Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики
Кафедра Теоретической Астрофизики и Квантовой Теории Поля

Выпускная квалификационная работа на степень магистра

Инстантоны и инварианты узлов

Выполнил студент 6 курса А.Г. Милехин
Научный руководитель: д.ф.-м.н. А.С. Горский

Москва, 2015

Содержание

1 Введение

Классическая работа Виттена [3] положила начало связи между квантовой теорией поля и инвариантами узлов. В этой работе было показано, что вакуумное среднее Вильсоновской петли в форме узла K в представлении R для $SU(2)$ теории Черна-Саймонса на S^3 равно полиному Джонса $J(q)$ для этого узла:

$$\langle W_R(K)\rangle = J(q) \tag{1.1}$$

Уровень Черна-Саймонса k и переменная q связаны так:

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+2}\right) \tag{1.2}$$

С тех пор это соотношение было рассмотрено с точки зрения топологических струн[4], поскольку известно, что открытая A-модель на T^*S^3 дуальна теории Черна-Саймонса на S^3. При этом узел вырезается на S^3 Лагранжевой браной. Также инварианты узлов были исследованы с точки зрения теории на этой Лагранжевой бране[5, 6]. Также было показано, как обобщить его на гомологии Хованова-Розанского[7] и суперполином[8]. Однако многие аспекты до сих пор остаются неясными.

Все известные соответствия, по-сути, основаны на уравнении (1.1) - т.е. статсумма заданной теории равна полиному одного конкретного узла. В этой работе мы исследуем пример, когда статсумма равна производящей функции для определенного семейства узлов, т.н. торических узлов - эти узлы могут быть нарисованы на 2-торе без самопересечений. При этом узел задается 2 взаимнопростыми числами (n, r), которые отвечают числу намоток на 1-циклы тора.

Наш основной результат состоит в том, что вакуумное среднее кирального конденсата безмассового гипермультиплета в пятимерной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД в присутствии поверхностного оператора(surface operator) является производящей функцией для полиномов ХОМФЛИ всех торических узлов. Полином ХОМФЛИ, при этом, берётся в фундаментальном представлении, а пятимерная теория компактифицирована на окружность длины β, находится в самодуальном Ω-фоне с эквивариантным параметром ϵ и также включает в себя антифундаментальный гипермультиплет массы m_a. Переменные q и A в полиноме выражаются следующим образом через параметры теории:

$$q = \exp(-\beta\epsilon) \tag{1.3}$$

$$A = -\exp(-\beta m_a) \tag{1.4}$$

где m_a - масса антифундаментального гипермультплета. Мы идентифицируем числа n и r как инстантонный и электрический заряды инстантона. С точки зрения топологических струн, в нашем картине узел рисуется не Лагранжевой браной, а голоморфным инстантоном. Для некоторого класса торических узлов нам удалось расширить это соответствие до суперполинома.

Данная работа основана на статьях [1, 2] и организована следующем образом:

В разделе 2 мы исследуем пятимерную суперсимметричную квантовую электродинамику(СКЭД) в Ω-деформации и её связь с суперполиномом. В подразделе 2.1 мы опишем эту теорию. Затем, в 2.2, мы дадим небольшой обзор известной связи q, t-чисел Каталана, вырожденного суперполинома $(n, n+1)$ торического узла и пятимерной СКЭД. Далее, в 2.3 мы расширим это соответствие до суперполинома $(n, nk+1)$ торического узла. При этом $k+1$ соответствует уровню пятимерного члена Черна-Саймонса, n-инстантонному числу. В конце раздела мы покажем, как суперполином связан с некоторыми другими инвариантами узлов.

Чтобы лучше понять природу второго числа $nk+1$, в секции 3 мы исследуем структуру кирального кольца в СКЭД и его связь с поверхностными операторами в теории. Это позволит нам в 4 обобщить соответствие между инстантонами и узлами до произвольного торического узла (n, r), где r будет электрическим зарядом инстантона. Однако, к сожалению, полином, который мы при этом получим, не совпадает с известным суперполиномом для торических узлов. Тем не менее, он имеет целые положительные коэффициенты и даёт правильную редукцию к полиному ХОМФЛИ. В 4.1 мы покажем, используя геометрических переход, что узлы в нашей картине возникают как пересечение голоморфного инстантона топологических струн типа А и стопки Лагранжевых бран. Это позволит нам связать наш подход со стандартным подходом к полиномам узлов как Вильсоновским петлям в теории Черна-Саймонса. В 4.2 мы кратко рассмотрим так называемый стабильный предел, когда электрический заряд инстантона стремится к бесконечности.

Раздел 5 посвящён связи инстантонов в теории с неабелевой группой $SU(2)$ с торическими узлами. В 5.1 мы, используя АГТ соответствие и открыто-замкнутую дуальность, свяжем абелеву теорию в присутствии поверхностного дефекта с $SU(2)$ теорией с 4 флейворами со специальным выбором масс. В 5.2 мы рассмотрим предел в более привычную $D = 4, \mathcal{N} = 2$ теорию Зайнберга-Виттена и покажем, что в этом случае Некрасовская статсумма соответствует очень вырожденному полиному ХОМФЛИ.

В конце, в 6 мы приведём небольшое наблюдение о связи формулы Джонса-Россо и статсуммы пятимерной СКЭД с дробным членом Черна-Саймонса.

2 Супер КЭД и инварианты узлов

2.1 Описание теории

Пятимерная $\mathcal{N} = 1$ квантовая электродинамика состоит из векторного поля A_A, 4-х компонентного Дираковского спинора λ и скалярного поля Хиггса ϕ. Все они лежат в присоединённом представлении $U(1)$. Лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{AB}F^{AB} + \frac{1}{g^2}(\partial_A\phi)^2 + \frac{1}{g^2}\bar{\lambda}\gamma^A\partial_A\lambda \tag{2.5}$$

$\gamma^A, A = 1, ..., 5$ - пятимерные гамма матрицы. Поскольку присоединённое действие $U(1)$ тривиально, это свободная теория.

Для регуляризации инстантонных вычислений Некрасовым [9] был предложен так называемый Ω-фон который отвечает включению гравифотона, чья кривизна равна угловым скоростям вращения ϵ_1, ϵ_2 двух трансверсальных плоскостей в $\mathbb{R}^4$.

Обсудим для начала чисто калибровочную теорию $\mathcal{N} = 2$ супер Янга-Миллса в присутствии Ω-фона в четырёх измерениях. Состав полей в теории следующий: векторное поле A_m, комплексный скаляр $\varphi, \bar{\varphi}$ и 2 Вейлевских фермиона $\Lambda^I_\alpha, \bar{\Lambda}^I_{\dot{\alpha}}$, все лежат в присоединённом представлении $U(1)$. Здесь индексы $m = 1, \ldots, 4$, $I = 1, 2$ есть индексы по $SU(2)_I$ R-симметрии, $\alpha, \dot{\alpha}$ - спинорные индексы $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Для включения Ω-фона можно рассмотреть нетривиально расслоение $\mathbb{R}^4$ над тором T^2 [9],[10] с кривой шестимерной метрикой:

$$ds^2 = 2dzd\bar{z} + \left(dx^m + \Omega^m d\bar{z} + \bar{\Omega}^m dz\right)^2, \tag{2.6}$$

где $(z, \bar{z})$ - комплексные координаты на торе и 4-х мерный вектор Ω^m определён как:

$$\Omega^m = \Omega^{mn}x_n, \qquad \Omega^{mn} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i\epsilon_1 & 0 & 0 \\ -i\epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\epsilon_2 \\ 0 & 0 & i\epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

В общем случае, когда Ω^{mn} не (анти-)самодуально суперсимметрия нарушена. Однако, можно вставить Вильсоновскую петлю по R-заряду чтобы восстановить часть суперсимметрии [10]:

$$A^I_J = -\frac{1}{2}\Omega_{mn}\left(\bar{\sigma}^{mn}\right)^I_J d\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{mn}\left(\bar{\sigma}^{mn}\right)^I_J dz. \tag{2.8}$$

Наиболее компактный способ написать Лагранжиан состоит в введении 'длинных' скаляров (не путать с $\mathcal{N}=1$ суперполем):

$$\Phi = \varphi + i\Omega^m D_m, \qquad \bar{\Phi} = \bar{\varphi} + i\bar{\Omega}^m D^m, \tag{2.9}$$

Бозонный сектор теории выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_\Omega = -\frac{1}{4g^2}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{g^2}D_m\Phi D^m\bar{\Phi} + \frac{1}{2g^2}\left[\Phi,\bar{\Phi}\right]^2 = \\ -\frac{1}{4g^2}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{g^2}(\partial_m\phi + F_{mn}\Omega^n)(\partial^m\phi - F^{mn}\Omega^n) + \frac{1}{2g^2}(i\Omega^m\partial_m\bar{\phi} + i\Omega^m\partial_m\phi)^2\end{gathered} \tag{2.10}$$

Мы можем добавить в эту теории фундаментальный гипермультиплет, который состоит из 2-х скаляров q, $\tilde{q}$, 2-х Вейлевских фермионов ψ и $\tilde{\psi}$, и характеризуется 2 массами: m и $\tilde{m}$, поскольку $\mathcal{N}=2$ гипермультиплет строится из 2-х $\mathcal{N}=1$ гипермультиплетов с противоположными зарядами. При включении материи бозонная часть Лагранжиана выглядит так:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4g^2}F_{mn}F^{mn} + \frac{1}{g^2}(\partial_m\phi + F_{mn}\Omega^n)(\partial^m\phi - F^{mn}\Omega^n) + \\ \frac{1}{2}|D_m q|^2 + \frac{1}{2}|D_m\tilde{q}|^2 + \frac{2}{g^2}(i\partial_m(\Omega^m\bar{\phi} + \Omega^m\phi) + g^2(\bar{q}q - \bar{\tilde{q}}\tilde{q}))^2 + \\ \frac{1}{2}|(\phi - m - i\Omega^m D_m)q|^2 + \frac{1}{2}|(\phi - \tilde{m} - i\Omega^m D_m)\tilde{q}|^2 + 2g^2|\tilde{q}q|^2\end{gathered} \tag{2.11}$$

Общая Ω-деформация сохраняет только одну суперсимметрию[10]. Удобно произвести топологический твист[9] и взять $SU_L(2)$ и диагональную часть $SU_R(2)\times SU_I(2)$ за Лоренцеву группу. Тогда $\Lambda^I_{\dot{\alpha}}$ станет скаляром η и самодуальным тензором χ_{IJ}, Λ^I_α станет вектором ψ_I, и $\psi,\bar{\psi}$ превратятся в θ,ν_m,ω_{mn}. Суперзаряды имеют похожую судьбу. Скалярный суперзаряд Q при этом и есть ненарушенная часть суперсимметрии.

2.2 Вырожденный суперполином и числа Каталана

В этом разделе мы дадим обзор известных результатов о связи числе Каталана, суперполиномов и пятимерной суперКЭД. Впервые столь необычная связь была найдена в [11].

Начнём с обзора необходимых нам математических результатов.

В [12] Хайман и Гарсия предложили так называемые q, t-числа Каталана, которые являются полиномами по q, t с целыми положительными коэффициентами:

$$C_n(q,t) = \sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{t^{2\sum l} q^{2\sum a}(1-t)(1-q)\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})(\sum q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^a - t^{l+1})\prod(t^l - q^{a+1})} \tag{2.12}$$

все суммы и произведения взяты по диаграмме Юнга λ. l и a обозначают руку и ногу квадрата в диаграмме, а l' и a' обозначают коногу и коруку соответственно.

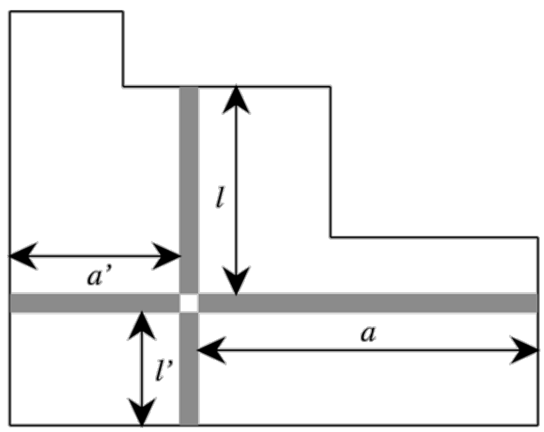

Рис. 1: Определение (ко)рук и (ко)ног

Символ $\prod^{0,0}$ говорит об отсутствии $(0,0)$ бокса. В случае $q = t = 1$ мы получаем обычное число Каталана: $C_n(1,1) = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$

В [13] было показано, что данный полином является полиномом Пуанкаре для сингулярной плоской кривой, отвечающей $(n, n+1)$-торическому узлу. С другой стороны, известно, что этот полином совпадает с так называемой “нижней колонкой”(bottom row) суперполинома $\mathcal{P}(A = 0, q, t)$ для того же самого торического узла.

Наконец, Хайманом было доказано, что q, t-числа Каталана равны эквивариантной Эйлеровой характеристике тавтологического расслоения над Гильбертовой схемой n

точек на $\mathbb{C}^2$:

$$C_n(q,t) = \chi^T(Hilb^n(\mathbb{C}^2), \Lambda^n V) \tag{2.13}$$

где q, t - эквивариантные параметры для естественного действия тора T на $\mathbb{C}^2$.

Это утверждение будет отправной точкой наших рассуждений, поскольку известно[14], что такая схема Гильберта связана с инстантонными вычислениями для n-инстантонов. Поскольку вычисления происходят эквивариантно, то необходимо включение Некрасовской Ω-деформации.

Сейчас мы покажем, что данная формула может быть получена из статистической суммы $d = 5, \mathcal{N} = 1$ $U(1)$ калибровочной теории с 2 фундаментальными материями с массами m_f, M и коэффициентом Черна-Саймонса 2:

$$C_n(q,t) = t^{-n/2} q^{-n/2} \frac{\exp(\beta M)}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial m_f} \frac{\partial}{\partial M} Z_n^{U(1)}(m_f, M), \ m_f = 0, \ M \to \infty \tag{2.14}$$

где $Z_n^{U(1)}$ есть n-инстантонный вклад в статсумму.

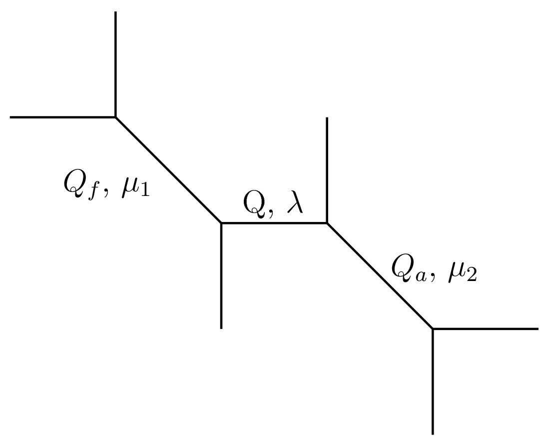

Рис. 2: Геометрия $\mathcal{O}(-1) \times \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^1$ с двумя раздутыми точками отвечающая пятимерной СКЭД с двумя флейворами и коэффициентом Черна-Саймонса равным 1

Одно из пяти измерений компактифицировано на окружность с радиусом β. Обозначим параметры Ω-деформации как ϵ_1 и ϵ_2. Тогда:

$$t = \exp(-\beta\epsilon_1) \tag{2.15}$$

$$q = \exp(-\beta\epsilon_2) \tag{2.16}$$

$$\tag{2.17}$$

Для доказательства необходимого соотношения воспользуемся техникой топологических вертексов[15]. Согласно [16], полная статсумма $U(1)$ теории с фундаментальным и антифундаментальным мультиплетами и константой связи Ч-С $k=1$ равна:[a]:

$$Z^{U(1)}(m_f,m_a)=\sum_{\lambda}(-Q)^{|\lambda|}t^{|\lambda|/2}q^{|\lambda|/2}\times$$

$$\frac{t^{\sum l}q^{\sum a}\prod_{i=1,j=1}^{\infty}(1-Q_f q^{i-1/2}t^{\lambda_i-j+1/2})(1-Q_a q^{-\lambda_i^t+j-1/2}t^{1/2-i})}{\prod(t^l-q^{a+1})(t^{l+1}-q^a)} \tag{2.18}$$

где Кэлеровы параметры: $Q_f=\exp(-\beta m_f)/\sqrt{qt}, Q_a=\sqrt{qt}\exp(\beta m_a)$, Q определяет константу связи через $Q=\exp(-\beta/g)$. Соответствующая торическая диаграмма Калаби-Яу представлена на рис. 2. Пертурбативная часть статсуммы получается если положить $Q=0$:

$$Z^{U(1),pert}(m_f,m_a)=\prod_{i=1,j=1}^{\infty}(1-Q_f q^{i-1/2}t^{-j+1/2})(1-Q_a q^{j-1/2}t^{1/2-i}) \tag{2.19}$$

Тогда вклад n-инстантонов:

$$Z_n^{U(1)}(m_f,m_a)=\sum_{|\lambda|=n}(-Q)^{|\lambda|}t^{|\lambda|/2}q^{|\lambda|/2}\times$$

$$\frac{t^{\sum l}q^{\sum a}\prod(1-\exp(-\beta m_f)t^{l'}q^{a'})(1-\exp(\beta m_a)t^{-l'}q^{-a'})}{\prod(t^l-q^{a+1})(t^{l+1}-q^a)} \tag{2.20}$$

Факторы

$$\prod(1-\exp(-\beta m_f)t^{l'}q^{a'}) \tag{2.21}$$

отвечают вкладу киральной материи. $U(1)$ калибровочная часть отвечает

$$\sum_{|\lambda|=n}(-Q)^{|\lambda|}t^{|\lambda|/2}q^{|\lambda|/2}\frac{t^{\sum l}q^{\sum a}}{\prod(t^l-q^{a+1})(t^{l+1}-q^a)} \tag{2.22}$$

Теперь очевидно какие ингредиенты мы должны добавить в теорию:

•Для фактора $\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})$ мы должны взять киральный мультиплет и продифференцировать по его массе, при массе равной нулю.

•Что бы получить $\sum q^{a'}t^{l'}$ мы должны взять ещё один мультиплет и продифференцировать по его массе, при массе равной бесконечности.

[a] в [16] нужно заменить $t\to 1/t$

•Наконец, известно, что член Черна-Саймонса с константой связи k отвечает добавке $t^{k\sum l}q^{k\sum a}$ в выражение для статсуммы. Если рассматривать данную пятимерную теорию как компактификацию М-теории на Калаби-Яу, k есть индекс пересечения 2-циклов[17, 18]. Например, теория с $k=0$ и без флейворов даётся геометрией $\mathcal{O}(0)\times\mathcal{O}(-2)\to\mathbb{P}^1$ - рисунок 3. Нам необходимо $k=2$.

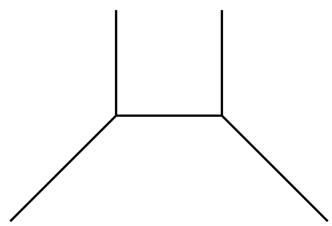

Рис. 3: Геометрия $\mathcal{O}(0)\times\mathcal{O}(-2)\to\mathbb{P}^1$ отвечающая пятимерной СКЭД с $k=0$ без материи

2.3 Суперполином и пятимерная супер-КЭД

В этом разделе мы продолжим развивать связь между суперполиномом и СуперКЭД. Мы расширим соответствие из предыдущего раздела до суперполинома $(n, nk+1)$ торического узла. В работах [19, 20] была предложена следующая формула для вычисления такого полинома:

$$P(A,q,t)_{nk+1,n} = \tag{2.23}$$

$$\sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum l}q^{(k+1)\sum a}(1-t)(1-q)\prod^{0,0}(1+Aq^{-a'}t^{-l'})\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})(\sum q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^a-t^{l+1})\prod(t^l-q^{a+1})}$$

При $A=0$ и $k=1$ она сводится к формуле для q,t-Каталанов.

Мы покажем, что данная формула может быть получена из статистической суммы $U(1)$ калибровочной теории с 2 фундаментальными материями с массами m_f, M, и одной антифундаментальной с массой m_a и коэффициентом Черна-Саймонса $k+1$:

$$P(A,q,t)_{n,nk+1} = t^{-n/2}q^{-n/2}\frac{1}{1+A}\frac{\exp(\beta M)}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial m_f}\frac{\partial}{\partial M}Z_n^{U(1)}(m_f,m_a,M),\ m_f=0,\ M\to\infty \tag{2.24}$$

где $Z_n^{U(1)}$ есть n-инстантонный вклад в статсумму.

NB: наш выбор переменных в суперполиноме отличается от выбранных в [20] или [19]. Мы проведём отождествление переменных, когда будем обсуждать разные пределы этой формулы.

Как видно, формула очень похожа на формулу для q,t-Каталана и радикальных изменений делать не нужно. Чтобы получить суперполином нам необходимо добавить:

•Антифундаментальный мультиплет, отвечающий фактору $\prod^{0,0}(1+Aq^{-a'}t^{-l'})$ - поскольку именно от соответствует вкладу антифундаментальной материи[16]. A при этом определяется через массу антифундаментала m_a как

$$A = -\sqrt{qt}\exp(\beta m_a) \tag{2.25}$$

•Взять константу связи Черна-Саймонса равной $k+1$.

Также в математической литературе известны старшие q,t-Каталаны, предложенные Хайманом[21]:

$$C_n^k(q,t) = \sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum l} q^{(k+1)\sum a}(1-t)(1-q)\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})(\sum q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^a - t^{l+1})\prod(t^l - q^{a+1})} \tag{2.26}$$

Очевидно, что они соответствуют выключению антифундаментала $A=0$, а индекс k соответствует уровню Черна-Саймонса в пятимерной теории.

Напомним, что n-инстантонные вклады возникают из M2 бран намотанных на $\mathbb{P}^1_{base}$ n раз. А k равно индексу пересечения базовой сферы и сферы слоя. Поэтому сдвиг $1 \to kn+1$ от члена Черна-Саймонса является аналогом эффекта Виттена ,поскольку инстантон наматывается дополнительные kn раз на второй цикл и приобретает дополнительный заряд.

Вместо рассмотрения отдельного вклада, мы можем рассмотреть всю статсумму:

$$Z^{Nek}(m,\epsilon_1,\epsilon_2,\beta,Q) = \sum_n (-Q)^n Z_n(m,\epsilon_1,\epsilon_2,\beta) \tag{2.27}$$

Нетривиальным наблюдением является тот факт, что статсумма при $k=1$ удовлетворяет разностному уравнению, которое мы сейчас напишем. В пределе Некрасова-Шаташвили $\epsilon_2 = 0 \to t = 1$ суммирование q-чисел Каталана может быть проведено явно:[22]:

$$P(q,Q) = \frac{\exp(\beta M)}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial m_f}\frac{\partial}{\partial M}Z^{Nek}(m_f, M, q, Q/\sqrt{q}),\ m_f = 0,\ M \to \infty = \frac{A_q(Qq^2)}{A_q(Qq)} \tag{2.28}$$

где $A_q(s)$- есть функция q-Айри:

$$A_q(s) = \sum_k \frac{s^k q^{k^2}}{(q;q)_k} \tag{2.29}$$

В определении использован символ Похаммера $(z;q)_k = \prod_{l=0}^{k-1}(1-zq^l)$. Это означает, что производящая функция для полиномов $(n, n+1)$ торических узлов удовлетворяет следующему уравнению:

$$P(q,Q) = 1 - QP(q,Q)P(q,qQ) \tag{2.30}$$

К сожалению, нам неизвестно теоретико-полевое объяснение этого уравнения.

2.4 Вырождения в полиномы ХОМФЛИ, Александера, Джонса

Что бы сравнить суперполином с другими инвариантами узлов, перепишем формулы из предыдущего раздела в других переменных. Удобно ввести следующие переменные:

$$\frac{1}{\tilde{q}^2\tilde{t}^2} = q = \exp(-\beta\epsilon_1) \tag{2.31}$$

$$\tilde{q}^2 = t = \exp(-\beta\epsilon_2) \tag{2.32}$$

$$\tilde{a}^2\tilde{t} = A = -\exp(\beta m_a) \tag{2.33}$$

И обратно:

$$\tilde{t} = -\frac{1}{\sqrt{qt}} = -\exp(\beta(\epsilon_1+\epsilon_2)/2) \tag{2.34}$$

$$\tilde{q} = \sqrt{t} = \exp(-\beta\epsilon_2/2) \tag{2.35}$$

$$\tilde{a} = \sqrt{-\sqrt{tq}A} = \exp(\beta\frac{2m_a - \epsilon_1 - \epsilon_2}{4}) \tag{2.36}$$

- $\tilde{t} = -1$: Суперполином редуцируется к ХОМФЛИ. С точки зрения теории поля мы имеем $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ - самодуальная Ω-деформация и, соответственно, нерафинированная струна.

- $\tilde{t} = -1, \tilde{a} = \tilde{q}^N$ - мы получаем полином Джонса в фундаментальном представлении $SU(N)$. При этом соотношение второе соотношение переписывается как $m_a = N\epsilon_1$. Это очень напоминает квантование Некрасова-Шаташвили, однако это не буквально оно, т.к. $\epsilon_2 \neq 0$. К сожалению, о квантовых интегрируемых системах при

$\epsilon_2 \neq 0$ почти ничего не известно.

- $\tilde{a} = 1, \tilde{t} = -1$: Мы получаем полином Александера. При этом это отвечает безмассовому антифундаменталу.

3 Киральное кольцо и Лагранжева брана

В предыдущем разделе мы стартовали с трёх мультиплетов материи, однако, на самом деле нам нужно только два, поскольку одна из материй имеет бесконечную массу. Сейчас мы покажем, что единственным эффектом этого мультиплета является вставка оператора $O = \int d^5x \exp(-\beta\Phi)$, где Φ - продеформированный скаляр векторного мультиплета. Чуть ниже мы объясним что это за деформация и зачем она нужна.

$$\lim_{m_2 \to \infty} \frac{\exp(\beta m_2)}{\beta} \frac{\partial}{\partial m_2} Z^{U(1)}(m_1, m_2, m_3) = \langle O \rangle^{U(1)}_{m_1, m_3} \tag{3.37}$$

Для начала рассмотрим теорию без Омега-деформации. Если мы отинтегрируем массивный гипермультиплет, то заработаем потенциал Коулмена-Вайнберга:

$$(\phi + m_2)^2 \left(\log\left(\frac{\phi + m_2}{\Lambda_{UV}} \right) - 1 \right) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^3} \exp(-t(\phi + m_2)) \tag{3.38}$$

Что бы поднять это выражение в пять измерений[23], мы должны взять сумму по Калуза-Кляйновским модам, т.е. добавить $\frac{2\pi i n}{R}$ к $\phi + m_2$ и взять сумму по n:

$$\mathrm{Li}_3\left(e^{-2\pi R(\phi + m_2)}\right) \tag{3.39}$$

Для больших m_2 это просто $\exp(-2\pi R(\phi + m_2))$. Итак, этим однопетлевым вычислением мы получили ур. (3.37) с оператором $O = \int d^5x \exp(-\beta\phi(x))$.

При включении общей Омега-деформации мы остаёмся с одной суперсимметрией, при этом скаляр векторного мультиплета не замкнут относительно её:

$$Q_\Omega \phi = \sqrt{2}\Omega^n \psi_n \tag{3.40}$$

Поэтому операторы кирального кольца необходимо продеформировать. Соответствующая деформация ϕ была построена в [24] и было показано, как считать вакуумные средние таких операторов. Для этого необходимо ввести функцию профиля для диаграммы Юнга λ:

$$f_{\lambda,\epsilon_1,\epsilon_2}(x) = |x| + \sum_{i=1} (|x+\epsilon_1-\epsilon_2\lambda_i-\epsilon_1 i| - |x-\epsilon_2\lambda_i-\epsilon_1 i| - |x+\epsilon_1-\epsilon_1 i| + |x-\epsilon_1 i|) \tag{3.41}$$

Тогда вклад Φ^n в статсумму для конкретной диаграммы Юнга даётся формулой:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^n f''_{\lambda,\epsilon_1,\epsilon_2}(x) \tag{3.42}$$

Сейчас мы покажем, что $\exp(-\beta\phi)$ с деформированным ϕ является продуктом тяжёлого флейвора в Омега-деформированной теории тоже.

Рассмотрим член $(-1)(1-t)(1-q)\sum q^{a'}t^{l'}$ в выражении для суперполинома. Если λ_i - длинна i-строки, то мы можем переписать это выражение как:

$$(1-t)\sum_{i=1}(q^{\lambda_i}t^{i-1}-t^{i-1}) = \sum_{i=1}(q^{\lambda_i}t^{i-1}-t^{i-1}-q^{\lambda_i}t^i+t^i) \tag{3.43}$$

Где сумма берётся по строкам диаграммы Юнга λ. Но это выражении в точности получится, если мы вычислим вакуумное среднее $\exp(-\beta\phi)$ по формуле 3.42.

Естественно предположить, что разные операторы кирального кольца будут отвечать разным узлам. В следующем разделе мы покажем, что это действительно так. Для этого нам понадобится производящая функция $Y(z)$ для операторов кирального кольца[25]:

$$Y(z) = \exp\left(\sum_{n=1}\frac{z^{-n}}{n}\mathcal{O}_n\right) \tag{3.44}$$

где

$$\mathcal{O}_n = \langle\exp(-n\beta\Phi)\rangle \tag{3.45}$$

В терминах инстантонного разложения $Y(z)$ равна[25]:

$$Y(z) = \frac{1}{1-z}\frac{\prod_{\square\in\partial_+\lambda}(z-q^{a'}t^{l'})}{\prod_{\square\in\partial_-\lambda}(z-qtq^{a'}t^{l'})} \tag{3.46}$$

В калибровочных теориях, помимо Вильсоновских петель, которые являются одномерными дефектами, также существуют многомерные дефекты, называемые поверхностными операторами[26, 29, 30]. С точки зрения М-теории они могут быть реализованы как M5 брана намотанная на Лагранжев 3-цикл в Калаби-Яу. В дальнейшем мы будем называть такие дефекты просто Лагранжевыми бранами. Также как и Вильсоновские петли, они имеют внутренние степени свободы, но при этом их натяжение бесконечно. Техника топологических вертексов позволяет вычислять статсуммы в присутствии таких объектов.

Легко показать, что одна Лагранжева брана на внешней ноге отвечает вкладу

$$M(z)=\prod_{j=1}^{l(\lambda)}\frac{1-zt^{j-1}q^{\lambda_j}}{1-zt^{j-1}} \tag{3.47}$$

в статсумму $U(1)$ калибровочной теории.

Также, в зависимости от фрейминга мы получим или $M(z)$ - для браны, или $1/M(z)$ - для антибраны.

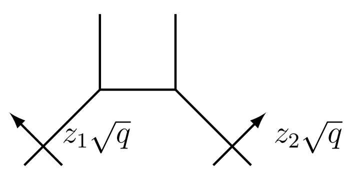

Рис. 4: $U(1)$ теория с двумя Лагранжевыми бранами на внешних линиях

В действительности, функции $Y(z)$ и $M(z)$ не независимы - они удовлетворяют очень простому соотношению:

$$Y(z)=\frac{M(1/z)}{M(1/zt)} \tag{3.48}$$

Доказательство состоит в простом сравнивании какие боксы диаграммы Юнга дают вклад в правую и левую части.

Для получения отношения двух M, мы можем рассмотреть 2 Лагранжевы браны(рис. 4) - при этом для второй нужно выбрать фрейминг $+1$, а для первой - 0. Их вклад в статсумму:

$$\frac{M(z_1)}{M(z_2)} \tag{3.49}$$

При $z_2=z_1t=zt$ мы получаем $Y(1/z)$.

Поскольку $Y(z)$ - производящая функция операторов кирального кольца, мы можем заключить, что они операторы могут быть вставлены в теорию как система брана-антибрана размера ϵ_2. По сути, это означает, что мы может отинтегрировать степени свободы живущие на бране, и получить некоторый киральный оператор в объемлющей теории.

В действительности, мы можем обратить (3.48):

$$M(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{Y(z^{-1}t^{-i})}{(z^{-1}t^{-i}-1)^N} \tag{3.50}$$

Или в терминах вакуумных средних:

$$M(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n t^n \mathcal{O}_n}{n(t^n-1)}\right) \tag{3.51}$$

4 Поверхностный оператор и торические узлы

В предыдущем разделе мы показали, что на уровне статсуммы вставка Лагранжевой браны отвечает вставке производящей функции для операторов кирального кольца $M(z)$. При этом оператор $\exp(-\beta\phi)$ соответствует линейному члену по z-т.е. одному инстантону на бране. Интересно посмотреть, что дадут следующие члены разложения.

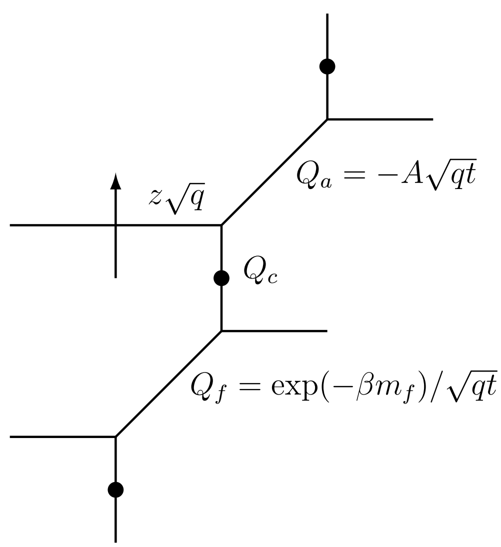

Рис. 5: $U(1)$ теория с Лагранжевой браной при $k = 0$. Точка обозначает выделенное направление в топологическом вертексе.

Также, как и в предыдущих разделах, мы будем интересоваться конденсатом безмассового флейвора:

$$\langle\tilde{\psi}\psi\rangle_{LB} = \frac{\partial Z}{\partial m}\Big|_{m=0} = \sum_{n,r} Q_c^n z^r P_{n,nk+r}(A,q,t) \tag{4.52}$$

$$P(A,q,t)_{n,nk+r} = \tag{4.53}$$

$$\sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum l} q^{(k+1)\sum a}(1-t)\prod^{0,0}(1-Aq^{-a'}t^{-l'})\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^a-t^{l+1})\prod(t^l-q^{a+1})} \times$$
$$Coef_{z^r} M(z)$$

Где $M(z)$ есть вклад Лагранжевой браны:

$$M(z) = \prod_{j=1}^{l(\lambda)} \frac{1-zt^{j-1}q^{\lambda_j}}{1-zt^{j-1}} \tag{4.54}$$

Это выражение обладает выдающимися свойствами:

- При $r=1$ мы восстанавливаем формулу для суперполинома $(n,nk{+}1)$ торического узла.
- Это выражение даёт полином по A,q,t с целыми положительными коэффициентами, если $gcd(n,nk+r)=1$. К сожалению, мы не можем строго доказать это утверждение. Наш вывод основан на явном вычислении этого выражения для большого количества разных n и r.
- При $k=0$, $P_{n,r}=P_{r,n}$.
- При $t=1/q$ это выражение воспроизводит правильный полином ХОМФЛИ для $(n,nk+r)$ торического узла. Мы докажем этот факт в разделе B
- *Однако, в общем случае, это выражение не даёт правильного суперполинома*

Заметим, что мы могли положить Лагранжеву брану на линию между Q_c и Q_f. В этом случае мы бы получили $\tilde{M}(z)$ вместо $M(z)$:

$$\tilde{M}(z) = \prod_{i=1}^{l(\lambda^t)} \frac{1-zq^{i-1}t^{\lambda_i^t}}{1-zq^{i-1}} \tag{4.55}$$

Легко проверить, что это также приводит к полиному ХОМФЛИ, но в другой нормализации. В дальнейшем нам иногда будет удобно расположить брану именно так.

В действительности, явная формула для суперполинома торического (n,r) узла известна в математической литературе[31]:

$$P^{(n,r)} = \sum_{|\lambda|=n} \frac{q^{2\sum a} t^{2\sum l} \prod^{0,0}(1+Aq^{-a'}t^{-l'})(1-q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^{a+1}-t^{l})(t^{l+1}-q^{a})} \times \tag{4.56}$$
$$\sum_{of shape\ \lambda}^{SYT} \frac{\prod_{i=1}^{n} \chi_i^{S_{r/n}(i)}(1-qt\chi_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1-\chi_i)(1-qt\frac{\chi_2}{\chi_1})...(1-qt\frac{\chi_n}{\chi_{n-1}})} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(\chi_j-q\chi_i)(\chi_j-t\chi_i)}{(\chi_j-\chi_i)(\chi_j-qt\chi_i)}$$

где

$$S_{r/n}(i) = \lfloor \frac{ir}{n} \rfloor - \lfloor \frac{(i-1)r}{n} \rfloor \tag{4.57}$$

Второй фактор отвечает суммированию по стандартным таблицам Юнга формы λ: таблица Юнга - это диаграмма Юнга, где в каждый квадрат вписано число от 1 до n таким образом, что при движении либо вправо, либо вверх числа строго уменьшаются. Т.е. для каждого числа i есть квадрат $\square_i$ и χ_i равно $q^{a'}t^{l'}$.

Мы видим, что этот вклад отвечает очень сложному дефекту. К сожалению, мы ничего не можем сказать про этот дефект, кроме того, что в самодуальном Ω-фоне он вырождается в Лагранжеву брану.

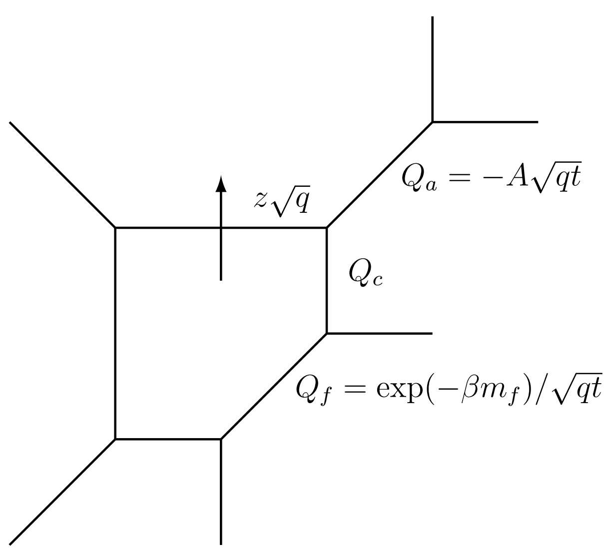

Рис. 6: $SU(2)$ теория с Лагранжевой браной и $N_f = 2$

Поскольку Лагранжева брана расположена на внешней ноге, на эту геометрию можно смотреть как на пертубративный перед из теории с группой $SU(2)$ и Лагранжевой браной расположенной на внутренней ноге - рис. 6. На языке IIB теории струн это есть D3 брана перпендикулярная всем пятибранам. В следующем разделе мы покажем, как можно поднять это соответствие до полной $SU(2)$ теории.

4.1 Узлы как голоморфные инстантоны

В этом разделе мы выдвинем гипотезу, как наша картина с полиномами ХОМФЛИ связана с классическим подходом через Вильсоновские петли в теории Черна-Саймонса [3]. Рассмотрим подробнее многообразие Калаби-Яу на которое мы компактифицировались, чтобы получить калибровочную теорию. Известно[32], что в нерафинированном случае $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$ статсумма, которую мы считаем, совпадает со статсуммой топологических струн типа А, где таргет-пространство и есть наше Калаби-Яу. При этом струнная константа связи g_s связана с Ω-фоном следующем образом:

$$g_s = \beta\epsilon \tag{4.58}$$

Теперь воспользуемся так называемым геометрически переходом[33]: мы можем заменить кусок геометрии $\mathcal{O}(-1) \times \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^1$ отвечающей антифундаменталу на геометрию T^*S^3 с $N >> 1$ топологическими бранами, намотанными на S^3 - рис. 7. Ранее мы уже упоминали, что Лагранжеву брану можно перенести на внешнюю ногу между Q_c и Q_f, сейчас для наших рассуждений это удобно сделать.

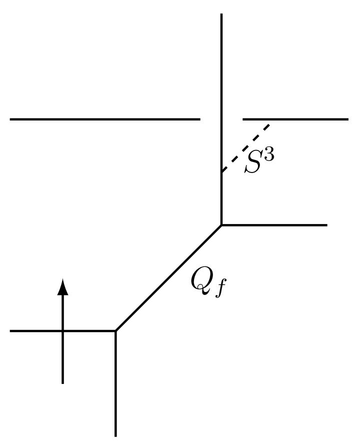

Рис. 7: Геометрия после геометрического перехода в $\mathbb{P}^1$ отвечающему антифундаменталу.

При этом число N топологических бран связано с массой антифундаментала как

$$Ng_s = \beta m_a \tag{4.59}$$

Поэтому с точки зрения геометрического перехода мы должны считать, что

$$A = q^N \tag{4.60}$$

При этом теория Черна-Саймонса возникает как теория на Лагранжевых бранах при рассмотрении открытых топологических струн типа А на этой геометрии. Мы имеем 2 набора бран: одну Лагранжеву брану отвечающую поверхностному оператору и стопку бран отвечающих геометрическому переходу, поэтому мы будем иметь 2 теории Черна-Саймонса. Уровень κ теории, живущей на стопке N бран равен

$$\frac{2\pi}{\kappa + N} = g_s \tag{4.61}$$

А калибровочная группа есть $SU(N)$

Статсумма теории типа А локализуется на голоморфные инстантоны, которые натягиваются на 2-циклы между Лагранжевыми бранами, а на самих бранах кончаются замкнутыми линиями, которые есть ничто иное, как Вильсоновские петли. С точки зрения теорий Черна-Саймонса статсумма равна следующему коррелятору:

$$Z_{inst} = \left\langle \exp\left(\sum_{\beta,s,R_1,R_2} \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}^{\beta}_{s,R_1,R_2} \frac{q^{ps}}{p(1-q^p)} Q^p_\beta \, Tr_{R_1} U^p Tr_{R_2} V^p \right) \right\rangle_{CS_1,CS_2} \tag{4.62}$$

где U и V - голономии в представлениях R_1 и R_2 на двух наборах бран и Q_β есть Кэлеров параметр 2-цикла β. $\mathcal{N}^{\beta}_{s,R_1,R_2}$ есть целые коэффициенты, которые вычисляют вырожденность БПС состояния со спином s, которое преобразуется по представлениям R_1 и R_2 относительно групп $U(N_i)$ на бранах. p есть сумма по кратным намотками. Рассмотрим инстантон до геометрического перехода, который наматывается n раз на Q_c и r раз на одну Лагранжеву брану. Поскольку n и r взаимно просты, нас будет интересовать только единичная намотка $p = 1$. В разделе 5.1 мы покажем, что он натягивается на (n, r) цикл на торе, который есть часть слоя торического Калаби-Яу. После геометрического перехода, возникающая S^3 есть расслоение ровно этого T^2 над отрезком. Поэтому граница этого инстантона наматывается (n, r) торическим узлом на стопку N бран. Поэтому голономия U берётся вдоль торического узла. При этом заметим, что ранг калибровочной группы правильно связан с переменной A в полиноме

ХОМФЛИ - ур. (4.60).

Теперь если мы возьмём производную по фундаментальной массе и рассмотрим предел $m_f \to 0$, то при интересующем нас члене $z^r Q_c^n$ мы получим:

$$\frac{1}{1-q} \sum_{k,s,R_1,R_2}^{\infty} k\,\mathcal{N}^{r,n,k}_{s,R_1,R_2} q^s \,\langle Tr_{R_1} U\rangle \langle Tr_{R_2} V\rangle \tag{4.63}$$

Экспонента исчезла, т.к. статсумма равна 1 при $m_f = 0$. Суммирование по k отвечает намоткам на 2-цикл фундаментального мультиплета.

Это форма объясняет, откуда берётся узел и почему переменные в ХОМФЛИ именно такие. Однако непонятно, почему мы получаем только фундаментальное представление. Для этого нужно подробно знать структуру чисел вырождения $\mathcal{N}^{\beta}_{s,R_1,R_2}$.

4.2 Стабильный предел

Рассмотрим предел большой константы Черна-Саймонса $k \to \infty$. В этом режиме инстантоны вымирают и вклады 2-х материй факторизуются.

С другой стороны, в [34] была выдвинута гипотеза, что в так называемом стабильном пределе $n \to \infty$, суперполином $\mathcal{P}_{n,r}$ превращается в суперполином для незаузленной S^1, покрашенной в симметрическое представление $[r]$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{n,r} = \mathcal{P}^{[r]}_{unknot} \tag{4.64}$$

Сейчас мы продемострируем, что в нашей картине возникает аналог этого соотношения. Действительно, предполагая $q, t < 1$, легко видеть, что только $\lambda = \varnothing$ даёт ненулевой вклад в (4.53). Фундаментальный гипермультиплет даёт простой пертурбативный фактор:

$$N_f = \prod_{i=1,j=1}^{\infty} (1 - \exp(-\beta m_f) q^{i-1} t^{-j}) \tag{4.65}$$

который мы отбросим. Рассмотрим более подробно вклад Лагранжевой браны и антифундаментального мультиплета - Рис. 8. Как и раньше, мы сконцентрируемся на инстантонном вкладе в статсумму. Однако в данном случае мы будем нормироваться на $Z(z=0)$.

Данная геометрия - ничто иное, как классическая геометрия Оогури-Вафы[4], которая считает в нерафинированном случае раскрашенные ХОМФЛИ для незаузленной S^1: статсумма

$$Z^{unrefined} = \sum_m H_r(A,q) z^r \tag{4.66}$$

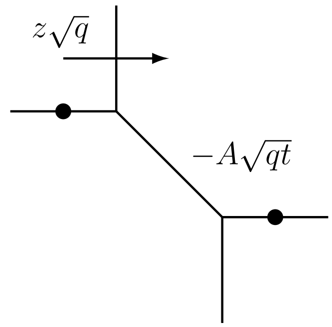

Рис. 8: Стабильный предел. Точка обозначает выделенное направление.

есть сумма полиномов ХОМФЛИ $H_r(A,q)$ для незаузленной S^1, покрашенной в симметрическое представление $[r]$ - поскольку мы имеем только одну Лагранжеву брану, мы получаем только симметрические представления.

В рафинированном случае ситуация немного более тонкая, т.к. в общем случае ответ зависит от выбранного направления[35]. Более того, есть определённые трудности с определением суперполинома не в фундаментальном представлении - см. обсуждение в [19]. Однако, если мы аккуратно проследим вклад Лагранжевой браны, наш выбор выделенного направления на самом деле приводит к суперполиному в полностью *антисимметричном* представлении 1^m [b]:

$$Z^{refined} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 - zt^{i-1}}{1 + Az\sqrt{q}t^{i-1/2}} \tag{4.67}$$

Поэтому мы можем написать аналог ур .(4.64):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Z(A,q,t,z,Q)}{Z(A,q,t,z=0,Q)} = \sum_r z^r P^{1^r}_{unknot}(A,q,t) \tag{4.68}$$

5 Инварианты узлов и $SU(2)$ теория

5.1 От Лагранжевой браны к $SU(2)$ теории с 4 флейворами

Согласно гипотезе АГТ [36] и её пятимерному обобщению [37, 38, 39, 40], пертурбативная часть Некрасовской $SU(2)$ статсуммы равна 3-х точечной корреляционной функции в теории Лиувилля. В пятимерном случае речь идёт о q-деформированном Лиувилле.

[b] Противоречия нет: в случае ХОМФЛИ нет разницы между полностью симметричным и полностью антисимметричным представлениями. Также, для полностью антисимметричных представлений ответ не зависит от выделенного направления[35]

При этом инстантонная статсумма соответствует 4-х точечному коррелятору. Конформные веса при этом определяются фундаментальными массами в калибровочной теории. Более того, вставка поверхностного оператора соответствует вставке оператора $V_{2,1}$, вырожденного на уровне 2, в коррелятор конформной теории. Из этого мы можем заключить, что пертурбативная статсумма с поверхностным оператором должна быть равна инстантонной статсумме, но с очень специальным выбором масс. Действительно, такое соответствие впервые было показано в [41] с помощью двух простых преобразований над диаграммой топологических вертексов. Приведём эти результаты:

Первое преобразование есть открыто-замкнутая дуальность: мы можем заменить Лагранжеву брану разрешённым конифолдом - Рис. 9.

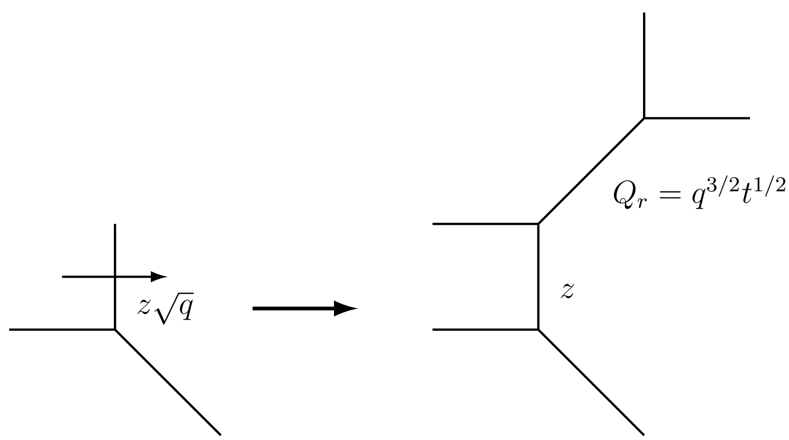

Рис. 9: Открыто-замкнутая дуальность

В действительности, если мы рассмотрим произвольный Кэлеров параметр разрешения Q_r, мы получим следующий вклад в статсумму(вторая дробь является нормировкой на пертурбативный вклад):

$$\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\prod_{j=1}^{+\infty}\frac{(1-zQ_rt^{i-3/2}q^{\lambda_i-j-1/2})}{(1-zt^{i-1}q^{\lambda_i-j})}\frac{(1-zt^{i-1}q^{-j})}{(1-zQ_rt^{i-3/2}q^{-j-1/2})} \tag{5.69}$$

Если мы возьмём $Q_r = q^{3/2}t^{1/2}$, то получим в точности $M(z)$.

Следующее преобразование есть проекция на тривиальные представления: предположим мы имеем диаграмму где две внешние линии пересекаются. Тогда мы можем добавить дополнительный разрешённый конифолд со специальным Кэлеровым параметром, который спроецирует представления на этих 2х линиях на тривиальные - рис. 10

Резюмируя, мы можем получить наш "почти суперполином" просто из инстантонной

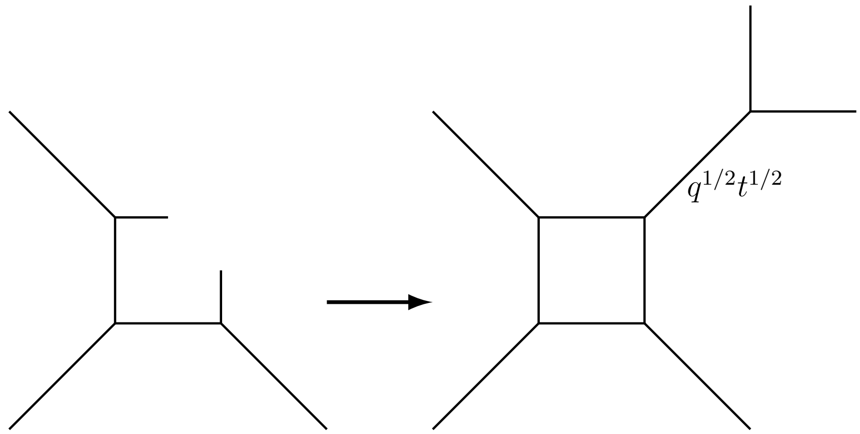

Рис. 10: Проектор на тривиальные представления

$SU(2)$ статсуммы с 4 материями. При этом инстантонное число n-есть число D1 струн протянутых между пятибранами, а r-есть число F1 струн - т.е. электрический заряд. Теория струн типа IIB реализуется как M-теория, компактифицированная на тор T^2. D1 и F1 струны приходят из M2 браны, намотанной на разные циклы этого тора. Поэтому композитный объект с зарядами (n, r) есть M2 брана, намотанная на (n, r) цикл этого тора.

5.2 Редукция в 4D

В этом разделе мы исследуем редукцию $SU(2)$ в более привычную четырёхмерную теорию. В $D = 5$ мы имеет W-бозоны и инстантоны которые распространяются в петле. С точки зрения компактификации M-теории на Калаби-Яу, оба они отвечают M2 бране, но намотанной на разные циклы. Как было показано в [23] однопетлевое вычисление в $D = 5$ отвечает инстантонному разложению в $D = 4$. Двойная сумма по электрическим и инстантонным зарядам в $D = 5$ вырождается в сумму только по инстантонным зарядам в $D = 4$. Поскольку полином ХОМФЛИ “меряет” вырождение состояний с заданными зарядами (n_I, n_e), редукция в четырёхмерие означает пересуммирование ХОМФЛИ по одной из намоток. Сформулируем это более явно. При переходе в 4 измерения, мы рассматриваем предел $\beta \to 0$ и $g \to 0$, при этом держа некоторые параметры постоянными:

$$\frac{\beta}{g^2} = \frac{1}{g_{4D}^2} = \text{const} \tag{5.70}$$

$$a, m_a, \epsilon = \text{const} \tag{5.71}$$

Первое условие отражает тот факт, что инстантоны распространяющиеся вдоль компактного измерения превращаются в более привычные точечные инстантоны в 4D. Чтобы получить $n-$инстантонный вклад c_n в конденсат:

$$\langle \tilde{\psi}\psi \rangle_{4D} = \sum_n e^{-n/g_{4D}^2} c_n(\epsilon, m, a) \tag{5.72}$$

необходимо провести суммирование по всем электрическим зарядам:

$$c_n(a, m_a, \epsilon) = \lim_{\beta \to 0} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-ra\beta} H_{n,r}(q, A) \tag{5.73}$$

Когда мы устремляем $\beta \to \infty$, члены с большими r становятся более и более существенными. В конечном итоге, сумма превращается в подобие преобразования Лапласа. Однако, это не буквально преобразование Лапласа, поскольку $q = \exp(-\beta\epsilon)$ и $A = -\exp(\beta m_a)$ зависят от β и стремятся к 1 и -1 соответственно. Из-за этого мы теряем информацию о конечных степенях q и A. Мы можем заключить, что предел в $D = 4$ необратим. Тем не менее, естественно задать вопрос: что осталось от инварианта узла?

Ответ прост: из уравнения (5.73) мы видим, что поведение ХОМФЛИ при больших r перерабатывается в аналитическую структуру по переменной a $4D$ инстантонного вклада c_n. Каждый полюс $-\alpha\epsilon$ отвечает члену $q^{\alpha r}$ в полиноме ХОМФЛИ $H_{n,r}$.

Пример: рассмотрим 2 инстантона. $H_{2,r}$ для $r > 0$ равны:

$$H_{2,r} = \frac{q(A + q - q^{-r}(Aq + 1))}{q^2 - 1} \tag{5.74}$$

С другой стороны, беря четырёхмерный предел:

$$\frac{m_a + \epsilon}{2\epsilon a} + \frac{m_a - \epsilon}{2\epsilon(\epsilon - a)} \tag{5.75}$$

Два полюса в 0 и ϵ отражают члены q^0 и q^{-r} соответственно.

Мы видели, что четырёхмерный предел чувствителен только к поведению ХОМФЛИ $H_{n,r}$ при больших r. Это означает, что вторая намотка торического узла становится большой и “конденсируется”. Это “математическое конденсирование” отражает физическую конденсацию: в четырёхмерном пространстве пятая компонента векторного поля A_5 присоединяется к Хиггсовскому скаляру и конденсируется.

6 Дробный Черн-Саймонс

В этом разделе мы кратко изложим любопытное наблюдение, состоящее в том, что полиномы ХОМФЛИ также можно получать рассматривая пятимерную СуперКЭД в дробной константой связи Черна-Саймонса. Подчеркнём, что данный подход отличается от изложенных выше и уровень Черна-Саймонса будет по-другому связываться с типом узла. Было бы интересно отследить на физическом уровне, как для определённой инстантонной конфигурации, поверхностный оператор эффективно меняет константу связи Черна-Саймонса. Напомним, что формула Джонса-Россо для полинома ХОМФЛИ в фундаментальном представлении для торического узла (n, r) может быть записана следующим образом (см. приложение A):

$$H_{\Box}^{(n,r)}(A,q) = (-1)^{n-1}\frac{1-q^n}{q^n}\sum_{|\lambda|=n} q^{\left(\frac{r}{n}+1\right)\sum(l-a)}\frac{\prod^{0,0}(1-q^{l'-a'})\prod^{0,0}(1+Aq^{a'-l'})}{\prod(q^{-l-1}-q^a)(q^{-l}-q^{a+1})} \tag{6.76}$$

Данная формула, по-сути, совпадает с n-инстантонным вкладом в статсумму пятимерной $\mathcal{N}=1$ СКЭД $\mathbb{R}^4_\Omega \times S^1_\beta$ в самодуальном Ω-фоне $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ с антифундаментальной материей массы m_a, фундаментальной материей с массой m_f и дробным уровнем Черна-Саймонса r/n:

$$\left.\frac{\partial \tilde{Z}_n^{inst}}{\partial m_f}\right|_{m_f=0} = (1+A)\beta\sum_{|\lambda|=n} q^{\left(\frac{r}{n}+1\right)\sum(l-a)}\frac{\prod^{0,0}(1-q^{l'-a'})\prod^{0,0}(1+Aq^{a'-l'})}{\prod(q^{-l-1}-q^a)(q^{-l}-q^{a+1})} \tag{6.77}$$

где

$$q = \exp(-\beta\epsilon_2),\ A = -\exp(\beta m_a) \tag{6.78}$$

Мы будем обозначать статсумму данной теории как $\tilde{Z}$. Для незаузленной S^1 $(n,1)$ эта формула даёт следующий результат:

$$H_{\Box}^{(n,1)} = \frac{1}{(1-q)q^{(n-1)/2}} \tag{6.79}$$

Напомним, что формула для суперполинома $(n, nk+1)$ торического узла в фундаментальном представлении выглядит следующим образом:

$$P(A,q,t)_{nk+1,n} = \qquad (6.80)$$

$$\sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum l} q^{(k+1)\sum a}(1-t)(1-q)\prod^{0,0}(1+Aq^{-a'}t^{-l'})\prod^{0,0}(1-q^{a'}t^{l'})(\sum q^{a'}t^{l'})}{\prod(q^a-t^{l+1})\prod(t^l-q^{a+1})}$$

Данная формула получатся как n-инстантонный вклад в пятимерной $\mathcal{N}=1$ СКЭД на $\mathbb{R}^4_\Omega \times S^1_\beta$ в общем Ω-фоне, с членом Черна-Саймонса уровня k, и киральной наблюдаемой:

$$P(A,q,t)_{n,nk+1} = t^{-n/2}q^{-n/2}\frac{1}{1+A}\frac{\partial}{\partial(\beta m_f)}\langle\exp(-\beta\Phi)\rangle,\ m_f=0 \qquad (6.81)$$

Эту статсумму мы обозначим за Z.

Чтобы редуцироваться к ХОМФЛИ нужно положить $t=1/q$. Тогда эти 2 формулы соотносятся следующим образом:

$$P_{n,nk+1}(A,q,q^{-1}) = (-1)^n\frac{H_\square^{n,nk+1}(A,q)}{H_\square^{n,1}(A,q)} = (-1)^n(1-q)q^{(n-1)/2}H_\square^{n,nk+1} \qquad (6.82)$$

При этом

$$H_\square^{n,nk+1} = (-1)^{n-1}\frac{1-q^n}{(1+A)q^n}\frac{\partial\tilde{Z}_n}{\partial(\beta m_f)}\bigg|_{m_f\to 0} \qquad (6.83)$$

Из этого соотношения можно получить связь различных наблюдаемых в 2-х теориях. Также это соотношение можно расширить до произвольного торического узла, если вместо простого оператора $\exp(-\beta\Phi)$ рассмотреть разложение $M(z)$ - см. раздел 4:

$$M(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n t^n\exp(-\beta n\Phi)}{n(t^n-1)}\right) \qquad (6.84)$$

Заметим, что для получения ХОМФЛИ число инстантонов должно совпадать с числителем уровня Ч-С. Интересно исследовать вклады с другим числом инстантонов. Этот вопрос был исследован в математической литературе[42]. Оказывается, что такие вклады отвечают сумме с определёнными весами по раскраскам ХОМФЛИ в разные представления. Мы отложим обсуждение этого факта до следующей работы.

Было бы интересно исследовать данное соответствие с точки зрения интегрируемой системы типа Калоджеро. Известно, что данная система напрямую связана с некоммутативными $U(1)$ инстантонами[43]. С другой стороны, известно как получать полиномы

ХОМФЛИ через рассмотрения состояний с нулевой энергией в системе рационального Калоджеро[44, 45]: в этом подходе также число частиц n напрямую завязано с константой связи Калоджеро $g = \nu(\nu+1)$, где $\nu = r/n$.

7 Обсуждение

В данной работе исследовалась связь инстантонов в суперсимметричных калибровочных теориях и инвариантов торических узлов. Показано, что определённые вакуумные средние в таких теориях есть производящие функции для полиномов ХОМФЛИ и суперполиномов. Это единственный известный пример, когда полиномы узлов возникают в разложении статсуммы по параметрам. При этом параметры торического узла (n, r) отождествляются с инстантонным зарядом n и электрическим r. С точки зрения топологических струн, узел рисуется не Лагранжевой браной, а голоморфным инстантоном. Мы сумели связать

- Суперполином $(n, nk+1)$ торического узла с 5D СКЭД с членом Черна-Саймонса уровня $k+1$ в произвольной Ω-деформации с 2 гипермультеплетами и с оператором кирального кольца.
- Полином ХОМФЛИ (n, r) торического узла с 5D СКЭД в самодуальной Ω-деформации с 2 гипермультиплетами и с поверхностным оператором. Мы показали, что статсумма такой теории совпадает со статсуммой $SU(2)$ теории с 4 гипермультеплетами специальной массы.

Не смотря на определённые продвижения, остаётся много открытых проблем. Конечно, главная цель - найти соответствие между произвольным раскрашенным узлом и инстантоном в некоторой теории. С этой проблемой связано 3 основных направления:

- Обобщить связь с суперполиномом до произвольного торического узла. Для этого необходимо лучше понять структуру рафинированного геометрического перехода.
- Понять чему соответствует раскраска узла на языке теории поля. Везде в данной работе мы рассматривали только не раскрашенные узлы(покрашенные в фундаментальное представление).
- Найти связь общих узлов с инстантонами. Мы предполагаем, что узлы на поверхностях старшего рода связаны с $SU(N)$ теориями.

Также мы исследовали дуальность операторов кирального кольца с поверхностными операторами в суперсимметричной $U(1)$ теории с помощью техники топологических вертексов. Интересно будет обобщить данную дуальность на общие колчанные теории и вывести эту дуальность из первых принципов.

Хорошо известно, что $\mathcal{N}=1, D=5$ суперсимметричные теории связаны сразу с 2 интегрируемыми системами: одна из них есть XXZ спиновая цепочка(и её вырождения), а вторая есть иерархия Уизема. Интересно исследовать связь интегрируемых систем и узлов с этой точки зрения.

Мы начали эту работу с соотношения между q,t-числами Каталана и инстантонами в СКЭД. Числа Каталана имеют множество комбинаторных интерпретаций. Интересно понять, чему они отвечают с теоретико-полевой точки зрения. Мы предполагаем, что они связаны со счётом нулевых мод в поле инстантона в Ω-деформированной теории. Было бы интересно сформулировать это соответствие явно.

A Формула Джонса-Россо

Формула Джонса-Россо(Д-Р) для полинома ХОМФЛИ-ПТ для (n,r) торического узла, раскрашенного в представление R выглядит следующим образом[46]:

$$H_R^{(n,r)}(A,q)=\sum_{\lambda\in R^{\otimes n}} q^{\frac{r}{n}\sum_{\square\in\lambda}(a-l)} c_R^\lambda \chi_\lambda(p^*) \tag{A.85}$$

где:

- R - Диаграмма Юнга определяющая представление
- c_R^λ - коэффициенты Адамса, определяемые действием операции Адамса на полиномы Шура $\chi_\mu(p)$:
$$\chi_\mu(p^{(n)})=\sum_{\eta\in\mu^{\otimes n}} c_\mu^\eta \chi_\eta(p) \tag{A.86}$$
В наших обозначениях мы пишем аргументы полиномов Шура через полиномы *степенных рядов* $p_k=x_1^k+x_2^k+....$ И
$$p_k^{(n)}=p_{nk}=x_1^{nk}+x_2^{nk}+... \tag{A.87}$$
- Наконец, p^* определяют специальный выбор этих полиномов:

$$p_k^*=\frac{(-A)^k-(-A)^{-k}}{q^k-q^{-k}} \tag{A.88}$$

Перепишем формулу Д-Р (A.85) в более явном виде. Хорошо известно[47] , что при специальном выборе p^* (A.88), полиномы Шура даются формулой:

$$\chi_\lambda(p^*) = q^{\sum a} \frac{\prod(1 + Aq^{l'-a'})}{\prod(1 - q^{a+l+1})} \tag{A.89}$$

Если мы ограничимся фундаментальным представлением $R = \Box$, тогда есть следующая явная формула для коэффициентов Адамса[48]:

$$c_\Box^\lambda = q^{\sum a}(1 - q^n) \frac{\prod^{0,0}(1 - q^{l'-a'})}{\prod(1 - q^{a+l+1})} \tag{A.90}$$

Собирая все факторы вместе, мы получаем следующую формулу для полинома ХОМФЛИ в фундаментальном представлении для (n, r) торического узла(мы опустили тривиальный множитель $(1 + A)$):

$$H_\Box^{(n,r)} = (1 - q^n) \sum_{|\lambda|=n} q^{2\sum a} q^{\frac{r}{n}\sum(a-l)} \frac{\prod^{0,0}(1 - q^{l'-a'}) \prod^{0,0}(1 + Aq^{l'-a'})}{\prod(1 - q^{a+l+1})^2} \tag{A.91}$$

Или эквивалентно:

$$H_\Box^{(n,r)}(A, q) = (-1)^{n-1} \frac{1 - q^n}{q^n} \sum_{|\lambda|=n} q^{(\frac{r}{n}+1)\sum(a-l)} \frac{\prod^{0,0}(1 - q^{a'-l'}) \prod^{0,0}(1 + Aq^{l'-a'})}{\prod(q^{-l-1} - q^a)(q^{-l} - q^{a+1})} \tag{A.92}$$

B Лагранжева брана и формула Д-Р

Покажем, что формула (4.53) в нерафинированном случае $q = 1/t$ действительно воспроизводит формулу Джонса-Россо. Во-первых, заметим что благодаря фактору $\prod^{0,0}(1-q^{l'-a'})$ вклад дают только диаграммы формы крюка.

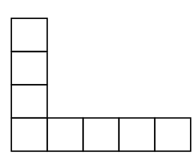

Рис. 11: Диаграмма Юнга формы крюка

Предположим, что такая диаграмма λ имеет горизонтальную "руку"длины w. Тогда вертикальная "нога"имеет длину $n-w+1$, т.к. полное число боксов равно n. В формуле Д-Р зависимость от второго квантового числа r следующая:

$$q^{\frac{r}{n}(\sum a - \sum l)} = q^{rw - \frac{r(n+1)}{2}} \tag{B.93}$$

В то время в случае Лагранжевой браны:

$$M(z) = \frac{1 - q^w z}{1 - q^{w-n} z} \tag{B.94}$$

Поэтому

$$Coef_{z^r} M(z) = q^{r(w-n)}(1 - q^n) \tag{B.95}$$

Мы видим, что кроме нормализационного фактора $(1-q^n)q^{r(1-n)/2}$ эти два выражения совпадают.

Список литературы

[1] A. Gorsky и A. Milekhin. “Condensates and instanton - torus knot duality. Hidden Physics at UV scale”. В: (2014). arXiv: `1412.8455 [hep-th]`.

[2] A. Gorsky, A. Milekhin и N. Sopenko. “The Condensate from Torus Knots”. В: (2015). arXiv: `1506.06695 [hep-th]`.

[3] Edward Witten. “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial”. В: *Commun.Math.Phys.* 121 (1989), с. 351—399. DOI: `10.1007/BF01217730`.

[4] Hirosi Ooguri и Cumrun Vafa. “Knot invariants and topological strings”. В: *Nucl.Phys.* B577 (2000), с. 419—438. DOI: `10.1016/S0550-3213(00)00118-8`. arXiv: `hep-th/9912123 [hep-th]`.

[5] Tudor Dimofte, Davide Gaiotto и Sergei Gukov. “Gauge Theories Labelled by Three-Manifolds”. В: *Commun.Math.Phys.* 325 (2014), с. 367—419. DOI: `10.1007/s00220-013-1863-2`. arXiv: `1108.4389 [hep-th]`.

[6] Hee-Joong Chung и др. “3d-3d Correspondence Revisited”. В: (2014). arXiv: `1405.3663 [hep-th]`.

[7] Sergei Gukov, Albert S. Schwarz и Cumrun Vafa. “Khovanov-Rozansky homology and topological strings”. В: *Lett.Math.Phys.* 74 (2005), с. 53—74. DOI: `10.1007/s11005-005-0008-8`. arXiv: `hep-th/0412243 [hep-th]`.

[8] Mina Aganagic и Shamil Shakirov. “Knot Homology and Refined Chern-Simons Index”. В: *Commun.Math.Phys.* 333.1 (2015), с. 187—228. DOI: 10.1007/s00220-014-2197-4. arXiv: 1105.5117 [hep-th].

[9] Nikita A. Nekrasov. “Seiberg-Witten prepotential from instanton counting”. В: *Adv.Theor.Math.Phys.* 7 (2004), с. 831—864. DOI: 10.4310/ATMP.2003.v7.n5.a4. arXiv: hep-th/0206161 [hep-th].

[10] Nikita Nekrasov и Andrei Okounkov. “Seiberg-Witten theory and random partitions”. В: (2003). arXiv: hep-th/0306238 [hep-th].

[11] K. Bulycheva, A. Gorsky и S. Nechaev. “Critical behavior in topological ensembles”. В: (2014). arXiv: 1409.3350 [hep-th].

[12] A.M. Garsia и M. Haiman. “A Remarkable q, t-Catalan Sequence and q-Lagrange Inversion”. English. В: *Journal of Algebraic Combinatorics* 5.3 (1996), с. 191—244. ISSN: 0925-9899. DOI: 10.1023/A:1022476211638. URL: http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1022476211638.

[13] E Gorsky. “q, t-Catalan numbers and knot homology”. В: *Zeta functions in algebra and geometry* (2012), с. 213—232. arXiv: 1003.0916.

[14] Hiraku Nakajima. *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*. Т. 18. American Mathematical Society Providence, 1999.

[15] Amer Iqbal, Can Kozcaz и Cumrun Vafa. “The Refined topological vertex”. В: *JHEP* 0910 (2009), с. 069. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/10/069. arXiv: hep-th/0701156 [hep-th].

[16] Amer Iqbal, Can Kozcaz и Khurram Shabbir. “Refined Topological Vertex, Cylindric Partitions and the U(1) Adjoint Theory”. В: *Nucl.Phys.* B838 (2010), с. 422—457. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2010.06.010. arXiv: 0803.2260 [hep-th].

[17] Kenneth A. Intriligator, David R. Morrison и Nathan Seiberg. “Five-dimensional supersymmetric gauge theories and degenerations of Calabi-Yau spaces”. В: *Nucl.Phys.* B497 (1997), с. 56—100. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00279-4. arXiv: hep-th/9702198 [hep-th].

[18] Albrecht Klemm и Piotr Sulkowski. “Seiberg-Witten theory and matrix models”. В: *Nucl.Phys.* B819 (2009), с. 400—430. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.04.004. arXiv: 0810.4944 [hep-th].

[19] P. Dunin-Barkowski и др. “Superpolynomials for toric knots from evolution induced by cut-and-join operators”. В: *JHEP* 1303 (2013), с. 021. DOI: 10.1007/JHEP03(2013)021. arXiv: 1106.4305 [hep-th].

[20] Alexei Oblomkov и Vivek Shende. “The Hilbert scheme of a plane curve singularity and the HOMFLY polynomial of its link”. B: *Duke Math. J.* 161.7 (май 2012), с. 1277—1303. DOI: `10.1215/00127094-1593281`. arXiv: `1201.2115`. URL: `http://dx.doi.org/10.1215/00127094-1593281`.

[21] Mark Haiman. “t, q-Catalan numbers and the Hilbert scheme”. B: *Discrete Mathematics* 193.1 (1998), с. 201—224.

[22] Ksenia Bulycheva и Alexander Gorsky. “BPS states in the Omega-background and torus knots”. B: *JHEP* 1404 (2014), с. 164. DOI: `10.1007/JHEP04(2014)164`. arXiv: `1310.7361 [hep-th]`.

[23] Albion E. Lawrence и Nikita Nekrasov. “Instanton sums and five-dimensional gauge theories”. B: *Nucl.Phys.* B513 (1998), с. 239—265. DOI: `10.1016/S0550-3213(97)00694-9`. arXiv: `hep-th/9706025 [hep-th]`.

[24] Andrei S. Losev, Andrei Marshakov и Nikita A. Nekrasov. “Small instantons, little strings and free fermions”. B: (2003). arXiv: `hep-th/0302191 [hep-th]`.

[25] N. Nekrasov. “Non-Perturbative Schwinger–Dyson Equations: From BPS/CFT Correspondence to the Novel Symmetries of Quantum Field Theory”. B: (2014). Gorsky, Alexander(ed.) and Vysotsky, Mikhail(ed.), Proceedings, 100th anniversary of the birth of I.Ya. Pomeranchuk (Pomeranchuk 100). DOI: `10.1142/9242`.

[26] Davide Gaiotto, Sergei Gukov и Nathan Seiberg. “Surface Defects and Resolvents”. B: *JHEP* 1309 (2013), с. 070. DOI: `10.1007/JHEP09(2013)070`. arXiv: `1307.2578`; Luis F. Alday и др. “Loop and surface operators in N=2 gauge theory and Liouville modular geometry”. B: *JHEP* 1001 (2010), с. 113. DOI: `10.1007/JHEP01(2010)113`. arXiv: `0909.0945 [hep-th]`.

[27] Davide Gaiotto, Sergei Gukov и Nathan Seiberg. “Surface Defects and Resolvents”. B: *JHEP* 1309 (2013), с. 070. DOI: `10.1007/JHEP09(2013)070`. arXiv: `1307.2578`.

[28] Luis F. Alday и др. “Loop and surface operators in N=2 gauge theory and Liouville modular geometry”. B: *JHEP* 1001 (2010), с. 113. DOI: `10.1007/JHEP01(2010)113`. arXiv: `0909.0945 [hep-th]`.

[29] Davide Gaiotto. “Surface Operators in N = 2 4d Gauge Theories”. B: *JHEP* 1211 (2012), с. 090. DOI: `10.1007/JHEP11(2012)090`. arXiv: `0911.1316 [hep-th]`.

[30] Eugene Gorsky, Sergei Gukov и Marko Stosic. “Quadruply-graded colored homology of knots”. B: (2013). arXiv: `1304.3481 [math.QA]`.

[31] E. Gorsky и A. Neguţ. “Refined knot invariants and Hilbert schemes”. B: *ArXiv e-prints* (апр. 2013). arXiv: `1304.3328 [math.RT]`.

[32] M. Bershadsky и др. “Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes”. В: *Commun.Math.Phys.* 165 (1994), с. 311—428. DOI: 10.1007/BF02099774. arXiv: hep-th/9309140 [hep-th].

[33] Rajesh Gopakumar и Cumrun Vafa. “On the gauge theory / geometry correspondence”. В: *Adv.Theor.Math.Phys.* 3 (1999), с. 1415—1443. arXiv: hep-th/9811131 [hep-th].

[34] Nathan M. Dunfield, Sergei Gukov и Jacob Rasmussen. “The Superpolynomial for knot homologies”. В: (2005). arXiv: math/0505662 [math.GT].

[35] Hidetoshi Awata и Hiroaki Kanno. “Changing the preferred direction of the refined topological vertex”. В: *J.Geom.Phys.* 64 (2013), с. 91—110. DOI: 10.1016/j.geomphys.2012.10.014. arXiv: 0903.5383 [hep-th].

[36] Luis F. Alday, Davide Gaiotto и Yuji Tachikawa. “Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories”. В: *Lett.Math.Phys.* 91 (2010), с. 167—197. DOI: 10.1007/s11005-010-0369-5. arXiv: 0906.3219 [hep-th].

[37] Hidetoshi Awata и Yasuhiko Yamada. “Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra”. В: *JHEP* 1001 (2010), с. 125. DOI: 10.1007/JHEP01(2010)125. arXiv: 0910.4431 [hep-th].

[38] Can Kozcaz, Sara Pasquetti и Niclas Wyllard. “A and B model approaches to surface operators and Toda theories”. В: *JHEP* 1008 (2010), с. 042. DOI: 10.1007/JHEP08(2010)042. arXiv: 1004.2025 [hep-th].

[39] Ricardo Schiappa и Niclas Wyllard. “An A(r) threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d N=2 gauge theories”. В: *J.Math.Phys.* 51 (2010), с. 082304. DOI: 10.1063/1.3449328. arXiv: 0911.5337 [hep-th].

[40] Ling Bao и др. “M5-Branes, Toric Diagrams and Gauge Theory Duality”. В: *JHEP* 1204 (2012), с. 105. DOI: 10.1007/JHEP04(2012)105. arXiv: 1112.5228 [hep-th].

[41] Masato Taki. “Surface Operator, Bubbling Calabi-Yau and AGT Relation”. В: *JHEP* 1107 (2011), с. 047. DOI: 10.1007/JHEP07(2011)047. arXiv: 1007.2524 [hep-th].

[42] Pavel Etingof, Eugene Gorsky и Ivan Losev. “Representations of rational Cherednik algebras with minimal support and torus knots”. В: *Advances in Mathematics* 277.0 (2015), с. 124 —180. ISSN: 0001-8708. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2015.03.003. arXiv: 1304.3412. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870815000869.

[43] Harry W. Braden и Nikita A. Nekrasov. “Space-time foam from noncommutative instantons”. В: *Commun.Math.Phys.* 249 (2004), с. 431—448. DOI: 10.1007/s00220-004-1127-2. arXiv: hep-th/9912019 [hep-th].

[44] Evgeny Gorsky. “Arc spaces and DAHA representations”. В: *Selecta Mathematica* 19.1 (2013), с. 125—140. arXiv: `1110.1674`.

[45] Eugene Gorsky и др. “Torus knots and the rational DAHA”. В: *Duke Math. J.* 163.14 (нояб. 2014), с. 2709—2794. DOI: `10.1215/00127094-2827126`. arXiv: `1207.4523`. URL: `http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2827126`.

[46] Marc Rosso и Vaughan Jones. “On the invariants of torus knots derived from quantum groups”. В: *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 2.01 (1993), с. 97—112.

[47] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[48] Shamil Shakirov. “β-Deformation and Superpolynomials of (n,m) Torus Knots”. В: (2011). arXiv: `1111.7035 [math-ph]`.