

Федеральное государственное образовательное
учреждение высшего профессионального
образования «Московский физико-технический
институт (государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Корреляционные функции в расширяющемся де
Ситтере: стохастический и келдышевский подходы

Кирилл Евгеньевич Павленко

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Эмиль Тофикович Ахмедов

Москва, 2015

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Стохастический подход	5
3.1	Инфракрасная динамика	5
3.2	Выделение ведущего инфракрасного вклада	6
3.3	Уравнение Ланжевена	7
3.4	В случае произвольного состояния	7
3.5	Решение уравнения Фоккера-Планка в случае $V(\phi) = \lambda\phi^4$	8
4	Келдышевский подход, однопетлевое вычисление	10
4.1	Анзац для вычислений в случае вакуума Банч-Девиса	10
4.2	Однопетлевое вычисление в случае вакуума Банч-Девиса	11
4.3	В случае произвольного состояния	13
4.4	Явное вычисление	14
4.4.1	$n_p^2 K_{++}$	14
4.4.2	$n_k^2 K_{++}$	15
4.4.3	$n_p n_k^2 K_{++}$	15
4.4.4	Оценка результата	16
5	Вместо вывода, набросок двухпетельного вычисления	17

1 Введение

Изучение квантовой теории поля на фоне искривленной метрики является важным предметом изучения на пути к квантовой гравитации. В рамках такого изучения пространство де Ситтера представляет большой интерес, так как обладает богатой группой симметрий.

В данной работе исследуется квантовая структура безмассового скалярного поля в модели инфляции. Работа состоит из двух частей. В первой воспроизводится результат, впервые полученный Старобинским и Якоямой [3], так называемый стохастический подход, который сводит задачу о нахождении корреляционных функций к решению классического уравнения — уравнения Ланжевена. Возможно, этот результат воспроизводит ответ во всех порядках по теории возмущений. Во второй части работы была сделана однопетлевая проверка «стохастического» результата для теории $\lambda\phi^4$ с помощью квантового метода — диаграммной техники Швингера-Келдыша. Также мы проверили на однопетлевом уровне, что результат не зависит от выбора начального состояния.

В заключении представлена часть двухпетельного вычисления, которое еще не завершено.

2 Постановка задачи

В работе изучается безмассовое скалярное поле в $D = 3 + 1$ с самодействием на фоне внешней фиксированной метрики расширяющегося де Ситтера:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \sqrt{-g}V(\phi). \quad (2.1)$$

Метрика дается выражением:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (2.2)$$

где

$$a(t) = e^{Ht}. \quad (2.3)$$

Здесь H — постоянная Хаббла. В дальнейшем, изучая стохастический подход, мы будем работать в координатах (\vec{x}, t) . Однако, при работе с диаграммной техникой Келдыша, более удобно станет использовать другие координаты, выраженные в терминах конформного времени η . В координатах (\vec{x}, η) метрика имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}), \quad d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.4)$$

Нас будет интересовать динамика корреляционных функций в совпадающих «точках» в зависимости от времени $\langle\Omega|\phi^2(\vec{x}, t)|\Omega\rangle$. В качестве состояния $|\Omega\rangle$ взят т. н. вакуум Банчи-Дэвиса, однако в дальнейшем мы обсудим и усреднение в случае произвольного состояния.

Стохастический подход замечателен тем, что в некотором смысле он не требует спецификации вида потенциала $V(\phi)$. Поэтому сначала, развивая стохастический подход, мы тоже не станем конкретизировать $V(\phi)$, но затем, получив уравнение Ланжевена, мы будем решать его при $V(\phi) = \lambda\phi^4$ и сконцентрируем наши дальнейшие усилия только на этом случае.

3 Стохастический подход

3.1 Инфракрасная динамика

Для начала следует задаться вопросом, как ведет себя свободный коррелятор $\langle \Omega | \phi^2(\vec{x}, t) | \Omega \rangle$ при $V(\phi) = 0$. Для этого мы будем использовать каноническое квантование.

Несложно получить уравнение движения для ϕ .

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0. \quad (3.1)$$

Также нетрудно проверить, что следующие гармоники

$$u(t, k) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(1 - \frac{ik}{Ha} \right) e^{\frac{ik}{Ha}} \quad (3.2)$$

решают свободное уравнение движения

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + \frac{k^2}{a^2}\phi_0 = 0. \quad (3.3)$$

Свободное поле $\phi_0(t, \vec{x})$ может быть канонически проквантована в терминах гармоник $u(t, k)$ (3.3) и операторов рождения и уничтожения:

$$\phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(e^{i\vec{k}\vec{x}} u(t, \vec{x}) \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right), \quad (3.4)$$

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.5)$$

Следуя Тсамису и Вударду [4], мы будем следить только за инфракрасным вкладом в корреляционные функции. Таким образом, мы можем разделить наши моды на два типа

- инфракрасные $\implies H < k < Ha(t)$,
- ультрафиолетовые $\implies k > Ha(t)$.

Ограничивая наши полевые операторы на инфракрасную область, получаем

$$\phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha(t) - k) \theta(k - H) \left(e^{i\vec{k}\vec{x}} u(t, \vec{x}) \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right). \quad (3.6)$$

Теперь можно вычислить вакуумное ожидание ϕ_0^2 :

$$\langle 0 | \phi_0^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(Ha - k') \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger e^{-i(k-k')x} u(t, k) u^*(t, k') | 0 \rangle. \quad (3.7)$$

Используя соотношения нормировки

$$\langle 0 | \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(k - k'),$$

несложно получить

$$\langle 0 | \Phi_0^2 | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H^2}{2k^3} \left(1 + \frac{k^2}{H^2 a^2} \right) = \frac{H^2}{4\pi^2} \int_H^{Ha} \frac{dk}{k} \left(1 + \frac{k^2}{H^2 a^2} \right). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы приходим к ответу

$$\langle 0 | \Phi_0^2 | 0 \rangle = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\ln a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \right). \quad (3.9)$$

То есть, корреляции линейно растут по времени.

3.2 Выделение ведущего инфракрасного вклада

Для начала следует посмотреть на коммутатор ϕ с его производной по времени $\dot{\phi}$.

$$\left[\Phi_0(t, \vec{x}), \dot{\Phi}_0(t, \vec{x}') \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) (u\dot{u}^* - u^*\dot{u}) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}, \quad (3.10)$$

$$u\dot{u}^* - u^*\dot{u} = \frac{i}{a^3(t)}. \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$\left[\Phi_0(t, \vec{x}), \dot{\Phi}_0(t, \vec{x}') \right] = \frac{i}{4\pi^2 a^3} \int_H^{Ha} dk k \frac{\sin(k(x-x'))}{x-x'} \neq 0. \quad (3.12)$$

Как и ожидалось, коммутатор не равен нулю, что является следствием квантовой природы ϕ .

Внимательно глядя на формулы (3.8) и (3.9) можно заметить, что лидирующий логарифм возникает исключительно из первого константного члена наших гармоник

$$u_{IR} \sim \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (3.13)$$

Оставив только константный вклад в гармоники

$$\phi_{IR}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(e^{i\vec{k}\vec{x}} \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right), \quad (3.14)$$

можно вычислить коммутатор в таких гармониках

$$\left[\phi_{IR}(t, \vec{x}), \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}') \right] = 0. \quad (3.15)$$

Обнуление коммутатора означает, что поле ϕ_{IR} можно считать классическим. Тогда операторы рождения-уничтожения α и α^\dagger можно интерпретировать как случайные стохастические переменные.

3.3 Уравнение Ланжевена

Раз поле ϕ можно интерпретировать как классическое, то появляется надежда, что на него можно получить классическое уравнение в случае $V(\phi) \neq 0$.

Функция Грина записывается стандартным образом:

$$G_{ret}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = i\theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (u(t, k)u^*(t', k) - u^*(t, k)u(t', k)) e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}. \quad (3.16)$$

Можно проверить, что

$$(u(t, k)u^*(t', k) - u^*(t, k)u(t', k)) = \frac{i}{3H} \left(\frac{1}{a^3(t')} - \frac{1}{a^3(t)} \right) + O(k^2). \quad (3.17)$$

Следя лишь за временами $t > t'$, получаем

$$a'^3 G_{ret}^{IR}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') \sim \frac{1}{3H} \theta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.18)$$

Подставляя полученную форму функции Грина, получаем

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_{IR}(t, \vec{x}) - \frac{1}{3H} \int_0^t dt' V'(\phi(t', \vec{x})). \quad (3.19)$$

Осталось только продифференцировать последнее уравнение по времени t :

$$\dot{\phi}(t, \vec{x}) = \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) - \frac{1}{3H} V'(\phi(t, \vec{x})). \quad (3.20)$$

Полученное уравнение — это уравнение Ланжевена на классическую величину $\phi(t, \vec{x})$. Проинтерпретируем $\dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x})$ как стохастический источник и проверим, что он является белым гауссовым шумом.

Во-первых,

$$\dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H^3 a}{\sqrt{k^3}} (e^{ikx} \alpha_k + h.c.). \quad (3.21)$$

Тогда коррелятор равен

$$\langle 0 | \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) \dot{\phi}_{IR}(t', \vec{x}') | 0 \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\delta(Ha(t) - k)}{\sqrt{2k^3}} \frac{\delta(Ha(t') - k')}{\sqrt{2k'^3}} \quad (3.22)$$

$$H^6 a(t) a(t') e^{i(k-k')x} \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger | 0 \rangle = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta(t - t'). \quad (3.23)$$

3.4 В случае произвольного состояния

Покажем, что вывод уравнения Ланжевена не зависит от начального состояния. Итак, в случае произвольного состояния

$$\langle \Omega | \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} | \Omega \rangle = (2\pi)^3 \delta(k - k') n_k. \quad (3.24)$$

Следует следить за тремя вещами.

1. Запаздывающая функция Грина останется в точности такой же, так как коммутатор $[\phi(x), \phi(x')]$ является просто c -числом. Поэтому усреднение не зависит от выбора состояния.
2. Среднее значение дается выражением

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi_0^2(x) | \Omega \rangle &= \langle 0 | \phi_0^2(x) | 0 \rangle + 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi_k|^2 n_k \rightarrow \\ &\rightarrow \langle 0 | \phi_0^2(x) | 0 \rangle + \frac{H^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^3} n_k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь был взят предел $t \rightarrow +\infty$. Линейный рост по времени сохраняется независимо от n_k .

3. Осталось только проверить, что шум, фигурирующий в уравнении Ланжевена, по-прежнему остается гауссовым белым шумом.

$$\langle \Omega | \dot{\phi}_0(t, \vec{x}) \dot{\phi}_0(t', \vec{x}) | \Omega \rangle = \frac{H^4}{4\pi^2} \delta(t - t') (1 + 2n_{Ha(t)}). \quad (3.26)$$

Шум зависит от времени, но все еще является белым.

Таким образом, вывод уравнения Ланжевена справедлив в случае произвольного состояния в том же смысле, в каком он справедлив для вакуума Банча-Девиса.

3.5 Решение уравнения Фоккера-Планка в случае $V(\phi) = \lambda\phi^4$

Полученное ранее уравнение Ланжевена эквивалентно уравнению Фоккера-Планка. Для потенциала $V(\phi) = \lambda\phi^4$ получаем

$$\partial_t \rho(t, \phi) = \frac{\lambda}{18H} \partial_\phi (\phi^3 \rho(t, \phi)) + \frac{H^3}{8\pi^2} \partial_\phi^2 (\rho(t, \phi)). \quad (3.27)$$

Для того, чтобы получить решение при этом уравнении $t \rightarrow +\infty$ введем анзац

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, \phi) = \rho_\infty(\phi). \quad (3.28)$$

Анзац приводит к уравнению первого порядка

$$\frac{d\rho_\infty(\phi)}{\rho_\infty(\phi)} = -\frac{4\pi^2\lambda}{9H^4} \phi^3 d\phi, \quad (3.29)$$

решение которого вполне просто

$$\rho_\infty(\phi) = \frac{2}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{\pi^2\lambda}{9H^4} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\pi^2}{9} \lambda \left(\frac{\phi}{H} \right)^4 \right). \quad (3.30)$$

С одной стороны

$$\partial_t \langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \dot{\rho}(t, \omega) \omega^{2n}. \quad (3.31)$$

С другой

$$\partial_t \langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \frac{n(2n-1)H^3}{4\pi^2} \langle 0 | \phi^{2n-2}(t, \vec{x}) | 0 \rangle - \frac{n\lambda}{9H} \langle 0 | \phi^{2n+2}(t, \vec{x}) | 0 \rangle \quad (3.32)$$

Это уравнение можно решить итеративно. Ответ для $\phi^2(t, \vec{x})$ следующий:

$$\langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} \ln a \left(1 - \frac{\lambda}{36\pi^2} \ln^2 a + \frac{63}{35} \left(\frac{\lambda}{36\pi^2} \ln^2 a \right)^2 + \dots \right) \quad (3.33)$$

Таким образом, корреляции растут полиномиально по времени. Степень полинома увеличивается на два с каждым новым порядком по константе связи.

4 Келдышевский подход, однопетлевое вычисление

Целью этой главы является проверка результата, полученного с помощью стохастического подхода, методами квантовой теории поля в одной петле. Для вычисления будет использована диаграммная техника Келдыша-Швингера.

4.1 Анзац для вычислений в случае вакуума Банч-Девиса

Для удобства мы будем работать в терминах конформного времени η :

$$\eta = \frac{1}{Ha(t)} = \frac{1}{H} e^{-Ht}. \quad (4.1)$$

Тогда гармоники, переписанные в конформном времени:

$$u(\eta, k) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (1 - ik\eta) e^{ik\eta}. \quad (4.2)$$

И однопетлевая поправка к корреляционной функции в совпадающих точках равна

$$\mathcal{K} = - \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++}. \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{++} = & G_{++}(\eta, \eta, k) G_{++}(\eta, \eta, p) G_{++}(\eta, \eta, k) \\ & - G_{+-}(\eta, \eta, k) G_{--}(\eta, \eta, p) G_{-+}(\eta, \eta, k), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$G(\eta_1, \eta_2, k) = u(\eta_1, k) u^*(\eta_2, k). \quad (4.5)$$

$$G_{++}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k) \theta(\eta_2 - \eta_1) + G(\eta_1, \eta_2, k) \theta(\eta_1 - \eta_2). \quad (4.6)$$

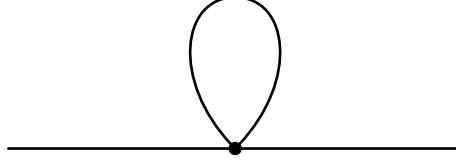
$$G_{--}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k) \theta(\eta_1 - \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2, k) \theta(\eta_2 - \eta_1). \quad (4.7)$$

$$G_{+-}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_1, \eta_2, k). \quad (4.8)$$

$$G_{-+}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k). \quad (4.9)$$

η и p — время и импульс внутри петли, а η и k — время и импульс, соответствующие внешним «ногам».

4.2 Однопетлевое вычисление в случае вакуума Банч-Девиса



Как было показано в прошлом параграфе, выражение для корреляционной функции в совпадающих точках записывается как

$$\mathcal{K} = - \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++}. \quad (4.10)$$

Проинтегрировав его по k , игнорируя численные префакторы, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24p^3(\tau - \eta)} H^3 (p^2 \tau^2 + 1) (H (8\eta\tau + \eta^2 (3H^2 \tau^2 - 4) - 4\tau^2) \cos(2H(\eta - \tau)) + \\ & + \eta^2 H^3 (4\eta^2 - 8\eta\tau + \tau^2) \cos\left(2 - \frac{2\tau}{\eta}\right) + 2(\eta - \tau) ((H^2 (\eta^2 + 4\eta\tau + \tau^2) + 1) \sin(2H(\eta - \tau)) + \\ & + H^3 \left(-(\eta^3 - \tau^3) - \text{Ei}\left(-2i + \frac{2i\tau}{\eta}\right) - \text{Ei}\left(\frac{2i(\eta - \tau)}{\eta}\right) + \text{Ei}(-2iH(\eta - \tau)) + \text{Ei}(2iH(\eta - \tau)) - \right. \\ & \left. - \eta (2\eta^2 + 4\eta\tau + \tau^2) \sin\left(2 - \frac{2\tau}{\eta}\right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Это выражение имеет предел при $\eta \rightarrow +\infty$. Взяв его, получаем:

$$\begin{aligned} \int_H^{+\infty} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} K_{++} &= -\frac{1}{12p^3} iH^3 (p^2 \tau^2 + 1) (2H\tau \cos(2H\tau) + \\ & + H^3 \tau^3 (\text{Ei}(-2iH\tau) + \text{Ei}(2iH\tau)) - (H^2 \tau^2 + 1) \sin(2H\tau)) + O(\eta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Теперь можно взять интеграл по внутреннему импульсу p . После некоторых упрощений, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{iH^3}{12} \left(-\frac{1}{2} H^2 \tau^2 - \log(H\tau) + \frac{1}{2} \right) \\ & (2H\tau \cos(2H\tau) - (H^2 \tau^2 + 1) \sin(2H\tau) + 2H^3 \tau^3 \text{Ci}(2H\tau)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь $\text{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.

Таким образом, коррелятор равен:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_\eta^{1/H} d\tau \left(\frac{1}{2\tau^4} - \frac{H^2}{2\tau^2} - \frac{\ln H\tau}{\tau^4} \right) \\ & (2H\tau \cos(2H\tau) - (H^2 \tau^2 + 1) \sin(2H\tau) + 2H^3 \tau^3 \text{Ci}(2H\tau)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Нетрудно показать, что интегральный косинус $\text{Ci}(x)$ можно представить в виде

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k)!}, \quad (4.15)$$

где γ — постоянная Эйлера-Маскерони.

Подставив выражение (4.15) для интегрального косинуса в (4.14), можно убедиться, что в пределе $\eta \rightarrow 0$ вклад суммы $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k)!}$ подавлен по сравнению с другими членами.

С учетом всего вышесказанного, итоговый интеграл выглядит следующим образом:

$$\mathcal{K} = \int_{\eta}^{1/H} d\tau \left(\frac{1}{2\tau^4} - \frac{H^2}{2\tau^2} - \frac{\ln H\tau}{\tau^4} \right) (2H\tau \cos(2H\tau) - (H^2\tau^2 + 1) \sin(2H\tau) + 2H^3\tau^3(\gamma + \ln 2H\tau)). \quad (4.16)$$

Это выражение может быть разбито на 15 интегралов, каждый из которых может быть взят в терминах некоторых спецфункций.

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H \cos(2H\tau)}{\tau^3} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} H(2H^2 \ln(2H\eta) + \frac{1}{2\eta^2}) \quad (4.17)$$

$$- \int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{\sin(2H\tau)}{2\tau^4} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} - \left(\frac{H}{2\eta^2} + \frac{2H^3}{3} \ln 2H\eta \right) \quad (4.18)$$

$$- \int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H^2 \sin(2H\tau)}{2\tau^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} H^3 \ln 2H\eta \quad (4.19)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{\gamma H^3}{\tau} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} -H^3 \gamma \ln H\eta \quad (4.20)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H^3 \log(2H\tau)}{\tau} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} -\frac{1}{2} H^3 (\ln H\eta)^2 \quad (4.21)$$

$$- \int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H^3 \cos(2H\tau)}{\tau} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} H^3 \ln 2H\eta \quad (4.22)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H^2 \sin(2H\tau)}{2\tau^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} -H^3 \ln 2H\eta \quad (4.23)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{1}{2} H^4 \sin(2H\tau) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} const \quad \int_{\eta}^{1/H} d\tau H^5 \tau \log(2H\tau) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} const \quad (4.24)$$

$$- \int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{2H \log(H\tau) \cos(2H\tau)}{\tau^3} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} - \frac{H/2 + H \ln H + H \ln \eta}{\eta^2} - H^3 \ln 16 \ln \eta - 2H^3 \ln H \ln \eta \quad (4.25)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{\log(H\tau) \sin(2H\tau)}{\tau^4} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{H/2 + H \ln H + H \ln \eta}{\eta^2} - \frac{1}{3} (-4H^3 \ln H \eta - 2H^3 (\ln \eta)^2) \quad (4.26)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{H^2 \log(H\tau) \sin(2H\tau)}{\tau^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} H^3 ((\ln \eta)^2 + \ln H \ln \eta) \quad (4.27)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{2\gamma H^3 \log(H\tau)}{\tau} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} H^3 \gamma (\ln H \eta)^2 \quad (4.28)$$

$$\int_{\eta}^{1/H} d\tau \frac{2H^3 \log(H\tau) \log(2H\tau)}{\tau} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{3} H^3 (\log^2(\eta)(\log(\eta) - 3 \log(2\eta H)) - 3 \log(H) \log(\eta H) \log(4\eta H)) \quad (4.29)$$

Собирая результат вместе, мы видим, что экспоненциальные вклады сокращают друг друга и остается только вклад пропорциональный t^3 , что находится в соответствии со стохастическим подходом.

4.3 В случае произвольного состояния

В этом разделе мы разовьем модификацию анзаца для вычисления коррелятора в случае произвольного состояния $\langle \Omega |$ вместо вакуума Банча-Дэвиса $\langle 0 |$.

Итак, в случае произвольного состояния

$$\langle \Omega | \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} | \Omega \rangle = 2\pi \delta(k' - k) \frac{n_k + n_{k'}}{2}. \quad (4.30)$$

Тогда G-функция преобразуется к виду

$$G(\eta_1, \eta_2, k) = u(\eta_1, k) u^*(\eta_2, k) + u^*(\eta_1, k) u(\eta_2, k) n_k. \quad (4.31)$$

Тогда K_{++} при подстановке гармоник приобретает вид

$$K_{++} = 0, \quad \eta > \eta_l \quad (4.32)$$

$$K'_{++} = ((u(\eta_l, k) u^*(\eta, k) + u(\eta, k) u^*(\eta_l, k) n_k)^2 - (u(\eta, k) u^*(\eta_l, k) + u(\eta_l, k) u^*(\eta, k) n_k)^2) u(\eta_l, p) u^*(\eta_l, p) (1 + n_p), \quad \eta < \eta_l \quad (4.33)$$

В действительности можно заметить, что новая функция K_{++} простым образом выражается через соответствующую вакуумную величину.

$$K'_{++} \equiv K_{++}(n_p, n_k) = -K_{++}(n_p = 0, n_k = 0)(-1 + n_k^2)(1 + n_p). \quad (4.34)$$

Перепишем это в чуть более удобной для вычислений форме:

$$K'_{++} = K_{++} + n_p K_{++} - n_k^2 K_{++} - n_p n_k^2 K_{++}. \quad (4.35)$$

Чтобы продвинуться дальше нужно конкретизировать вид n_k . В принципе, n_k может быть любой функцией импульса, единственное ограничение, накладываемое на нее — достаточно быстрое убывание на бесконечности. В следующем разделе мы увидим, что поведение на бесконечности определяет динамику слагаемых, содержащих вклад начального состояния, в формуле (4.35).

4.4 Явное вычисление

Результат для K_{++} был получен выше. Выберем в качестве n_k простое выражение:

$$n_k = \theta(x - k), \quad H < x < \frac{1}{\eta}. \quad (4.36)$$

4.4.1 $n_p^2 K_{++}$

Для начала посмотрим на второе слагаемое в (4.35) $n_p K_{++}$. В этом случае пригодна та же схема вычислений, что и в пункте 4.2.

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} n_p K_{++} = \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_H^x \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++} = \\ &= -\frac{iH^3}{24} \left(\tau^2(H^2 - x^2) - 2 \log\left(\frac{x}{H}\right) \right) (2H^3 \tau^3 \text{Ci}(2H\tau) - (H^2 \tau^2 + 1) \sin(2H\tau) + 2H\tau \cos(2H\tau)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Таким образом,

$$\mathcal{K} = \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} \frac{iH^3}{24} \left(\tau^2(H^2 - x^2) - 2 \log\left(\frac{x}{H}\right) \right) \quad (4.39)$$

$$(2H^3 \tau^3 \text{Ci}(2H\tau) - (H^2 \tau^2 + 1) \sin(2H\tau) + 2H\tau \cos(2H\tau)) \quad (4.40)$$

И

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k)!}. \quad (4.41)$$

По тем же причинам, что и в разделе 4.2 можно выбросить все члены суммы из (4.41).

Нетрудно заметить, что результат этого вычисления будет несколько отличаться от аналогичного вычисления в разделе 4.2. Интегралы (4.17) - (4.24) совпадают с точностью до префакторов, однако остальные вклады просто не появляются.

В конечном счете, вклад этого слагаемого в коррелятор:

$$\mathcal{K} \propto (\ln \eta)^2 = t^2. \quad (4.42)$$

4.4.2 $n_k^2 K_{++}$

Для этого слагаемого находим следующее выражение

$$\mathcal{K} = \int_H^x \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++}. \quad (4.43)$$

Здесь следует поступить несколько иным образом, нежели ранее. Сначала интегрируем по p .

$$\begin{aligned} & \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++} = \\ = & \frac{H^6 \left(-\frac{1}{2} H^2 \tau^2 - \log(H\tau) + \frac{1}{2} \right) \left((\eta k - i)^2 (k\tau + i)^2 e^{2ik(\tau-\eta)} - (\eta k + i)^2 (k\tau - i)^2 e^{2ik(\eta-\tau)} \right)}{8k^6}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Теперь нужно проинтегрировать по τ и взять предел $\eta \rightarrow 0$. После некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} (12.7) = & 24ik^3 \log^2(\eta) + 48ik^3 \log(\eta) \log(H) - 8ik^3 \log(\eta) + \\ & + const + O(\eta). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Как видно, интегрирование по k просто изменит константы, но на зависимости по времени η это не скажется.

В итоге, вклад этого слагаемого:

$$\mathcal{K} \propto (\ln \eta)^2 = t^2. \quad (4.46)$$

4.4.3 $n_p n_k^2 K_{++}$

Для последнего слагаемого имеем следующее выражение

$$\mathcal{K} = \int_H^x \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} \int_H^x \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++}. \quad (4.47)$$

Интегрируя по импульсу p находим:

$$\begin{aligned} & \int_H^x \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++} = \\ = & \frac{H^6 e^{-2ik(\eta-\tau)} \left((\eta k + i)^2 (k\tau - i)^2 e^{4ik(\eta-\tau)} - (\eta k - i)^2 (k\tau + i)^2 \right) \left(\tau^2 (H^2 - x^2) + 2 \log(H/x) \right)}{16k^6}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Теперь проинтегрируем по τ и возьмем предел $\eta \rightarrow 0$. После некоторых вычислений получаем

$$\int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \tau^4} (12.23) = +16ik^3 \log(\eta) e^{\frac{2ik}{H}} \log(H/x) + const + O(\eta). \quad (4.49)$$

То есть,

$$\mathcal{K} \propto (\ln \eta) = t. \quad (4.50)$$

4.4.4 Оценка результата

Собирая вместе все слагаемые, мы видим, что вклад от невакуумного начального состояния подавлен по сравнению с вакуумным. На самом деле, нетрудно заметить, что этот результат имеет место для любого вида n_k , так как основной вклад набирается на больших импульсах, где n_k стремится к нулю. То есть, результат первой петли не зависит от начального состояния.

5 Вместо вывода, набросок двухпетельного вычисления

В этом разделе мы покажем, что во втором порядке по теории возмущений появляются вклады, которые не согласуются со стохастическим вычислением. Еще раз взглянем на келдышевский пропагатор

$$G^k(\eta_1, \eta_2, x_1, x_2) = G^{+-} + G^{-+} = G^{++} + G^{--} = \langle \Omega | \{ \phi(x), \phi(y) \} | \Omega \rangle. \quad (5.1)$$

При фурье-преобразовании:

$$D^k(\eta, p) = \int d^3 x e^{ip\Delta x} G^k(\eta, \Delta x) = u(p\eta)u^*(p\eta)(1/2 + n_p) + h.c. \quad (5.2)$$

Если собрать все слагаемые при $u(p\eta)u^*(p\eta)$, возникающие в «sunset»-диаграмме, то получится следующее выражение

$$n_p \sim \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3^4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4^4} \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \quad (5.3)$$

$$u(p\eta_3)u(q_1\eta_3)u(q_2\eta_3)u(q_3\eta_3)u^*(p\eta_4)u^*(q_1\eta_4)u^*(q_2\eta_4)u^*(q_3\eta_4).$$

Явная подстановка гармоник дает следующее выражение:

$$n_p \sim \int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3^4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4^4} \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) e^{i(p+q_1+q_2+q_3)(\eta_3-\eta_4)} \quad (5.4)$$

$$\frac{(1 - ip\eta_3)(1 - iq_1\eta_3)(1 - iq_2\eta_3)(1 - iq_3\eta_3)(1 + ip\eta_4)(1 + iq_1\eta_4)(1 + iq_2\eta_4)(1 + iq_3\eta_4)}{(pq_1q_2q_3)^3}$$

Рассмотрим лишь один вклад из этого интеграла

$$\int d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3^4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4^4} \delta(\vec{p} + \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) e^{i(p+q_1+q_2+q_3)(\eta_3-\eta_4)} \frac{(1 - ip\eta_3)(1 + ip\eta_4)}{(pq_1q_2q_3)^3} \quad (5.5)$$

Теперь можно проинтегрировать по q_3 . В пределе малых p получаем

$$n_p \sim \int dq_1 dq_2 q_1^2 q_2^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3^4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4^4} e^{i(q_1+q_2+\sqrt{q_1^2+q_2^2+2q_1q_2\cos\theta})(\eta_3-\eta_4)} \quad (5.6)$$

$$\frac{(1 - ip\eta_3)(1 + ip\eta_4)}{(pq_1q_2\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2\cos\theta})^3}$$

Это выражение можно точно проинтегрировать по η_3 и η_4 . Результат довольно громоздкий, однако в пределе $\eta \rightarrow +\infty$ результат выглядит довольно просто

$$n_p \sim \int dq_1 dq_2 q_1^2 q_2^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{9\eta^6 p^3 q_1 q_2 (q_1^2 + 2q_1q_2\cos\theta + q_2^2)^{3/2}}. \quad (5.7)$$

Интеграл по импульсам дает q_1 и q_2 :

$$n_p \sim \frac{1}{\eta^6 p^6}. \quad (5.8)$$

Таким образом, мы видим, что имеется вклад от n_p в корреляционную функцию пропорциональный e^{6Ht} . Оценка и интерпретация данного результата требует дальнейших вычислений.

Список литературы

- [1] E. T. Akhmedov, Int. J. Mod. Phys. D **23**, no. 1, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [3] A. A. Starobinski and J. Yokoyama, Phys. Rev. **D50** (1994) 6357, arXiv:astro-ph/9407016.
- [4] N. Tsamis and R. Woodard, Nucl.Phys. **B724**, 295 (2005), arXiv:gr-qc/0505115 [gr-qc]
- [5] C. Schubert, AIP Conf. Proc. **917**, 178 (2007) [hep-th/0703186].
- [6] A. M. Polyakov, “Infrared instability of the de Sitter space,” arXiv:1209.4135 [hep-th].
- [7] E. T. Akhmedov, F. K. Popov and V. M. Slepukhin, Phys. Rev. D 88, 024021 (2013) [arXiv:1303.1068 [hep-th]].