Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики

Специализация "Квантовая Гравитация и Калибровочные Поля"

Выпускная квалификационная работа

Спектральная дуальность в интегрируемых системах и их неавтономных обобщениях

Выполнил студент 6 курса Рунов Б.А.
Научный руководитель: д.ф.-м.н., Зотов А.В.

Москва, 2015

Оглавление

Глава 1

Введение

Данная работа посвящена проблеме обобщения понятия спектральной дуальности на неавтономные аналоги соответствующих интегрируемых систем. Понятие спектральной дуальности впервые появилось в работах Харнада [8]. Позднее спектральная дуальность привлекла интерес в контексте проверки гипотезы АГТ. В работе [1] мы доказали, что спектрально дуальными являются редуцированная рациональная модель Годена и спиновая цепочка Гейзенберга. В рабоах [3],[2] этот результат обобщен на тригонометрический случай дуальности XXZ моделей. Данная работа рассматривает обобщение спектральной дуальности на случай неавтономных аналогов соответствующих интегрируемых систем. Это представляет определенный интерес для изучения дуальностей в теории поля [6] Простейшим случаем, подробному анализу которого посвящена большая часть данной работы, является случай $\mathfrak{gl}(2)$ модели Годена с тремя полюсами. Ранее этот вопрос изучался в работах [7],[4]. В этой работе подробно рассматривается неавтономное обобщение редуцированной модели Годена, его спектральная дуальность и вывод уравнения Пенлеве VI как гамильтонова редукция. Наиболее известным неавтономным обобщением модели Годена является система Шлезингера. В рассматриваемом простейшем случае она сводится к уравнению Пенлеве VI. В разделе 2 даются определение рассматриваемых автономных моделей и приводятся основные результаты по спектральной дуальности между ними. Также приводится описание обоих моделей в терминах разделенных переменных. Описано единое фазовое пространство системы "модель Годена - спиновая цепочка уточняющая утвержение об эквивалентности работы [1]. Раздел 3 определяет "неавтономное обобщение"интегрируемых систем, имеющих представление оператором Лакса со спектральным параметром. Такое обобщение задается уравнением нулевой кривизны и сохраняет группу монодромии фундаментального решения некоторой системы дифференциальных уравнений первого порядка. Раздел 4 посвящен выводу уравнения Пенлеве VI из редуцированной модели Годена. В разделе 5 рассматриваются примеры спектральной дуальности неавтономных обобщений спектрально дуальных интегрируемых систем. Раздел 6 описывает сложности, возникающие при попытке распространить подход раздела 5 на уравнение Пенлеве. В разделе 7 приводятся возможные способы обойти эти сложности, и предлагается несколько направлений обобщения результатов данной работы. Основная задача - построение дуального аналога уравнения Пенлеве VI - в этой работе не решена. В то же время, построены интересные новые уравнения, основанные на той же самой системе Годена либо спиновой цепочке, являющиеся уравнениями изомонодромных деформаций некоторых систем дифференциальных уравнений. Некоторые из них обладают спектральной дуальностью. Дается геометрическая интерпретация спектральной дуальности в этом случае.

Глава 2

Спектральная дуальность в автономных моделях

2.1 Понятие спектральной дуальности

Представлением Лакса для некоторой динамической системы называется пара операторов L,M,таких что уравнения движения могут быть записаны в форме уравнений Лакса

$$\partial_t L = [M, L] \tag{2.1}$$

В интересующих нас случаях систем многих частиц операторы M,L - некоторые матрицы, элементы которых зависят от динамических переменных. Если операторы M, L зависят от некоторого параметра z, и уравнения Лакса выполняются при любом значении z, говорят о представлении Лакса со спектральным параметром.

$$\partial_t L(z) = [M(z), L(z)] \tag{2.2}$$

Легко заметить, что уравнение Лакса сохраняет величины $\mathrm{Tr}L^n(z)$. Это эквивалентно тому, что сохраняются коэффициенты характеристического полинома $\Gamma(z,\lambda) = \det(L(z)-\lambda)$. Таким образом, информация об интегралах движения интегрируемой системы может быть закодирована в некоторой римановой поверхности, заданной уравнением

$$\Gamma(z, \lambda) = 0 \tag{2.3}$$

Эта поверхность называется спектральной кривой интегрируемой системы. Модули этой поверхности являются интегралами движения, а род определяет число степеней свободы. На спектральной кривой задан дифференциал, определяющий пуассонову структуру модели. Вся динамика интегрируемой модели может быть описана в терминах объектов на спектральной кривой. Две интегрируемые системы называются спектрально дуальными, если существует такая (сохраняющая пуассонову структуру) замена переменных и параметров, что спектральные кривые совпадают:

$$\Gamma(z,\lambda)=0 \leftrightarrow \tilde{\Gamma}(\tilde{z},\tilde{\lambda})=0 \tag{2.4}$$

2.2 Модель Годена

Рациональная модель Годена - алгебраическая интегрируемая система, оператор Лакса которой задан формулой

$$L(z)=\frac{A^0}{z}+\frac{A^1}{z-1}+\frac{A^q}{z-q} \tag{2.5}$$

Вычеты A^0, A^1, A^q - матрицы размера 2×2. Их элементы являются динамическими переменными модели Годена. На фазовом пространстве заданы скобки Пуассона

$$\{A^a_{ij}, A^b_{kl}\}=\delta_{ab}(\delta_{kj}A^a_{il}-\delta_{il}A^a_{kj}) \tag{2.6}$$

Они могут быть получены из линейной r-матричной структуры

$$\{A^a, A^b\}=[\frac{P_{12}}{x-y}, L_1(x)+L_2(y)] \tag{2.7}$$

Гамильтонианы модели даются выражениями

$$H_c=\sum_{a\neq c}\frac{\mathrm{Tr}(A^aA^c)}{z_a-z_c} \tag{2.8}$$

Им соответствуют M-операторы

$$M_c=-\frac{A^c}{z-z_c} \tag{2.9}$$

приводящие к следующим уравнениям движения на отдельные переменные:

$$\partial_{t_c}A^a=\frac{[A^c, A^a]}{z_c-z_a} \tag{2.10}$$

$$\partial_{t_c}A^c=\sum_{a\neq c}\frac{[A^a, A^c]}{z_c-z_a} \tag{2.11}$$

2.3 Редуцированная модель Годена

2.3.1 Связь с моделью Годена

Редуцированная модель Годена может быть получена из рациональной модели Годена, рассмотренной выше, наложением связей

$$A^0 + A^1 + A^q + A^\infty = 0 \tag{2.12}$$

$$A^\infty = Y \tag{2.13}$$

Скобки Пуассона оставшихся динамических переменных A^1, A^q вычисляются при помощи процедуры редукции Дирака. Удобно исключить множитель $\frac{1}{z}$ из оператора Лакса, переходя от исходного выражения

$$L^{Gaudin}_{\text{on shell}}(z) = \frac{-Y - A^1 - A^q}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^q}{z-q} \tag{2.14}$$

к оператору Лакса редуцированной модели.

$$L^{reduced}(z) = -Y + \frac{A^1}{z-1} + \frac{qA^q}{z-q} \tag{2.15}$$

2.3.2 Обзор редуцированной модели

Оператор Лакса задан выражением

$$L(z) = -Y + \frac{A^1}{z-1} + \frac{qA^q}{z-q} \tag{2.16}$$

где Y постоянная диагональная матрица размерности 2×2 с собственными значениями y_1, y_2. Собственные значения каждого из вычетов оператора Лакса фиксированны. Легко показать, что они являются функциями Казимира модели. Таким образом модель имеет две степени свободы и два независимых гамильтониана. Они могут быть получены как следы квадрата оператора Лакса:

$$H_a = \frac{1}{z_a}\mathrm{Res}_{w=z_a}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(L(z)^2) \tag{2.17}$$

В рассматриваемом случае размерности 2×2 имеем

$$H_1 = -\mathrm{Tr}(YA^1) + \frac{q\mathrm{Tr}(A^1A^q)}{1-q} \tag{2.18}$$

$$H_q = -\mathrm{Tr}(YA^q) + \frac{\mathrm{Tr}(A^1A^q)}{q-1} \tag{2.19}$$

2.4 Пуассонова структура редуцированной модели

2.4.1 Основные результаты

Скобка Пуассона редуцированной модели квадратична по переменным A^1, A^q:

$$\{A^a_{ij}, A^b_{kl}\} = \delta_{ab}(A^a_{il}\delta_{kj} - A^a_{kj}\delta_{il}) - \frac{A^a_{ip}A^b_{pl}\delta_{jk}}{y_k - y_p} - \frac{A^b_{kp}A^a_{pj}\delta_{il}}{y_p - y_i} + \frac{A^a_{il}A^b_{kj}(1-\delta_{jl})}{y_j - y_l} + \frac{A^a_{kj}A^b_{il}(1-\delta_{ik})}{y_k - y_i} \tag{2.20}$$

Она может быть получена из следующей структуры (напоминающей R -матричную):

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), [L_2(w), R]_2]_1 + [\frac{P_{12}}{z-w}, zL_1(z) + wL_2(w)] - [P'_{12}, L_1(z) - L_2(z)] \tag{2.21}$$

где

$$R_{ijkl} = \frac{\delta_{il}\delta_{kj}(1-\delta_{ij})}{y_j - y_i} \tag{2.22}$$

$$P'_{(12)ijkl} = \delta_{il}\delta_{kj}(1-\delta_{ij}) \tag{2.23}$$

2.4.2 Динамика модели

Из уравнения (2.21) мы можем получить выражение для M-оператора, соответствующего квадратичному гамильтониану (2.17):

$$M_a = \frac{1}{z_a}\mathrm{Res}_{w=z_a}(L(w) - \bar{L}(w) - \frac{z}{z-w}L(w)) \tag{2.24}$$

где черта означает диагональную часть соответствующей матрицы. В случае размерности матриц 2×2 получаем следующий ответ:

$$M_1 = -\frac{A^1}{z-1} - \bar{A}^1 \tag{2.25}$$

$$M_q = -\frac{qA^q}{z-q} - \bar{A}^q \tag{2.26}$$

Уравнения Лакса (уравнения движения) могут быть компактно записаны как

$$\partial_{t_a} L(z) = [M_a(z), L(z)] \tag{2.27}$$

Динамика по времени t_1 описывается следующей системой уравнений:

$$\partial_{t_1} A^1 = -[\bar{A}^1, A^1] - [Y, A^1] + \frac{q}{1-q}[A^q, A^1] \tag{2.28}$$

$$\partial_{t_1} A^q = -[\bar{A}^1, A^q] + \frac{1}{1-q}[A^1, A^q] \tag{2.29}$$

Аналогично, для динамики по времени t_q имеем:

$$\partial_{t_q} A^1 = -[\bar{A}^q, A^1] - \frac{q}{1-q}[A^q, A^1] \tag{2.30}$$

$$\partial_{t_q} A^q = -[\bar{A}^q, A^q] - \frac{1}{1-q}[A^1, A^q] - [Y, A^q] \tag{2.31}$$

2.5 Спиновая цепочка Гейзенберга

Другая интересующая нас интегрируемая система это GL(2) XXX-модель с двумя узлами. Она описывается трансфер-матрицей

$$T(x) = V(q)L_1(x)L_2(x) = V(q)(x - x_1 + S^1)(x - x_2 + S^2) \tag{2.32}$$

Удобно переписать это выражение как сумму по полюсам

$$T(x) = (x - x_1)(x - x_2)(V(q) + \frac{VB^1}{x - x_1} + \frac{VB^2}{x - x_2}) \tag{2.33}$$

Скобки Пуассона могут быть получены из R-матричной структуры

$$[r(x - y), T_1(x)T_2(y)] = \{T_1(x), T_2(y)\} \tag{2.34}$$

Для переменных B скобки даются выражением

$$\{B^i_{ab}, B^j_{cd}\} = (1-\delta_{ij})\frac{B^i_{ad}B^j_{cb} - B^i_{cb}B^j_{ad}}{x_j - x_i}) + \delta_{ij}\left(B^i_{ad}\delta_{cb} - B^i_{cb}\delta_{ad} + \sum_{n\neq i}\frac{B^i_{ad}B^n_{cb} - B^i_{cb}B^n_{ad}}{x_i - x_n}\right) \tag{2.35}$$

Следы степеней трансфер-матрицы порождают набор коммутирующих гамильтонианов. Таким образом, можно рассматривать трансфер-матрицу как оператор Лакса спиновой цепочки. Определим

$$L^{XXX}(x) = V(q) + \frac{VB^1}{x - x_1} + \frac{VB^2}{x - x_2} \tag{2.36}$$

Эта система также имеет две степени свободы. Гамильтонианы линейны по переменным B.

$$H^1 = \mathrm{Tr}(VB^1) \tag{2.37}$$

$$H^2 = \mathrm{Tr}(VB^2) \tag{2.38}$$

Гамильтониан H_1 порождает динамику, описываемую уравнениями движения

$$\dot{B}^2 = -\frac{B^2VB^1 - B^1VB^2}{x_1 - x_2} \tag{2.39}$$

$$\dot{B}^1 = [V, B^1] - \frac{B^2VB^1 - B^1VB^2}{x_2 - x_1} \tag{2.40}$$

Эти уравнения движения могут быть записаны в форме уравнений Лакса

$$\partial_{t_1} L^{XXX}(x) = [-\frac{VB^1}{x - x_1}, L^{XXX}(x)] \tag{2.41}$$

$$M_1 = -\frac{VB^1}{x - x_1} \tag{2.42}$$

2.6 Спектральная дуальность в системе Годен–XXX-цепочка

Известно, что редуцированная рациональная модель Годена и XXX-цепочка спектрально дуальны. Соответствующая замена переменных:

$$A^a_{ij} = \xi^a_i \eta^b_j \ \ B^i_{ab} = \xi^a_i \eta^b_i \tag{2.43}$$

Параметры двух моделей связаны следующим образом:

$$x_i = -y_i \ \ V = V(q) \tag{2.44}$$

В контексте дуальности у нас есть способ сопоставлять гамильтонианы и функции Казимира: спектральная кривая. Для модели Годена имеем

$$\Gamma^G(y, z) = \frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)} \det\left(-Y - y + \frac{A^1}{z - 1} + \frac{qA^q}{z - q}\right) = 0 \tag{2.45}$$

Спектральная кривая спиновой цепочки

$$\Gamma^{XXX}(y, z) = \frac{1}{(z - 1)(z - q)} \det\left(V - z + \frac{VB^1}{y + y_1} + \frac{VB^2}{y + y_2}\right) \tag{2.46}$$

Рассматривая полюса $y = 0, z = 1$ и $y = 0, z = q$ получаем

$$-H_1 = -\mathrm{Tr}Y\mathrm{Tr}A^1 + \mathrm{Tr}(YA^1) + \frac{q}{1-q}\left(\mathrm{Tr}A^1\mathrm{Tr}A^q - \mathrm{Tr}(A^1A^q)\right) \tag{2.47}$$

$$-qH_q = -q\mathrm{Tr}Y\mathrm{Tr}A^q + q\mathrm{Tr}(YA^q) - \frac{q}{1-q}\left(\mathrm{Tr}A^1\mathrm{Tr}A^q - \mathrm{Tr}(A^1A^q)\right) \tag{2.48}$$

Заметим, что эти выражения отличаются от (2.18),(2.19) на функцию Казимира модели Годена. В дуальных переменных те же гамильтонианы выражаются как

$$\begin{aligned} H_1 = &\frac{1}{1-q}\big(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}(VB^2) - \mathrm{Tr}(VB^1VB^2) + y_2(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^1)) \\ &+ y_1(\mathrm{Tr}(VB^2)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^2)) - y_2\mathrm{Tr}(VB^1) - y_1\mathrm{Tr}(VB^2)\big) \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} H_q = &-\frac{1}{1-q}\big(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}(VB^2) - \mathrm{Tr}(VB^1VB^2) + y_2(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^1)) \\ &+ y_1(\mathrm{Tr}(VB^2)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^2)) - qy_2\mathrm{Tr}(VB^1) - qy_1\mathrm{Tr}(VB^2)\big) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Коэффициенты при z ($y = y_1$ и $y = y_2$) дают гамильтонианы спиновой цепочки

$$H^1 = \mathrm{Tr}(VB^1) \tag{2.51}$$

$$H^2 = \mathrm{Tr}(VB^2) \tag{2.52}$$

Таким образом получаем первую формулу связи

$$H_1 + qH_q = -y_1H^1 - y_2H^2 \tag{2.53}$$

Из коэффициентов при $-\frac{y}{z-1}$ и $-\frac{y}{z-q}$ получаются функции Казимира модели Годена

$$\mathrm{Tr}A^1 = -\frac{1}{1-q}\left(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^1) + \mathrm{Tr}(VB^2)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^2) - \mathrm{Tr}(VB^1) - \mathrm{Tr}(VB^2)\right) \tag{2.54}$$

$$q\mathrm{Tr}A^q = \frac{1}{1-q}\left(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^1) + \mathrm{Tr}(VB^2)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^2) - q\mathrm{Tr}(VB^1) - q\mathrm{Tr}(VB^2)\right) \tag{2.55}$$

Теперь мы можем написать вторую формулу связи

$$\mathrm{Tr}A^1 + q\mathrm{Tr}A^q = H^1 + H^2 \tag{2.56}$$

Легко проверить что $C = \mathrm{Tr}A^1 + \mathrm{Tr}A^q = \mathrm{Tr}B^1 + \mathrm{Tr}B^2$ является функцией Казимира на всем фазовом пространстве. Используя спектральную кривую

$$C = \frac{1}{q}\left(\mathrm{Tr}(VB^1)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^1) + \mathrm{Tr}(VB^2)\mathrm{Tr}V - \mathrm{Tr}(V^2B^2)\right) \tag{2.57}$$

Если положить $V = \mathrm{Diag}(1, q)$ это в точности совпадает с $\mathrm{Tr}B^1 + \mathrm{Tr}B^2$. Вторая функция Казимира спиновой цепочки дается формулой

$$\mathrm{Tr}S^1\mathrm{Tr}S^2 = \mathrm{Tr}B^1\mathrm{Tr}B^2 - \mathrm{Tr}(B^1B^2) + y_1\mathrm{Tr}B^2 + y_2\mathrm{Tr}B^1 \tag{2.58}$$

$$q(H_1 + H_q) = \mathrm{Tr}S^1\mathrm{Tr}S^2 \tag{2.59}$$

Уравнение (2.56) подтверждает мысль предыдущего раздела: действительно есть гамильтонианы, не порождающие никакой динамики в дуальной модели. Спектральная кривая может быть записана как

$$\Gamma(y,z) = 1 - \frac{H_{1,y_1}}{(z-1)(y+y_1)} - \frac{H_{1,y_2}}{(z-1)(y+y_2)} - \frac{H_{1,y_1}}{(z-q)(y+y_1)} - \frac{H_{q,y_2}}{(z-q)(y+y_2)} \tag{2.60}$$

с

$$H_{1,y_1} + H_{q,y_1} = H^1 \tag{2.61}$$

$$H_{1,y_2} + H_{q,y_2} = H^2 \tag{2.62}$$

$$-y_1H_{q,y_1} - y_2H_{q,y_2} = qH_q \tag{2.63}$$

$$-y_1H_{1,y_1} - y_2H_{1,y_2} = H_1 \tag{2.64}$$

и

$$H_{1,y_1} + H_{1,y_2} + \frac{H_{q,y_1} + H_{q,y_2}}{q} = C \tag{2.65}$$

2.7 Фазовое пространство системы Годен-Пенлеве

2.7.1 Функции Казимира

В действительности, спектральная дуальность хорошо определена на пространстве параметризованном переменными ξ, η. Есть выражения в переменных B которые не могут быть записаны в терминах переменных A. Это не проблема вычисления, а следствие того факта что A и B являются координатами на разных подпространствах полного фазового пространства ξ, η. Это не сложно продемонстрировать проблемой функций Казимира. Со стороны Годена след $\mathrm{Tr}A^a$ должен быть функцией Казимира модели. Он, однако, не является функцией Казимира на всем пространстве ξ, η. Спектральная дуальность дает соотношение

$$\mathrm{Tr}A^1 = A^1_{11} + A^1_{22} = B^1_{11} + B^2_{11} \tag{2.66}$$

Для скобок с B^1_{12} мы получаем отличный от нуля результат:

$$\{\mathrm{Tr}A^1, B^1_{12}\} = \frac{B^2_{12}B^1_{11} - B^2_{11}B^1_{12}}{x_2 - x_1} + \frac{B^1_{12}B^2_{11} - B^1_{11}B^2_{12}}{x_2 - x_1} + B^1_{12} = B^1_{12} \neq 0 \tag{2.67}$$

Конечно, скобки с любыми величинами, выражающимися через A, а именно B^i_{aa}, попрежнему равны нулю. На полном ξ, η фазовом пространстве есть только одна функция Казимира.

$$C = \mathrm{Tr}A^1 + \mathrm{Tr}A^q = \mathrm{Tr}B^1 + \mathrm{Tr}B^2 \tag{2.68}$$

Таким образом, в контексте спектальной дуальности гамильтонианы должны быть заданы правильно(т.е. на полном фазовом пространстве, а не только на каком-то подпространстве). После фиксации калибровки размерность полного фазового пространства 6. Таким образом в системе имеется 3 независимых гамильтониана, но некоторые их нетривиальные комбинации дают дополнительные функции Казимира на отдельных подпространствах(только в модели Годена либо только в цепочке).

2.7.2 Параметризация фазового пространства

Перечислим явно независимые переменные. введем обозначения

$$A^1_{12} = \phi \tag{2.69}$$

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{q-1} \log \frac{B^1_{12}}{u + y_1} \tag{2.70}$$

$$I_G = H_1 + H_q \tag{2.71}$$

$$I_X = H^1 + H^2 \tag{2.72}$$

$u, p, \tilde{u}, \tilde{p}$ заданы уравнениями

$$L^G_{12}(u) = 0 \tag{2.73}$$

$$L^{XXX}_{12}(\tilde{u}\tilde{p}) = 0 \tag{2.74}$$

$$L^G_{11}(u) - L^G_{22}(u) = pu \tag{2.75}$$

$$L^{XXX}_{11}(\tilde{u}\tilde{p}) = \tilde{p} \tag{2.76}$$

Справедливы следующие утверждения

- Фазовое пространство модели Годена параметризованно переменными I_G,p,u,ϕ.
- Фазовое пространство спиновой цепочки параметризованно I_X,$\tilde{u}$,$\tilde{p}$,$\tilde{\phi}$
- Полное фазовое пространство параметризовано переменными u,p,I_G,ϕ,I_X,$\tilde{\phi}$ или, эквивалентно, $\tilde{u}$, $\tilde{p}$,I_G,ϕ,I_X,$\tilde{\phi}$

В такой параметризации переменные разделены на фазовом пространстве спиновой цепочки. При этом скобки Пуассона даются выражениями

$$\{u, p\} = -1 \tag{2.77}$$

$$\{\tilde{u}, \tilde{p}\} = -1 \tag{2.78}$$

$$\{I_G, \tilde{u}\} = \{I_G, \tilde{p}\} = \{I_G, u\} = \{I_G, p\} = 0 \tag{2.79}$$

$$\{I_X, u\} = \{I_X, p\} = \{I_X, \tilde{u}\} = \{I_X, \tilde{p}\} = 0 \tag{2.80}$$

$$\{\tilde{\phi}, \tilde{u}\} = \{\tilde{\phi}, \tilde{p}\} = 0 \tag{2.81}$$

$$\{\tilde{\phi}, I_X\} = 1 \tag{2.82}$$

На полном фазовом пространстве переменные не разделены (есть нетривиальные скобки с ϕ), однако в дальнейшем мы будем пользоваться термином “разделенные переменные” применительно к вышеописанной параметризации. Это оправдано, поскольку гамильтонианы не зависят от ϕ,$\tilde{\phi}$.

2.7.3 Гамильтониан

Гамильтонианы I_G и I_X задают тривиальную динамику по переменным u,p (а также $\tilde{u}$,$\tilde{p}$). В системе есть, таким образом, единственный нетривиальный гамильтониан. В качестве такового мы выберем H_q. (Понятно, что добавление произвольной функции I_G и I_X не изменит динамику). В этом разделе мы выведем выражение для H_q в разделенных переменных. Чтобы это сделать, мы должны выразить A^1_{11},A^q_{11} в терминах разделенных переменных. Имеем

$$\frac{A^1_{11}}{u-1} + \frac{qA^q_{11}}{u-q} - y_1 = pu \tag{2.83}$$

$$\mathrm{Tr}Y\mathrm{Tr}A^1 - \mathrm{Tr}(YA^1) + \mathrm{Tr}Y\mathrm{Tr}A^q - \mathrm{Tr}(YA^q) + \mathrm{Tr}A^1\mathrm{Tr}A^q - \mathrm{Tr}(A^1A^q) = I_G \tag{2.84}$$

$$\mathrm{Tr}A^1 + \mathrm{Tr}A^q \tag{2.85}$$

$$\mathrm{Tr}A^1 + q\mathrm{Tr}A^q = I_X \tag{2.86}$$

$$\mathrm{Tr}A^1 = K_1 = \frac{qC - I_X}{q-1} \tag{2.87}$$

$$\mathrm{Tr}A^q = K_q = \frac{I_X - C}{q-1} \tag{2.88}$$

Для вычислений удобно выразить I_G через новую константу K_0, такую что

$$I_G = -\frac{1}{4}((K_0 + K_1 + K_q + y_1 + y_2)(K_0 - K_1 - K_q - y_1 - y_2) \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned} A^1_{11} - A^1_{22} = &-\frac{2(u-1)^2(u-q)up^2}{(y_1-y_2)(q-1)} - \frac{2(u-1)(u-q)up}{q-1} - \frac{K_1^2}{2(y_1-y_2)} + \frac{qK_q^2(u-1)}{2(u-q)(y_1-y_2)} \\ &+ \frac{qK_0^2(u-1)}{2(q-1)u(y_1-y_2)} + \frac{(u-1)(y_1-y_2)}{2} - \frac{u(u-1)(y_1-y_2)}{2(q-1)} - \frac{2qy_1y_2(u-1)}{(q-1)(y_1-y_2)u} \end{aligned} \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned} A^q_{11} - A^q_{22} = &\frac{2u(u-1)(u-q)^2p^2}{q(q-1)(y_1-y_2)} + \frac{2u(u-1)(u-q)p}{q(q-1)} + \frac{(u-q)K_1^2}{2q(u-1)(y_1-y_2} - \frac{K_q^2}{2(y_1-y_2)} \\ &- \frac{(u-q)K_0^2}{2(q-1)(y_1-y_2)u} + \frac{u(u-1)(y_1-y_2)}{2q(q-1)} - \frac{(y_1-y_2)}{2} + \frac{2(u-q)y_1y_2}{(q-1)(y_1-y_2)u} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Тогда гамильтониан Пенлеве VI

$$H_{PVI} = \frac{H_q}{q} = \frac{1}{2q^2}\mathrm{Res}_{z=q}(L(z)^2) \tag{2.92}$$

в разделенных переменных запишется как

$$\begin{aligned} H_{PVI} = &\frac{p^2u(u-1)(u-q)}{q(q-1)} + \frac{(u-q)K_0^2}{4q(q-1)u} - \frac{(u-1)(u-q)}{4q(q-1)}\left(\frac{K_1}{u-1} + \frac{K_q}{u-q}\right)^2 \\ &- \frac{(u-q)}{4q(q-1)}\left(y_1 + y_2 + \frac{Kq(q-1)}{(u-q)}\right)^2 + \frac{y_1y_2(u-q)(u-1)}{q(q-1)u} \end{aligned} \tag{2.93}$$

Глава 3

Способы построения неавтономных обобщений классических алгебраически интегрируемых систем

Пусть имеется некоторая интегрируемая модель, для которой известно представление Лакса со спектральным параметром $L(z)$. Уравнения движения (уравнение Лакса) имеют вид

$$\partial_t L(z) = [M(z), L(z)] \tag{3.1}$$

M-оператор должен удовлетворять этому уравнению - это дает условие на аналитическую структуру, которое, однако, не фиксирует M-оператор однозначно. Например, прибавление степеней $L(z)$ с произвольными зависящими от z коэффициентами не меняет уравнений движения. Возможны и менее тривиальные преобразования. Так, если оператор Лакса имеет вид

$$L(z) = Y + \sum \frac{A^a}{z - z_a} \tag{3.2}$$

то добавление к M-оператору постоянной диагональной матрицы поменяет уравнения движения, но они по-прежнему будут иметь вид уравнения Лакса. Это отвечает изменению скобок Пуассона. В простейшем случае представления оператором Лакса размерности 2×2 с двумя простыми полюсами возможные пуассоновы структуры образуют однопараметрическое семейство. Оператор Лакса так же может быть умножен на произвольную скалярную функцию z. Это не поменяет автономных уравнений, поскольку этот множитель сократится. Неавтономным аналогом уравнения Лакса является уравнение нулевой кривизны

$$[\partial_z - L(z), \partial_q - M_q(z)] = 0 \tag{3.3}$$

Оно появляется как условие совместности линейных дифференциальных уравнений

$$\partial_z \Psi(z) = L(z)\Psi(z) \tag{3.4}$$

$$\partial_q \Psi(z) = M_q(z)\Psi(z) \tag{3.5}$$

С геометрической точки зрения это условие сохранения группы монодромии решения уравнения (3.4) при изменении параметра модели q. Такое уравнение мы будем называть неавтономным обобщением интегрируемой системы (3.1), если оно эквивалентно уравнениям Гамильтона с гамильтонианом, порождающим автономные уравнения (3.1) (или отличающемся множителем $g(q)$, поскольку таковой в автономном случае можно убрать простейшим масштабным преобразованием) и той же пуассоновой структурой. Новым "временем" является параметр q. Гамильтониан в общем случае зависит явно от q, поэтому речь идет о неавтономной гамильтоновой системе. Динамика некоторой динамической переменной x дается выражением

$$\frac{dx}{dq} = \frac{\partial x}{\partial q} + \{H_q, x\} \tag{3.6}$$

Так же как и уравнение Лакса, уравнение нулевой кривизны дает достаточно строгое ограничение на аналитическую структуру $M_q(z)$, так же не фиксирующее его однозначно. Однако, в отличие от автономного случая, умножение оператора Лакса на некоторую скалярную функцию $f(z,q)$ меняет уравнения движения. Для заданной аналитической структуры $L(z)$ (i.e. заданного множителя $f(z,q)$) существует выделенная параметризация, в которой уравнения принимают форму Лакса:

$$\frac{\partial}{\partial q} L(z) = \partial_z M_q(z) \tag{3.7}$$

$$\dot{L}(z) = [M_q(z), L(z)] \tag{3.8}$$

В уравнении (3.7) производная берется только по явной зависимости от q, а в уравнении (3.8) только по неявной (дифференцируются динамические переменные, но не сами q). Динамические переменные в такой параметризации следует считать не зависящими явно от q. Смысл этого утверждения заключается в следующем: в уравнении движения (3.6) для любой из этих переменных частная производная в правой части равна нулю (иными словами, полная производная таких переменных по q в точности равна скобке с гамильтонианом). При другом выборе множителя $f(z,q)$ не зависящими явно от q становятся другие переменные. Гамильтониан также связан с выбором аналитической структуры оператора Лакса: если уравнение нулевой кривизны записано для гамильтониана H, то нельзя записать неавтономные уравнения движения по тому же времени q с гамильтонианом $g(q)H$ без изменения аналитической структуры оператора Лакса и/или пуассоновой структуры. Вообще говоря, аналитическая структура не может быть совсем произвольной: существуют такие $f(q,z)$ что написать уравнение нулевой кривизны с той же пуассоновой структурой нельзя (с каким бы то ни было гамильтонианом). В связи с этим возникает интересная задача классификации неавтономных обобщений для заданной интегрируемой модели.

3.1 Основные понятия теории уравнений изомонодромных деформаций

Данный раздел вводит основные понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Он не содержит новых результатов, материал излагается по источникам [9],[10],[5]. Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка вида (3.4) с L-оператором, имеющим только конечное число полюсов и не имеющим существенных особенностей. Иными словами, имеет место разложение

$$L(z) = \sum_a \sum_{k=1}^{k_a} \frac{A_a^{(k)}}{(z-z_a)^k} + L_{reg}(z) \tag{3.9}$$

Простые полюса разложения (3.9) называются регулярными (или фуксовыми) особенностями, полюса порядка $n+1$ мы будем называть иррегулярными (нефуксовыми) особенностями ранга n. Как ведут себя решения (3.4) вблизи особенностей L-оператора? Разложение решения вблизи регулярной особой точки имеет вид

$$\Psi(z) = e^{A_a^{(1)}(z-z_a)} \sum_{n=0} c_n (z-z_a)^n \tag{3.10}$$

с некоторой постоянной матрицей $A_a^{(1)}$. При обходе по замкнутому контуру вокруг z_a решение умножается на $\mathcal{M}_a = e^{2\pi i A_a^{(1)}}$ - матрицу монодромии решения. Случай иррегулярной особой точки (ранга n) более сложен. В этом случае нельзя написать аналогичное разложение во всей окрестности точки $z = z_a$. Если формально искать решение в виде

$$\Psi_f(z) = e^{A(z-z_a)^n} \sum_{m=0} c_n (z-z_a)^m \tag{3.11}$$

мы получим некоторый формальный ряд. Оказывается, что если в некотором секторе асимптотика решения $\Psi_1(z)$ дается разложением (3.11), то для его аналитического продолжения за пределы этого сектора будет иметь место асимптотика

$$\Psi_1(z) \approx \mathcal{S}\Psi_f(z) \tag{3.12}$$

где множитель $\mathcal{S}$ - некоторая постоянная матрица. Такое поведение решения вблиизи иррегулярных особенностей называется явлением Стокса, а матричные множители S - множителями Стокса (матрицами Стокса). Положение секторов определяется лучами Стокса - геометрическим местом точек, таких что

$$\mathrm{Im}\left((\lambda_a^{(i)} - \lambda_a^{(j)})(z - z_a)^n\right) = 0 \tag{3.13}$$

где $\lambda_a^{(i)}$-собственные значения матрицы A. Совокупность положений полюсов z_a и собственных значений $\lambda_a^{(i)}$ мы будем называть геометрическими данными задачи. Совокупность матриц монодромии для всех фуксовых особенностей и всех независимых множителей Стокса для нефуксовых особенностей мы будем называть данными монодромии. Геометрические данные и данные монодромии определяют группу монодромии решения (3.4).

Глава 4

Вывод уравнения Пенлеве VI при помощи гамильтоновой редукции

Результат вышеприведенных вычислений может быть получен при помощи процедуры гамильтоновой редукции. Рассмотрим редуцированную рациональную модель (2.16). Автономные уравнения движения такой системы имеют вид

$$\partial_{t_q} L(z) = [M_q(z), L(z)] \tag{4.1}$$

с M-оператором (2.26). Эти уравнения порождаются гамильтонианом H_q. Гамильтониан Пенлеве отличается множителем $\frac{1}{q}$. Соответствующее уравнение нулевой кривизны пишется по "тригонометрическим"параметрам

$$[z\partial_z - L(z), q\partial_q - M_q] = 0 \tag{4.2}$$

Оно эквивалентно следующей системе уравнений

$$\partial_q A^1 = \frac{1}{q-1}[A^q, A^1] - \frac{1}{q}[\bar{A}^q, A^1] \tag{4.3}$$

$$\partial_q A^q = -\frac{1}{q}[Y, A^q] + \frac{1}{q(q-1)}[A^1, A^q] - \frac{1}{q}[\bar{A}^q, A^q] \tag{4.4}$$

Уравнения (4.3),(4.4) отличаются от (A.7),(A.7). Однако их диагональные компоненты совпадают в силу диагональности $\bar{A}^q$. Этого должно быть достаточно для того, чтобы конечное уравнение на u было уравнением Пенлеве. Действительно, уравнения (2.90),(2.91) позволяют выразить u и p через $A^1_{11} - A^1_{22}$, $A^q_{11} - A^q_{22}$. А уравнения, описывающие динамику этих величин, имеют одинаковый вид. Прямое вычисление подтверждает этот вывод.

Запишем уравнения Гамильтона для переменных u, p и гамильтониана H_{PVI}.

$$\frac{du}{dq} = \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial H_{PVI}}{\partial p} \tag{4.5}$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial H_{PVI}}{\partial u} \tag{4.6}$$

Частные производные u и p по q выражаются через u и p:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{u(u-1)}{q(q-1)} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial q} = -\frac{y_1 - y_2 - 2p + 4up}{2q(q-1)} \tag{4.8}$$

Уравнения Гамильтона позволяют нам выразить p через $u, \dot{u}, q$.

$$2pu(u-1)(u-q) = q(q-1)\dot{u} - u(u-1) \tag{4.9}$$

Таким образом мы сводим динамику системы к одному уравнению второго порядка на u. Это уравнение Пенлеве VI.

$$\ddot{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-q}\right)\dot{u}^2 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{u-q}\right)\dot{u} + \\ + \frac{u(u-1)(u-q)}{2q^2(q-1)^2}\left(1 + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2 - 2) - \frac{(K_0^2 - 4y_1y_2)q}{u^2} + \frac{K_1^2(q-1)}{(u-1)^2} + \frac{(1-K_q^2)q(q-1)}{(u-q)^2}\right) \tag{4.10}$$

Глава 5

Спектральная дуальность неавтономных моделей

5.1 Общий подход к построению дуальных неавтном-ных моделей

Пусть $L(z)$ - оператор Лакса автономной интегрируемой системы, $\tilde{L}(y)$ - оператор Лакса спектрально дуальной модели. Неавтономное обобщение основано на уравнении нулевой кривизны

$$\partial_q L(z) - \partial_z M(z) = [M(z), L(z)] \tag{5.1}$$

Чтобы построить дуальное, мы должны взять

$$\partial_q \tilde{L}(y) - \partial_y \tilde{M}(y) = [\tilde{M}(y), \tilde{L}(y)] \tag{5.2}$$

с некоторым $\tilde{M}$ который даст совпадающие уравнения движения для совпадающих переменных(выражаемых через дуальные). Эта простая на первый взгляд конструкция позволяет строить довольно широкий набор уравнений изомонодромной деформации.

5.2 Обзор неавтономных моделей связанных с системой Годена

Несколько различных неавтономных моделей возникает как обобщения рациональной модели Годена и ее редукций. Первая - это система Шлезингера

$$L(z) = \frac{A^0}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^q}{z-q} \tag{5.3}$$

с линейной скобкой Пуассона и M-оператором

$$M(z) = -\frac{A^q}{z-q} \tag{5.4}$$

Следующая - это неавтономная версия редуцированной рациональной модели, рассмотренной в разделах 2.3-2.4

$$L(z) = -Y + \frac{A^1}{z-1} + \frac{qA^q}{z-q} \tag{5.5}$$

$$M(z) = -\frac{A^q}{z-q} - \bar{A}^q \tag{5.6}$$

и наконец тригонометрическая модель, имеющая те же $L(z), M(z)$ что рациональная модель, но тригонометрической формой уравнения нулевой кривизны

$$q\partial_q L(z) - z\partial_z M(z) = [M(z), L(z)] \tag{5.7}$$

5.3 Неавтономная AHH: случай уравнения Пенлеве V

В этом разделе приводятся основные результаты работы [7] Рассмотрим следующий оператор Лакса

$$\mathcal{N}(\lambda) = Y - \frac{N_1}{\lambda} - \frac{N_2}{\lambda-1} \tag{5.8}$$

Причем

$$\mathrm{Tr} N_i = \mu_i \tag{5.9}$$

$$\det N_i = 0 \tag{5.10}$$

Вычеты допускают следующую параметризацию (после редукции по диагональной подгруппе $GL(2)$):

$$N_i = G_i^T F_i \tag{5.11}$$

где

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} x_1 & y_1 - \frac{\mu_1}{x_1} \\ x_2 & y_y - \frac{\mu_2}{x_2} \end{array} \right) \ , G = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} y_1 + \frac{\mu_1}{x_1} & -x_1 \\ y_2 + \frac{\mu_2}{x_2} & -x_2 \end{array} \right) \tag{5.12}$$

Переменные x_i являются канонически сопряженными к y_i. К нему можно построить спектрально дуальный,

$$\mathcal{M}(z) = -A + \frac{M_1}{z-t} + \frac{M_2}{z+t} \tag{5.13}$$

с вычетами

$$M_i = F^i (G^i)^T \tag{5.14}$$

Нас интересует динамика, порожденная гамильтонианом $K_1 - K_2$, где

$$K_i = \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{z=t} \mathrm{Tr}(\mathcal{M}(z))^2 \tag{5.15}$$

Соответствующий M-оператор равен (для $\mathcal{N}$

$$M_N = \lambda(E_1 - E_2) + \frac{1}{t}(N_1 - N_2) \tag{5.16}$$

Для $\mathcal{M}$ та же динамика записывается уравнениями Лакса с M-оператором

$$M_M = \frac{M_1}{z-t} - \frac{M_2}{z+t} + \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2t}(\frac{\mu_1 x_2^2}{x_1^2} - \mu_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2t}(\frac{\mu_2 x_1^2}{x_2^2 - \mu_1}) \end{array} \right) \tag{5.17}$$

Последняя нетривиальная добавка появляется как артефакт редукции, аналогично члену $\bar{A}^q$ в разделе 2. Если мы перейдем к уравнениям нулевой кривизны

$$[\partial_\lambda - \mathcal{N}(\lambda), \partial_t - M_N(\lambda)] = 0 \tag{5.18}$$

и

$$[\partial_z - \mathcal{M}(z), \partial_t - M_M(z)] = 0 \tag{5.19}$$

то задаваемая ими динамика переменных x_i, y_i остается одинаковой. Если переписать это уравнение в переменных u, p аналогичных тем, что введены в разделе 2.7, мы получим одну из форм уравнения Пенлеве V.

5.4 Геометрический смысл спектральной дуальности неавтономной редуцированной рациональной модели

5.4.1 Рациональный случай

Рассмотрим редуцированную рациональную модель Годена. Спектральная дуальность (автономной модели) меняет местами положения полюсов (z_i) и собственные значения коэффициента при члене с ведущей сингулярностью (y_i) Нас интересует группа монодромии решения уравнения

$$\partial_z \Psi(z) = L(z)\Psi(z) \tag{5.20}$$

Для редуцированной рациональной модели бесконечность - полюс второго порядка. Действительно, пусть $\lambda = \frac{1}{z}$ – локальный параметр в окрестности бесконечности. Тогда дифференциальное уравнение может быть переписано как

$$-\lambda^2 \partial_\lambda \Psi(\frac{1}{\lambda}) = L(\frac{1}{\lambda})\Psi(\frac{1}{\lambda}) \tag{5.21}$$

Таким образом, уравнение имеет 2 регулярные особые точки (простые полюса) и одну иррегулярную особую точку. Данные монодромии содержат по одной матрице монодромии для простых полюсов и две матрицы Стокса для нефуксовой особенности. Они параметризуются четырьмя гамильтонианами раздела 2.6. Они не являются независимыми, поскольку и правая и левая часть уравнения

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_q = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \tag{5.22}$$

дают матрицу монодромии при обходе по контуру, содержащему только бесконечность.

5.4.2 Тригонометрический случай

Тригонометрический случай эквивалентен рациональной модели без нефуксовых особенностей. Имеем

$$z\partial_z \Psi(z) = L(z)\Psi(z) \tag{5.23}$$

Ноль и бесконечность являются простыми полюсами в этом случае, явления Стокса нет. В этом случае также должно быть 4 гамильтониана (соответствующих монодромиям вокруг полюсов) с одним соотношением (сумма вычетов равна нулю). Спектральная дуальность автономной модели не делает ничего замечательного в этом случае: положения полюсов меняются местами с собственными значениями одного из вычетов, ничем вообще говоря не выделенного.

5.5 Спектральная дуальность неавтономной редуцированной модели Годена

Система Годена

Введем следующие переменные:

$$u := \frac{qA^1_{12} + qA^q_{12}}{A^1_{12} + qA^q_{12}} \tag{5.24}$$

$$\phi := A^1_{12} \tag{5.25}$$

$$\Delta_1 := A^1_{11} - A^1_{22} \tag{5.26}$$

$$\Delta_q := qA^q_{11} - qA^q_{22} \tag{5.27}$$

$$p = -\Delta_y + \frac{\Delta_1}{u-1} + \frac{\Delta_q}{u-q} \tag{5.28}$$

Тогда уравнения движения запишутся как

$$\dot{\phi} = -\phi\left(\Delta_q + \frac{u-q}{1-q}(p + \Delta_y)\right) \tag{5.29}$$

$$\dot{\Delta}_1 = \frac{(u-1)(u-q)}{2}\left(\frac{K_1^2 - \Delta_1^2}{(u-1)^2} - \frac{K_q^2 - \Delta_q^2}{(u-q)^2}\right) \tag{5.30}$$

$$-\dot{\phi}\frac{u-q}{u-1} = \phi\frac{\dot{u}}{u-1} - \phi\frac{\dot{u}}{u-1}\frac{u-q}{u-1} + \frac{\phi}{1-q}(u-q)(p+\Delta_y) + \phi\frac{u-q}{u-1}\Delta_q + \phi\frac{u-q}{u-1}\Delta_y - \frac{\phi}{u-1} \tag{5.31}$$

$$\dot{\Delta}_1 + \dot{\Delta}_q = 0 \tag{5.32}$$

Подстановка (5.29) в уравнение (5.31) позволяет исключить ϕ. После упрощения мы получаем

$$\dot{u} = \frac{u-1}{q-1}\left(p(u-q) + 1\right) \tag{5.33}$$

5.5.1 Спиновая цепочка

Аналогичную программу мы можем выполнить со стороны спиновой цепочки. Введем обозначения

$$\psi := (VB^1)_{12} \tag{5.34}$$

$$\bar{u} := \frac{y_1(VB^2)_{12} + y_2(VB^1)_{12}}{(VB^1)_{12} + (VB^2)_{12}} \tag{5.35}$$

$$\Delta^1 := (VB^1)_{11} - (VB^1)_{22} \tag{5.36}$$

$$\Delta^2 := (VB^2)_{11} - (VB^2)_{22} \tag{5.37}$$

$$\bar{p} := 1 - q + \frac{\Delta^1}{\bar{u} + y_1} + \frac{\Delta^2}{\bar{u} + y_2} \tag{5.38}$$

Тогда мы получим следующие уравнения движения

$$\dot{\psi} = -\psi \left(y_2 + (\bar{u} + y_2)(\frac{\bar{p}}{1-q} - 1) \right) \tag{5.39}$$

$$\dot{\Delta}^1 = -\frac{(\bar{u}+y_1)(\bar{u}+y_2)}{2} \left(\frac{(H^1)^2 - (\Delta^1)^2}{(\bar{u}+y_1)^2} - \frac{(H^2)^2 - (\Delta^2)^2}{(\bar{u}+y_2)^2} \right) \tag{5.40}$$

Исключая ψ приходим к

$$\dot{u} = (\bar{u}+y_1)(\bar{u}+y_2) + (\frac{\bar{p}}{q-1} + 1)\frac{\bar{u}+y_1}{\Delta_y}(1 - (\bar{u}+y_1)(\bar{u}+y_2)) \tag{5.41}$$

5.5.2 Уравнение на u

Из уравнений (5.30),(5.33) мы можем получить одно дифференциальное уравнение второго порядка на u. После несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned}
\ddot{u} = &-\frac{\dot{u}^2}{2}(q+1)(\frac{1}{u-q} + \frac{1}{u-1}) \\
&- \dot{u}\left((\frac{1}{u-q} + \frac{1}{q-1})(2 + H^1 + H^2) - (\frac{1}{u-q} + \frac{1}{u-1})(\Delta_y - \frac{1}{u-q})(u-q)(u-1) + H^1 - H^2 \right) \\
&- \frac{1}{2}(u-q)(u-1)\left(-\frac{(u-q)(u-1)}{q-1}(\frac{1}{u-q} + \frac{1}{u-1})(\Delta_y - \frac{1}{u-q}) + \frac{K_1^2}{(u-1)^2} + \frac{K_q^2}{(u-q)^2} \right) \\
&+ (H^1 - H^2 + 1)(\frac{1}{u-q} + \frac{1}{q-1})
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Это уравнение не совпадает с уравнением Пенлеве VI:

$$\begin{aligned}
\ddot{u} = &\frac{\dot{u}^2}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-q}) - \dot{u}(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{u-q}) \\
&+ \frac{u(u-1)(u-q)}{q^2(q-1)^2}(\alpha + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{(u-1)^2} + \frac{\delta}{(u-q)^2})
\end{aligned} \tag{5.43}$$

5.5.3 Дуальность

Сопоставим диагональные части уравнений движения Имеем

$$\Delta_1 + \Delta_q = H^1 - H^2 \tag{5.44}$$

$$\Delta^1 + \Delta^2 = K_1 - K_q \tag{5.45}$$

$$\Delta_1 - \Delta_q = \Delta^1 - \Delta^2 \tag{5.46}$$

Таким образом все диагональные элементы выражаются через Δ_1 и константы:

$$\Delta^1 = \Delta_1 + \frac{K_1 - K_q - H^1 + H^2}{2} \tag{5.47}$$

Следовательно

$$\dot{\Delta}^1 = \dot{\Delta}_1 \tag{5.48}$$

Сопоставляя уравнения (5.30),(5.40) получаем следующее аалгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} &(\bar{u} + y_1)(\bar{u} + y_2)\left((u-q)^2(K_1^2 - \Delta_1^2) - (u-1)^2(K_q^2 - \Delta_q^2)\right) = \\ &= (u-1)(u-q)\left(((H^2)^2 - (\Delta^2)^2)(\bar{u} + y_1)^2 - ((H^1)^2 - (\Delta^1)^2(\bar{u} + y_2)^2\right) \end{aligned} \tag{5.49}$$

Проверим полноту описания нашей динамической системы решением $u(q)$. Пусть даны $u(q)$ и значения констант K_1,K_q,H^1,H^2,y_1,y_2. Тогда мы немедленно восстанавливаем $p(q)$ пользуясь уравнением (5.33). Затем используя (5.44) и определение $p(q)$ мы находим Δ_1, Δ_q. Интегрируя уравнение (5.29) мы находим ϕ с точностью до константы интегрирования. Обратимся теперь к спиновой цепочке. Диагональные переменные Δ^1 и Δ^2 вычислены выше. Уравнение (5.49) является квадратным относительно переменной $\bar{u}$. Все прочие переменные входящие в уравнение известны. В случае общего положения есть два варианта выбора $\bar{u}$: $L_{12}^{XXX}(\bar{u}) = 0$ или $L_{21}^{XXX}(\bar{u}) = 0$. Очевидно уравнения (5.40) и (5.41) были бы теми же, если бы мы взяли определение $L_{21}^{XXX}(\bar{u}) = 0$. Зная $\bar{u}$ мы восстанавливаем $\bar{p}$ и ψ. Следовательно неавтнономная рациональная редуцированная модель эквивалентна неавтономной динамике спиновой цепоски с точностью до действия $\mathbb{Z}_2$ симметрии которая действует на L ии L^{XXX} транспозицией.

Глава 6

Спектральная дуальность неавтономной тригонометрической модели (уравнения Пенлеве VI): проблемы

Гамильтониан Пенлеве отличается от гамильтониана H_q множителем $\frac{1}{q}$. Для системы Годена это означает, что соответствующее уравнение нулевой кривизны должно быть тригонометрическим (см. раздел 4). Рецепт предыдущего раздела не работает для тригонометрического уравнения. Действительно, попробуем написать дуальное

$$q\partial_q L^{XXX}(y) - f(y)\partial_y M(y) = [M, L^{XXX}] \tag{6.1}$$

$$q\partial_q L^{XXX} = q\dot{V} + \sum_i \frac{q\dot{V}B_i + Vq\dot{B}_i}{y + y_i} \tag{6.2}$$

Уравнения движения должны иметь вид

$$q\partial_q B^i = [..., ...] \tag{6.3}$$

поскольку B_i предполагаются не зависящими от q явным образом. (Поскольку справедливо $B^i_{aa} = A^a_{ii}$, а переменные A^a_{ii} не зависят явно от q в выводе уравнения Пенлеве VI). Таким образом члены с $\dot{V}$ должны сократиться. Но это означает, что $f(y)\partial_y M(y)$ должно иметь простые полюса, что делает M функцией $\log(y + y_i)$. Такой M-оператор не разрешен аналитической структурой. Другим указанием на проблемы является отсутствие ясной геометрической интерпретации. Исходная нередуцированная модель имеет 4 полюса. Рациональная модель делит их на 2 и 2. Два полюса отправляются на бесконечность, которая становится полюсом второго порядка. Таким образом бесконечность приобретает "внутреннюю"степень свободы, которая отделяется от динамики Годена и влияет на динамику спиновой цепочки. С другой стороны тригонометрическое уравнение записанное в рациональных переменных по-прежнему имеет 4 полюса. Дуальную динамику спрятать негде. Полюса разделяются как 3 и 1, следовательно только тривиальная динамика выглядит возможной на дуальной стороне.

Глава 7

Заключение

В данной работе показано, что понятие спектральной дуальности в ряде случаем может быть распространено и на неавтономные обобщения рассматриваемых интегрируемых систем. Подробно исследована динамика системы "редуцированная модель Годена - спиновая цепочка"в простейшем интересном случае уравнения Пенлеве VI. Получены выражения для M-операторов, а также интересная новая квази R-матричная структура для редуцированной модели. Явно проведена гамильтонова редукция системы Шлезингера до уравнения Пенлеве VI. Исследована связь аналитической структуры оператора Лакса с гамильтонианом, пуассоновой структурой и явной зависимостью динамических переменных от времени. Показано, что уравнение нулевой кривизны для редуцированной модели Годена, соответствующей уравнению Пенлеве VI, имеет тригонометрическую форму. Дана геометрическая интерпретация спектральной дуальности в терминах данных монодромии вспомогательной линейной задачи. Ключевая задача - спектрально дуальная формулировка уравнения Пенлеве VI - пока не решена. Невозможность такой формулировки пока не доказана, напротив, некоторые результаты для эллиптических аналогов позволяют надеяться на то, что спектрально дуальная формулировка существует. Она, по всей видимости, включает некоторую, более сложную чем в автономном случае, замену переменных. Зато получено некоторое новое уравнение, соответствующее неавтономной динамике с гамильтонианом H_q, по построению являющееся уравнением изомонодромных деформаций и имеющее дуальную формулировку.

Приложение A

Канонический вывод уравнения Пенлеве VI из системы Шлезингера

Рассмотрим уравнение нулевой кривизны (ZC)

$$[\partial_z - L(z), \partial_q - M_q(z)] = 0 \tag{A.1}$$

Раскрывая коммутатор, получаем

$$\partial_q L(z) - \partial_z M_q(z) = [M_q(z), L(z)] \tag{A.2}$$

A.1 Уравнения движения

Подстановка (2.5) в уравнение (A.1) приводит к следующим уравнениям движения

$$\partial_q A^0 = \frac{1}{q}[A^q, A^0] \tag{A.3}$$

$$\partial_q A^1 = \frac{1}{q-1}[A^q, A^1] \tag{A.4}$$

$$\partial_q A^q = \frac{1}{q}[A^0, A^q] + \frac{1}{q-1}[A^1, A^q] \tag{A.5}$$

Отсюда получаем закон сохранения величины

$$A^0 + A^1 + A^q = -Y \tag{A.6}$$

В случае невырожденной Y мы всегда можем диагонализовать ее калибровочным преобразованием. Перепишем A^0 как $A^0 = -A^1 - A^q - Y$. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\partial_q A^q = -\frac{1}{q}[Y, A^q] + \frac{1}{q(q-1)}[A^1, A^q] \tag{A.7}$$

Мы полагаем матрицы A^0,A^1,A^q бесследовыми. Их собственные значения $\pm\theta_0$,$\pm\theta_1$,$\pm\theta_q$ и $Y = diag(\theta_\infty, -\theta_\infty)$

A.2 Разделенные переменные

Введем переменные u, p такие что $L_{12}(u) = 0$ и $L_{11}(u) = p$. Определим $A^1_{12} = \phi$. Переменная A^1_{11} будет для удобства обозначена как ψ, хотя она не является независимой переменной.

$$A^1_{11} = \psi \tag{A.8}$$

$$A^1_{12} = \phi \tag{A.9}$$

$$A^1_{22} = -\psi \tag{A.10}$$

$$A^1_{21} = \frac{\theta_1^2 - \psi^2}{\phi} \tag{A.11}$$

$$A^q_{12} = -\frac{\phi}{q}\frac{u-q}{u-1} \tag{A.12}$$

$$A^q_{11} = (up + \theta_\infty - \frac{\psi}{u-1})\frac{u-q}{q} \tag{A.13}$$

$$A^q_{22} = -(up + \theta_\infty - \frac{\psi}{u-1})\frac{u-q}{q} \tag{A.14}$$

Из уравнений движения мы можем получить следующие выражения для производных

$$\dot{u} = \frac{u-1}{q(1-q)}((2pu + 4\theta_\infty)(u-q) - u) \tag{A.15}$$

$$\dot{\phi} = 2\phi\frac{u-q}{q(1-q)}(up + \theta_\infty) \tag{A.16}$$

Выражая p через u и $\dot{u}$ и подставляя результат в уравнение для $\dot{\psi}$ получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-q}\right)\dot{u}^2 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{u-q}\right)\dot{u} + \\ + \frac{u(u-1)(u-q)}{2q^2(q-1)^2}\left(1 + 4\theta_\infty(\theta_\infty - 1) - \frac{4\theta_0^2 q}{u^2} + \frac{4\theta_1^2(q-1)}{(u-1)^2} + \frac{(1-4\theta_q^2)q(q-1)}{(u-q)^2}\right) \end{aligned} \tag{A.17}$$

Приложение B

Примеры неавтономных обобщений спиновой цепочки для различных аналитических структур оператора Лакса

В этом разделе мы подробно разберем два примера неавтономных обобщений спиновой цепочки (GL(2), 2 узла) с различным выбором аналитической структуры.

B.1 Случай регулярного оператора Лакса

Let

$$L = V(y+y_1)(y+y_2) + VB^1(y+y_2) + VB^2(y+y_1) \tag{B.1}$$

$$L = y^2V + y((y_1+y_2)V + VB^1 + VB^2) + y_1y_2V + y_2VB^1 + y_1VB^2 \tag{B.2}$$

Мы будем искать M-оператор в виде

$$M = \frac{y^3}{3}E_2 + y^2M_2 + yM_1 + M_0 \tag{B.3}$$

Таким образом, $[M, L]$ должны быть полиномами порядка 1 по y. M_2,M_1,M_0 определяются из уравнений

$$\frac{1}{3}[E_2, VB^1 + VB^2] + [M_2, V] = 0 \tag{B.4}$$

$$\frac{1}{3}[E_2, y_2VB^1 + y_1VB^2] + [M_2, (y_1+y_2)V + VB^1 + VB^2] + [M_1, V] = 0 \tag{B.5}$$

$$[M_2, y_1y_2V + y_2VB^1 + y_1VB^2] + [M_1, (y_1 + y_2)V + VB^1 + VB^2] + [M_0, V] = 0 \tag{B.6}$$

которые возникают как требование совпадения аналитической структуры левой и правой частей уравнения. Имеем

$$M_2 = \frac{1}{3}\frac{VB^1 + VB^2}{q-1} + \gamma_2 V \tag{B.7}$$

$$M_1 = \frac{y_2VB^1 + y_1VB^2}{3(q-1)} + (\gamma_2 - \frac{y_1+y_2}{3(q-1)})(VB^1 + VB^2) + \gamma_1 V \tag{B.8}$$

$$M_0 = (\gamma_1 - \frac{y_1y_2}{3(q-1)} - (y_1+y_2)(\gamma_2 - \frac{y_1+y_2}{3(q-1)})(VB^1+VB^2) + (\gamma_2 - \frac{y_1+y_2}{3(q-1)})(y_2VB^1 + y_1VB^2) + \gamma_0 V \tag{B.9}$$

где $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$ - произвольные скалярные константы (константы по y). Их выбор определяется выбором Пуассоновой структуры и гамильтониана.

B.1.1 Уравнения движения

В первом порядке по y имеем первое уравнение движения

$$\partial_q(VB^1+VB^2)+(y_1+y_2)E_2-\frac{2}{3}\frac{VB^1+VB^2}{q-1}-\gamma_2V-\alpha_2I = [M_1, y_1y_2V+y_2VB^1+y_1VB^2]+[M_0,(y_1+y_2)V+V \tag{B.10}$$

Мы подразумеваем, что уравнения движения должны иметь вид “производная равна коммутатору”, поэтому требуем

$$\gamma_2 = \frac{y_1+y_2}{q-1} \tag{B.11}$$

$$\alpha_2 = -\frac{y_1+y_2}{q-1} \tag{B.12}$$

Тогда левая часть уравнения принимает вид

$$LHS = \frac{1}{f(q)}\partial_q(f(q)(VB^1 + VB^2)) \tag{B.13}$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{2}{3(q-1)} \tag{B.14}$$

$$f = (q-1)^{-\frac{2}{3}} \tag{B.15}$$

В правой части имеем

$$(\frac{y_1y_2}{3(q-1)} - \gamma_1)[y_2VB^1 + y_1VB^2, V] + ((\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{y_1+y_2-y_1y_2}{3(q-1)})(y_1+y_2) - \gamma_0)[VB^1 + VB^2, V] \tag{B.16}$$

Перейдем теперь к постоянной по y части. В левой части имеем

$$y_1y_2E_2+\partial_q(y_2VB^1+y_1VB^2)-\frac{y_2VB^1+y_1VB^2}{3(q-1)}-(\gamma_2-\frac{y_1+y_2}{3(q-1)})(VB^1+VB^2)-\gamma_1V-\alpha_1I \tag{B.17}$$

Условие сохранения следов приводит к

$$\gamma_1=\frac{y_1y_2}{q-1} \tag{B.18}$$

$$\alpha_1=-\frac{y_1y_2}{q-1} \tag{B.19}$$

Мы хотим привести уравнения движения к виду $\partial_q(...)=[...]$. Первое (порядка 1) уравнение уже записано в таком виде, в отличие от второго. Мы должны найти линейную комбинацию двух уравнений, которая имела бы такой вид. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на некоторый коэффициент α, который будет определен ниже.

$$\partial_q\left((y_2-\alpha)VB^1+(y_1-\alpha)VB^2\right)-\frac{y_2VB^1+y_1VB^2}{3(q-1)}-\frac{2}{3(q-1)}(VB^1+VB^2)(y_1+y_2-\alpha) \tag{B.20}$$

Тогда получаем

$$\frac{y_2-\alpha}{y_2+2(y_1+y_2-\alpha)}=\frac{y_1-\alpha}{y_1+2(y_1+y_2-\alpha)} \tag{B.21}$$

$\alpha=2(y_1+y_2)$ и в результате имеем

$$-(q-1)^{\frac{1}{3}}\partial_q\{(q-1)^{-\frac{1}{3}}((y_2+2y_1)VB^1+(y_1+2y_2)VB^2)\}+2(y_1+y_2)(q-1)^{\frac{2}{3}}\partial_q\{(q-1)^{-\frac{2}{3}}(VB^1+VB^2)\} \tag{B.22}$$

Запишем правую часть

$$\frac{2y_1y_2(y_1y_2-(y1+y_2)^2)}{3(q-1)}[VB^1+VB^2,V]+(\frac{2y_1y_2(y_1+y_2)}{3(q-1)}-\gamma_0)[y_2VB^1+y_1VB^2,V]+$$
$$\frac{2}{3(q-1)}(y_1y_2-(y_1+y_2)^2)[VB^1+VB^2,y_2VB^1+y_1VB^2] \tag{B.23}$$

Чтобы получить Пуассонову структуру спиновой цепочки мы должны положить

$$\gamma_0=-\frac{2(y_1+y_2)}{3(q-1)}(y_1^2+y_2^2) \tag{B.24}$$

Тогда уравнения движения порождаются гамильтонианом

$$H = -\frac{2}{3}((y_1+y_2)^2 - y_1y_2)H_q \tag{B.25}$$

где H_q - гамильтониан для оператора Лакса с двумя полюсами (см. раздед 2). Переменными без явной зависимости от q являются

$$W_1 = (q-1)^{-\frac{2}{3}}(VB^1 + VB^2) \tag{B.26}$$

и

$$W_0 = (q-1)^{-\frac{1}{3}}((y_2+2y_1)VB^1 + (y_1+2y_2)VB^2) \tag{B.27}$$

B.2 Оператор Лакса с одним полюсом

$$L(y) = (y+y_1)V + VB^1 + VB^2 + \frac{y_1-y_2}{y+y_2}VB^2 \tag{B.28}$$

$$M = \frac{y^2}{2}E_2 + yM_1 + M_0 \tag{B.29}$$

$$[M,L] = \frac{y^2}{2}[E_2, VB^1+VB^2] + y^2[M_1,V] + y[M_1, VB^1+VB^2] + \frac{y}{2}(y_1-y_2)[E_2,VB^2] + y[M_0,V]+ yy_1[M_1,V] + y_1[M_0,V] + [M_0, VB^1+VB^2] - \frac{y_2}{2}(y_1-y_2)[E_2,VB^2] + (y_1-y_2)[M_1,VB^2]+ \frac{y_2^2}{2}(y_1-y_2)\frac{[E_2,VB^2]}{y+y_2} - y_2(y_1-y_2)\frac{[M_1,VB^2]}{y+y_2} + (y_1-y_2)\frac{[M_0,VB^2]}{y+y_2} \tag{B.30}$$

$$[E_2, \frac{VB^1+VB^2}{2} - M_1(q-1)] = 0 \tag{B.31}$$

$$M_1 = \frac{VB^1+VB^2}{2(q-1)} + \gamma_1 V + \alpha_1 I \tag{B.32}$$

$$[V, \gamma_1(VB^1+VB^2)] - \frac{y_1}{2(q-1)}[V, VB^1+VB^2] + \frac{y_1-y_2}{2(q-1)}[V,VB^2] - [V,M_0] = 0 \tag{B.33}$$

$$M_0 = (VB^1+VB^2)(\gamma_1 - \frac{y_1}{2(q-1)}) + VB^2\frac{y_1-y_2}{2(q-1)} + \gamma_0 V \tag{B.34}$$

B.2.1 Уравнения движения

Уравнения движения даются постоянной частью и вычетом уравнения нулевой кривизны.

$$\partial_q(VB^1+VB^2)+y_1E_2-\gamma_1V-\alpha_1I = y_1[M_0,V]+[M_0,VB^1+VB^2]-\frac{y_2(y_1-y_2)}{2(q-1)}[V,VB^2]+(y_1-y_2)[M_1,VB^2] \tag{B.35}$$

Рассмотрение левой части приводит к условиям

$$\gamma_1 = \frac{y_1}{q-1} \tag{B.36}$$

$$\alpha_1 = -\frac{y_1}{q-1} \tag{B.37}$$

$$(q-1)^{\frac{1}{2}}\partial_q((q-1)^{-\frac{1}{2}}(VB^1+VB^2)) = (\frac{y_1^2}{2(q-1)}+\gamma_0)[VB^1+VB^2,V]+(\frac{(y_1-y_2)^2}{2(q-1)}-\gamma_1(y_1-y_2))[VB2,V] \tag{B.38}$$

Чтобы сделать $\partial_q(VB^1+VB^2)$ пропорциональной $[E_2,y_2VB^1+y_1VB^2]$ (т.е. сохранить Пуассонову структуру) необходимо положить

$$\gamma_0 = -\frac{y_1^2+y_2^2}{2(q-1)} \tag{B.39}$$

Тогда уравнение в вычете принимает вид

$$\partial_q(VB^2) = \frac{y_2^2}{2}\frac{[V,VB^2]}{q-1} - y_2[M_1,VB^2]+[M_0,VB^2] \tag{B.40}$$

$$\partial_q(VB^2) = (\frac{y_2^2}{2(q-1)} - \frac{y_1y_2}{q-1} - \frac{y_1^2+y_2^2}{2(q-1)})[V,VB^2] + \frac{y_1-y_2}{2(q-1)}[VB^1,VB^2] \tag{B.41}$$

Но это не пропорционально уравнениям, порождаемым H_q. Таким образом, аналитическая структура (B.28) несовместима с динамикой по q.

Литература

[1] A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, *Spectral Duality between Heisenberg Chain and Gaudin Model*, Lett. Math. Phys (2013) 103:299-329

[2] A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov *Spectral dualities in XXZ spin chains and five dimensional gauge theories*, JHEP 2013.12(2013):1-11

[3] A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich, A. Zotov, *Spectral duality in integrable systems from AGT conjecture*, JETP Letters 97.1(2013):45-51

[4] K. Takasaki, *Dual Isomonodromic Problems and Whitham Equations*, Lett. Math. Phys 43:123-135, 1998

[5] I. Krichever, *Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations*, Mosc. Math. Journal 2.4(2002):717-752

[6] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov,*Integrability and Seiberg-Witten Exact Solution*,Phys.Lett.B 355.3(1995):466-474

[7] J. Harnad, *Dual Isomonodromic Deformations and Moment Maps to Loop Algebras*, Commun. Math. Phys, 166, 337-365 (1994)

[8] M.R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise, *Dual moment map into loop algebras*, Lett.Math. Phys 20(1990):299-308

[9] А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва, 2005

[10] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, 2003