, 2.2, были получены численно в этой же работе [2] для некоторого выбора параметров $v, \lambda, \mu, \gamma, \beta$ лагранжиана $\mathcal{L}_{wall}$.

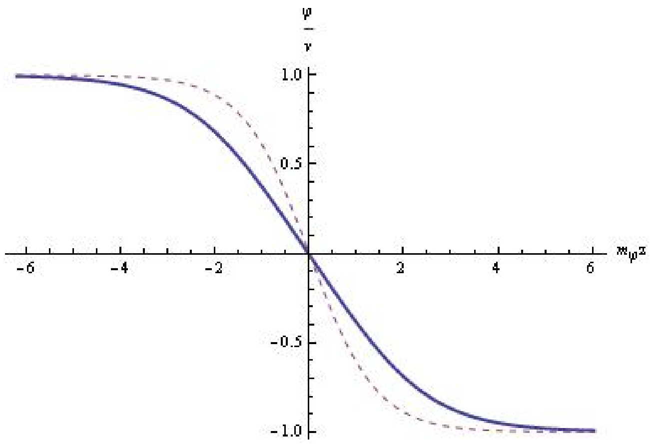

Рис. 2.1: Численное решение $\phi(z)$

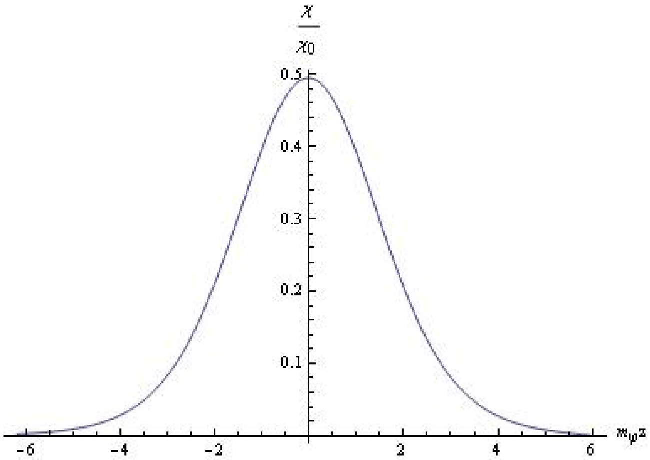

Рис. 2.2: Численное решение $\chi(z)$

Вместе с полем $\chi(x_3)$ поля S_i также оказываются локализованными на стенке вблизи поверхности $x_3 = x_{30}$ и, таким образом, описывают эффективную двумерную (точнее говоря, 2+1–мерную) теорию на доменной стенке.

2.4 Спин-орбитальное взаимодействие

Теперь добавим в балк спин-орбитальное взаимодействие (подробно о причинах возникновения этого члена см., например, [11]). Оно нарушает лоренц-инвариантность лагранжиана, приводит к запутыванию полей χ_i и координат и эффективно выражается слагаемым

$$\mathcal{L}_{so} = -\varepsilon(\partial_i \chi_i)^2 \tag{2.16}$$

или, в случае разделения переменных $\chi_i = \chi(z) S_i(t, x, y)$,

$$\mathcal{L}_{so} = -\varepsilon(\chi'^2(\frac{uu^*-1}{1+uu^*})^2 + 2\chi'\frac{uu^*-1}{1+uu^*}\chi\partial_k S_k + \chi^2(\partial_k S_k)^2), \tag{2.17}$$

где

$$\partial_k S_k = \frac{1}{(1+uu^*)^2}\left(\partial_x u(1-u^{*2}) + \partial_x u^*(1-u^2) - i\partial_y u(1+u^{*2}) + \right.$$
$$\left. + i\partial_y u^*(1+u^2)\right). \tag{2.18}$$

Получим эффективное действие для теории на стенке с учетом этого слагаемого. Для этого нужно проинтегрировать (2.1) + (2.17) по x_3. Тогда в 2+1–мерии получаем

$$\mathcal{L}_{eff} = A\left(\frac{\partial_p u \partial^p u^*}{(1+uu^*)^2} - \frac{\alpha^2 uu^*}{(1+uu^*)^2}\right) -$$
$$-\varepsilon\left(B(\frac{uu^*-1}{1+uu^*})^2 + C\frac{uu^*-1}{1+uu^*}\partial_k S_k + D(\partial_k S_k)^2\right), \tag{2.19}$$

где введены постоянные

$$A = \int 2\chi^2 dx_3, \tag{2.20}$$

$$B = \int (\chi')^2 dx_3, \tag{2.21}$$

$$C = \int 2\chi'\chi dx_3, \tag{2.22}$$

$$D = \int \chi^2 dx_3 = \frac{1}{2}A, \tag{2.23}$$

и, в случае когда стенка (функция $\chi(x_3)$) симметрична,

$$C = 0. \tag{2.24}$$

После деления на константу

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{\partial_p u \partial^p u^*}{(1+uu^*)^2} - \frac{\alpha^2 uu^*}{(1+uu^*)^2} - \varepsilon\left(\frac{B}{A}(\frac{uu^*-1}{1+uu^*})^2 + \frac{1}{2}(\partial_k S_k)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\partial_p S_i \partial^p S_i - \frac{1}{4}\alpha^2(1-S_3^2) - \varepsilon\left(\frac{B}{A}S_3^2 + \frac{1}{2}(\partial_k S_k)^2\right) \tag{2.25}$$

и, с точностью до постоянного слагаемого,

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{4}\partial_p S_i \partial^p S_i - \frac{1}{4}\alpha'^2(1 - S_3^2) - \frac{\varepsilon}{2}(\partial_k S_k)^2 = \frac{\partial_p u \partial^p u^*}{(1+uu^*)^2} - \frac{\alpha'^2 uu^*}{(1+uu^*)^2} -$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}\frac{(\partial_x u(1-u^{*2}) + \partial_x u^*(1-u^2) - i\partial_y u(1+u^{*2}) + i\partial_y u^*(1+u^2))^2}{(1+uu^*)^4}. \tag{2.26}$$

Таким образом, из трех слагаемых в (2.17) первое приводит к поправке α

$$\alpha \to \alpha' = \sqrt{\alpha^2 - 4\varepsilon\frac{B}{A}}, \tag{2.27}$$

второе уходит из-за симметрии и только третий член может существенно поменять поведение системы.

3 Методы исследования

Для нахождения эффектов взаимодействия Q-лампов рассмотрим двухчастичное решение невозмущенной (без спин-орбитального взаимодействия) теории. Двухчастичные конфигурации соответствуют решениям с топологическим зарядом 2:

$$u_0(t, z = x + iy) = \frac{\gamma}{z^2 + \epsilon} \mathrm{e}^{i\alpha' t} = \frac{\gamma}{i\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{z - i\sqrt{\epsilon}} - \frac{1}{z + i\sqrt{\epsilon}} \right) \mathrm{e}^{i\alpha' t}. \quad (3.1)$$

Здесь комплексные параметры γ и ϵ задают размер частиц $\left(\frac{|\gamma|}{2\sqrt{|\epsilon|}}\right)$ и расстояние между ними $\left(2\sqrt{|\epsilon|}\right)$.

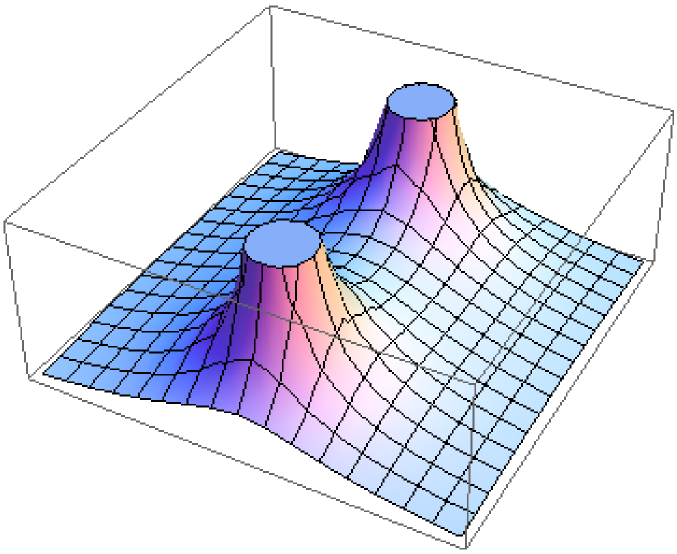

Рис. 3.1: $|u_0(t, z)|$, двухчастичная конфигурация

3.1 Теория возмущений

Найдем поправку к анцазу (3.1) по теории возмущений, считая константу связи ε малой. Для упрощения вычислений будем считать параметры $\gamma, \epsilon \in \Re$, что соответствует частицам (полюсам конфигурации), расположенным на оси y. Уравнение на первую поправку имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{32\gamma^3 \,\mathrm{e}^{i\alpha' t}\left(x^2+y^2\right)\left(-\gamma^2+\zeta\right)}{\zeta^3\left(\epsilon+(x+iy)^2\right)} - \\
&-\frac{8\gamma \,\mathrm{e}^{-i\alpha' t}\left(\gamma^2+\left(\epsilon+(x+iy)^2\right)\left(\epsilon-3(x-iy)^2\right)\right)}{\left(\epsilon+(x-iy)^2\right)^2\zeta} \\
&+\frac{8\gamma^3 \,\mathrm{e}^{3i\alpha' t}\left(\gamma^2+\left(\epsilon-3(x+iy)^2\right)\left(\epsilon+(x-iy)^2\right)\right)}{\zeta\left(\epsilon+(x+iy)^2\right)^4} - \\
&-\alpha'^2\left(1-\frac{3\gamma^6+5\gamma^4\zeta+\gamma^2\zeta^2}{\zeta^3}\right)u-\frac{\left(\gamma^2+\zeta\right)^3}{\zeta^3}\partial_t^2 u+\frac{4i\alpha'\gamma^2\left(\gamma^2+\zeta\right)^2}{\zeta^3}\partial_t u + \\
&+\frac{\left(\gamma^2+\zeta\right)^3}{\zeta^3}\left(\partial_y^2 u+\partial_x^2 u\right)+\frac{8\gamma^2(x+iy)\left(\gamma^2+\zeta\right)^2}{\zeta^3\left(\epsilon+(x+iy)^2\right)}\left(\partial_x u+i\partial_y u\right)=0,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где введено обозначение

$$
\zeta=\left|(x+iy)^2+\epsilon\right|^2=\frac{\gamma^2}{u_0 u_0^*}. \tag{3.3}
$$

В случае удаленных частиц ($\gamma \ll \epsilon$) можно разложить уравнение по степеням $\frac{\gamma^2}{\zeta}$, что в лидирующем порядке приводит к

$$
-\frac{8\gamma \,\mathrm{e}^{-i\alpha' t}\left(\epsilon-3(x-iy)^2\right)}{\left(\epsilon+(x-iy)^2\right)^3}-\alpha'^2 u-\partial_t^2 u+\left(\partial_y^2 u+\partial_x^2 u\right)=0 \tag{3.4}
$$

и дает асимтотику первой поправки на пространственной бесконечности, т.е. вдали от частиц:

$$
u_1(t,\bar z)=-\frac{2i\gamma \,\mathrm{e}^{-i\alpha' t}(2\alpha' t-i)\left(\epsilon-3\bar z^2\right)}{\alpha'^2\left(\epsilon+\bar z^2\right)^3}. \tag{3.5}
$$

Следует отметить следующие свойства найденной поправки: во-первых, она нарушает аналитичность решения; во-вторых, фаза вращается в обратном направлении; и в-третьих, виден линейный рост со временем, что соответствует увеличивающимся в размерах частицам.

3.2 Адиабатическое приближение

Скажем теперь, что параметры (модули) $\gamma = G(t)\,\mathrm{e}^{i\phi(t)}$, $\epsilon = E(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ анзаца (3.1) медленно зависят от времени. Тогда эффективное действие для такой четырехмерной динамической системы после интегрирования по x, y запишется в следующем виде (здесь и далее будем обозначать α' просто α; в самом же анзаце пусть вращение с постоянной скоростью α' включено в определение $\phi(t)$):

$$S = \int dt \Big(-4\pi + f(E,G)\Big(\dot{G}^2 + G^2(\dot{\phi}^2 - \alpha^2)\Big) + \\ + g(E,G)\Big(\dot{E}^2 + E^2\dot{\theta}^2\Big) + 2h(E,G)\Big(\dot{G}\dot{E} + EG\dot{\theta}\dot{\phi}\Big) - \frac{\varepsilon}{2}V_{so}\Big)\,, \tag{3.6}$$

где введены обозначения

$$f(E,G) = \frac{\pi}{2\sqrt{E^2+G^2}}\left(2K(k) - J(k)\right), \tag{3.7}$$

$$g(E,G) = \frac{\pi}{2\sqrt{E^2+G^2}}\left(J(k)\right), \tag{3.8}$$

$$h(E,G) = \frac{\pi}{2\sqrt{E^2+G^2}}\frac{G}{E}\left(J(k) - K(k)\right), \tag{3.9}$$

$$k = \frac{E}{\sqrt{E^2+G^2}}, \tag{3.10}$$

$$V_{so} = \int_0^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\psi 32(1-k^2)\xi \left(\frac{\xi^2\cos(2\psi-\phi)}{\left(1+\xi^2+2k\xi\cos(2\psi-\theta)\right)^2} + \\ + \frac{2k\xi\cos(\psi+\theta-\phi) + k^2\cos(\psi+\phi-2\theta)}{\left(1+\xi^2+2k\xi\cos(2\psi-\theta)\right)^2}\right)^2, \tag{3.11}$$

а функции $K(k)$, $J(k)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно. Отсюда получаем явный вид уравнений движения:

$$\ddot{G} = \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\dot{G}^2}{G}(f_4+f_3-f_2) + f_2\left(\frac{2\dot{E}\dot{G}}{E} - \frac{G\dot{E}^2}{E^2} + G\dot{\theta}(\dot{\theta}-2\dot{\phi})\right) + \\ + f_1 G\left(\dot{\phi}^2 - \alpha^2\right)\right) + \frac{E^2+G^2}{2\Delta}\left((K(k)-J(k))EG\mathbf{I_2} + J(k)E^2\mathbf{I_1}\right), \tag{3.12}$$

$$\ddot{E} = \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\dot{E}^2}{E}(f_1+f_3-f_2) + f_3\left(\frac{E\dot{G}^2}{G^2} - \frac{2\dot{E}\dot{G}}{G} + E(2\dot{\theta}\dot{\phi} + \alpha^2 - \dot{\phi}^2)\right) + \\ + f_4 E\dot{\theta}^2\right) + \frac{E^2+G^2}{2\Delta}\left((2K(k)-J(k))E^2\mathbf{I_2} + (K(k)-J(k))EG\mathbf{I_1}\right), \tag{3.13}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta}\left(f_3\left(\frac{\dot{G}}{G}(\dot{\phi}-\dot{\theta}) - \frac{\dot{E}\dot{\phi}}{E}\right) - f_4\frac{\dot{E}\dot{\theta}}{E}\right) +$$
$$+ \frac{E^2+G^2}{2\Delta}\left((K(k)-J(k))\mathbf{I_4} + (2K(k)-J(k))\mathbf{I_3}\right), \tag{3.14}$$
$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\Delta}\left(f_2\left(\frac{\dot{E}}{E}(\dot{\phi}-\dot{\theta}) + \frac{\dot{G}\dot{\theta}}{G}\right) - f_1\frac{\dot{G}\dot{\phi}}{G}\right) +$$
$$+ \frac{E^2+G^2}{2\Delta}\left(J(k)\frac{E^2}{G^2}\mathbf{I_4} + (K(k)-J(k))\mathbf{I_3}\right), \tag{3.15}$$

где в свою очередь

$$f_1 = J^2(k)\left(E^2+G^2\right)\left(4E^2+G^2\right) -$$
$$- 2J(k)K(k)\left(2E^4+4G^2E^2+G^4\right) + K^2(k)\left(2E^2+G^2\right)G^2, \tag{3.16}$$
$$f_2 = 3J^2(k)\left(E^2+G^2\right)E^2 - 2J(k)K(k)\left(E^2+2G^2\right)E^2 + K^2(k)G^2E^2, \tag{3.17}$$
$$f_3 = J^2(k)\left(E^2+G^2\right)G^2 - 2J(k)K(k)G^4 + K^2(k)G^4, \tag{3.18}$$
$$f_4 = J^2(k)\left(E^2+G^2\right)E^2 - 2J(k)K(k)\left(E^2+2G^2\right)E^2 + K^2(k)E^2G^2, \tag{3.19}$$
$$\Delta = f_3 + f_4, \tag{3.20}$$
$$\mathbf{I_1} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial G} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial G}, \tag{3.21}$$
$$\mathbf{I_2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial E} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial E}, \tag{3.22}$$
$$\mathbf{I_3} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial \theta}, \tag{3.23}$$
$$\mathbf{I_4} = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{E^2+G^2}\frac{\partial V_{so}}{\partial \phi}. \tag{3.24}$$

Уравнения (3.12)–(3.15) можно решать численно. При этом $\gamma(0), \epsilon(0)$ задают начальную конфигурацию, $\dot{\gamma}(0)$, $\dot{\epsilon}(0)$ — малое возмущение. В нашем случае $\dot{G}, \dot{E}, \dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \alpha$. Уравнения были решены методом Рунге-Кутты 4-го порядка для следующих значений параметров: константы связи $\alpha = 0.03$, $\varepsilon = 0.1$, размер частиц $\frac{G}{2\sqrt{E}} = 1$, расстояние между частицами $2\sqrt{E} = 50$. При этом интегралы $\mathbf{I_1}$-$\mathbf{I_4}$ также считались численно.

4 Результаты

Были обнаружены несколько эффектов, которые спин-орбитальное взаимодействие оказывает на двухчастичное решение.

1. Увеличение размера Q-лампов: этот эффект согласуется с ростом, найденным по теории возмущений.

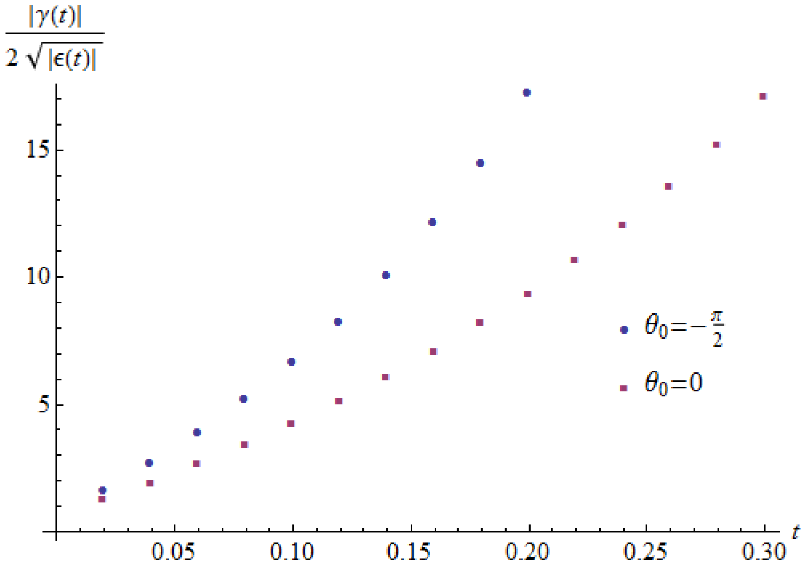

Рис. 4.1: Эволюция размера частиц

2. Сближение: расстояние между частицами сокращается, чего не было видно из поправки (3.5). Этот факт, однако, объясняется тем, что выражение (3.5) дает только асимптотику на пространственной бесконечности, которая остается неизменной.

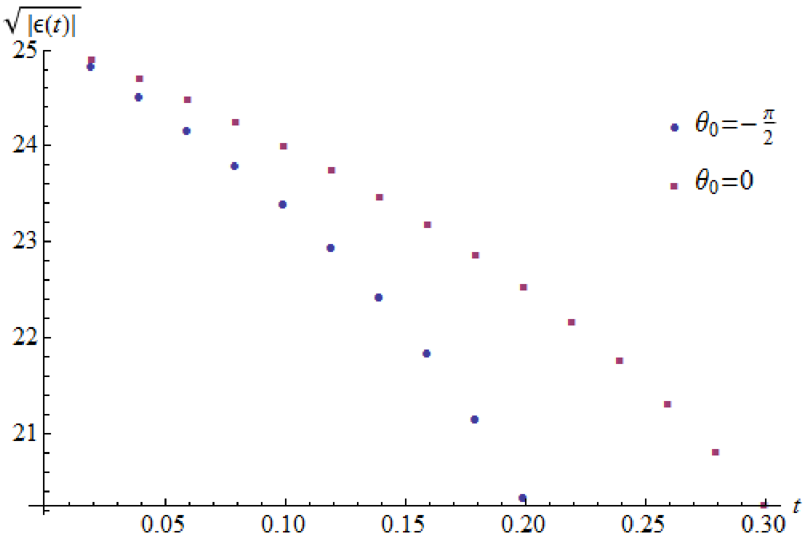

Рис. 4.2: Изменение расстояния между частицами

3. Зависимость от фаз: на рис. 4.1, 4.2 изображены численные решения для двух различных значений параметра $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $\theta_0 = 0$, который задает начальное расположение Q-лампов. Первое значение соответствует частицам на действительной оси, второе — на мнимой. Хотя качественно поведение системы остается тем же, видно, что скорости процессов значительно зависят от этого параметра. Таким образом, в отличие от функций (3.7)-(3.9), которые не зависели от фаз θ, ϕ и позволяли в отсутствие спин-орбитального взаимодействия при тех же начальных условиях на фазы ($\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \alpha$) рассматривать только эволюцию $G(t)$, $E(t)$, добавление $\mathcal{L}_{so}$ приводит к появлению такой зависимости. На рис. 4.3 можно увидеть, как потенциал $V_{so}(k)$ зависит от фаз: действительно, для любых фиксированных θ, ϕ профиль $V_{so}(k)$ качественно остается тем же и приводит к увеличению и сближению частиц.

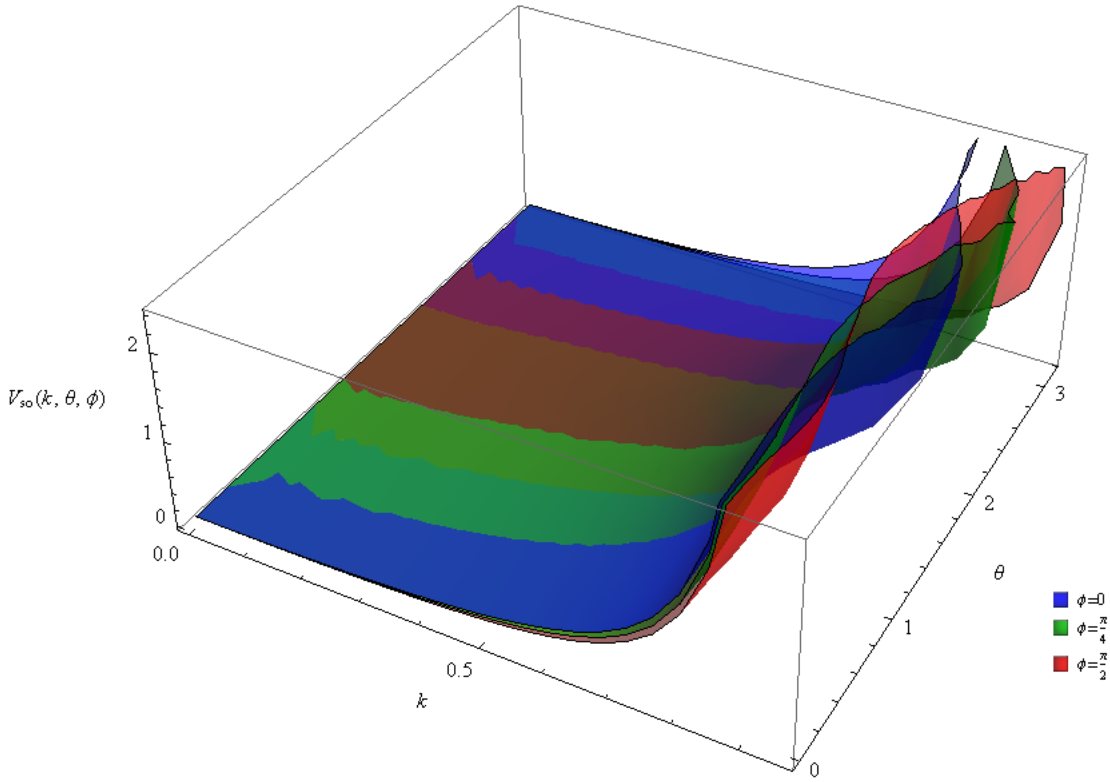

Рис. 4.3: Потенциал спин-орбитального взаимодействия $V_{so}(k, \theta, \phi)$

5 Заключение

В настоящей работе рассматривалась O(3) σ-модель с дополнительным потенциальным членом на доменной стенке в 3+1–мерном пространстве-времени, допускающая солитонные решения (Q-лампы) и исследовались эффекты, оказываемые наличием спин-орбитального взаимодействия в балке, на двухчастичную конфигурацию.

С помощью теории возмущения была найдена асимптотика на пространственной бесконечности первой поправки к двухсолитонному анзацу; с помощью адиабатического приближения было численно смоделировано поведение изначально покоящихся Q-ламп. Этими средствами было обнаружено, что в присутствии спин-орбитального взаимодействия Q-лампы начинают взаимодействовать: увеличиваются в размерах и притягиваются; запутывание же между внутренними степенями свободы и координатами приводит к появлению зависимости от фаз конфигурации.

6 Список литературы

[1] M. Shifman, G. Tallarita, A. Yung, *'t Hooft-Polyakov Monopoles with Non-Abelian Moduli,* arXiv 1503.08684, (2015)

[2] E. Kurianovych and M. Shifman, *Non-Abelian Moduli on Domain Walls,* Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450193 (2014)

[3] M. Shifman and A. Yung, *Abrikosov-Nielsen-Olesen string with Non-Abelian Moduli and Spin-Orbit Interaction,* Phys. Rev. Lett. **110**, 201602 (2013)

[4] M. Shifman, G. Tallarita, A. Yung, *More on the Abrikosov Strings with Non-Abelian Moduli,* Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450062

[5] S. Monin, M. Shifman, A. Yung , *Calculating Extra (Quasi)Moduli on the Abrikosov-Nielsen-Olesen string with Spin-Orbit Interaction,* Phys. Rev. D **88** 025011 (2013)

[6] M. Shifman, *Simple Models with Non-Abelian Moduli on Topological Defects,* Phys. Rev. D **87**, 025025 (2013)

[7] R.A. Leese, *Q-Lumps and their interactions,* Nucl. Phys. B **366**, (1991) 283-314

[8] E. Abraham, *Non-linear sigma models and their Q-lump solutions,* Phys. Lett. B **278** (1992) 291-296

[9] S. Coleman, *Q-Balls,* Nucl. Phys. B **262** (2): 263 (1985)

[10] G.H. Derrick, *Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,* J. Mathematical Phys. **5**: 1252-1254 (1964)

[11] M. Nitta, M. Shifman, W. Vinci, *Non-Abelian Quasi-Gapless Modes Localized on Mass Vortices in Superfluid 3He-B,* Phys. Rev. D **87**, 081702 (2013)

[12] M.F. Atiyah and N.J. Hitchin, *Low energy scattering of nonabelian monopoles,* Phys. Lett. A **107** (1985) 21

[13] P.J. Ruback, *Motion in the Abelian Higgs Model,* Nucl. Phys. B **296** (1988) 669

[14] R.A. Leese, *Low energy scattering of solitons in the CP1 model,* Nucl. Phys. B **344** (1990) 33

[15] R.S. Ward, *Slowly moving lumps in the CP1 model in (2+1) dimensions,* Phys. Lett. B **158** (1985) 424