Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической и экспериментальной физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

«Динамика полюсов сингулярных решений иерархий КП и мКП и многочастичные системы типа Калоджеро»

студента 121 группы
Пашкова В. О.
Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Забродин А. В.

Долгопрудный 2015

Содержание

1 Введение **2**

2 Сингулярные решения иерархии KP **3**
2.1 Общие сведения об иерархии KP и схема построения сингулярных решений 3
2.2 Рациональные решения иерархии KP 6
2.3 Тригонометрические решения иерархии KP 9

3 Сингулярные решения иерархии mKP **10**
3.1 Общие сведения об иерархии mKP и схема построения сингулярных решений 10
3.2 Рациональные решения иерархии mKP 11
3.3 Тригонометрические решения иерархии mKP 13

4 Заключительные замечания **15**

5 Приложение **16**
5.1 Рациональные решения иерархии KP 16
5.2 Тригонометрические решения иерархии KP 17
5.3 Рациональные решения иерархии mKP 18
5.4 Тригонометрические решения иерархии mKP 19

1 Введение

В работе [1] впервые было замечено, что движение полюсов рациональных решений уравнений Кортевега-де Фриза (KdV) и Буссинеска подчиняется уравнениям динамической системы Калоджеро-Мозера (далее – CM [2]) с некоторыми дополнительными условиями на конфигурации частиц. Впоследствии была обнаружена замечательная связь между динамикой полюсов рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили (в дальнейшем KP) и рациональной системой CM в работе [3]. Поиск такого соответствия мотивировался тем, что иерархию KdV можно в каком-то смысле рассматривать как иерархию KP с условием отсутствия динамики по временам с чётными номерами. В статье [3] был указан общий подход к построению рациональных решений KP, а также показано, что положения полюсов этих решений x_k изменяются с течением времени $t_2 = y$ таким образом, будто это частицы системы CM. Дальнейшим развитием этой идеи стало установление такой же связи в работе [4] в случае эллиптических решений KP.

Естественным продолжением этого сюжета стало исследование динамики полюсов сингулярных решений модифицированной иерархии Кадомцева-Петвиашвили (mKP). Как оказалось, в данной ситуации имеет место аналогичная связь между сингулярными решениями mKP и системой Руйсенаарса-Шнайдера [5] (RS), являющейся релятивистским аналогом CM. Ясное изложение этих вопросов приведено в работах [6], [7] и [8].

Следует отметить, что первоначально был установлен факт соответствия между иерархиями KP/mKP и CM/RS только в отношении динамики сингулярностей по одному из времен. Доказательство того, что такое соответствие имеется и для эволюции по остальным временам, впервые было получено в работе [9] для рациональных решений KP. Оказалось, что эта эволюция определяется высшими гамильтонианами системы CM. Переосмысление и обобщение результатов этой работы на случай рациональных решений mKP было дано в статьях [10] и [6]. На сегодня открытым остаётся вопрос для тригонометрических и эллиптических решений KP/mKP.

Добавим к этому, что в ставших уже классическими в отношении исследования вопроса о соответствии между KP и CM статьях [3] и [4], а также в последовавших за ними, в уравнениях движения сингулярностей отсутствуют константы взаимодействия между ними, более того, для случая связи mKP-RS не выделен явно параметр, отвечающий обратной скорости света. Чтобы исправить этот недостаток, в данной работе предлагается рассмотреть так называемые $\hbar$-версии иерархий KP и mKP. В остальном же работа носит реферативный характер и подробно, детализованно освещает связь динамики полюсов рациональных и тригонометрических решений KP/mKP с системами CM/RS, таким образом, объединяя имеющиеся результаты.

2 Сингулярные решения иерархии KP

2.1 Общие сведения об иерархии KP и схема построения сингулярных решений

В этом подразделе кратко описываются основные результаты, касающиеся общей методики изучения иерархии KP и, в частности, сингулярных решений этой иерархии. Изложение здесь приближено к книге [11].

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор Лакса:

$$L = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \partial^{-k} \tag{2.1}$$

и соответствующую ему пару линейных вспомогательных задач:

$$L\psi = z\psi; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_m} = (L^m)_+ \psi;\ m = 2, 3, \ldots. \tag{2.3}$$

Условия их совместности образуют бесконечную цепочку нелинейных эволюционных уравнений на функции $u_1, u_2, u_3, \ldots$ от бесконечного набора переменных $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$, которые и называются уравнениями иерархии KP и имеют вид уравнений Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [(L^m)_+, L]. \tag{2.4}$$

Иерархия KP допускает представление в форме уравнений Захарова-Шабата (представление нулевой кривизны):

$$[\partial_{t_m} - (L^m)_+, \partial_{t_n} - (L^n)_+] = 0, \tag{2.5}$$

которые суть условия совместности системы (2.3). К примеру, легко видеть, что:

$$(L^2)_+ = \partial^2 + u;$$

$$(L^3)_+ = \partial^3 + \frac{3}{2} u\partial + w;$$

где $u = 2u_1, w = u_2$; тогда условие совместности системы

$$\begin{cases} \partial_{t_2}\psi = (L^2)_+\psi \\ \partial_{t_3}\psi = (L^3)_+\psi \end{cases}$$

приводит после исключения функции w к уравнению KP в исторически первоначальном виде:

$$3u_{yy} + (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 0,$$

где введены обозначения для времен $t_1 \equiv x$, $t_2 = y$ и $t_3 = t$.

Решение линейных задач (2.2) и (2.3) записывается в виде формального ряда и называется функцией Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \ldots\right). \tag{2.6}$$

Здесь введено стандартное обозначение:

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k. \tag{2.7}$$

Условия совместности (2.3) можно записать в терминах так называемого одевающего оператора:

$$K = 1 + \xi_1 \partial^{-1} + \xi_2 \partial^{-2} + \dots, \tag{2.8}$$

в таком случае становится ясно, что функция Бейкера-Ахиезера есть результат действия этого оператора на экспоненту, то есть

$$\psi(\mathbf{t}, z) = K e^{\xi(\mathbf{t}, z)}. \tag{2.9}$$

Как следствие, оператор Лакса и его коэффициенты оказываются связаны с коэффициентами одевающего оператора:

$$L = K \circ \partial \circ K^{-1}, \tag{2.10}$$

эволюция которых по каждому из времён описывается уравнением, эквивалентным уравнению Лакса:

$$\partial_{t_m} K = -(K \circ \partial^m \circ K^{-1})_- K. \tag{2.11}$$

Для дальнейших выкладок будет полезно ввести сопряжённый одевающий оператор $K^\dagger = 1 - \partial^{-1}\xi_1 + \partial^{-2}\xi_2 - \dots$ и определить сопряжённую функцию Бейкера-Ахиезера по формуле:

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = (K^\dagger)^{-1} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)}, \tag{2.12}$$

так что она имеет вид

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1^*}{z} + \frac{\xi_2^*}{z^2} + \dots \right). \tag{2.13}$$

Сопряжённая функция Бейкера-Ахиезера удовлетворяет совместной системе линейных задач:

$$L^\dagger \psi^* = z\psi^*; \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t_m} = -(L^m)_+^\dagger \psi^*. \tag{2.15}$$

Далее приводится конструкция, позволяющая строить решения уравнений иерархии КР посредством введения так называемой τ-функции. Оказывается, что зависимость коэффициентов оператора Лакса $u_1, u_2, u_3, \dots$ от времён $t_1, t_2, t_3, \dots$ описывается одним уравнением на одну функцию – уравнением Хироты на τ-функцию; $\tau = \tau(t_1, t_2, t_3, \dots)$. Более того, τ-функция непосредственно связана с функцией Бейкера-Ахиезера. Вводя традиционное обозначение

$$\mathbf{t} \pm [z] = \{t_1 \pm z, t_2 \pm \frac{1}{2} z^2, t_3 \pm \frac{1}{3} z^3, \dots\},$$

уравнение Хироты можно записать в виде:

$$\begin{aligned}(z_2 - z_3)\tau(\mathbf{t} + [z_1])\tau(\mathbf{t} + [z_2] + [z_3]) +& \\ + (z_3 - z_1)\tau(\mathbf{t} + [z_2])\tau(\mathbf{t} + [z_3] + [z_1]) +& \\ + (z_1 - z_2)\tau(\mathbf{t} + [z_3])\tau(\mathbf{t} + [z_1] + [z_2]) = 0.&\end{aligned} \tag{2.16}$$

Нетрудно показать, как связан вычет оператора Лакса с τ-функцией. Имеется соотношение:

$$u_1 = \partial^2 \log \tau(\mathbf{t}). \tag{2.17}$$

Билинейное уравнение Хироты является следствием так называемого билинейного тождества:

$$\oint_{\mathcal{C}} \psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}', z)dz = 0, \tag{2.18}$$

выполняющегося для любых наборов времён $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$. Его удобно переписать с учетом представления функций Бейкера-Ахиезера в виде формального ряда:

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} w(\mathbf{t}, z)w^*(\mathbf{t}', z)dz = 0.$$

Контур интегрирования $\mathcal{C}$ в данном тождестве выбирается таким образом, чтобы он охватывал все особенности $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)}$, но не охватывал ни одну из особых точек произведения $w(\mathbf{t}, z)w^*(\mathbf{t}', z)$. Ясно, что контур $\mathcal{C}$ должен включать ∞ в силу того, что это существенно особая точка экспоненты, если $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ и хотя бы одно из времен отлично от нуля. Также важным следствием данного тождества является формула Сато, выражающая функцию Бейкера-Ахиезера через τ-функцию и в то же время служащая её определением. Это есть равенство:

$$\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau(\mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(\mathbf{t})}; \tag{2.19}$$

аналогично, для сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau(\mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(\mathbf{t})}. \tag{2.20}$$

В дальнейшем будет использована ещё одна формула, получающаяся в результате дифференцирования по t_m билинейного тождества, выбора $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ и явного вычисления вычета:

$$\partial_{t_m} \partial \log \tau(\mathbf{t}) = \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m \psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}, z) \right). \tag{2.21}$$

Фиксирование аналитических свойств функции Бейкера-Ахиезера на римановой сфере определяет вид τ-функции, согласно формуле Сато. Рациональным и тригонометрическим решениям иерархии КР будут отвечать следующие τ-функции:

$$\tau(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N} (x - x_k)\,; \tag{2.22}$$

$$\tau(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N} \sinh[\gamma(x - x_k)]; \tag{2.23}$$

где $x_k = x_k(t_2, t_3, \ldots); k = 1, 2, \ldots, N$.

Следует подчеркнуть, что в первом случае τ-функция – полином от x с N корнями на всей комплексной плоскости, каждый из которых единичной кратности, причем такая τ-функция описывает все рациональные решения. Во втором же случае это полином от $e^{\gamma x}$, имеющий N попарно различных нулей на каждом из отрезков длины $2\pi/\gamma$ на мнимой оси. Такая τ-функция описывает N-параметрическое семейство периодических N-солитонных решений КР.

2.2 Рациональные решения иерархии КР

Формальное введение параметра $\hbar$ посредством перескалирования времён $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$ позволяет изучить так называемую $\hbar$-версию иерархии КР (см. [12]). При предельном переходе $\hbar \to 0$ эта иерархия сводится к бездисперсионному пределу КР. Далее в разделе, посвящённом сингулярным решениям КР, подразумевается, что процедура перескалирования совершена. Причина введения параметра $\hbar$ также изложена ниже.

Поскольку первоочередная задача – это выяснение динамики полюсов сингулярных решений уравнения КР по времени t_2, то можно положить прочие времена (за исключением x) равными нулю и обозначить $t_2 \equiv t$. Для решения данного вопроса необходимо рассмотреть вспомогательную линейную задачу (2.3):

$$\hbar \partial_{t_2} \psi = \hbar^2 \partial^2 \psi + u\psi; \tag{2.24}$$

где $u = 2u_1 = 2\hbar^2 \partial^2 \log \tau$. В таком случае, согласно (2.22), имеем:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{-2\hbar^2}{(x - x_k(t))^2}. \tag{2.25}$$

Воспользуемся формулой Сато (2.19) для того, чтобы записать функцию Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(x,t,z) = e^{\frac{1}{\hbar}(xz + tz^2)} \left(c_0(z) + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k(t,z)}{x - x_k(t)} \right). \tag{2.26}$$

Подстановка выражений для u и ψ в (2.24) (см. Приложение) и перегруппировка слагаемых при полюсах первого и второго порядка приводит к системе уравнений:

$$\dot{c}_k = -2\hbar \sum_{i=1}^{N} \left((1 - \delta_{ik}) \frac{c_k - c_i}{(x_k - x_i)^2} \right); \tag{2.27}$$

$$c_k \dot{x}_k = -2\hbar c_0 - 2zc_k - 2\hbar \sum_{i=1}^{N} \left((1 - \delta_{ik}) \frac{c_i}{x_k - x_i} \right). \tag{2.28}$$

Введя матрицы L и M вида

$$L_{ik} = -\delta_{ik} \frac{\dot{x}_i}{2} - \hbar \frac{1 - \delta_{ik}}{x_i - x_k}; \tag{2.29}$$

$$M_{ik} = -2\hbar \delta_{ik} \sum_{j=1}^{N} \frac{1 - \delta_{ij}}{(x_i - x_j)^2} + 2\hbar \frac{1 - \delta_{ik}}{(x_i - x_k)^2}; \tag{2.30}$$

данную систему уравнений легко переписать в матричной форме:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = -\hbar c_0 \mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}; \end{cases} \tag{2.31}$$

где естественным образом введены обозначения:

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T; \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T.$$

Видно, что эта система уравнений переопределена. Непосредственным суммированием можно убедиться в том, что $M\mathbf{1} = 0$, тогда: $\dot{L}\mathbf{c} + L\dot{\mathbf{c}} = z\dot{\mathbf{c}}$; $\dot{L}\mathbf{c} + LM\mathbf{c} = zM\mathbf{c}$; $ML\mathbf{c} = zM\mathbf{c}$. Отсюда ясно, что условие совместности данной системы имеет форму уравнений Лакса:

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{2.32}$$

Вычисляя коммутатор, можно получить уравнения движения, эквивалентные (2.32):

$$\ddot{x}_k = -8\hbar^2 \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{1}{(x_k - x_i)^3}. \tag{2.33}$$

Эта система есть не что иное, как динамические уравнения в форме Ньютона для рациональной системы CM. Широко известен метод гамильтоновой редукции для решения этих уравнений [17]. Таким образом показано, что динамика нулей τ-функции по времени t_2 полностью совпадает с динамикой частиц системы CM. Более того, легко видеть, что $\hbar^2$ в уравнениях движения выступает в роли константы связи. Отвлекаясь от формальности процедуры введения параметра $\hbar$, можно заключить, что построенные рациональные решения иерархии KP описывают ситуацию более общо, нежели чем в работе [3].

Теперь покажем, что динамика полюсов рациональных решений иерархии KP по временам $t_3, t_4, \ldots$ определяется высшими гамильтонианами системы CM. Этот результат излагается по работе [10].

Обратимся к вспомогательной линейной задаче (2.15), описывающей динамику сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера. Выпишем явно это линейное уравнение для $t_2 = t$:

$$-\hbar\partial_t \psi^* = \hbar^2 \partial^2 \psi^* + u\psi^*. \tag{2.34}$$

По формуле Сато (2.20), сопряжённая функция Бейкера-Ахиезера записывается в форме

$$\psi^*(x,t,z) = e^{-\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \left(c_0^{-1}(z) + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k^*(t,z)}{x - x_k(t)} \right). \tag{2.35}$$

Подстановка u и сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера в (2.34), группировка слагаемых при полюсах первого и второго порядка приводит к переопределённой системе уравнений:

$$\dot{c}_k^* = 2\hbar \sum_{i=1}^{N} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_k^* - c_i^*}{(x_k - x_i)^2} \right); \tag{2.36}$$

$$c_k^* \dot{x}_k = 2\hbar c_0^{-1} - 2z c_k^* + 2\hbar \sum_{i=1}^{N} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_i^*}{x_k - x_i} \right). \tag{2.37}$$

Переходя к введённым ранее матричным обозначениям, можно записать эту систему в виде:

$$\begin{cases} (zI - L^T)\mathbf{c}^* = \hbar c_0^{-1} \mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{c}}^* = -M\mathbf{c}^*; \end{cases} \tag{2.38}$$

Из (2.31) и (2.38) можно заключить, что:

$$\mathbf{c} = -\hbar c_0 (zI - L)^{-1} \mathbf{1}; \tag{2.39}$$

$$\mathbf{c}^* = \hbar c_0^{-1} (zI - L^T)^{-1} \mathbf{1}. \tag{2.40}$$

Далее, при подстановке в формулу (2.21) выражения для τ-функции и функций Бейкера-Ахиезера и сравнении коэффициентов при полюсах второго порядка по x в левой и правой части формулы можно получить равенство:

$$\hbar^2 \partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m (\mathbf{c}^*)^T E_{kk} \mathbf{c} \right). \tag{2.41}$$

Здесь введена матрица $(E_{mn})_{ik} = \delta_{mi}\delta_{nk}$. Обозначив $p_k = \frac{1}{2}\dot{x}_k$, несложными выкладками можно убедиться в верности следующих равенств:

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -E_{kk};\ \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2}[E_{kk}, M]. \tag{2.42}$$

Подстановка в (2.41) выражений для $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}^*$ и использование первого равенства из (2.42), а также того факта, что

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left((zI-L)^{-1}\right) = (zI-L)^{-1}\frac{\partial L}{\partial p_k}(zI-L)^{-1},$$

дают следующий результат:

$$\partial_{t_m} x_k = \frac{\partial}{\partial p_k}\operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m \mathbf{1}^T (zI-L)^{-1}\mathbf{1}\right).$$

Явное вычисление вычета позволяет записать правую часть в виде

$$\frac{\partial}{\partial p_k}(\mathbf{1}^T L^m \mathbf{1}) = \frac{\partial}{\partial p_k}\operatorname{Tr}\left(L^m\, \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T\right).$$

Как известно, матрица $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и матрица Лакса обладают следующим свойством:

$$[L, X] + \hbar I = \hbar \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}^T. \tag{2.43}$$

Отсюда окончательно следует, что

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k}\operatorname{Tr} L^m. \tag{2.44}$$

Аналогично, замечая, что $M^T = M$, а также используя выражения для производных по времени t_2 коэффициентов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}^*$, можно получить равенство:

$$\hbar^2 \frac{1}{2}\partial_{t_m}\partial_{t_2} x_k = \frac{1}{2}\operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m(\dot{c}_k c_k^* + c_k \dot{c}_k^*)\right) = \frac{1}{2}\operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m (\mathbf{c}^*)^T\, [E_{kk}, M]\, \mathbf{c}\right). \tag{2.45}$$

Теперь, используя второе уравнение из (2.42) и выражения для $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}^*$, легко видеть, что

$$\frac{1}{2}(\mathbf{c}^*)^T\, [E_{kk}, M]\, \mathbf{c} = -\hbar^2 \mathbf{1}^T (zI-L)^{-1}\frac{\partial L}{\partial x_k}(zI-L)^{-1}\mathbf{1} = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{1}^T (zI-L)^{-1}\mathbf{1}\right).$$

Результат получается после применения рассуждений, приведённых выше, с учетом (2.43):

$$\partial_{t_m} p_k = -\partial_{x_k}\operatorname{Tr} L^m. \tag{2.46}$$

Равенства (2.44) и (2.46) представляют собой уравнения в форме Гамильтона. Они описывают динамику частиц системы CM в зависимости от $t_2, t_3, \ldots$, причем генераторами трансляций по временам выступают высшие гамильтонианы системы, определяемые по формуле:

$$\mathcal{H}_m = \operatorname{Tr} L^m. \tag{2.47}$$

Таким образом, установлено полное соответствие между динамикой полюсов рациональных решений иерархии KP и движением частиц системы CM в общем случае произвольной константы связи. Отметим, что в уравнениях в форме Гамильтона она входит только в $\operatorname{Tr} L^m$.

2.3 Тригонометрические решения иерархии КР

В данном разделе рассматриваются тригонометрические решения. За основу взята τ-функция вида (2.23), тогда u и функция Бейкера-Ахиезера определены следующим образом:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{-2\hbar^2\gamma^2}{\sinh^2[\gamma(x - x_k(t))]}; \tag{2.48}$$

$$\psi(x,t,z) = e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \left(c_0(z) + \sum_{k=1}^{N} c_k(t,z) \coth[\gamma(x - x_k(t))] \right). \tag{2.49}$$

Обе эти величины должны удовлетворять уравнению (2.24). Последовательная подстановка u и функции Бейкера-Ахиезера в данное уравнение и группировка слагаемых при полюсах первого и второго порядка дают переопределённую систему уравнений (технические детали этой подстановки вынесены в Приложение), аналогично тому, как это делалось в случае рациональных решений. Имеем:

$$\dot{c}_k = -2\hbar\gamma^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(1-\delta_{ki})(c_k - c_i)}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]}; \tag{2.50}$$

$$c_k\dot{x}_k = -2zc_k - 2\hbar\gamma c_0 - 2\hbar\gamma \sum_{i=1}^{N} \left((1-\delta_{ki})c_i \coth[\gamma(x_k - x_i)]\right). \tag{2.51}$$

Эта переопределённая система записывается в матричных обозначениях, если ввести матрицы L и M, у которых элементы равны:

$$L_{ik} = -\delta_{ik}\frac{\dot{x}_i}{2} - \hbar\gamma(1-\delta_{ik})\coth[\gamma(x_i - x_k)]; \tag{2.52}$$

$$M_{ik} = -2\hbar\gamma^2\delta_{ik} \sum_{j=1}^{N} \frac{1-\delta_{ij}}{\sinh^2[\gamma(x_i - x_j)]} + 2\hbar\gamma^2 \frac{1-\delta_{ik}}{\sinh^2[\gamma(x_i - x_k)]}. \tag{2.53}$$

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = -\hbar\gamma c_0\mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}. \end{cases} \tag{2.54}$$

Непосредственная проверка показывает, что $M\mathbf{1} = 0$, тогда окончательно условие совместности данной системы по форме совпадает с уравнением Лакса (2.32). Вычисление коммутатора позволяет выписать явно уравнения движения в форме Ньютона:

$$\ddot{x}_k = -8\hbar^2\gamma^3 \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{\coth[\gamma(x_k - x_i)]}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]}. \tag{2.55}$$

Нетрудно видеть, что эта система уравнений описывает движение частиц тригонометрической системы СМ. Значит, установлено, что динамика полюсов тригонометрических решений иерархии КР по времени t_2 описывается теми же уравнениями, что и динамика частиц системы СМ. Как и ранее, величина $\hbar^2$ представляет собой константу связи.

3 Сингулярные решения иерархии mKP

3.1 Общие сведения об иерархии mKP и схема построения сингулярных решений

Данный подраздел посвящён краткому описанию иерархии mKP и общей схеме построения решений. Изложение ведётся по работам [14], [15].

Определим оператор Лакса. Иерархию mKP можно рассматривать как обобщение «половины» иерархии Тоды:

$$L = e^{\partial_s} + u_0 + u_1 e^{-\partial_s} + u_2 e^{-2\partial_s} + \dots . \tag{3.1}$$

Иерархия mKP представляет собой бесконечную цепочку эволюционных уравнений на функции $u_0, u_1, u_2, \dots$ от переменных $t_0 \equiv s$ и $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$, записываемых в форме уравнений Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [(L^m)_+, L]. \tag{3.2}$$

Ясно, что эти уравнения можно понимать как условия совместности пары вспомогательных линейных задач:

$$L\psi = z\psi; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_m} = (L^m)_+\psi. \tag{3.4}$$

Как и ранее, решение вспомогательных линейных задач записывается в виде формального ряда и называется функцией Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(s, \mathbf{t}, z) = z^s e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \dots\right). \tag{3.5}$$

Введение так называемого одевающего оператора

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-k\partial_s} \tag{3.6}$$

позволяет переписать условия совместности (3.4). Ясно, что

$$\psi(s, \mathbf{t}, z) = K z^s e^{\xi(\mathbf{t}, z)}, \tag{3.7}$$

тогда, в свою очередь, оператор Лакса оказывается связан с одевающим оператором посредством соотношения

$$L = K \circ e^{\partial_s} \circ K^{-1}. \tag{3.8}$$

Из уравнений Лакса следует, что

$$\partial_{t_m} K = -(L^m)_- K. \tag{3.9}$$

Аналогично случаю иерархии KP, полезным оказывается введение формально сопряжённого оператора $K^\dagger$ и сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера по формуле

$$\psi^*(s, \mathbf{t}, z) = (K^\dagger)^{-1} z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)}, \tag{3.10}$$

так что она имеет вид

$$\psi^*(s, \mathbf{t}, z) = z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1^*}{z} + \frac{\xi_2^*}{z^2} + \dots\right) \tag{3.11}$$

и удовлетворяет совместной системе вспомогательных линейных уравнений:

$$L^{\dagger}\psi^* = z\psi^*; \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t_m} = -(L^m)^{\dagger}_{+}\psi^*. \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь основные формулы формализма τ-функции в применении к иерархии mKP. В данной ситуации билинейное тождество на функцию Бейкера-Ахиезера и сопряжённую к ней будет выглядеть так:

$$\oint\limits_{\mathbb{C}_{[0,\infty]}} \psi(s,\mathbf{t},z)\psi^*(s',\mathbf{t}',z)dz = 0. \tag{3.14}$$

Иначе говоря,

$$\oint\limits_{\mathbb{C}_{[0,\infty]}} z^{s-s'}e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)}w(s,\mathbf{t},z)w^*(s',\mathbf{t}',z)dz = 0.$$

Контур интегрирования охватывает разрез $[0,\infty]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таким образом, что внутрь него не попадают никакие особенности произведения $w(s,\mathbf{t},z)w^*(s',\mathbf{t}',z)$. Билинейное тождество выполняется для любых наборов времен $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}'$, $s \geq s'$. Видно, что при $s = s'$ оно переходит в аналогичное тождество для иерархии KP. Следствием этого тождества являются формулы Сато, связывающие τ-функцию и функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(s,\mathbf{t},z) = z^s e^{\xi(\mathbf{t},z)}\frac{\tau(s,\mathbf{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\mathbf{t})}; \tag{3.15}$$

$$\psi^*(s,\mathbf{t},z) = z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t},z)}\frac{\tau(s,\mathbf{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\mathbf{t})}. \tag{3.16}$$

Можно показать, что линейные задачи, описывающие динамику функций Бейкера-Ахиезера по времени t_1, записываются в виде:

$$\partial_{t_1}\psi(s,\mathbf{t},z) = \psi(s+1,\mathbf{t},z) + u(s,\mathbf{t})\psi(s,\mathbf{t},z); \tag{3.17}$$

$$-\partial_{t_1}\psi^*(s,\mathbf{t},z) = \psi^*(s-1,\mathbf{t},z) + u(s-1,\mathbf{t})\psi^*(s,\mathbf{t},z); \tag{3.18}$$

где

$$u(s,\mathbf{t}) = \partial_{t_1}\log\frac{\tau(s+1,\mathbf{t})}{\tau(s,\mathbf{t})}. \tag{3.19}$$

Следуя работе [16], рассмотрим $\hbar$-версию иерархии mKP. Для этого необходимо формально перескалировать времена $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$, $k = 1,2,\ldots$, однако теперь «растяжение» времени t_0 осуществляется при помощи двух величин, а именно $\hbar$ и η: $t_0 \to \frac{t_0}{\eta\hbar}$. В дальнейших рассуждениях считается, что процедура перескалирования времён совершена именно таким образом, а также обосновывается причина такого введения параметров «растяжения».

3.2 Рациональные решения иерархии mKP

Для удобства примем обозначение $t_0 \equiv x$. Выберем τ-функцию в виде:

$$\tau(x,\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N}(x - x_k), \tag{3.20}$$

где $x_k = x_k(\mathbf{t}),\ k = 1, 2, \ldots, N$. В первую очередь необходимо изучить динамику нулей τ-функции по времени $t_1 \equiv t$, потому все остальные времена (кроме x) можно положить равными нулю. Нужную информацию несёт в себе вспомогательная линейная задача (3.17), записываемая после перескалирования времен в виде

$$\hbar\partial_t\psi(x,t,z) = \psi(x+\eta\hbar,t,z) + u(x,t)\psi(x,t,z). \tag{3.21}$$

Применение формулы Сато (3.15) и равенства (3.19) при данном выборе τ-функции позволяет записать функцию Бейкера-Ахиезера и u в следующей форме:

$$\psi(x,t,z) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \left(c_0(z) + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k(t,z)}{x - x_k(t)} \right); \tag{3.22}$$

$$u(x,t) = \hbar \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\dot{x}_k}{x - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x - x_k + \eta\hbar} \right). \tag{3.23}$$

Подстановка данных выражений в уравнение (3.21), перегруппировка слагаемых при полюсах первого порядка, расположенных в точках $x = x_k$ и $x = x_k - \eta\hbar$ приводит к следующей переопределенной системе уравнений (технические аспекты вынесены в Приложение):

$$\dot{c}_k = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(c_k\dot{x}_i + c_i\dot{x}_k)(1-\delta_{ik})}{x_k - x_i} - \frac{c_k\dot{x}_i}{x_k - x_i + \eta\hbar} - \frac{c_i\dot{x}_k}{x_k - x_i - \eta\hbar} \right]. \tag{3.24}$$

$$zc_k - \hbar \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i\dot{x}_k}{x_k - x_i - \eta\hbar} = \hbar c_0 \dot{x}_k \tag{3.25}$$

Условие совместности данной системы просто записывается в матричных обозначениях. Введение матриц:

$$L_{ik} = \frac{\hbar\dot{x}_i}{x_i - x_k - \eta\hbar}; \tag{3.26}$$

$$M_{ik} = \delta_{ik} \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \left(\frac{\dot{x}_j}{x_i - x_j} - \frac{\dot{x}_j}{x_i - x_j + \eta\hbar} \right) + \\ + (1-\delta_{ik}) \left(\frac{\dot{x}_i}{x_i - x_k} - \frac{\dot{x}_i}{x_i - x_k - \eta\hbar} \right); \tag{3.27}$$

$$X_{ik} = \delta_{ik} x_i; \tag{3.28}$$

позволяет переписать её в следующем виде:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = \hbar c_0 \dot{X}\mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Получим необходимое условие совместности системы. Ясно, что после дифференцирования первого уравнения по t: $z\dot{\mathbf{c}} = \dot{L}\mathbf{c} + L\dot{\mathbf{c}} + \hbar c_0 \ddot{X}\mathbf{1}$, иначе говоря, $zM\mathbf{c} = \dot{L}\mathbf{c} + LM\mathbf{c} + \hbar c_0 \ddot{X}\mathbf{1}$. С другой же стороны, $zM\mathbf{c} = ML\mathbf{c} + \hbar c_0 M\dot{X}\mathbf{1}$. Таким образом, условие совместности приобретает вид:

$$(\dot{L} - [M,L])\mathbf{c} = \hbar c_0 (M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1}. \tag{3.30}$$

Покажем, что оно эквивалентно уравнению Лакса (2.32). Явное вычисление (см. Приложение) левой и правой части условия совместности показывает, что оно обращается в тождество тогда, когда выполнено равенство:

$$\ddot{x}_k = \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{-2\eta^2\hbar^2 \dot{x}_k \dot{x}_i}{(x_k - x_i)((x_k - x_i)^2 - \eta^2\hbar^2)}. \tag{3.31}$$

Эти равенства суть динамические уравнения в форме Ньютона рациональной системы RS. Таким образом, доказано, что нули τ-функции в рациональном случае движутся вдоль оси x с течением времени t_1 так, будто это частицы системы RS. То есть установлено соответствие между данной многочастичной системой и рациональными решениями иерархии mKP. Исходя из вида матрицы Лакса (3.26) можно заключить, что параметр $\hbar$ выступает в роли константы связи, а η – как обратная скорость света в модели RS. Собственно, эта аналогия обосновывает введение в рассмотрение этих двух параметров перескалирования времён. Отметим также, что уравнения (3.31) не позволяют понять, какой из параметров является константой связи, а какой – обратной скоростью света.

3.3 Тригонометрические решения иерархии mKP

Рассмотрение тригонометрических решений иерархии mKP следует начинать с выбора соответствующей τ-функции. В полной аналогии с иерархией KP, запишем τ-функцию в виде:

$$\tau(x, \mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N} \sinh[\gamma(x - x_k)]; \tag{3.32}$$

где $x_k = x_k(\mathbf{t})$; $k = 1, 2, \ldots, N$. Как и ранее, в первую очередь исследуется динамика нулей τ-функции в зависимости от $t_1 \equiv t$, потому прочие времена (помимо x) выбраны равными нулю, будучи иррелевантными при решении данной задачи. Формула Сато (3.15) и равенство (3.19) при данном выборе τ-функции определяют функцию Бейкера-Ахиезера и u:

$$\psi(x, t, z) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \left(c_0(z) + \sum_{k=1}^{N} c_k(t) \coth[\gamma(x - x_k(t))] \right); \tag{3.33}$$

$$u(x, t) = \hbar\gamma \sum_{k=1}^{N} \dot{x}_k(t) \left(\coth[\gamma(x - x_k(t))] - \coth[\gamma(x - x_k(t) + \eta\hbar)] \right). \tag{3.34}$$

В результате подстановок этих выражений в линейную задачу (3.21) можно получить (техника этой подстановки – см. Приложение) условия на коэффициенты при $\coth[\gamma(x - x_k)]$ и $\coth[\gamma(x - x_k + \eta\hbar)]$:

$$\dot{c}_k = \gamma \sum_{i=1}^{N} \big((1 - \delta_{ki})(c_i \dot{x}_k + c_k \dot{x}_i) \coth[\gamma(x_k - x_i)] - c_k \dot{x}_i \coth[\gamma(x_k - x_i + \eta\hbar)] - \\ - c_i \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i - \eta\hbar)] \big); \tag{3.35}$$

$$z c_k = \hbar\gamma \left(c_0 \dot{x}_k + \sum_{i=1}^{N} c_i \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i - \eta\hbar)] \right). \tag{3.36}$$

Как и ранее, эти уравнения представляют собой переопределённую систему. Условие её совместности будет получено в матричном виде. Вводя матрицы L, M с элементами:

$$L_{ik} = \hbar\gamma \dot{x}_i \coth[\gamma(x_i - x_k - \eta\hbar)]; \tag{3.37}$$

$$M_{ik} = \gamma\delta_{ik} \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \left(\dot{x}_j \coth[\gamma(x_i - x_j)] - \dot{x}_j \coth[\gamma(x_i - x_j + \eta\hbar)]\right) + \\ +\gamma(1-\delta_{ik})\left(\dot{x}_i \coth[\gamma(x_i - x_k)] - \dot{x}_i \coth[\gamma(x_i - x_k - \eta\hbar)]\right); \tag{3.38}$$

запишем эту систему в матричных обозначениях:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = \hbar\gamma c_0 \dot{X}\mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Условие её совместности можно представить в следующей форме:

$$(\dot{L} - [M, L])\mathbf{c} = \hbar\gamma c_0 (M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{c}. \tag{3.40}$$

Можно показать (см. Приложение), что правая часть обращается в ноль, а значит, данное условие совместности приобретает форму уравнения Лакса (2.32) в том случае, если выполнены равенства:

$$\ddot{x}_k = \sum_{i=1;\, i\neq k} \frac{-2\gamma\dot{x}_k\dot{x}_i \sinh^2[\gamma\eta\hbar]\cosh[\gamma(x_k - x_i)]}{\sinh[\gamma(x_k - x_i)]\sinh[\gamma(x_k - x_i + \eta\hbar)]\sinh[\gamma(x_k - x_i - \eta\hbar)]}. \tag{3.41}$$

Это есть уравнения движения в форме Ньютона частиц тригонометрической системы RS. Таким образом, показано, что динамика нулей τ-функции по времени t_1 в случае, когда она представляет собой полином по $e^{\gamma x}$, описывается тригонометрической системой RS. Как и для рациональных решений иерархии mKP, параметры $\hbar$ и η являются константой связи и обратной скоростью света соответственно.

В дополнение к данному результату покажем, каким образом нужно изменить выражение для функции Бейкера-Ахиезера, чтобы динамика её полюсов определялась матрицей Лакса тригонометрической системы RS в несколько ином представлении. Запишем функцию Бейкера-Ахиезера в форме:

$$\psi(x, t, z) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\Phi(x - x_k(t)); \tag{3.42}$$

где введено обозначение:

$$\Phi(x) = \frac{\sinh[\gamma(x+\zeta)]}{\sinh[\gamma x]\sinh[\gamma\zeta]} = \coth[\gamma x] + \coth[\gamma\zeta] = \coth[\gamma x] + c_0. \tag{3.43}$$

При таком подходе можно получить, как и ранее, собирая коэффициенты в уравнении (3.21) при $\coth[\gamma(x + \eta\hbar - x_k)]$ и при $\coth[\gamma(x - x_k)]$, систему уравнений:

$$zc_k = \hbar\gamma\dot{x}_k \sum_{i=1}^{N} c_i\Phi(x_k - x_i - \eta\hbar); \tag{3.44}$$

$$\dot{c_k} = \gamma\left(\dot{x_k}\sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} c_i(\Phi(x_k - x_i) - \Phi(x_k - x_i - \eta\hbar)) + \right. \\ \left. + c_k \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \dot{x_i}V(x_k - x_i) + c_0 c_k \dot{x_k}\right). \tag{3.45}$$

Здесь введено обозначение:
$$V(x) = \Phi(x) - \Phi(x + \eta\hbar).$$

Представляется разумным рассмотреть матрицы:

$$L_{ik} = \hbar\gamma\dot{x}_i\Phi(x_i - x_k - \eta\hbar); \tag{3.46}$$

$$M_{ik} = \gamma\left(\delta_{ik}\sum_{j=1;\, j\neq i}^{N}\dot{x}_j V(x_i - x_j) + (1-\delta_{ik})\dot{x}_i(\Phi(x_i - x_k) - \Phi(x_i - x_k - \eta\hbar))\right). \tag{3.47}$$

Тогда система в этих терминах записывается так:

$$\begin{cases}(zI - L)\mathbf{c} = 0\\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c} + \gamma c_0\dot{X}\mathbf{c}.\end{cases} \tag{3.48}$$

Получим условие её совместности. Дифференцируя первое уравнение системы, запишем: $\dot{L}\mathbf{c} + L\dot{\mathbf{c}} = z\dot{\mathbf{c}} = \dot{L}\mathbf{c} + L(M\mathbf{c} + \gamma c_0\dot{X}\mathbf{c}) = z(M\mathbf{c} + \gamma c_0\dot{X}\mathbf{c})$. Так как $[L, \dot{X}] = 0$, $zM\mathbf{c} = ML\mathbf{c}$, приходим к условию совместности системы в форме уравнения Лакса (2.32). Явное вычисление коммутатора (см. Приложение) приводит вновь к уравнениям движения в виде (3.41).

4 Заключительные замечания

Связь между сингулярными решениями иерархий KP и mKP с многочастичными системами типа Калоджеро-Мозера и Руйсенаарса-Шнайдера является в значительной степени известным сюжетом, в котором по-прежнему остаются некоторые вопросы неразрешёнными, подчас из-за технических трудностей. В результате выполнения данной дипломной работы, призванной обеспечить исследование соответствия KP/mKP и CM/RS путем обобщения имеющихся результатов, были подробно проделаны вычисления, касающиеся рациональных и тригонометрических решений KP и mKP с введением параметра $\hbar$, оказавшегося по сути константой связи в системах CM и RS, путем формального перескалирования времён, а в случае mKP – дополнительного параметра η, играющего роль обратной скорости света в случае системы RS. В перспективе развития этой работы – получение доказательства связи динамики полюсов тригонометрических, а впоследствии и эллиптических решений KP/mKP по всем временам с соответствующими многочастичными системами.

5 Приложение

Здесь рассматриваются технические вопросы, опущенные в тексте работы.

5.1 Рациональные решения иерархии KP

Покажем, каким образом были перегруппированы слагаемые при полюсах первого и второго порядка по x во вспомогательном линейном уравнении (2.24). Имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{z^2}{\hbar}\psi + e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \sum_k \left(\frac{\dot{c}_k}{x-x_k} + \frac{c_k \dot{x}_k}{(x-x_k)^2} \right);$$

$$\partial^2\psi = \frac{z^2}{\hbar^2}\psi - 2\frac{z}{\hbar} e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \sum_k \frac{c_k}{(x-x_k)^2} + 2e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \sum_k \frac{c_k}{(x-x_k)^3};$$

$$u\psi = -2\hbar^2 e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \left[c_0 \sum_k \frac{1}{(x-x_k)^2} + \sum_k \frac{c_k}{(x-x_k)^3} + \sum_{i,k} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_k - c_i}{(x_k - x_i)^2} \frac{1}{x-x_k} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i,k} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_i}{x_k - x_i} \frac{1}{(x-x_k)^2} \right) \right].$$

Подстановка этих выражений во вспомогательное линейное уравнение позволяет сгруппировать слагаемые при полюсах первого и второго порядков; полюса третьего порядка автоматически сокращаются.

Приведём вычисления, результатом которых являются уравнения движения точек $x_k(t)$. Для их получения удобно разбить матрицы L и M на диагональные и недиагональные части:

$$A_{ik} = -\delta_{ik}\frac{\dot{x}_i}{2}; B_{ik} = -\hbar\frac{1-\delta_{ik}}{x_i - x_k};$$

$$C_{ik} = -2\hbar\delta_{ik} \sum_j \frac{1-\delta_{ij}}{(x_i - x_j)^2}; D_{ik} = 2\hbar\frac{1-\delta_{ik}}{(x_i - x_k)^2}.$$

В таком случае, $L = A + B$, $M = C + D$. Коммутатор принимает вид:

$$[L, M] = [A, D] + [B, C] + [B, D].$$

Непосредственные вычисления приводят к следующим матричным элементам:

$$([A, D])_{ik} = -\frac{2\hbar(1-\delta_{ik})}{(x_i - x_k)^2}(\dot{x}_i - \dot{x}_k);$$

$$([B, C])_{ik} = 2\hbar^2 \frac{1-\delta_{ik}}{x_i - x_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{1}{(x_k - x_j)^2} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right);$$

$$([B, D])_{ik} = -2\hbar^2 \sum_{j \neq i,k} \left(\frac{1}{(x_i - x_j)(x_k - x_j)^2} + \frac{1}{(x_i - x_j)^2(x_k - x_j)} \right).$$

Тогда при $i \neq k$ получаем, что $([B, C + D])_{ik} = 0$, в противном же случае,

$$([B, C + D])_{ik} = -4\hbar^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3}.$$

Вычисление производной $\dot{L}$ и подстановка коммутатора в уравнение Лакса приводит к уравнениям движения в форме Ньютона (2.33).

5.2 Тригонометрические решения иерархии КР

Данный подраздел посвящен технике подстановки выражений для функции Бейкера-Ахиезера и u в уравнение (2.24). Легко видеть, что:

$$\dot{\psi} = \frac{z^2}{\hbar}\psi + e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)}\sum_k \left(\dot{c}_k \coth[\gamma(x-x_k)] + \frac{\gamma c_k \dot{x}_k}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]}\right);$$

$$\partial^2\psi = \frac{z^2}{\hbar^2}\psi - 2\gamma\frac{z}{\hbar}e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)}\sum_k \frac{c_k}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} + 2\gamma^2 e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)}\sum_k \frac{c_k\coth[\gamma(x-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]};$$

$$u\psi = -2\hbar^2\gamma^2 e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)}\left(c_0\sum_k \frac{1}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} + \sum_{k,i}\frac{c_k\coth[\gamma(x-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_i)]}\right).$$

В последующем оказывается пригодной формула «расцепления», которая верна при $k \neq i$:

$$\frac{\coth[\gamma(x-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_i)]} = \frac{\coth[\gamma(x-x_k)] - \coth[\gamma(x-x_i)]}{\sinh^2[\gamma(x_k-x_i)]} - \frac{\coth[\gamma(x_k-x_i)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_i)]}.$$

Применим эту формулу для «расцепления» полюсов в произведении $u\psi$:

$$u\psi = -2\hbar^2\gamma^2 e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)}\left(\sum_k \frac{c_0}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} + \sum_k \frac{c_k\coth[\gamma(x-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k,i}\left[(1-\delta_{ki})\left(\frac{(c_k-c_i)\coth[\gamma(x-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x_k-x_i)]} + \frac{c_i\coth[\gamma(x_k-x_i)]}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]}\right)\right]\right).$$

Отсюда при подстановке данных выкладок в уравнение на функцию Бейкера-Ахиезера получаются условия на коэффициенты при $\coth[\gamma(x-x_k)]$ и $\dfrac{1}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]}$.

Далее, покажем, как из матричных уравнений движения в форме Лакса можно получить уравнения в форме Ньютона. Как и в случае рациональной системы, удобно разбить матрицы L и M:

$$A_{ik} = -\delta_{ik}\frac{\dot{x}_i}{2}; B_{ik} = -\hbar\gamma(1-\delta_{ik})\coth[\gamma(x_i-x_k)];$$

$$C_{ik} = -2\hbar\gamma^2\delta_{ik}\sum_j \frac{1-\delta_{ij}}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_j)]}; D_{ik} = 2\hbar\gamma^2\frac{1-\delta_{ik}}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_k)]}.$$

При таком подходе коммутатор $[M,L] = [C,B] + [D,A] + [D,B]$. Вычисление матричных элементов этих коммутаторов приводит к следующим результатам:

$$([C,B])_{ik} = 2\hbar^2\gamma^3(1-\delta_{ik})\coth[\gamma(x_i-x_k)]\sum_j\left(\frac{1-\delta_{ij}}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_j)]} - \frac{1-\delta_{kj}}{\sinh^2[\gamma(x_k-x_j)]}\right);$$

$$([D,A])_{ik} = \hbar\gamma^2\frac{1-\delta_{ik}}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_k)]}(\dot{x}_i - \dot{x}_k);$$

$$([D,B])_{ik} = -2\hbar^2\gamma^3\sum_j\left((1-\delta_{ij})(1-\delta_{jk})\left[\frac{\coth[\gamma(x_j-x_k)]}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_j)]} - \frac{\coth[\gamma(x_i-x_j)]}{\sinh^2[\gamma(x_j-x_k)]}\right]\right).$$

Непосредственное вычисление показывает, что при $i \neq k$ $([C+D,B])_{ik} = 0$, а в противном случае:

$$([C+D,B])_{ik} = 4\hbar^2\gamma^3\sum_{j\neq i}\frac{\coth[\gamma(x_i-x_j)]}{\sinh^2[\gamma(x_i-x_j)]}.$$

Вычисление $\dot{L}$ и подстановка коммутатора в уравнение Лакса приводит к системе уравнений в форме (2.55).

5.3 Рациональные решения иерархии mKP

Приведём поочередные выкладки, возникающие при подстановке выражений для функции Бейкера-Ахиезера в уравнение (3.21):

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\hbar} z\psi + z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_k \left(\frac{\dot{c}_k}{x - x_k} + \frac{c_k \dot{x}_k}{(x - x_k)^2} \right);$$

$$\psi(x + \eta\hbar) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}+1} e^{\frac{tz}{\hbar}} \left(c_0 + \sum_k \frac{c_k}{x - x_k + \eta\hbar} \right);$$

$$u\psi = \hbar z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} c_0 \sum_k \left(\frac{\dot{x}_k}{x - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x - x_k + \eta\hbar} \right) + \hbar z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_{i,k} \left(\frac{c_k}{x - x_k} \left(\frac{\dot{x}_i}{x - x_i} - \frac{\dot{x}_i}{x - x_i + \eta\hbar} \right) \right).$$

В последней строке нужно расцепить дроби в суммы простых, тогда произведение $u\psi$ принимает вид:

$$u\psi = \hbar z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} c_0 \sum_k \left(\frac{\dot{x}_k}{x - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x - x_k + \eta\hbar} \right) + \hbar z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_k \frac{c_k \dot{x}_k}{(x - x_k)^2} +$$
$$+ \hbar z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_{i,k} \left(\frac{c_k \dot{x}_i}{x_k - x_i} (1 - \delta_{ik}) \left(\frac{1}{x - x_k} - \frac{1}{x - x_i} \right) - \frac{c_k \dot{x}_i}{x_k - x_i + \eta\hbar} \left(\frac{1}{x - x_k} - \frac{1}{x - x_i + \eta\hbar} \right) \right).$$

В результате подстановки этих выражений в уравнение (3.21), получаем равенство:

$$z \sum_k \frac{c_k}{x - x_k} + \hbar \sum_k \frac{\dot{c}_k}{x - x_k} = z \sum_k \frac{c_k}{x - x_k + \eta\hbar} + \hbar c_0 \sum_k \left(\frac{\dot{x}_k}{x - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x - x_k + \eta\hbar} \right) +$$
$$+ \hbar \sum_{i,k} \left[\left(\frac{(c_k \dot{x}_i + c_i \dot{x}_k)(1 - \delta_{ik})}{x_k - x_i} - \frac{c_k \dot{x}_i}{x_k - x_i + \eta\hbar} \right) \frac{1}{x - x_k} + \frac{c_i \dot{x}_k}{x_i - x_k + \eta\hbar} \; \frac{1}{x - x_k + \eta\hbar} \right].$$

Условия на коэффициенты при полюсах типа $\dfrac{1}{x - x_k}$:

$$z c_k + \hbar \dot{c}_k = \hbar c_0 \dot{x}_k + \hbar \sum_i \left(\frac{(c_k \dot{x}_i + c_i \dot{x}_k)(1 - \delta_{ik})}{x_k - x_i} - \frac{c_k \dot{x}_i}{x_k - x_i + \eta\hbar} \right).$$

Условия на коэффициенты при полюсах типа $\dfrac{1}{x - x_k + \eta\hbar}$:

$$z c_k + \hbar \sum_i \frac{c_i \dot{x}_k}{x_i - x_k + \eta\hbar} = \hbar c_0 \dot{x}_k.$$

Оба этих условия легко преобразуются в систему уравнений (3.24) и (3.25).

Теперь выведем условие совместности этой системы в матричных обозначениях. Раскроем матричное условие совместности (3.30), заметив прежде всего, что матрицу M можно переписать в терминах L:

$$M_{ij} = \delta_{ij} \sum_{k \neq i} \left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_k} L_{ki} \right) + (1 - \delta_{ij}) \left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_j} L_{ij} \right).$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$\sum_m M_{im} L_{mj} = \sum_{k \neq i} \left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_k} \left(L_{ki} L_{ij} + L_{ik} L_{kj} \right) \right);$$

$$\sum_m L_{im}M_{mj} = \sum_{k\neq j}\left(-\frac{\eta\hbar}{x_j - x_k}L_{kj}(L_{ij} - L_{ik})\right) = \frac{\dot{x}_i(\dot{x}_i - \dot{x}_j)}{(x_i - x_j - \eta\hbar)^2} + \sum_{k\neq i}\left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_j - \eta\hbar}L_{kj}L_{ik}\right).$$

Следовательно, матричный элемент коммутатора равняется:

$$([M,L])_{ij} = -\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_i - \dot{x}_j)}{(x_i - x_j - \eta\hbar)^2} + \sum_{k\neq i}\left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_k}\left(L_{ki}L_{ij} + L_{ik}L_{kj}\right) + \frac{\eta\hbar}{x_i - x_j - \eta\hbar}L_{kj}L_{ik}\right).$$

Подставив явные выражения для L, получаем наконец:

$$([M,L])_{ij} = -\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_i - \dot{x}_j)}{(x_i - x_j - \eta\hbar)^2} + \sum_{k\neq i}\frac{-2\eta^2\hbar^2\dot{x}_i\dot{x}_k}{(x_i - x_k)((x_i - x_k)^2 - \eta^2\hbar^2)(x_i - x_j - \eta\hbar)}.$$

Аналогично,

$$(\dot{L})_{ij} = \frac{\ddot{x}_i}{x_i - x_j - \eta\hbar} - \frac{\dot{x}_i(\dot{x}_i - \dot{x}_j)}{(x_i - x_j - \eta\hbar)^2}.$$

Теперь вычислим явно выражение:

$$((M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1})_i = \sum_m M_{im}\dot{x}_m - \ddot{x}_i =$$

$$= \sum_m\left(\dot{x}_m\delta_{im}\sum_{k\neq i}\left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_k}L_{ki}\right) + \dot{x}_m(1 - \delta_{im})\left(-\frac{\eta\hbar}{x_i - x_m}L_{im}\right)\right) - \ddot{x}_i =$$

$$= \sum_{k\neq i}\frac{-2\eta^2\hbar^2\dot{x}_i\dot{x}_k}{(x_i - x_k)((x_i - x_k)^2 - \eta^2\hbar^2)} - \ddot{x}_i.$$

Выясняется, что если правая часть (3.30) равна нулю, то последнее выражение оказывается равным нулю, что и делает систему (3.29) совместной, а условие её совместности эквивалентным уравнению Лакса (2.32). Попутно были выведены уравнения движения в форме Ньютона (3.31).

5.4 Тригонометрические решения иерархии mKP

В данном разделе приведены подробные вычисления, касающиеся подстановки выражений для функции Бейкера-Ахиезера и u в уравнение (3.21) в тригонометрическом случае. В результате проведения выкладок можно получить:

$$\dot{\psi} = \frac{z}{\hbar}\psi + z^{\frac{x}{\eta\hbar}}e^{\frac{tz}{\hbar}}\sum_k\left(\dot{c}_k\coth[\gamma(x - x_k)] + \frac{\gamma c_k\dot{x}_k}{\sinh^2[\gamma(x - x_k)]}\right);$$

$$\psi(x + \eta\hbar) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}+1}e^{\frac{tz}{\hbar}}\left(c_0 + \sum_k c_k\coth[\gamma(x - x_k + \eta\hbar)]\right);$$

$$u\psi = \hbar\gamma z^{\frac{x}{\eta\hbar}}e^{\frac{tz}{\hbar}}\left(c_0\sum_k\left(\dot{x}_k\coth[\gamma(x - x_k)] - \dot{x}_k\coth[\gamma(x - x_k + \eta\hbar)]\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k,i}\left(c_k\dot{x}_i\coth[\gamma(x - x_k)]\left(\coth[\gamma(x - x_i)] - \coth[\gamma(x - x_i + \eta\hbar)]\right)\right)\right).$$

Имеется ещё одна формула «расцепления» полюсов, верная при $k \neq i$:

$$\coth[\gamma(x - x_k)]\coth[\gamma(x - x_i)] = 1 + \coth[\gamma(x_k - x_i)]\left(\coth[\gamma(x - x_k)] - \coth[\gamma(x - x_i)]\right).$$

Она непосредственно применяется для того, чтобы записать произведение $u\psi$ в следующем виде:

$$u\psi = \hbar\gamma z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \left(c_0 \sum_k \left(\dot{x}_k \left(\coth[\gamma(x-x_k)] - \coth[\gamma(x-x_k+\eta\hbar)] \right) \right) + \sum_k \frac{c_k \dot{x}_k}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} + \right.$$

$$+ \sum_{k,i} \coth[\gamma(x-x_k)] \left((1-\delta_{ki})(c_i\dot{x}_k + c_k\dot{x}_i) \coth[\gamma(x_k-x_i)] - c_k\dot{x}_i \coth[\gamma(x_k-x_i+\eta\hbar)] \right) -$$

$$\left. - \sum_{k,i} \left(c_i \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)] \coth[\gamma(x-x_k+\eta\hbar)] \right) \right).$$

Подстановка всех этих выражений во вспомогательную линейную задачу и собирание коэффициентов при $\coth[\gamma(x-x_k)]$ и $\coth[\gamma(x-x_k+\eta\hbar)]$ дают систему уравнений (3.35) и (3.36).

Обратимся к условию совместности (3.40). Посмотрим, что из себя представляет выражение $\dot{L} - [M, L]$. Для вычисления коммутатора воспользуемся стандартным подходом. Введём матрицы A, B, C:

$$A_{ki} = \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i - \eta\hbar)];$$

$$B_{ki} = \delta_{ki} \sum_{j\neq k} \left(\dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_j)] - \dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_j+\eta\hbar)] \right);$$

$$C_{ki} = (1-\delta_{ki}) \left(\dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i)] - \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)] \right);$$

тогда $[M, L] = \hbar\gamma^2(BA - AB + CA - AC)$. Вычисляя матричные элементы стоящих в скобках произведений, получаем:

$$(BA)_{ki} = \sum_{j\neq k} \dot{x}_k\dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)] \left(\coth[\gamma(x_k-x_j)] - \coth[\gamma(x_k-x_j+\eta\hbar)] \right);$$

$$(CA)_{ki} = \sum_{j\neq k} \dot{x}_k\dot{x}_j \coth[\gamma(x_j-x_i-\eta\hbar)](\coth[\gamma(x_k-x_j)] - \coth[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)]);$$

$$(AB)_{ki} = \sum_{j\neq i} \dot{x}_k\dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)](\coth[\gamma(x_i-x_j)] - \coth[\gamma(x_i-x_j+\eta\hbar)]);$$

$$(AC)_{ki} = \sum_{j\neq i} \dot{x}_k\dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)] \left(\coth[\gamma(x_j-x_i)] - \coth[\gamma(x_j-x_i-\eta\hbar)] \right).$$

Преобразуем выражения:

$$(AB+AC)_{ki} = \sum_{j\neq k} \frac{\dot{x}_k\dot{x}_j \sinh[\gamma\eta\hbar]}{\sinh[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)] \sinh[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)] \sinh[\gamma(x_i-x_j+\eta\hbar)]} +$$

$$+ \frac{\dot{x}_k(\dot{x}_k - \dot{x}_i)}{\sinh^2[\gamma[x_k-x_i-\eta\hbar]]}.$$

Это позволяет понять, что

$$(\dot{L} - [M, L])_{ki} = \hbar\gamma\ddot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)] +$$

$$+ 2\hbar\gamma^2 \sum_{j\neq k} \frac{\dot{x}_k\dot{x}_j \sinh^2[\gamma\eta\hbar] \coth[\gamma(x_k-x_j)] \coth[\gamma(x_k-x_i-\eta\hbar)]}{\sinh[\gamma(x_k-x_j+\eta\hbar)] \sinh[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)]}.$$

Вычислим следующее:

$$(M\dot{X}\mathbf{1})_k = \gamma \sum_{j\neq k} \frac{-2\dot{x}_k\dot{x}_j \sinh^2[\gamma\eta\hbar]\cosh[\gamma(x_k-x_j)]}{\sinh[\gamma(x_k-x_j)]\sinh[\gamma(x_k-x_j+\eta\hbar)]\sinh[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)]}.$$

Отсюда совершенно ясно, что если выполнено равенство $\dot{L} = [M, L]$, то тогда и $(M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1} = 0$. Таким образом, получены уравнения движения (3.41).

Приведём далее все те же выкладки для случая другого представления матрицы Лакса:

$$\dot{\psi} = \frac{z}{\hbar}\psi + z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_k \left(\dot{c_k}\Phi(x-x_k) + \frac{\gamma c_k \dot{x_k}}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} \right);$$

$$\psi(x+\eta\hbar) = z^{\frac{x}{\eta\hbar}+1} e^{\frac{tz}{\hbar}} \sum_k c_k \Phi(x+\eta\hbar - x_k);$$

$$u\psi = \hbar\gamma z^{\frac{x}{\eta\hbar}} e^{\frac{tz}{\hbar}} \left(c_0 \sum_{k,i} c_i \dot{x_k} \left(\Phi(x-x_k) - \Phi(x+\eta\hbar-x_k)\right) + \sum_k \frac{c_k \dot{x_k}}{\sinh^2[\gamma(x-x_k)]} - \right.$$

$$- \coth[\gamma\eta\hbar] \sum_k c_k \dot{x_k} (\Phi(x-x_k) - \Phi(x+\eta\hbar-x_k)) +$$

$$+ \sum_{k,i} (1-\delta_{ki}) c_i \dot{x_k} \coth[\gamma(x_i - x_k + \eta\hbar)] \coth[\gamma(x-x_k+\eta\hbar)] +$$

$$+ \sum_{k,i} (1-\delta_{ki}) c_k \dot{x_i} (\Phi(x_k - x_i) - \Phi(x_k + \eta\hbar - x_i)) \coth[\gamma(x-x_k)] +$$

$$\left. + \sum_{k,i} (1-\delta_{ki}) c_i \dot{x_k} \coth[\gamma(x_k - x_i)] \coth[\gamma(x-x_k)] \right).$$

Эти выражения выписаны в более удобной для подстановки в (3.21) форме.

Наконец, приведём результат вычисления коммутатора в уравнении Лакса (2.32) для данного случая матрицы L и M (выражения (3.46) и (3.47)). Записав оператор Лакса в виде $L = L_0 + L_1$, где $(L_0)_{ki} = \hbar\gamma\dot{x_k}\coth(\gamma(x_k - x_i - \eta\hbar))$ – совпадает с матрицей Лакса для первоначального представления, $(L_1)_{ki} = \hbar\gamma c_0 \dot{x_k}$, можно убедиться, что:

$$L_1 M = 0,$$

$$(ML_1)_{ki} = \hbar\gamma^2 c_0 \sum_{j\neq k} \frac{-2\dot{x_k}\dot{x_j}\sinh^2[\gamma\eta\hbar]\coth[\gamma(x_k-x_j)]}{\sinh[\gamma(x_k-x_j+\eta\hbar)]\sinh[\gamma(x_k-x_j-\eta\hbar)]}.$$

Для первоначального представления Лакса ранее было вычислено, что $\dot{L_0} = [M, L_0]$ эквивалентно системе уравнений движения (3.41). Теперь видно, что если данная система уравнений справедлива, то заведомо выполнено матричное уравнение Лакса.

Список литературы

[1] H. Airault, H. P. McKean, and J. K. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem*, Communications in Pure and Applied Mathematics, **30**, 1977, 95–148

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connnected with isospectral deformations*, Adv.Math. 16 (1975), 197-220

[3] И. М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева-Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функц. анализ и его прил., 1978, том 12, выпуск 1, 76–78

[4] И. М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функц. анализ и его прил., 1980, том 14, выпуск 4, 45–54

[5] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Annals of Physics 170 (2), 370-405

[6] A. Zabrodin, *The Master T-Operator for Inhomogeneous XXX Spin Chain and mKP Hierarchy*, SIGMA, 10 (2014), 006, 18 pp.

[7] A. Zabrodin, *The master T-operator for vertex models with trigonometric R-matrices as a classical tau-function*, Teoret. Mat. Fiz., 174:1 (2013), 59–76

[8] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН, 50:6(306) (1995), 3–56

[9] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J.Math.Phys., 35 (1994), 5844-5849

[10] A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, *The master T-operator for the Gaudin model and the KP hierarchy*, Nucl. Phys. B 883 (2014) 173-223

[11] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, 2000

[12] K. Takasaki, T. Takebe, *$\hbar$-expansion of KP hierarchy: Recursive construction of solutions*, arXiv:0912.4867

[13] L. Haine, *KP Trigonometric Solitons and an Adelic Flag Manifold*, SIGMA 3 (2007), 015, 15 pages

[14] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Phys. D 229 (2007), no. 2, 184–190

[15] T. Takebe, L. Teo, *Coupled Modified KP Hierarchy and Its Dispersionless Limit*, SIGMA 2 (2006), 072, 30 pages

[16] K. Takasaki, T. Takebe, *An $\hbar$-expansion of the Toda hierarchy: a recursive construction of solutions*, Analysis and Mathematical Physics Volume 2, Number 2 (2012), 171-214

[17] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с.

[18] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics (Book 12), 310 p., World Scientific Pub. Co. Inc., 1991

[19] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, 2001. Buch. XIX, 550 S., Hardcover, Springer

[20] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press