Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики
Кафедра Теоретической астрофизики и Квантовой Теории Поля

Выпускная квалификационная работа на степень магистра:

Ренормгруппа и соотношение Сона-Ямамото

Выполнил студент 6 курса О. С. Дубинкин
Научный руководитель: д.ф.-м.н. А. С. Горский

Москва, 2015

Содержание

1 Введение

Аномалии в релятивистской квантовой теории поля обязаны своим появлением квантовым эффектам, нарушающим симметрии классического действия. В случае глобальных симметрий, когда токи связаны с внешними калибровочными полями, некоторые из токов могут не сохраняться. Этот факт на формульном уровне находит отражение в продольной части треугольных диаграмм. Благодаря своей топологической природе, продольная часть треугольных диаграмм не зависит от масштаба энергии - треугольная аномалия, получаемая в КХД (Квантовой Хромо-Динамике) на уровне глюонов и кварков воспроизводится на масштабе, соответствующем адронной физике (условие соответствия аномалий 'т Хоофта) [18]. Хорошо знакомым примером проявления этого соответствия является пионный распад $\pi \to 2\gamma$.

Естественным образом возникает вопрос о существовании аналогичного условия для трансверсальной компоненты треугольной диаграммы, определение которой мы дадим чуть ниже и будем обозначать её как w_T. Этот вопрос изучался в работах [8, 9, 10] и было обнаружено, что трансверсальная компонента в инфинитезимально слабом электромагнитном поле не перенормируется в пертурбативной КХД и, следовательно, связана с продольной частью треугольной диаграммы. Однако, киральное нарушение симметрии приводит к тому, что это соотношение перестает выполняться. Стало понятно, что w_T скорее имеет динамическую природу, чем топологическую.

Дальнейшее изучение этого вопроса Д. Т. Соном и Н. Ямамото [12] привело к получению соотношения для трансверсальной части треугольной аномалии:

$$w_T(Q^2) = \frac{N_c}{Q^2} - \frac{N_c}{f_\pi^2}\left[\Pi_A(Q^2) - \Pi_V(Q^2)\right]. \tag{1}$$

где Π_A и Π_V - корреляторы аксиальных и векторных полей соответственно, N_c - количество цветов, а f_π - пионная константа распада. Это соотношение было получено для класса теорий AdS/QCD, действие которых в пространстве AdS описывается теорией Янга-Миллса с членом Черна-Саймонса, где киральная симметрия нарушается за счет различных граничных условий для аксиального и векторного калибровочных полей.

В этой работе мы занялись исследованием ренормгрупповой динамики этого соотношения. Обычно, вычисление ренормгрупповых потоков представляет существенную трудность, поскольку не существует простого способа учесть непертурбативные эффекты. Голография предоставляет нам совершенно новый инструментарий для этих исследований. В модели AdS/QCD возможно исследовать динамику связанную с радиальной координатой AdS, которую, в свою очередь, можно соотнести с энергетическим масштабом. В [2] было указано, что ренормгрупповое уравнение можно связать с классическим уравнением Гамильтона-Якоби, в котором роль времени играет радиальная координата z пространства AdS. Голографическое предписание позволяет нам рассматривать действие в AdS как производящий функционал для корреляторов в теории на границе, тем самым давая нам возможность изучать динамику этих корреляторов вдоль радиальной координаты - масштаба энергии при помощи уравнения Гамильтона-Якоби. Недавнее исследование в этом направлении можно прочитать здесь [3].

Изучение поведения различных объектов при перенормировке интересно само по себе. Простейшими такими объектами являются β-функция и аномальная размерность операторов. Некоторые из них не перенормируются благодаря законам сохранения. В более общем случае можно изучать ренормгрупповое поведение корреляторов различных операторов. При соответствии этих операторов определенным сохраняющимся величинам, вроде следа тензора энергии-импульса, который соответствует дилатационной симметрии, возможно вывести низкоэнергетические теоремы, как это было сделано в [5]. Эти низкоэнергетические теоремы являются простейшими примерами, когда непертурбативные эффекты дают вклад в ренормгрупповую динамику. Было показано, что низкоэнергетические теоремы КХД также выполняются в голографических моделях [20].

Изучая поведение соотношения Сона-Ямамото на различных масштабах энергии, мы в действительности рассматривали ренормгрупповую динамику простейших корреляторов. Как будет показано ниже, соотношение Сона-Ямамото связывает трехточечный коррелятор двух векторных и одного аксиального тока с двумя двухточечными корреляторами - векторных и аксиальных токов. Интересно, что это соотношение может быть получено исключительно в рамках теории поля без использования голографического соотношения, а потенциальное тождество Уорда, соответствующее соотношению Сона-Ямамото ещч только предстоит найти. Помимо этого, само соотношение ещч подлежит тщательному исследованию. С одной стороны, при помощи него можно воспроизвести соотношение Вайнштейна для магнитной восприимчивости кирального конденсата [4] и оно выполняется в киральной теории возмущений citegkkv, однако с другой стороны, существуют примеры, когда соотношение Сона-Ямамото не выполняется [12, 16]. Так как вывод этого соотношения, который будет приведен ниже, достаточно неочевиден, важной задачей представляется изучение его в более общих моделях.

Воспользовавшись наблюдением, которое привело Сона и Ямамото к их соотношению, мы изучили сходные модели в более низких размерностях. В размерности 1+1 теории на границе нам удалось построить соотношение между двухточечными векторными, аксиальными и смешанными корреляторами, имеющее вид аналогичный соотношению Сона-Ямамото. Что гораздо более интересно, ренормгрупповая динамика полученного нами соотношения с точностью до размерного коэффициента совпадает с ренормгрупповой динамикой для соотношения Сона-Ямамото. Нами так же был изучен случай теории размерности 2+1 на границе, однако в этом случае аналогичной связи между корреляторами обнаружить не удалось.

Работа организована следующим образом. Для начала мы даем необходимый набор сведений о рассматриваемой модели и описываем связь уравнения Гамильтона-Якоби с ренормгруппой. Далее приводится краткий вывод соотношения Сона-Ямамото. После чего мы показываем, что это соотношение диагонально по отношению к ренормгруппе. И наконец мы рассматриваем случай размерности 1+1, где мы выводим соотношение, аналогичное соотношению Сона-Ямамото и показываем, что оно также диагонально по отношению к ренормгруппе. Случай размерности 2+1 теории на границе также кратко рассмотрен нами в конце работы.

2 Описание модели

Рассмотрим теорию Янга-Миллса с членом Черна-Саймонса. Будем работать с полями $A_L = A_L^a t^a$ и $A_R = A_R^a t^a$, где t^a - набор генераторов алгебры $u(N_f)$, дуальными кварковым токам $j_L = j_V - j_A$ и $j_R = j_V + j_A$ соответственно. Действие Янга-Миллса записывается следующим образом:

$$S_{YM} = \frac{1}{2}\int d^4x \int_0^{z_0} dz\ \mathrm{Tr}\left\{-f^2(z)(F_{Lz\mu}^2 + F_{Rz\mu}^2) - \frac{1}{2g^2(z)}(F_{L\mu\nu}^2 + F_{R\mu\nu}^2)\right\} \tag{2}$$

где $F_{L,Rmn} = \partial_m A_{L,Rn} - \partial_n A_{L,Rm} - i[A_{L,Rm}, A_{L,Rn}]$. Для воспроизведения киральной аномалии, добавим в действие член Черна-Саймонса следующим образом:

$$S = S_{YM}(A_L, A_R) + S_{CS}(A_L) - S_{CS}(A_R) \tag{3}$$

где

$$S_{CS}(A) = \kappa\left(AF^2 - \frac{i}{2}A^3F - \frac{1}{10}A^5\right),\ \kappa = -\frac{N_c}{24\pi^2} \tag{4}$$

Метрика пространства AdS_5 имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dz^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \tag{5}$$

В данной работе латинские индексы используются для обозначения пятимерных координат, которые мы поднимаем и опускаем при помощи метрики пространства AdS, а греческие индексы обозначают четырехмерные координаты, которые мы поднимаем и опускаем при помощи метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Физическое четырехмерное пространство находится на ультрафиолетовой "UV" границе пространства AdS расположенной при $z = z_0$. Инфракрасная граница находится при $z = 0$. Для удобства вычислений, мы будем работать с векторным и аксиальным калибровочными полями

$$A_{L\mu} = V_\mu + A_\mu, \quad A_{R\mu} = V_\mu - A_\mu \tag{6}$$

которые подчиняются граничным условиям Неймана и Дирихле соответственно:

$$\partial_z V_\mu(z=0) = 0,\ A_\mu(z=0) = 0 \tag{7}$$

Здесь и далее мы будем работать в Гамильтоновоей калибровке, где $A_z = V_z = 0$. В модели имеется следующий недостаток[7]: трехточечный коррелятор $\langle VVA \rangle$ не зануляется при стремлении импульсов векторных полей к нулю. Для исправления ситуации добавим в действие граничный член:

$$\int d^4x dz\ 4\kappa \epsilon^{z\alpha\beta\gamma\lambda\eta}(A_\alpha F_{V\beta\gamma} F_{Vz\lambda} - V_\alpha F_{A\beta\gamma} F_{Vz\lambda}) \tag{8}$$

который приводит к окончательному выражению для члена Черна-Саймонса:

$$S_{CS} = \int d^4x dz\ 6\kappa \epsilon^{z\alpha\beta\gamma\lambda\eta} A_\alpha F_{V\beta\gamma} F_{Vz\lambda} \tag{9}$$

Заметим, что в окончательном выражении (9) так же опущены члены третьего порядка по полю A_μ, так как они не дадут вклада в выражения для интересующих нас двухточечных корреляторов $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ и $\langle V_\mu V_\nu \rangle$, а также вклада в трехточечный коррелятор $\langle A_\mu V_\nu V_\eta \rangle$, который также необходим для исследования соотношения Сона-Ямамото.

3 Уравнение Гамильтона-Якоби

В голографии существует стандартный способ получения корреляционных функций. Для этого надо решить уравнения движения и проварьировать действие на уравнениях движения по граничным условиям. В этом подходе продолжение решения вне границы обычно не представляет физического интереса. Однако, классическое уравнение Гамильтона-Якоби позволяет нам воспользоваться решением уравнений движения внутри пространства AdS для исследования свойств физических величин.

Рассмотрим пятимерную голографическую модель, другими словами, будем работать с пятимерной геометрией и пятимерным действием S_{5D}. Физическое четырехмерное пространство лежит на ультрафиолетовой границе, где пятую координату мы будем обозначать как ϵ. Можно рассматривать ϵ как ультрафиолетовый предел обрезания. Если мы заинтересованы в получении 4D корреляционных функций полей j_α (где индекс α нумерует поля в модели), то, в соответствии с голографической картинкой, мы должны вставить источники O_α соответствующих полей в четырехмерное действие следующим образом:

$$S_{5D}[O] = \int d^5x \, \left(\mathcal{L}_{5D} + \sum_\alpha j_\alpha O_\alpha\right) \tag{10}$$

Выбрав правильный предел, решим классические уравнения движения в пятимерном пространстве с фиксированными значениями O_α на физической ультрафиолетовой границе. Четырехмерный квантовый производящий функционал равен:

$$Z_{4D}[O_{boundary}] = \exp(iS_{5D}^{on-shell}[O_{boundary}]) \tag{11}$$

В этом подходе граничные значения O_α играют роль классического фонового поля. В пятимерной классической теории поля мы будем работать с гамильтоновым формализмом, предварительно заменив время на ϵ. Для начала запишем канонический импульс следующим образом:

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\epsilon O_\alpha)} = \frac{\delta S}{\delta O_\alpha} \tag{12}$$

где мы варьируем действие по граничному значению O_α. Совершив преобразование Лежандра запишем гамильтониан:

$$H(\pi_\alpha, O_\alpha, \epsilon) = \sum_\alpha \pi_\alpha \partial_\epsilon O_\alpha - \mathcal{L} \tag{13}$$

и запишем уравнение Гамильтона-Якоби в общем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial \epsilon} + H(\frac{\delta S}{\delta O_\alpha}, O_\alpha, \epsilon) = 0. \tag{14}$$

Варьируя уравнение Гамильтона-Якоби по полям O_α и учитывая, что $\langle j_\alpha \rangle = \dfrac{\delta S}{\delta O_\alpha}$, мы получим иерархию соотношений на корреляторы.

Получим двухточечные корреляторы векторных токов для модели, описанной в предыдущем разделе. Для простоты рассмотрим действие Янга-Миллса. Отбрасывая аксиальные члены в действии, запишем гамильтониан:

$$H = -\frac{1}{2}g_5^2\epsilon\int d^4x\left(\frac{\delta S}{\delta A_{V\mu}(x)}\right) + \frac{1}{4g_5^2\epsilon}\int d^4x F_{\mu\nu}(x)^2 \tag{15}$$

и далее получим уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial\epsilon} - \frac{1}{2}g_5^2\epsilon\int d^4x\left(\frac{\delta S}{\delta A_{V\mu}(x)}\right) + \frac{1}{g_5^2\epsilon}\int d^4x F_{\mu\nu}(x)^2 = 0 \tag{16}$$

Работая в предположении, что корреляционные функции не сингулярны в пределе $\epsilon \to 0$, так что $\epsilon\langle j_V j_V\rangle \to 0$, проварьировав уравнение (16) дважды по V на ультрафиолетовой границе мы получим:

$$\frac{\partial\langle j_{V\mu}(-p)j_{V\nu}(p)\rangle}{\partial\epsilon} = -\frac{1}{2g_5^2\epsilon}(p^2\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \tag{17}$$

и наконец:

$$\langle j_{V\mu}(-p)j_{V\nu}(p)\rangle = -\frac{1}{2g_5^2}\log(p\epsilon)(p^2\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \tag{18}$$

что совпадает с результатом полученным в [11].

Обсудим теперь граничные условия для уравнения Гамильтона-Якоби. Так как мы работаем с дифференциальным уравнением первого порядка, для определения граничных условий, необходимо знать значения корреляторов при заданном z. Для этого рассмотрим пятимерное действие:

$$S = \int_{z_{ir}}^{z_{uv}} d^4x dz\ \mathcal{L} \tag{19}$$

Взяв предел $z_{uv} \to z_{ir}$, мы можем наивно записать:

$$S \approx (z_{ir} - z_{uv})\int d^4x\ \mathcal{L}(z = z_{uv}) \tag{20}$$

Теперь вариация действия по граничным ультрафиолетовым значениям полей производится элементарно. Возьмем предел $z_0 \to 0$. Принимая во внимание граничные условия для полей A_μ и V_μ (7), мы можем опустить члены содержащие $\partial_z V_\mu$. На ультрафиолетовой границе значения A_μ принимают произвольные значения, в то время как на инфракрасной границе мы имеем $A_\mu = 0$, следовательно $\partial_z A_\mu = \frac{1}{z_0}A_\mu + O(1)$. И теперь записать лидирующие члены лагранжиана не представляет сложности:

$$S = z_0 \int d^4x \left(\frac{f^2}{z_0^2} A_\mu^2 - \frac{1}{2g^2} F_{V\mu\nu}^2 \right) \tag{21}$$

где мы опустили неабелевы члены действия Черна-Саймонса.

4 Соотношение Сона-Ямамото

Чтобы сделать изложение в последующих главах более наглядным, приведем здесь подробный вывод соотношения Сона-Ямамото [12]. Для начала, распишем подробно выражения для калибровочных полей A_μ^a и V_μ^a, выделив в явном виде функции на границе AdS_5:

$$A_\mu^a(q,z) = A(q,z) P_\mu^{\alpha\perp} A_{\alpha 0}^a(q) - \psi(z) P_\mu^{\alpha\|} A_{\alpha 0}^a(q) \tag{22}$$

$$V_\mu^a(q,z) = V(q,z) P_\mu^{\alpha\perp} V_{\alpha 0}^a(q) + P_\mu^{\alpha\|} V_{\alpha 0}^a(q) \tag{23}$$

где $V(q,z)$, $A(q,z)$ и $\psi(z)$ - моды соответствующих полей, которые удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$V(q,z_0) = 1, \qquad A(q,z_0) = 1, \qquad \psi(z_0) = 1 \tag{24}$$

продольные и трансверсальные компоненты выделены при помощи соответствующих проекторов: $P_\mu^{\alpha\|} = q_\mu q^\alpha / q^2$ и $P_\mu^{\alpha\perp} = \eta_\mu^\alpha - q_\mu q^\alpha / q^2$.

Линеаризованные уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\partial_z [f^2(z) \partial_z V(Q,z)] - \frac{Q^2}{g^2(z)} V(Q,z) = 0, \tag{25}$$

$$\partial_z [f^2(z) \partial_z A(Q,z)] - \frac{Q^2}{g^2(z)} A(Q,z) = 0, \tag{26}$$

$$\partial_z [f^2(z) \partial_z \psi(z)] = 0, \tag{27}$$

где $Q^2 = -q^2$. Заметим, что V и A представляют собой пару линейно независимых решений одного и того же дифференциального уравнения, следовательно, их Вронскиан должен быть независим от z:

$$f^2(z)[V(Q,z)A'(Q,z) - A(Q,z)V'(Q,z)] = W(Q). \tag{28}$$

С другой стороны, уравнение (29) может быть проинтегрировано:

$$\psi(z) = C_\pi \int_0^{z_0} \frac{dz'}{f^2(z')}, \qquad C_\pi \int_0^{z_0} \frac{dz'}{f^2(z')} = 1. \tag{29}$$

Теперь мы готовы получить выражения для двухточечных корреляторов $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ и $\langle V_\mu V_\nu \rangle$. Для этого достаточно рассмотреть действие Янга-Миллса и пользуясь уравнениями движения проинтегрировать его по координате z:

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} f^2(z) \mathrm{Tr} \left\{ A^a_\mu(q,z) \partial_z A^{\mu a}(q,z) + V^a_\mu(q,z) \partial_z V^{\mu a}(q,z) \right\} \Big|_0^{z=z_0}. \tag{30}$$

Дважды варьируя действие по граничным функциям $V^a_{\mu 0}$, получим двухточечный коррелятор векторных токов:

$$i \int d^4 x \exp^{iqx} \langle j^a_\mu(x) j^b_\nu(0) \rangle = \delta^{ab} Q^2 P^\perp_{\mu\nu} \Pi_V(Q^2) \tag{31}$$

$$\Pi_V(Q^2) = \frac{1}{Q^2} f^2(z) V(Q,z) V'(Q,z) \Bigg|_0^{z=+z_0} = \frac{1}{Q^2} f^2(z) V'(Q,z) \Bigg|^{z=z_0} \tag{32}$$

аналогичным образом получаются выражения для Π_A. Обратим внимание, что Вронскиан (28) можно выразить через аксиальный и векторый корреляторы следующим образом:

$$W(Q) = Q^2(\Pi_A - \Pi_V) \tag{33}$$

Из выражения для продольной части коррелятора аксиальных током мы можем восстановить пионную константу распада:

$$f^2_\pi = f^2(z) \psi(z) \psi'(z) \big|_0^{z=+z_0} = C_\pi \tag{34}$$

что можно эквивалентно переписать пользуясь (29) как:

$$\frac{1}{f^2_\pi} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{f^2(z)} \tag{35}$$

Обратимся теперь к определению коррелятора векторного и аксиального токов:

$$\langle V_\mu A_\nu \rangle = \frac{Q^2}{4\pi^2} P^{\alpha\perp}_\mu \left[P^{\beta\perp}_\nu w_T(q^2) + P^{\beta\parallel}_\nu w_L(q^2) \right] \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} F^{\gamma\lambda}_V \tag{36}$$

Наша задача - восстановить выражение для трансверсальной компоненты этого коррелятора. Из структуры действия можно легко увидеть, что интересующая нас структура целиком происходит из члена Черна-Саймонса(9). Проварьировав действие по граничным функциям $V^a_\mu 0$ и $A^b_\nu 0$, получим выражения для w_L и w_T:

$$w_L(Q^2) = \frac{48\pi^2\kappa}{Q^2} \int_0^{z_0} dz\ \psi'(z) V(0,z) = \frac{48\pi^2\kappa}{Q^2}, \tag{37}$$

$$w_T(Q^2) = \frac{48\pi^2\kappa}{Q^2}\int_0^{z_0} dz\ A(Q,z)V'(Q,z), \tag{38}$$

Теперь, пользуясь известным результатом полученным из КХД [13, 14]:

$$w_L(Q^2) = \frac{2N_c}{Q^2} \tag{39}$$

и выражением (37) мы можем зафиксировать значение κ:

$$\kappa = \frac{N_c}{24\pi^2}. \tag{40}$$

В выражении для w_T проводя оперцаию интегрирования по частям и пользуямь полученным ранее выражением для Вронскиана (28), получим:

$$w_T = \frac{N_c}{Q^2} - \frac{N_c}{2Q^2}\int_0^{z_0} dz\ (VA' - AV') = \frac{N_c}{Q^2} - \frac{N_c}{2Q^2}\int_0^{z_0} dz\ \frac{W(Q)}{f^2(z)} \tag{41}$$

примем теперь во внимание ранее сделанное наблюдение о том, что Вронскиан можно выразить через форм-факторы векторного и аксиального двухточечных корреляторов (33) и получим окончательное выражение для w_T, описывающее связь корреляторов $\langle V_\mu A_n u\rangle$, $\langle V_\mu A_n u\rangle$ и $\langle V_\mu A_n u\rangle$:

$$w_T = \frac{N_c}{Q^2} - \frac{N_c}{2Q^2}[\Pi_A(Q^2) - \Pi_V(Q^2)]. \tag{42}$$

5 Ренормгруппа для соотношения Сона-Ямамото

Соотношение Сона-Ямамото [12] связывает трехточечные и двухточечные корреляционные функции в модели описанной выше. Зафиксируем привычные обозначения:

$$\begin{aligned}
\langle V_\mu^{a\perp}(q)V_\nu^{b\perp}(-q)\rangle &= \delta^{ab}\Pi^\perp_{\mu\nu}(q)q^2\Pi_V(q) \\
\langle A_\mu^{a\perp}(q)A_\nu^{b\perp}(-q)\rangle &= \delta^{ab}\Pi^\perp_{\mu\nu}(q)q^2\Pi_A(q) \\
\langle V_\mu^{a}(k)V_\nu^{\perp b}(-k-Q)A_\alpha^{\perp c}(Q)\rangle &= \frac{Q^2}{4\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k^\beta w_T(Q),\ k\to 0 \\
\Pi^\perp_{\mu\nu}(q) &= \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \\
\Pi^\parallel_{\mu\nu}(q) &= \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}
\end{aligned} \tag{43}$$

Для удобства записи большей наглядности вычислений мы будем использовать одни и те же буквы для обозначения кварковых токов и их дуальных образов. Начнем с пятимерного действия Янга-Миллса с вкладом Черна-Саймонса:

$$S = \int d^4xdz\Big(f^2(z)((\partial_z A_\mu)^2 + (\partial_z V_\mu)^2) + \frac{1}{2g^2(z)}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu}) + 6\kappa\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\lambda\eta}A_\alpha F_{V\beta\gamma}F_{Vz\lambda}\Big) \tag{44}$$

Мы опустили член AF_AF_A, который не вносит вклада в интересующий нас трехточечный коррелятор $\langle VVA\rangle$.

Теперь мы должны воспроизвести соотношение Сона-Ямамото для трансверсальной части треугольной аномалии, беря вариационные производные от уравнения Гамильтона-Якоби, записанного для этого действия. Гамильтониан в общем виде записывается следующим образом:

$$H = \partial_z A_\mu \pi^\mu_A + \partial_z V_\mu \pi^\mu_V - \mathcal{L} \tag{45}$$

где $\pi_{A\mu} = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_z A_\mu(z,x))}$ и аналогично для $\pi_{V\mu}$. Распишем более подробно гамильтониан в терминах полей A_μ, V_μ, $\pi_{A\mu}$ и $\pi_{V\mu}$. Для начала выпишем выражения для π:

$$\pi^\mu_A = \frac{\partial L}{\partial(\partial_z A_\mu(z,x))} = 2f^2(z)\partial^z A^\mu \tag{46}$$

$$\pi^\mu_V = \frac{\partial L}{\partial(\partial_z V_\mu(z,x))} = 2f^2(z)\partial^z V^\mu + 6\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma z\mu}A_\alpha F_{V\beta\gamma} \tag{47}$$

После этого достаточно просто выразить $\partial_z V_\mu$ и $\partial_z A_\mu$ через импульсы соответствующих полей:

$$\partial_z A_\mu(z,x) = \frac{\pi_{A\mu}}{2f^2(z)} \tag{48}$$

$$\partial_z V_\mu(z,x) = \frac{\pi_{V\mu}}{2f^2(z)} - 3\frac{\kappa}{f^2(z)}\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\mu}A_\alpha F_{V\beta\gamma} \tag{49}$$

Теперь мы можем записать уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial z_0} + \int d^4x\Big(\frac{1}{2f^2}\pi^\mu_A\pi_{A\mu} + \frac{1}{2f^2}\pi^\mu_V(\pi_{V\mu} - 6\kappa\epsilon^{\alpha\beta\gamma}_{z\mu}A_\alpha F_{V\beta\gamma}) - \\ -\Big\{f^2(z)((\partial_z A_\mu)^2 + (\partial_z V_\mu)^2) + \frac{1}{2g^2(z)}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu}) + 6\kappa\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\lambda}A_\alpha F_{V\beta\gamma}F_{Vz\lambda})\Big)\Big\}\end{gathered} \tag{50}$$

которое может быть переписано в следующем виде

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} + \int d^4x\left\{\frac{1}{4f^2}\pi^2_{A\mu} + \frac{1}{4f^2}(\pi_{V\mu} - \phi_{V\mu})^2 - \frac{1}{2g^2}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu})\right\},\ \phi_{V\mu} = 6\kappa\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\mu}A_\alpha F_{V\beta\gamma} \tag{51}$$

мы опустили групповые индексы $u(N_f)$ для краткости.

Перейдем к обсуждению непосредственно ренормгрупповых соотношений. Рассмотрим для начала двухточечные корреляторы векторных и аксиальных токов. Подействовав на уравнение Гамильтона-Якоби вариационным оператором $\frac{\delta^2}{\delta A_\mu \delta A_\nu} - \frac{\delta^2}{\delta V_\mu \delta V_\nu}$ после просты алгебраических преобразований мы получаем следующее соотношение на корреляторы:

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(\Pi_A - \Pi_V) = -\frac{q^2}{2f^2}(\Pi_A^2 - \Pi_V^2). \tag{52}$$

Можно видеть, что разница между аксиальным и векторным двухточечными корреляторами диагональна по отношению к ренормгруппе и сумма этих корреляторов определяет q^2 зависимость для "аномальной размерности".

Рассмотрим теперь трехточечный коррелятор двух векторных и одного аксиального токов. Взяв преобразование Фурье уравнения Гамильтона-Якоби и действуя на него вариационным оператором $\frac{\delta^3}{\delta V_\eta(k)\delta V_\chi(-q-k)\delta A_\lambda(q)}$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\delta^3 S}{\delta V_\eta(k)\delta V_\chi(-q-k)\delta A_\lambda(q)} + \frac{1}{2f^2}\int d^4p\Big[\langle A_\lambda A_\mu\rangle(q,p)\langle V_\eta V_\chi A_\mu\rangle(k,-q-k,-p)+$$
$$+\langle V_\eta A_\lambda V_\mu\rangle(k,q,p)\langle V_\chi V_\mu\rangle(-q-k,-p) - \frac{\delta^2\tilde{\phi}_{V\mu}}{\delta V_\eta \delta A_\lambda}(k,q,p)\langle V_\chi V_\mu\rangle(-q-k,-p)\Big] \tag{53}$$

Заметьте, что после вариации мы положили значения A_0 и V_0 равными нулю. Запишем теперь подробно все члены, присутствующие в этом уравнении:

$$\langle A_\lambda A_\mu\rangle(q,p) = \delta(p+q)q^2\Pi^\perp_{\lambda\mu}\Pi_A\ , \quad \langle V_\chi V_\mu\rangle(-q-k,-p) = \delta(k+q+p)p^2\Pi^\perp_{\chi\mu}\Pi_V \tag{54}$$

$$\langle V_\eta V_\chi A_\mu\rangle(k,-q-k,-p) = \frac{p^2}{4\pi^2}\Pi^{\alpha\perp}_\mu(\Pi^{\beta\perp}_\chi w_T + \Pi^{\beta\|}_\chi w_L)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}k^\gamma\delta(p+q) \tag{55}$$

$$\langle V_\eta A_\lambda V_\mu\rangle(k,q,p) = \frac{p^2}{4\pi^2}\Pi^{\alpha\perp}_\lambda(\Pi^{\beta\perp}_\mu w_T + \Pi^{\beta\|}_\mu w_L)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}k^\gamma\delta(p+q+k) \tag{56}$$

и фурье-образ $\tilde{\phi}_V$:

$$\tilde{\phi}_V(p) = 6\kappa\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\mu}\int dq' A_\alpha(q')\tilde{F}_{V\beta\gamma}(-q'-p) \tag{57}$$

$$\frac{\delta^2\tilde{\phi}_{V\mu}}{\delta V_\eta\delta A_\lambda}(k,q,p) = 12\kappa\epsilon^{z\alpha\beta\gamma\mu}k_\beta \tag{58}$$

Свернем получившееся выражение с q^η, чтобы избавиться от продольной части трехточечного коррелятора и выпишем наконец соотношение на w_T:

$$q^\eta \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\delta^3 S}{\delta V_\eta \delta V_\chi \delta A_\lambda} + \frac{1}{2f^2}\left[\frac{q^4}{4\pi^4}(\Pi_A + \Pi_V) w_T \epsilon_{\lambda\chi\beta\eta} k^\beta q^\eta + 12\kappa q^2 \Pi_V \epsilon^{\lambda\chi\beta\eta} k_\beta q^\eta\right] = 0 \tag{59}$$

Это уравнение может быть упрощено и переписано в следующей форме более, доступной для дальнейшего обсуждения в контексте соотношения Сона-Ямамото:

$$\frac{q^2}{4\pi^2}\frac{\partial w_T}{\partial z_0} + \frac{1}{2f^2}\left[\frac{q^4}{4\pi^2}(\Pi_A + \Pi_V) w_T + 6\kappa q^2 (\Pi_A + \Pi_V) + 6\kappa q^2(\Pi_V - \Pi_A)\right] = 0 \tag{60}$$

Напомним оригинальное соотношение Сона-Ямамото [12]:

$$(S - Y) = w_T - \frac{N_c}{Q^2} + \frac{N_c}{f_\pi^2}(\Pi_A - \Pi_V) = 0 \tag{61}$$

где

$$\frac{1}{f_\pi(z_0)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{z_0} dz \frac{1}{f(z)^2} \tag{62}$$

Принимая во внимание соотношение на форм-факторы двухточечных корреляторов (52) и полученное выше уравнение (60) мы наконец приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(S - Y) = -\frac{(\Pi_A + \Pi_V) q^2}{2f^2}(S - Y) \tag{63}$$

таким образом соотношение Сона-Ямамото так же диагонально по отношению к ренормгруппе. Для того чтобы доказать, что выражение $(S - Y)$ равно нулю для всех z_0, возьмем предел $z_0 \to 0$. Вспоминая полученное ранее выражение (21), мы видим, что в этом пределе $w_T \to 0$ и

$$\frac{N_c}{f_\pi^2}(\Pi_A - \Pi_V) \to \frac{N_c}{q^2} \tag{64}$$

Мы явным образом видим, что соотношение Сона-Ямамото действительно выполняется в этом пределе и, следовательно, оно выполняется для всех z_0.

6 Случаи меньших размерностей

В этой главе мы рассмотрим как модифицируется соотношение для трансверсальной части двухточечного коррелятора $\langle V_\mu A_\nu \rangle$ в размерностях 1+1 и 2+1. Так же мы рассмотрим соответствующие ренормгрупповые уравнения.

6.1 Случай размерности 1+1

Для изучения динамики в двух измерениях мы будем рассматривать модель близкую к описанной в разделе 2. Для простоты возьмем калибровочную группу $U(1)_L \times U(1)_R$. В этой модели существенно иной вид принимает действие Черна-Саймонса. В остальном действие имеет сходную форму:

$$S = S_{YM} + S_{CS} = S_{YM}(A_L) + S_{YM}(A_R) + S_{CS}(A_L) - S_{SC}(A_R) \tag{65}$$

$$S_{YM}(\mathcal{A}) = \int d^2xdz \ \mathrm{Tr}\left(f(z)\mathcal{F}_{z\mu}^2 - \frac{1}{2g(z)}\mathcal{F}_{\mu\nu}^2\right) \tag{66}$$

$$S_{CS}(\mathcal{A}) = \kappa \int d^2xdz \ \mathrm{Tr}\left(AF + \frac{2}{3}A^3\right) \tag{67}$$

где опять мы совершаем переход к переменным вектор-аксиал:

$$A_L = V + A, \ \ A_R = V - A \tag{68}$$

Как обычно, мы работаем в Гамильтоновой калибровке:

$$V_z = A_z = 0 \tag{69}$$

Вновь, переписывая действие в терминах полей A_μ и V_μ, после преобразования Фурье, в q-пространстве получаем окончательный вид действия пригодный для дальнейших вычислений:

$$S = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}dz \ \Big\{ f(z)^2((\partial_z V_\mu)^2 + (\partial_z A_\mu)^2) + \\ + \frac{1}{2g(z)^2}(F_{V\mu\nu}^2 + F_{A\mu\nu}^2) + 4\kappa \ \varepsilon^{z\nu\sigma}(\partial_z A_\nu V_\sigma + \partial_z V_\nu A_\sigma) \Big\} \tag{70}$$

Теперь мы хотим, следуя работе Сона и Ямамото [12] получить соотношение между трансверсальными компонентами корреляторов $\langle V_\mu A_\nu \rangle$, $\langle V_\mu V_\nu \rangle$ и $\langle A_\mu A_\nu \rangle$. Для краткости сразу будем рассматривать лишь трансверсальные компоненты полей:

$$V_\mu(q) = V(q,z)P_\mu^{\alpha\perp}V_{\alpha 0}(q), \ \ A_\mu(q) = A(q,z)P_\mu^{\alpha\perp}A_{\alpha 0}(q) \tag{71}$$

где $V_{0\mu}$, $A_{0\mu}$ являются граничными значениями, а на функции $V(q,z)$ и $A(q,z)$ мы вновь накладываем известные граничные условия на UV-бране:

$$V(q,z_0) = A(q,z_0) = 1 \tag{72}$$

воспроизведя процедуру, описанную в секции 2, мы получаем линеаризованные уравнения движения для $V(q,z)$ и $A(q,z)$

$$\partial_z \left(f(z)^2 \partial_z V(q,z)\right) - \frac{1}{g(z)^2} V(q,z) \;=\; 0 \tag{73}$$

$$\partial_z \left(f(z)^2 \partial_z A(q,z)\right) - \frac{1}{g(z)^2} A(q,z) \;=\; 0 \tag{74}$$

и аналогичным образом записываем Вронскиан не зависящий от z

$$f^2(z)\left(VA' - AV'\right) = W(q) \tag{75}$$

где мы ввели обозначение $V' \equiv \partial_z V$.

Варьируя дважды по граничным значениям полей, получим теперь выражения для корреляторов $\langle VV \rangle$ и $\langle AA \rangle$. Мы кратко приведем вывод первого коррелятора, однако выраженние для коррелятора $\langle AA \rangle$ получается совершенно аналогичным образом.

$$\frac{\delta^2 S_{YM}}{\delta V_{0\mu}(q)\delta V_{0\nu}(-q)} = \langle V_\mu(q) V_\nu(-q) \rangle = \int d^2x e^{iqx} \langle j_{V\mu}(x) j_{V\nu}(0) \rangle \tag{76}$$

где действие Янга-Миллса записано выше (65). Мы сразу опустили в действии член Черна-Саймонса, так как он линеен по каждому из полей A_μ и V_μ по отдельности и вклада в двухточечные корреляторы $\langle VV \rangle$ и $\langle AA \rangle$ не дает. Для начала, проинтегрируем по частям действие Янга-Миллса:

$$S_{YM} = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} f(z)^2 V_\mu(q,z) \partial_z V^\mu(q,z) \Big|^{z_0} \tag{77}$$

где действие вычисляется на решениях уравнений движения (73,74). Проварьировав теперь (77) дважды по граничным значениям V_0 получаем:

$$\langle V_\mu V_\nu \rangle = 2 f(z)^2 V(q,z) \partial_z V(q,z) \Big|^{z_0} \delta_{\mu\nu} \tag{78}$$

и пользуясь граничными условиями мы можем наконец записать:

$$\langle V_\mu V_\nu \rangle = 2 f^2 V' \Big|^{z_0} \delta_{\mu\nu} = \Pi_V(q) \delta_{\mu\nu} \tag{79}$$

и абсолютно аналогичным образом получается выражение для коррелятора аксиальных токов:

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = 2 f^2 A' \Big|^{z_0} \delta_{\mu\nu} = \Pi_A(q) \delta_{\mu\nu} \tag{80}$$

и вновь мы можем записать Вронскиан в терминах форма-факторов:

$$2 f^2 \left(VA' - AV'\right) = \Pi_A - \Pi_V = 2W(q) \tag{81}$$

Легко видеть, что приведенное выше вычисление в точности повторяет вывод приведенный в работе Сона-Ямамото [12] и в разделе 2.

Перейдем теперь к вычислению смешанного коррелятора $\langle V_\mu A_\nu \rangle$. Для этого обратим наше внимание на член Черна-Саймонса, который после преобразования Фурье записывается как:

$$S_{CS} = 4\kappa \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} dz \varepsilon^{z\rho\sigma} \left(\partial_z A_\rho(-q) V_\sigma(q) - \partial_z V_\sigma(q) A_\rho(-q) \right) \tag{82}$$

и после взятия второй вариационной производной по полям на границе получаем:

$$\langle V_\mu A_\nu \rangle = \frac{\delta^2 S_{CS}}{\delta V_{\mu 0} \delta A_{\nu 0}} = 4\kappa \varepsilon^{z\nu\mu} \int dz \, \left(A' V - V' A \right) \tag{83}$$

теперь, принимая во внимание выражение для Вронскиана (81) мы можем записать:

$$w_T(q) = -4\kappa \int \frac{dz}{2f^2} (\Pi_A - \Pi_V) \tag{84}$$

Таким образом мы получили в размерности $1+1$ связь между корреляторами $\langle V_\mu A_\nu \rangle$, $\langle V_\mu V_\nu \rangle$ и $\langle A_\mu A_\nu \rangle$, аналогичную полученной в работе [12] в размерностях $3+1$ которое можно окончательно записать как:

$$(S - Y) = w_T + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2} (\Pi_A - \Pi_V) = 0 \tag{85}$$

Теперь мы хотим вывести ренормгрупповое уравнение для только что полученного соотношения (85). Для этого мы должны повторить процедуру, описанную в разделе 5. Запишем уравнение Гамильтона-Якоби, где роль времени играет координата z:

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} + H(\pi_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, z_0) = 0 \tag{86}$$

где мы интегрируем действие от IR-границы, расположенной при $z = 0$ до UV-границы при $z = z_0$. Как и ранее канонический импульс записывается как:

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial(\partial_z \mathcal{A}_{0\alpha})} = \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_{0\alpha}} \tag{87}$$

Как обычно голографическое соотношение нам дает:

$$\langle j_\alpha \rangle = \frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_{0\alpha}} \tag{88}$$

Из действиея (70) может быть получено явное выражение для канонических импульсов:

$$\pi_{A\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_z A_\mu)} = 2f^2 \partial_z A_\mu + \phi_{A\mu} \tag{89}$$

$$\pi_{V\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_z V_\mu)} = 2f^2 \partial_z V_\mu + \phi_{V\mu} \tag{90}$$

где сдвижки импульса, полученные из действия Черна-Саймонса можно подробно расписать

$$\phi_{A\mu} = 4\kappa\varepsilon^{z\mu\sigma}V_\sigma, \quad \phi_{V\mu} = 4\kappa\varepsilon^{z\mu\sigma}A_\sigma \tag{91}$$

и соответствующие "скорости" опять же достаточно легко выразить через канонические импульсы:

$$\partial_z A_\mu \;=\; \frac{1}{2f^2}\tilde{\pi}_{A\mu},\ \partial_z V_\mu = \frac{1}{2f^2}\tilde{\pi}_{V\mu} \tag{92}$$

Здесь мы для удобства ввели обозначение для "сдвинутого" импульса

$$\tilde{\pi}_{A\mu} \;=\; \pi_{A\mu} - \phi_{A\mu} = \langle j_{A\mu}\rangle - \phi_{A\mu} \tag{93}$$

$$\tilde{\pi}_{V\mu} \;=\; \pi_{V\mu} - \phi_{V\mu} = \langle j_{V\mu}\rangle - \phi_{V\mu} \tag{94}$$

где ϕ определены в выражении (91). Выражая "скорости" через канонические импульсы и подставляя их в гамильтониан, получаем:

$$\begin{aligned}
H \;&=\; \int d^2x(\pi_{A\mu}\partial_z A_\mu + \pi_{V\mu}\partial_z V_\mu - L) \\
&=\; \int d^2x\left(\frac{1}{2f^2}\pi_{A\mu}(\pi_{A\mu} - 4\kappa\varepsilon^{z\mu\sigma}V_\sigma) + \frac{1}{2f^2}\pi_{V\mu}(\pi_{V\mu} - 4\kappa\varepsilon^{z\mu\sigma}A_\sigma)\right. \\
&-\; \left.(f^2((\partial_z A_\mu)^2 + (\partial V_\mu)^2)) + \frac{1}{2g^2}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu}) + 4\kappa\varepsilon^{z\nu\sigma}(\partial_z A_\nu V_\sigma + \partial_z V_\nu A_\sigma)\right) \\
&=\; \int d^2x\left(\frac{1}{4f^2}(\pi_{A\mu} - \phi_{A\mu})^2 + \frac{1}{4f^2}(\pi_{V\mu} - \phi_{V\mu})^2 - \frac{1}{2g^2}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu})\right)
\end{aligned} \tag{95}$$

И наконец мы можем записать уравнение Гамильтона-Якоби для нашей модели в размерности 1+1:

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} + Tr\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{4f^2}(\tilde{\pi}^2_{A\mu} + \tilde{\pi}^2_{V\mu}) - \frac{1}{2g^2}(F^2_{A\mu\nu} + F^2_{V\mu\nu})\right)|^{z_0} = 0 \tag{96}$$

Теперь, чтобы получить ренормгрупповое соотношение на соотношение Сона-Ямамото в размерности 1+1 мы должны подействовать на уравнение Гамильтона-Якоби соответствующей комбинацией вариационных операторов. Для начала отождествим канонические моменты с соответствующими корреляторами:

$$\pi_{A\alpha} = \frac{\delta S}{\delta A_{0\mu}} = \langle j_{A\mu}\rangle,\ \pi_{V\alpha} = \frac{\delta S}{\delta V_{0\mu}} = \langle j_{V\mu}\rangle \tag{97}$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A_{0\alpha}\delta A_{0\beta}} = \langle j^\alpha_A j^\beta_A\rangle = \Pi_A\delta^{\alpha\beta},\ \frac{\delta^2 S}{\delta V_{0\alpha}\delta V_{0\beta}} = \langle j^\alpha_V j^\beta_V\rangle = \Pi_V\delta^{\alpha\beta} \tag{98}$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta V_{0\alpha}\delta A_{0\beta}} = \langle j^\alpha_V j^\beta_A\rangle = -\varepsilon^{z\alpha\beta}w_T \tag{99}$$

Теперь проварьируем дважды Гамильтониан по граничным полям A_0 получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2f^2}\left((\frac{\delta\tilde{\pi}_A}{\delta A_0})^2+(\frac{\delta\tilde{\pi}_V}{\delta A_0})^2+\tilde{\pi}_A\frac{\delta^2\tilde{\pi}_A}{\delta A_0^2}+\tilde{\pi}_V\frac{\delta^2\tilde{\pi}_V}{\delta A_0^2}\right)=\\
=\ &\frac{1}{2f^2}\left((\langle j_A j_A\rangle)^2+(\langle j_V j_A\rangle-\frac{\delta\phi_V}{\delta A_0})^2+(\langle j_A\rangle-\phi_A)\langle j_A j_A j_A\rangle+(\langle j_V\rangle-\phi_V)\langle j_V j_A j_A\rangle\right)\\
=\ &\frac{1}{2f^2}\left(\Pi_A^2+(w_T-4\kappa A|^{z_0})^2\right)\delta^{\alpha\beta}
\end{aligned}\tag{100}$$

где в последнем переходе мы воспользовались равенством (99). И теперь можно записать ренормгрупповое соотношение для Π_A, а так же абсолютно аналогичное выражение для Π_V

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_A+\frac{1}{2f^2}\left(\Pi_A^2+(w_T-4\kappa)^2\right)=0 \tag{101}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\Pi_V+\frac{1}{2f^2}\left(\Pi_V^2+(w_T-4\kappa)^2\right)=0 \tag{102}$$

И наконец мы можем записать ренормгрупповое уравнение для разности Π_A и Π_V:

$$\frac{\partial}{\partial Z_0}(\Pi_A-\Pi_V)=-\frac{1}{2f(z_0)^2}(\Pi_A^2-\Pi_V^2) \tag{103}$$

Заметьте, что мы получили выражение абсолютно аналогичное ранее полученному в размерности 3+1 (52). Вновь мы приходим к выводу, что эта разность диагональна по отношению к ренормгруппе с коэффициентом, пропорциональным сумме $\Pi_A+\Pi_V$.

Теперь наша цель получить ренормгрупповое соотношение на трансверсальную часть смешанного коррелятора в размерности 1+1. Для этого проварьируем уравнение Гамильтона-Якоби (96) по граничным полям V_0 и A_0. Для гамильтониана получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2f^2}\left(\frac{\delta\tilde{\pi}_A}{\delta V_0}\frac{\delta\tilde{\pi}_A}{\delta A_0}+\frac{1}{2f^2}\frac{\delta\tilde{\pi}_V}{\delta V_0}\frac{\delta\tilde{\pi}_V}{\delta A_0}+\tilde{\pi}_A\frac{\delta^2\tilde{\pi}_A}{\delta V_0\delta A_0}+\tilde{\pi}_V\frac{\delta^2\tilde{\pi}_V}{\delta V_0\delta A_0}\right)=\\
=\ &\frac{1}{2f^2}\left((\varepsilon^{z\alpha\gamma}w_T-\varepsilon^{z\gamma\alpha}4\kappa V|^{z_0})\Pi_A\delta^{\gamma\beta}+(\varepsilon^{z\gamma\beta}w_T-\varepsilon^{z\gamma\beta}4\kappa A|^{z_0})\Pi_V\delta^{\gamma\alpha}\right)=\\
=\ &\frac{1}{2f^2}\varepsilon^{z\alpha\beta}\left((w_T+4\kappa)\Pi_A+(w_T-4\kappa)\Pi_V\right)
\end{aligned}\tag{104}$$

И наконец после несложных алгебраических преобразований, получим окончательно уравнение для w_T:

$$\frac{\delta}{\delta z_0}w_T+\frac{1}{2f^2}\left(w_T(\Pi_A+\Pi_V)+4\kappa(\Pi_A-\Pi_V)=0\right) \tag{105}$$

Как можно видеть, вклад члена Черна-Саймонса приводит к тому, что w_T не диагонален по отношению к ренормгрупповым преобразованиям. Проверим, обладает ли этим свойством полученное нами соотношение Сона-Ямамото (??):

$$(S-Y)_{1+1} = w_T + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2}(\Pi_A - \Pi_V) \tag{106}$$

Продифференцируем выражение $(S-Y)_{1+1}$ Скомбинируем теперь результаты вычислений для w_T (105) и $\Pi_A - \Pi_V$ (103) в одном уравнении и получим:

$$\frac{\partial}{\partial z_0} w_T + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2}\frac{\partial}{\partial z_0}(\Pi_A - \Pi_V) + 4\kappa \frac{1}{2f^2}(\Pi_A - \Pi_V) + \frac{1}{2f^2}(w_T(\Pi_A + \Pi_V) + 4\kappa(\Pi_A - \Pi_V)) + \\ + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2}\frac{1}{2f^2}(\Pi_A^2 - \Pi_V^2) - 4\kappa \frac{1}{2f^2}(\Pi_A - \Pi_V) = 0 \tag{107}$$

После простых алгебраических преобразований получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(w_T + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2}(\Pi_A - \Pi_V)\right) + \frac{1}{2f^2}(\Pi_A + \Pi_V)\left(w_T + 4\kappa \int \frac{dz}{2f^2}(\Pi_A - \Pi_V)\right) = 0 \tag{108}$$

и окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(S-Y)_{1+1} = -\frac{1}{2f^2}(\Pi_A + \Pi_V) SY \tag{109}$$

Вновь мы пришли к тому, что соотношение Сона-Ямамото диагонально относительно ренормгрупповых преобразований. Отдельно стоит отметить коэффициент в правой части равенства, который с точностью до степени q совпадает с коэффициентом в аналогичном выражении (63) для соотношения Сона-Ямамото в размерности 3+1.

6.2 Случай размерности 2+1

Попробуем повторить проделанные в предыдущем подразделе действия и получить соотношение между корреляторами $\langle V_\mu A_\nu \rangle$, $\langle V_\mu V_\nu \rangle$ и $\langle A_\mu A_\nu \rangle$. Так как в четных размерностях не существует действия Черна-Саймонса, мы рассмотрим граничное действие с трехмерным членом Черна-Саймонса (67):

$$S_{CS} = S_{CS}(A_L) - S_{CS}(A_R) \tag{110}$$

и продолжим это выражение вдоль координаты z следующим образом:

$$S_{CS}(A) = \kappa \int d^3x dz \; F \wedge F \tag{111}$$

сделав опять замену координат $A_L = V + A$, $A_R = V - A$ запишем подробное выражение:

$$S_{CS} = 4\kappa \int d^3x dz \; F_{V\mu\nu} F_A^{\mu\nu} \tag{112}$$

После перехода в q-пространство получаем:

$$S_{CS} = 4\kappa \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} dz \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\rho} F_{V\alpha\beta}(q) F_{A\gamma\rho}(-q) \tag{113}$$

мы опять работаем в гамильтоновой калибровке $V_z = A_z = 0$ и в итоге можем записать:

$$\begin{aligned} S_{CS} &= 8\kappa \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} dz \left(\varepsilon^{\alpha\beta z\gamma} F_{V\alpha\beta}(q)\partial_z A_\gamma(-q) + \varepsilon^{z\gamma\alpha\beta}\partial_z V_\gamma(q) F_{A\alpha\beta}(-q)\right) && (114) \\ &= -8\kappa \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 dz} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma z}(F_{V\alpha\beta}(q)\partial_z A_\gamma(-q) - F_{A\alpha\gamma}(-q)\partial_z V_\beta(q)) && (115) \\ &= -16\kappa \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 dz} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma z} q_\alpha (V_\beta(q)\partial_z A_\gamma(-q) + A_\gamma(-q)\partial_z V_\gamma(q)) && (116) \end{aligned}$$

Как обычно, разложим калибровочные поля на составляющие $V_\mu(q) = V(q,z)V_{0\mu}(q)$ $A_\mu(q) = A(q,z)A_{0\mu}(q)$. Теперь, варьируя действие дважды по граничным полям, получим выражение для вектор-аксиального коррелятора:

$$\frac{\delta^2 S_{CS}}{\delta V_{0\mu}(q)\delta A_{0\nu}(-q)} = \langle V_\mu(q) A_\nu(-q)\rangle \tag{117}$$

который имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle j_{V\mu}(q) j_{A\nu}(-q)\rangle &= -16\kappa\varepsilon^{\alpha\mu\nu z} q_\alpha \int dz (A'V + V'A) && (118) \\ &= -16\kappa\varepsilon^{\alpha\mu\nu z} q_\alpha (AV)|^{z_0} = 16\kappa\varepsilon^{z\mu\nu\alpha} q_\alpha = -\varepsilon^{z\mu\nu\alpha} q_\alpha |q| w_T(q) && (119) \end{aligned}$$

и трансверсальная часть этого коррелятора имеет вид:

$$w_T = -\frac{16\kappa}{|q|} \tag{120}$$

Вычисление двухточечных корреляторов для векторных и аксиальных полей в точности повторяет приведенные в предыдущем разделе вычисления и дает:

$$\Pi_V = \frac{2f^2}{|q|} V'|^{z_0},\ \Pi_A = \frac{2f^2}{|q|} A'|^{z_0} \tag{121}$$

где опять Π_V и Π_A выбраны безразмерными. Как теперь явно видно, в размерности 2+1 нам не удалось обнаружить связи между $\langle V_\mu A_\nu\rangle$, $\langle V_\mu V_\nu\rangle$ и $\langle A_\mu A_\nu\rangle$ аналогичной той, что была обнаружена Соном и Ямамото в размерности 3+1 и нами в размерности 1+1.

7 Заключение

В этой работе мы изучили поведение соотношения Сона-Ямамото при действии ренормгруппы, а так же построили и изучили аналогичные соотношения в размерностях 1+1 и 2+1. Было обнаружено, что соотношение Сона-Ямамото сохраняется на различных масштабах энергии. Изучая классическое уравнение Гамильтона-Якоби, мы показали, что соотношение Сона-Ямамото диагонально по отношению к ренормгруппе. Более того, был предоставлен достаточно общий метод исследования поведения корреляторов в зависимости от масштаба энергии. При изучении случая младших размерностей был построен аналог соотношения Сона-Ямамото в размерности 1+1. Более того, было показано, что новое соотношение подчиняется тем же ренормгрупповым уравнениям с точностью до размерного коэффициента. Был так же рассмотрен случай размерности 2+1, где аналогичных связей, к сожалению, найти не удалось.

Отсюда следует сразу несколько возможностей для продолжения исследовательской работы. Для начала, следует заметить, что диагональность ренормгрупповых соотношений является модельно-зависимой и интересно было бы провести подобный анализ в случае, когда теория однозначно определена, как, например, в суперсимметричных калибровочных теориях. Также полезно будет попытаться сформулировать полученные результаты в терминах теории струн. Помимо этого, диагонализация матрицы аномальных размерностей отвечает диагонализации спиновой цепочки Гамильтониана, которая возникает при дискретизации сигма-модели на мировой поверхности и, таким образом было бы интересно сформулировать диагонализацию корреляторов в терминах спиновой цепочки.

Помимо этого существует ещч несколько интересных вопросов. Во-первых подобная диагонализация может быть рассмотрена в гравитационном секторе теории внутри пространства AdS, где уравнение Уиллера-де-Витта играет роль уравнения Гамильтона-Якоби. Второй вопрос касается барионного сектора теории. Как известно, барионы на четырехмерной границе соответствуют инстантонам в пятимерном пространстве AdS [6] и, следовательно, интересно было бы изучить поведение как соотношения Сона-Ямамото, так и ренормгруппового уравнения на инстантонном решении, в секторе с ненулевым топологическим зарядом. И наконец, было бы интересно более подробно рассмотреть полученные результаты в связи с моделями теории конденсированного состояния вещества.

Список литературы

[1] O. Dubinkin, A. Gorsky and A. Milekhin, “Son-Yamamoto relation and Holographic RG flows,” Phys. Rev. D 91, 066007 (2015) [hep-th/1412.0513].

[2] J. de Boer, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, “On the holographic renormalization group,” JHEP 0008, 003 (2000) [hep-th/9912012].

[3] I. Heemskerk and J. Polchinski, “Holographic and Wilsonian Renormalization Groups,” JHEP 1106, 031 (2011) [arXiv:1010.1264 [hep-th]].

[4] A. Vainshtein, “Perturbative and nonperturbative renormalization of anomalous quark triangles,” Phys. Lett. B 569, 187 (2003) [arXiv:hep-ph/0212231].

[5] M. A. Shifman, “Anomalies and Low-Energy Theorems of Quantum Chromodynamics,” Phys. Rept. 209, 341 (1991) [Sov. Phys. Usp. 32, 289 (1989)] [Usp. Fiz. Nauk 157, 561 (1989)].

[6] A. Gorsky and A. Krikun, “Baryon as dyonic instanton,” Phys. Rev. D 86, 126005 (2012) [arXiv:0902.1832 [hep-ph]].

[7] A. Gorsky and A. Krikun, “Magnetic susceptibility of the quark condensate via holography,” Phys. Rev. D 79, 086015 (2009) [arXiv:0902.1832 [hep-ph]].

[8] A. Vainshtein, Phys. Lett. B 569, 187 (2003) [arXiv:hep-ph/0212231].

[9] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, Phys. Rev. D 67, 073006 (2003) [Erratum- ibid. D 73, 119901 (2006)] [arXiv:hep-ph/0212229].

[10] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, JHEP 0403, 035 (2004) [arXiv:hep-ph/0311100].

[11] J. Erlich, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, “QCD and a holographic model of hadrons,” Phys. Rev. Lett. 95, 261602 (2005) [hep-ph/0501128].

[12] D. T. Son and N. Yamamoto, “Holography and Anomaly Matching for Resonances,” arXiv:1010.0718 [hep-ph].

[13] S. L. Adler, “Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics,” Phys. Rev. 177, 2426 (1969).

[14] J. S. Bell and R. Jackiw, "A PCAC puzzle: $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in the σ-model," Nuovo Cim. A 60 (1969) 47.

[15] M. Knecht, S. Peris and E. de Rafael, "On Anomaly Matching and Holography," JHEP 1110, 048 (2011)

[16] P. Colangelo, F. De Fazio, J. J. Sanz-Cillero, F. Giannuzzi and S. Nicotri, "Anomalous AV^*V vertex function in the soft-wall holographic model of QCD," Phys. Rev. D 85, 035013 (2012) [arXiv:1108.5945 [hep-ph]].

[17] P. Colangelo, J. J. Sanz-Cillero and F. Zuo, "Holography, chiral Lagrangian and form factor relations," JHEP 1211, 012 (2012) [arXiv:1207.5744 [hep-ph]].

[18] A. Gorsky, P. N. Kopnin, A. Krikun and A. Vainshtein, "More on the Tensor Response of the QCD Vacuum to an External Magnetic Field," Phys. Rev. D 85, 086006 (2012) [arXiv:1201.2039 [hep-ph]].

[19] A. Gorsky, P. N. Kopnin, A. Krikun and A. Vainshtein, "More on the Tensor Response of the QCD Vacuum to an External Magnetic Field," Phys. Rev. D 85, 086006 (2012) [arXiv:1201.2039 [hep-ph]].

[20] J. Erdmenger, A. Gorsky, P. N. Kopnin, A. Krikun and A. V. Zayakin, "Low-Energy Theorems from Holography," JHEP 1103, 044 (2011) [arXiv:1101.1586 [hep-th]].