Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики

Кафедра "Теоретическая астрофизика и квантовая теория поля"

Выпускная квалификационная работа на соискание степени магистра

Подход SL(5) обобщенной геометрии к компактификации 11-мерной супергравитации.

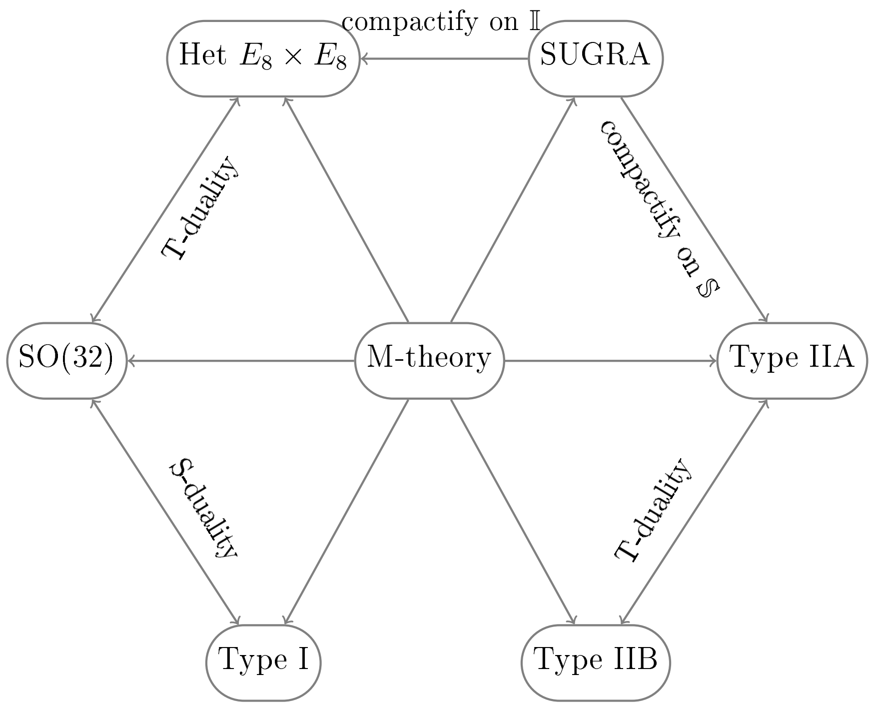
Выполнил студент 6 курса Слепухин В.М.
Научные руководители: д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т. , к.ф.-м.н. Мусаев Э.Т.

Москва, 2015

1 Введение

Одним из наиболее известных кандидатов на роль так называемой “теории всего” является теория струн. На настоящий момент существуют пять различных самосогласованных теорий суперструн, и все они описывают струны в 10 измерениях [1]. Другой перспективной теорией является $N = 1$ $D = 11$ супергравитация. По-видимому, между этими теориями есть глубокая связь, и все они являются различными пределами так называемой M-теории [2].

Мотивацией для гипотезы об M-теории является тот факт, что различные пределы вышеперечисленных теорий совпадают. Так, теория струн типа IIA и теория струн типа IIB оказываются эквивалентными с точностью до преобразования T-дуальности при компактификации на окружность [3–7] . S-дуальность (которая также является внутренней симметрией теории типа IIB) связывает $SO(32)$ теорию струн и теорию струн типа I. Наконец, будучи скомпактифицированной на интервал, 11-мерная супергравитация дает низкоэнергетический предел $E_8 \times E_8$ гетеротической теории струн. Все вместе, это дает картину диаграммы, где в вершине стоит гипотетическая М-теория, известные же нам теории - это ее различные пределы.



Если эта гипотеза верна, мы можем сказать об М-теории следующее. М-теория описывает 2-мерные и 5-мерные мембраны (так называемые М2- и М5-браны). Своим низкоэнергетическим пределом М-теория имеет 11-мерную супергравитацию. Будучи скомпактифицированной на окружность, М-теория дает теорию струн типа IIA . При этом М2 -брана наматывается на эту окружность, превращаясь в фундаментальную струну. Остальные объекты в теории типа IIA возникают схожим путем [8–10] .

При компактификации на двумерный тор М-теория дает теорию струн типа IIB, скомпактифицированную на окружность. S-дуальность в теории IIB в такой картине становится явной и связана просто с модулярной группой тора. Вместе S- и T-дуальности дают U-дуальность в М-теории [11] . При этом T-дуальность является пертурбативной, а S-дульность - непертурбативной и не может быть получена на уровне спектра струны.

Мы видим, что дуальности являются важным компонентом в этих теориях. Чтобы изучить их предлагается сконструировать обобщенную теорию, в которой преобразования дуальности будут явными локальными преобразованиями координат обобщенного пространства. Так, для NS-NS сектора супергравитации в 10 измерениях можно ввести двойную теорию поля (Double Field Theory) с удвоенным числом координат, где дуальные координаты будут отвечать модам намотки струн, и которая будет обладать явной локальной $O(D,D)$ симметрией, отвечающей глобальной $O(D,D)$ симметрии T-дуальности в 10-мерной супергравитации типа II [12], скомпактифицированной на D-мерный тор $\mathbb{T}^D$. При этом в двойной теории поля пространство уже не является тором.

Группой глобальных симметрий 11-мерной супергравитации, скомпактифицированной на n-мерный тор $\mathbb{T}^n$ является E_n [13–15]. С точки зрения низкоразмерной максимальной теории супергравитации U-дуальность действует на полях из NS-NS и R-R сектора, перемешивая их. Эти симметрии могут быть интерпретированы в терминах обобщенной геометрии, построенной в [16, 17] как дальнейшее развитие обобщенной геометрии Хитчина. Если в геометрии Хитчина расширяется только касательное пространство TM до $TM \oplus T^*M$ в случае $O(n,n)$ и до $TM \oplus \Lambda^2 TM \oplus ..$ в случае E_n , то в обобщенной геометрии происходит расширение самого многообразия M до E, такого, что $TE = TM \oplus T^*M$ и $TE = TM \oplus \Lambda^2 TM \oplus ...$ соответственно, при этом на E уже не задается структура гладкого многообразия.

Главным образом, конструкция обобщенной геометрии основывается на двух простых принципах

1) Группа инфинитеземальных преобразований тензоров расширена до E_n

2) Динамика полей в теории ограничена условием проекции

Первый принцип позволяет рассматривать негеометрические бэкграунды, состоятельные с точки зрения теории струн или М-теории, с той же точки зрения, что и геометрические [18–22] . Локальная динамика теории описывается с помощью так называемой обобщенной производной Ли (2.19) [23, 24] .

Этот геометрический формализм является основой для построения так называемой исключительной теории поля. Для групп $E_{6,7,8}$ и $SL(2) \times SL(3)$ она была построена в серии работ [25–30] . Для групп SO(5,5) и SL(5) она построена в [31]

Низкоразмерные теории супергравитации получаются из исключительной теории с помощью так называемой редукции Шерка-Шварца, задаваемой твист-матрицами.

В данной работе мы найдем явный вид твист-матриц для редукции Шерка-Шварца обобщенной геометрии с группой $SL(5)$, и построим рассказ следующим образом.

Во втором разделе мы начнем с педагогического примера T-дуальности в струнах и бозонного сектора 10-мерной супергравитации типа IIA, в котором конструкция обобщенной выглядит относительно просто. Затем мы дадим более общее построение конструкции обобщенной геометрии.

В третьем разделе мы разберем редукцию Шерка-Шварца, вначале на примере гравитации, затем применим ее в обобщенной геометрии. Мы увидим, что теория, изначально сформулированная для более явной записи симметрии дуальности, может быть использована для получения новых результатов, которых не было в старой теории.

В четвертом разделе будет подробно изучена компактификация 11-мерной супергравитации на 4-хмерный тор, рассмотрено ее описание в терминах обобщенной геометрии, и, для обобщенной геометрии, описывающей 7-мерную теорию, будет получено решение, отвечающее компактификации IIB 10-мерной супергравитации на 3-хмерные сферу и гиперболоид, соответствующее компактной калибровочной группе SO(4) и некомпактной SO(1,3).

2 Обобщенная геометрия

2.1 Т-дуальность

В этом разделе мы обсудим простейший пример Т-дуальности, что поможет в последующем изложении. В основном мы будем следовать обзору [12] и статье [32]. Действие Полякова для замкнутой струны имеет вид

$$S = \int d\tau d\sigma (\sqrt{-h} h^{ab} G_{\mu\nu} + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \tag{2.1}$$

где $\{\tau, \sigma\}$ и h_{ab} -координаты и метрика на мировом листе струны, $G_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ - метрика и поле Калба-Рамона в объемлющем пространстве.

Граничные условия для замкнутой струны на пространстве с одним компактным измерением радиуса R имеют вид

$$\begin{gathered} X^\alpha(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\alpha(\tau, \sigma), \alpha = 1..D-1, \\ \theta(\tau, \sigma + 2\pi) = \theta(\tau, \sigma) + 2\pi m R, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где X^α отвечают некомпактным координатам, а θ компактным. Импульс вдоль компактной координаты квантуется $p = \frac{2\pi n}{R}$. Добавочный член $\tilde{p} = 2\pi m R$ отвечает модам намотки. Спектр масс такой струны принимает вид

$$M^2 = (N + \tilde{N} + 2) + p^2 \frac{l_s^2}{R^2} + \tilde{p}^2 \frac{l_s^2}{\tilde{R}^2}, \tag{2.3}$$

где l_s - струнный масштаб, $\tilde{R} = \frac{l_s^2}{R}$ - дуальный радиус. Параметры удовлетворяют условию совпадения уровней (level matching condition) $N - \tilde{N} = p\tilde{p}$, откуда при $N = \tilde{N}$ следует $p\tilde{p} = 0$. Мы видим, что замена $R \leftrightarrow \tilde{R}, p \leftrightarrow \tilde{p}$ оставляет массы теми же. Более того, оказывается, что она оставляет теми же вообще все наблюдаемые. Данная замена называется преобразованием Т-дуальности. Если струна наматывается на тор по нескольким направлениям, то и Т-дуальность возможна вдоль нескольких направлений. Тогда мы можем ввести обобщенный импульс $P^M = (p^m, \tilde{p}^m)$, на который Т-дуальность действует как $O(D, D)$ преобразование. Спектр масс в таком формализме записывается как

$$M^2 = (N + \tilde{N} + 2) + P^M P^N H_{MN}, \tag{2.4}$$

где H_{MN} - обобщенная метрика, инвариантная относительно $O(D, D)$ преобразований

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik} b_{kj} \\ b_{ik} g^{kj} & g_{ij} - b_{ik} g^{kl} b_{lj} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Условие совпадения уровней теперь записывается в форме (для $N = \tilde{N}$) $p^m \tilde{p}_m = 0$. Фурье-образы обобщенных импульсов формально являются обобщенными координатами, а наложения условия совпадения уровней приводит к условию проекции в форме

$$\partial^m \otimes \tilde{\partial}_m = 0, \tag{2.6}$$

или же, определяя $O(D, D)$ инвариантную метрику

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

условие проекции записывается как

$$\eta^{MN} \partial^M \otimes \tilde{\partial}_N = 0. \tag{2.8}$$

2.2 Супергравитация типа IIA

В этом разделе мы рассмотрим пример NS-NS сектора супергравитации в 10 измерениях, продолжая следовать обзору [12]. Особая прелесть этого примера заключается в том, что возможно дуализовать все координаты, в отличие от ситуации с 11-мерной супергравитацией, где полная группа симметрий U-дуальности бесконечномерна. Поэтому в 11-мерной супергравитации дуализируется лишь n координат. При компактификации на n-мерный тор полученная теория обладает глобальной группой симметрии E_n, и именно эта группа и является локальной группой симметрии в обобщенном пространстве. (Тор рассматривается как решение, сохраняющее полную группу дуальности, при построении самого обобщенного пространства он уже не используется). При $n > 8$ группа становится бесконечномерной, поэтому дуализация всех координат является на данный момент нерешенным вопросом. Подробнее это разобрано в статьях [33–35].

Для 10-мерной супергравитации группой симметрии безмассовых NS-NS сектора теории струн является T-дуальность, и при этом глобальной группой симметрии G при компактификации на n-мерный тор является $O(n, n)$. Соответственно, она же является локальной группой симметрии обобщенного пространства при дуализации n координат. Но в этом случае мы вполне можем дуализовать все координаты, рассмотрев группу $O(10, 10)$. Рассмотрим более подробно эту теорию. Лагранжиан имеет вид

$$L = \sqrt{g} e^{2\phi} (R + 4(\partial\phi)^2 + \frac{1}{12} H^{ijk} H_{ijk}), \tag{2.9}$$

где R - скаляр Риччи, $H = db$ -тензор поля Калба-Рамона. Полями 10-мерной гравитации типа IIA являются метрика g_{ik} , 2-форма b_{ik} , также называемая полем Калба-Рамона, и скалярное поле ϕ . Их диффеоморфизмы при инфинитеземальных преобразованиях координат $x^i \to x^i + X^i$ и калибровочные преобразования с 1-формой ζ задаются стандартными формулами.

$$
\begin{aligned}
L_X g_{ij} &= X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ki} \partial_j X^k \\
L_X b_{ij} &= X^k \partial_k b_{ij} + b_{kj} \partial_i X^k + b_{ki} \partial_j X^k \\
L_\lambda \phi &= X^k \partial_k \phi \\
\delta_\zeta b_{ij} &= \partial_i \zeta_j - \partial_j \zeta_i
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Для того, чтобы было возможным определить преобразование Т-дуальности, вообще говоря, необходимо, чтобы под действием производной Ли вдоль вектора Киллинга метрика и 2-форма обращались в ноль. Здесь, благодаря наличию калибровочной инвариантности, это условие может быть смягчено до требования

$$
L_X g = L_X b + d\zeta = 0 \tag{2.11}
$$

где ζ - 1-форма, подобранная нужным образом. Мы видим, что преобразование Т-дуальности зависит не только от координат, но еще и от этой 1-формы, то есть действует на прямой сумме касательного и кокасательного расслоений, элемент которого записывается как формальная сумма $X + \zeta$. Производная вдоль такого "вектора"действует на поля следующим образом

$$
\delta_{X+\zeta} g = L_X g, \delta_{X+\zeta} b = L_X b + d\zeta \tag{2.12}
$$

Коммутатор двух таких производных равен

$$
[\delta_{X+\zeta}, \delta_{Y+\eta}] = \delta_{[[X+\zeta, Y+\eta]]} \tag{2.13}
$$

где введена скобка Куранта

$$
[[X+\zeta, Y+\eta]] = [X, Y] + L_X \eta - L_Y \zeta - \frac{1}{2} d(i_X \eta - i_Y \zeta) \tag{2.14}
$$

Теперь, чтобы теория приобрела явную инвариантность относительно группы преобразований $G = O(10, 10)$ (группы симметрий Т-дуальности) не только в слое, но и в базе, мы удваиваем число координат, вводя дуальные координаты $\tilde{x}^i$, т.е. теперь пространство теории 20-мерное с координатами $X^M = (x^m, \tilde{x}^m)$. Перестановка координат $x^m \leftrightarrow \tilde{x}^m$ отвечает преобразованию Т-дуальности вдоль направления x^m . Мы собираем метрику и 2-форму в обобщенную 20-мерную метрику H_{MN} , которую мы уже видели в разговоре про Т-дуальность

$$
H_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik} b_{kj} \\ b_{ik} g^{kj} & g_{ij} - b_{ik} g^{kl} b_{lj} \end{pmatrix} \tag{2.15}
$$

Эта метрика является элементом группы $G = O(10, 10)$. Также мы вводим $O(10, 10)$ скаляр d по формуле $e^{-2d} = \sqrt{g} e^{-2\phi}$. Сам по себе ϕ скаляром не будет, так как при преобразовании Т-дуальности в интеграле в статсумме нужно делать сдвиг (который и учитывает d), чтобы привести его к гауссовому виду. Действие обобщенной производной Ли определяется формулой (2.19) и при наложении условия проекции (2.16) она переходит в (2.12) (т.е. мы получаем диффеоморфизмы и калибровочные преобразования), а Е-скобка переходит в скобку Куранта.

2.3 Общее определение

В этом разделе будет дано общее определение обобщенной геометрии. Мы будем использовать материал из [36], а также [37].

Для каждой теории супергравитации рассматривается расширенное пространство, такое, что соответствующая группа симметрий является группой преобразований U-дуальности исходной теории супергравитации. Так, для компактификации 11-мерной максимальной супергравитации на D-мерный тор этой группой является E_{11-D} , а для 10-мерной полумаксимальной - $O(D,D)$ (группа T-дуальности) . В дальнейшем мы будем отсылать к этой группе как к группе G. Различные поля в теории супергравитации собираются в неприводимые представления группы дуальности. Чтобы вернуться к обычным координатам от обобщенных, нужно наложить условие проекции

$$Y^{MN}{}_{KL}\partial_M \otimes \partial_N = 0 \tag{2.16}$$

Решения этого уравнения разбиваются на классы (орбиты) решений, переходящих друг в друга под действием группы U-дуальности. Разные решения условия проекции дают разные теории - 10-мерные супергравитации типа IIA/B, 11-мерную супергравитацию.

Для различных теорий Y равны

$$\begin{aligned} O(D,D) : Y^{MN}{}_{KL} &= \eta^{MN}\eta_{KL} \\ SL(5) : Y^{MN}{}_{KL} &= \epsilon^{\alpha MN}\epsilon_{\alpha KL} \\ SO(5,5) : Y^{MN}{}_{KL} &= \frac{1}{2}(\Gamma^i)^{MN}(\Gamma_i)_{KL} \\ E_{6(6)} : Y^{MN}{}_{PQ} &= 10 d^{MNR} d_{PQR} \\ E_{7(7)} : Y^{MN}{}_{PQ} = 12c^{MN}{}_{PQ} + \delta_P^{(M}\delta_Q^{N)} &+ \frac{1}{2}\epsilon^{MN}\epsilon_{PQ} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь η^{MN} - $O(D,D)$-инвариантная метрика, $\epsilon_{\alpha KL} = \epsilon_{\alpha,\beta\gamma,\delta\epsilon}$, Γ^i - гамма-матрицы в представлении Вейля, d^{MNR} и c^{MN} - симметричные инвариантные тензоры в $E_{6(6)}$ и $E_{7(7)}$ соответственно. Для группы $O(D,D)$ мы вновь получаем условие (2.8).

Также Y может быть записан через проектор на представление группы $P^{MN}{}_{KL} = (t^M_K)^\alpha (t^N_L)_\alpha$, где t^α - генераторы группы, записанные в нужном представлении.

$$Y^{MN}{}_{KL} = -\alpha P^{MN}{}_{KL} + \beta\delta^M_L\delta^N_K + \delta^M_L\delta^N_K, \tag{2.18}$$

где α и β - константы, разные для каждой группы U-дуальности.

Векторы в обобщенном пространстве преобразуются при диффеоморфизмах обобщенных координат. Их преобразование не задается стандартной производной Ли, так как стандартная производная Ли содержит в себе объекты из группы $GL(N)$, то есть выводит за пределы обобщенного пространства. Для согласованного определения нужно добавить проектор на обобщенное пространство

$$(\delta_\Lambda V)^M = \Lambda^N \partial_N V^M - \alpha P^{MN}{}_{KL} \partial_N \Lambda^K V^L + \beta V^M \partial_K \Lambda^K = (L_\Lambda V)^M + Y^{MN}{}_{KL} \partial_N \Lambda^K V^L. \quad (2.19)$$

Если в качестве группы симметрии теории выбрать $GL(N)$, то обобщенная геометрия сводится к стандартной. Для произвольной теории, если мы наложим условие проекции, отвечающее теории супергравитации, мы получим в точности действие диффеоморфизмов и калибровочных преобразований на поля теории супергравитации. К сожалению, без наложения этого условия алгебра не замыкается (коммутатор двух производных Ли не является снова производной Ли).

Если же мы применим условие проекции, то коммутатор двух обобщенных производных Ли записывается как

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] = \delta_{[\Lambda_1, \Lambda_2]_E}, \quad (2.20)$$

где E-скобка полей определяется определяется следующим образом

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_E^M = \Lambda_{[1}^N \partial_N \Lambda_{2]}^M + Y_{KL}^{MN} \partial_N \Lambda_{[1}^K \Lambda_{2]}^L. \quad (2.21)$$

Тождество Якоби для такой скобки выглядит так

$$[[\Lambda_{[1}, \Lambda_2]_E, \Lambda_{3]}]_E^M = \frac{1}{6} Y_{KL}^{MN} \partial_N ([\Lambda_{[1}, \Lambda_2]_E^K \Lambda_{3]}^L). \quad (2.22)$$

3 Редукция Шерка-Шварца

3.1 Редукция ШШ в стандартной геометрии и тензор вложения

3.1.1 Редукция Шерка-Шварца

Рассмотрим обычную (не обобщенную) геометрию и теорию супергравитации. Произведем редукцию Шерка-Шварца, то есть разобьем координаты $x^{\mathcal{A}} \to (x^a, x^\alpha)$, где большие каллиграфические латинские индексы пробегают $n + D$ значений, малые латинские пробегают n внутренних, а греческие пробегают D внешних координат. Наложим условие, что поля зависят от n внутренних и D внешних координат следующим факторизованным образом

$$T^b(x^a, x^\alpha) = U_m^b(x^a) T^m(x^\alpha). \quad (3.1)$$

При подстановке вектора в такой форме в производную Ли можно получить

$$L_\Lambda T^b(x^a, x^\alpha) = U_m^b (L_\Lambda T^m(x^\alpha) + f_{kl}{}^m \Lambda^k T^l), \quad (3.2)$$

где флаксы

$$f_{ab}{}^c = 2 U_n^c \partial_m U_{[a}^n U_{b]}^m \quad (3.3)$$

определяют структурные константы и массы скалярных полей в получаемой в редукции неабелевой калибровочной теории (Янга-Миллса). Действительно, при калибровочных преобразованиях векторное поле в полученной теории ведет себя как $\delta A^a_\mu = \partial\lambda^a + f_{bc}{}^a A^b_\mu \lambda^c$, что отвечает неабелевой теории Янга-Миллса со структурными константами $f_{bc}{}^a$.

Константы в низкоразмерных теориях Янга-Миллса могут определяться не только вышеописанными флаксами. Также флаксы могут приходить из р-форм. Наконец, некоторые из них вообще нельзя получить редукцией из теории с более высокой размерностью. Такие флаксы называются негеометрическими (в отличие от остальных - геометрических).

3.1.2 Тензор вложения

Наиболее систематическим подходом к конструкции неабелевых низкоразмерных теорий супергравитации является подход с использованием тензора вложения [38], дающий сразу все возможные суперсимметричные деформации в ковариантном виде.

Рассмотрим некоторую теорию супергравитации (скажем, 11-мерную или 10-мерную) и скомпактифицируем ее на тор. Полученная теория будет иметь группу глобальных симметрий G с генераторами t_α. Мы можем рассмотреть более широкий класс суперсимметричных теорий, введя деформацию с подгруппой G_0 группы G с помощью удлинения производной $D_\mu = \partial_\mu + A^M_\mu \Theta^\alpha_M t_\alpha$, где постоянный тензор Θ^α_M называется тензором вложения (он определяет калибровочную группу как подгруппу G_0 группы глобальных преобразований G). При таком удлинении лагранжиан теории меняется. Все теории, которые можно получить с помощью обычной размерной редукции, как описано в предыдущем подразделе, можно получить и в формализме тензора вложения, в то время как обратное неверно. (см. рис. 1). Калибровки, которые нельзя получить с помощью обычной размерной редукции, называются негеометрическими.

Представление, которому принадлежит тензор вложения, это $R_V \otimes R_{adj}$ (что видно из его записи Θ^α_M), где $\dim R_V$ - количество векторных полей в теории (оно же - размерность соответствующего обобщенного пространства), R_{adj} - присоединенное представления группы G. Под действием группы дуальности это представление разбивается в прямую сумму неприводимых представлений. Из требования, чтобы теория оставалась суперсимметричной, следует, что Θ может принадлежать не любому представлению из этой суммы, но только некоторым (линейные условия на тензор вложения), которые схематично имеют вид $\mathbb{P}_R\Theta = 0$, где $\mathbb{P}_R$ - проектор на соответствующее представление.

Также для ковариантности теории мы хотим потребовать, чтобы тензор Θ был инвариантным объектом под действием производной D_μ, что ведет к квадратичным условиям на него в форме

$$\partial_\mu \Theta^\beta_L + A^M_\mu \Theta^\gamma_M (t_\gamma)^K_L \Theta^\beta_K - A^M_\mu \Theta^\mu_M (t_\mu)^\beta_\alpha \Theta^\alpha_L = 0, \tag{3.4}$$

где во втором члене генераторы записаны в представлении R_V , а в третьем в R_{adj} . После упрощения получаем (т.к. Θ - постоянный тензор, а векторные поля произвольны)

$$\Theta^{\mu}_{M}(t_\mu)^{K}_{L}\Theta^{\beta}_{K}+\Theta^{\gamma}_{M}f^{\beta}_{\gamma\alpha}\Theta^{\alpha}_{L}=0, \tag{3.5}$$

где мы использовали, что генераторы в присоединенном представлении совпадают со структурнымии константами. Введя обозначения $X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\bar{C}}=\Theta^{\alpha}_{\bar{A}}(t_\alpha)^{\bar{C}}_{\bar{B}}$ и домножив на t_β , это условие переписывается в форме

$$[X_{\bar{A}},X_{\bar{B}}]=-X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}X_{\bar{C}} \tag{3.6}$$

Важно отметить, что $X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}$ не является ни симметричным, ни антисимметричным, но его симметричная часть обращается в ноль при проекции $X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}X_{\bar{C}}$. Тождество Якоби выполняется с точностью до симметричной части.

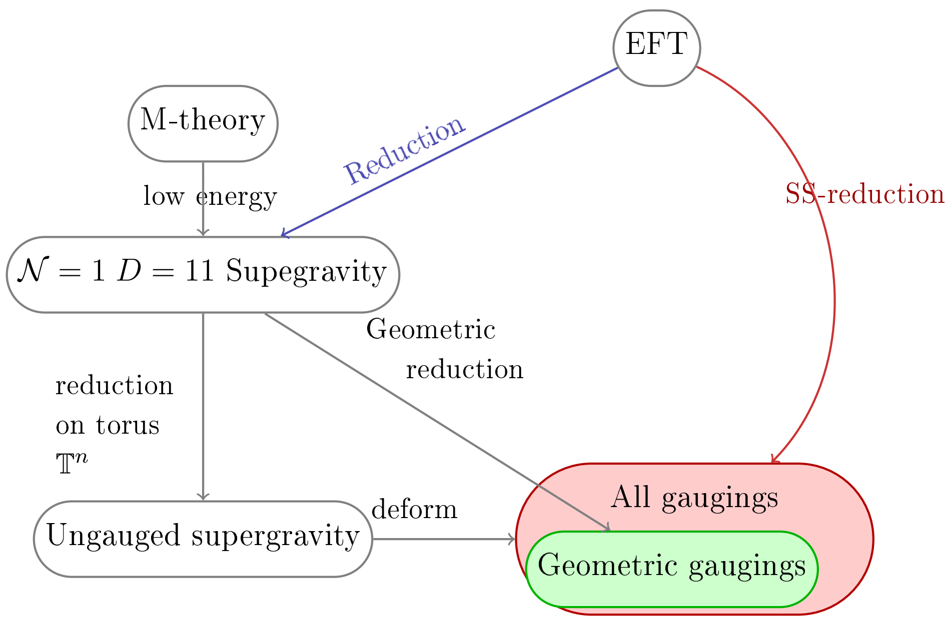


Рис. 1: Relation between frameworks

3.2 Обобщенная редукция Шерка-Шварца

В этом разделе рассмотрим редукцию Шерка-Шварца в обобщенном пространстве. Вновь будем считать, что поля зависят от обобщеных и обычных координат факторизованным образом

$$T^{A}(x^{(D)},\mathbb{X}^{M})=U^{A}_{\bar{A}}(\mathbb{X}^{M})T^{\bar{A}}(x^{(D)}), \tag{3.7}$$

где большие латинские буквы пробегают обобщенные координаты. При подстановке вектора в такой форме в обобщенную производную Ли можно получить

$$\delta_\Lambda T^{A}=U^{A}_{\bar{B}}X_{\bar{C}\bar{D}}{}^{\bar{B}}\Lambda^{\bar{C}}T^{\bar{D}}, \tag{3.8}$$

где

$$X_{\bar{C}\bar{D}}{}^{\bar{B}} = 2U^{\bar{B}}_{B}\partial_{[\bar{C}}U^{C}_{\bar{D}]} - Y^{\bar{B}\bar{A}}_{\bar{M}\bar{D}}U^{\bar{M}}_{C}\partial_{\bar{A}}U^{C}_{\bar{C}}. \tag{3.9}$$

Как мы видим, эта формула является обобщением (3.3), поэтому $X_{\bar{C}\bar{D}}{}^{\bar{B}}$ называются обобщенными флаксами. Совпадение обозначений с $X_{\bar{C}\bar{D}}{}^{\bar{B}}$, возникшими в предыдущем разделе, не является случайным. Как мы увидим позднее, это одна и та же величина.

Если мы потребуем, чтобы алгебра производных Ли замыкалась (не налагая условие проекции - оно может быть нарушено), мы получим условие

$$[X_{\bar{A}}, X_{\bar{B}}] = -X_{[\bar{A},\bar{B}]}{}^{\bar{C}}X_{\bar{C}} \tag{3.10}$$

где мы определили $(X_{\bar{A}})^{\bar{C}}_{\bar{B}} = X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\bar{C}}$. Подставляя X в тождество Якоби и используя условие замыкания, мы получим

$$[[\Lambda_{[1}, \Lambda_2]_E, \Lambda_{3]}]_E V^{\bar{F}} + c.p. = (X_{[\bar{A}\bar{B}]}{}^{\bar{E}}X_{[\bar{E}\bar{C}]}{}^{\bar{G}} + X_{[\bar{C}\bar{A}]}{}^{\bar{E}}X_{[\bar{E}\bar{B}]}{}^{\bar{G}} + X_{[\bar{B}\bar{C}]}{}^{\bar{E}}X_{[\bar{E}\bar{A}]}{}^{\bar{G}})X^{\bar{F}}_{\bar{G}\bar{D}}\Lambda_1^{\bar{A}}\Lambda_2^{\bar{B}}\Lambda_3^{\bar{C}}V^{\bar{D}} \tag{3.11}$$

Чтобы тождество Якоби выполнялось, выражение в правой части должно быть равно нулю.

Мы хотим потребовать также, чтобы X не только был константой, но и преобразовывался инвариантным образом по действием обобщенной производной Ли (т.е. чтобы она обращала его в ноль). Используя, что $X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}$ преобразуется как обобщенный тензор, мы получаем

$$\delta_\Sigma X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\bar{C}} = \Sigma^{\bar{E}}([X_{\bar{E}}, X_{\bar{A}}]^{\bar{C}}_{\bar{B}} + X_{\bar{E}\bar{A}}{}^{\bar{D}}X_{\bar{D}\bar{B}}{}^{\bar{C}} \tag{3.12}$$

Что приводит к квадратичным условиям

$$[X_{\bar{A}}, X_{\bar{B}}] = -X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\bar{C}}X_{\bar{C}} \tag{3.13}$$

Это условие является наиболее сильным, все предыдущие следуют из него. Например, тождество Якоби выполняется с точностью до симметричной части, которая обращается в ноль при проекции $X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}X_{\bar{C}}$, что находится в абсолютном согласии с (3.11).

Как видим, квадратичнеое условие в точности совпадает с (3.6). Определяя $X_{\bar{A},\bar{B}}{}^{\bar{C}}$ согласно (3.9), мы получаем, что линейные условия на Θ выполняются автоматически. (Более подробно это разобрано на примере SL(5) в следующей главе). Наконец, в редуцированной теории мы получаем такой же лагранжиан, как и в полученной добавлением калибровки в предыдущем разделе, причем на этот раз мы можем получить также и негеометрические калибровки (см. рис. 1). Под действием группы G флаксы разбиваются на орбиты. Орбиты, содержащие геометрические флаксы, называются геометрическими, не содержащие - негеометрическими (см. рис. 2). Решения, соответсвтующие негеометрическим флаксам, нарушают условие проекции, но при этом низкоразмерная теория определена корректно.

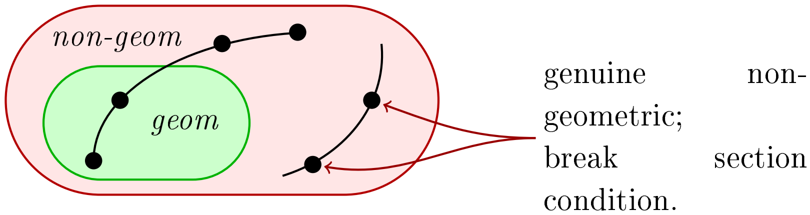


Рис. 2: Geometric and non-geometric gaugings

4 Геометрия $SL(5)$ и компактификация на сферу как теория типа IIB

4.1 Состав полей в 7-мерной супергравитации

Бозонная часть лагранжиана 11-мерной супергравитации имеет вид [39]

$$L = eR - \frac{1}{48}eF^2 + \frac{1}{6}(F \wedge F \wedge A) \tag{4.1}$$

где R - скаляр Риччи, определенный через метрику стандартным образом, A - 3-форма, $F = dA$. Таким образом, полями являются метрика $g_{\mathcal{AB}}$ и 3-форма $A_{\mathcal{MNK}}$. При компактификации на 4-хмерный тор мы получаем следующий набор полей (как и раньше, малые латинские индексы пробегают внутренние измерения, а греческие - внешние, большие каллиграфические латинские - все 11).

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{AB}} &\to g_{ab}, g_{a\beta}, g_{\alpha\beta} \\ A_{\mathcal{ABC}} &\to A_{abc}, A_{ab\gamma}, A_{a\beta\gamma}, A_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Посмотрим теперь, во что переходят эти поля в 7-мерной теории.

$A_{\alpha\beta\gamma}$ - 3-форма. В 7 измерениях 3-форма дуальна 2-форме. Поэтому вместо четырех 2-форм $A_{a\beta\gamma}$ мы по сути имеем 5, преобразующихся по фундаментальному представлению группы $SL(5)$.

$A_{ab\gamma}$ - 6 векторных полей, а $g_{a\beta}$ - еще 4 векторных поля. Всего получается 10 векторных полей, которые также преобразуются под действием 10-мерного представления группы $SL(5)$.

g_{ab} - 10 скалярных полей и A_{abc} - 4 скалярных поля , всего 14. Они записываются в виде метрики

$$M_{MN} = \begin{pmatrix} g_{mn} + \frac{1}{2}A_m{}^{rs}A_{nrs} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}A_m{}^{rs}\epsilon_{rsab} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}A_n{}^{rs}\epsilon_{rscd} & g_{a[b}g_{c]d}\det g \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

(здесь и до конца параграфа большие латинские индексы пробегают 10 значений из 10-мерного представления SL(5))

Эта метрика соответствует верхнетреугольному виду обощенного репера. Любой матрице из $SL(5)$ можно придать такой вид при помощи вращений из $SO(5)$, следовательно, это элемент фактор пространства $SL(5)/SO(5)$.

Наконец, $g_{\mu\nu}$, метрика 7-мерного пространства, является просто скаляром относительно действия группы $SL(5)$.

Таким образом, мы получаем, что глобальной группой симметрии в 7-мерной супергравитации является SL(5) . Поэтому наше обобщенное пространство будет описываться 10-мерным представлением группы $SL(5)$ (т.к. под действием именно этого представления преобразуются векторные поля).

Лагранжианом для исключительной теории поля в обобщенном пространстве является обобщенный скаляр Риччи (подробнее об этом написано на примере других групп в [12]). Будучи записанным в терминах метрики M_{MN}, он принимает вид

$$V = \det M^{-\frac{1}{4}}(\frac{1}{12}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{4}V_3 + \frac{1}{12}V_4), \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= M^{MN}\partial_M M^{KL}\partial_N M_{KL} \\ V_2 &= M^{MN}\partial_M M^{KL}\partial_K M_{NL} \\ V_3 &= -\partial_M M^{MQ}(M^{RS}\partial_Q M_{RS}) \\ V_4 &= M^{MN}(M^{RS}\partial_M M_{RS})(M^{KL}\partial_N M_{KL}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

При наложении условия проекции он воспроизводит скалярный потенциал 7-мерной супергравитации.

4.2 Условие проекции

Для того, чтобы теория была самосогласованной, нужно наложить условие проекции, которое в SL(5) случае принимает следующий вид

$$\epsilon^{ABCDE}\partial_{AB}\partial_{CD} = 0. \tag{4.6}$$

(здесь и далее большие латинские индексы пробегают 5 значений из фундаментального представления SL(5))

Можно показать, что существуют два типа решений условия проекции, один из которых соответсвует 11-мерной супергравитации, а другой - супергравитации типа IIB . Это непосредственно связано с разбиением группы SL(5) под действием группы GL(4) или GL(3)×SL(2). Подгруппа SL(2) отождествляется с группой S-дуальности теории типа IIB. Для решений, отвечающих теории типа IIB мы получаем следующие правила разбиений для нужных нам представлений.

$$\begin{aligned} 5 &\longrightarrow (3,1)_{-2} + (1,2)_3, \\ 10 &\longrightarrow (1,1)_6 + (\bar{3},1)_{-4} + (3,2)_1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где нижний индекс обозначает вес под действием подгруппы GL(1) группы GL(3). Разбивая индекс A фундаментального представления группы SL(5) на два набора индексов соответствующих GL(3) и SL(2), получаем $A = (\hat{\mu}, \hat{a})$, где $\hat{\mu} = 2, 3, 4$ и $\hat{a} = 1, 5$. Следовательно, координаты $\mathbb{X}^{AB}$, параметризующие обобщенное пространство, разбиваются как

$$\mathbb{X}^{AB} \longrightarrow \{\mathbb{X}^{15}, \mathbb{X}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \mathbb{X}^{\hat{\mu}\hat{a}}\}. \tag{4.8}$$

С точки зрения теории струн типа IIB координата $z = \mathbb{X}^{15}$ отождествляется с модами намотки D3-браны, а координаты $\tilde{x}_{\hat{\mu}} = \epsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\mathbb{X}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ с трансляционными модами. Пара координат $\mathbb{X}^{\hat{\mu}\hat{a}}$ отвечает модам намотки D1-браны и F1-струны. Здесь видно, что S-дуальность меняет F1-струну с D1-браной.

После такого разбиения условие проекции записывается как

$$\begin{aligned} &\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \otimes \partial_{\hat{\rho}\hat{b}} = 0, \\ &\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \otimes \partial_{\hat{\nu}\hat{r}} + \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}\epsilon^{\hat{a}\hat{b}}\partial_{\hat{\nu}\hat{\alpha}} \otimes \partial_{\hat{\rho}\hat{b}} = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Нарушая SL(2)-инвариантность выбором в качестве геометрической координаты $\mathbb{X}^{1\hat{\mu}}$ и удаляя координаты, соответствующие D3 и D1 первое уравнение переписывается как

$$\tilde{\partial}^{\hat{\mu}} \otimes \partial_{\hat{\mu}} = 0, \tag{4.10}$$

что есть ничто иное как условие проекции для O(3,3)-обобщенной геометрии. Второе уравнение удовлетворяется тождественно. Таким образом, остаются следующие 6 координат

$$\begin{aligned} &\mathbb{X}^{14}, \quad \mathbb{X}^{12}, \quad \mathbb{X}^{13} \\ &\mathbb{X}^{23}, \quad \mathbb{X}^{34}, \quad \mathbb{X}^{24}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

В этих обозначениях T-дуальность действует перестановкой координат в столбцах. Наконец, чтобы восстановить стандартное пространство-время, необходимо выбрать три координаты. Оставляя только координаты из первой строки, мы возвращаемся к теории струн типа IIA. Чтобы получить дуальную ей теорию струн типа IIB нужно сделать преобразование T-дуальности вдоль $\mathbb{X}^{14}$ и тем самым нужный набор координат будет $\{\mathbb{X}^{23}, \mathbb{X}^{12}, \mathbb{X}^{13}\}$.

4.3 Редукция ШШ и калибровка

Мы предполагаем условие редукции Шерка-Шварца (3.7)

$$T^A(x^{(7)}, \mathbb{X}^{AB}) = U_{\bar{A}}^A(\mathbb{X}^{AB})T^{\bar{A}}(x^{(7)}), \tag{4.12}$$

для любого вектора в обобщенном пространстве. Здесь большие латинские индексы пробегают $A, B = 1, \dots, 5$ из **5**-мерного представления группы SL(5), в то время как подчеркивание сверху означает, что они отвечают "плоским" координатам из расслоения. Обобщенное пространство параметризуется координатами $\{\mathbb{X}^{AB}\}$ преобразующимися по **10**-мерному представлению группы SL(5). Внешнее 7-мерное пространство параметризуется координатами $\{x^{(7)}\}$ и в дальнейшем не появляется.

Известно, что при обобщенной редукции Шерка-Шварца обобщенная теория поля SL(5) воспроизводит структуру $D = 7$ максимальной супергравитации. Интересующий нас объект здесь это тензор вложения $X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\hat{\alpha}}$, который обладает следующей тензорной структурой

$$X_{\bar{A}\bar{B}}{}^{\hat{\alpha}} \in \mathbf{10} \otimes \mathbf{24} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{40}} \oplus \mathbf{175}, \tag{4.13}$$

где $\hat{\alpha}$ индекс из присоединенного представления группы SL(5). Самосогласованность алгебры суперсимметрии требует, чтобы оставались только компоненты из $\mathbf{10} \oplus \mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{40}}$ (если глобальное преобразование Вейля калибруется). Тензор вложения, заданный уравнением (3.9) , этому условию удовлетворяет автоматически, что следует из его явного вида

$$X_{\bar{A}\bar{B},\bar{C}}{}^{\bar{D}} = \frac{1}{3}\theta_{\bar{A}\bar{B}}\delta^{\bar{D}}_{\bar{C}} - \frac{10}{3}\delta^{\bar{D}}_{[\bar{A}}\theta_{\bar{B}]\bar{C}} + \delta^{\bar{D}}_{[\bar{A}}Y_{\bar{B}]\bar{C}} - 2\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}\bar{F}}Z^{\bar{E}\bar{F},\bar{D}} \tag{4.14}$$

где $Y_{\bar{A}\bar{B}} = Y_{\bar{B}\bar{A}}$ параметризует представление **15** и задан

$$Y_{\bar{A}\bar{B}} = U^{\bar{C}}_{C}\partial_{\bar{C}(\bar{A}}U^{C}_{\bar{B})} \ , \tag{4.15}$$

и $Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}} = -Z^{\bar{B}\bar{A},\bar{C}}$ параметризует представление $\overline{\mathbf{40}}$ такой, что $Z^{[\bar{A}\bar{B},\bar{C}]} = 0$ задан

$$Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}} = -\frac{1}{24}\left(\epsilon^{\bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E}\bar{F}}U^{\bar{C}}_{A}\partial_{\bar{D}\bar{E}}U^{A}_{\bar{F}} - \epsilon^{\bar{D}\bar{E}\bar{F}\bar{C}[\bar{A}}U^{\bar{B}]}_{A}\partial_{\bar{D}\bar{E}}U^{A}_{\bar{F}}\right) \ , \tag{4.16}$$

и калибровка тромбона $\theta_{\bar{A}\bar{B}} = -\theta_{\bar{B}\bar{A}}$ параметризует представление **10**, задана

$$\theta_{\bar{A}\bar{B}} = \frac{1}{10}\left(U^{\bar{C}}_{A}\partial_{\bar{A}\bar{B}}U^{A}_{\bar{C}} - U^{\bar{C}}_{A}\partial_{\bar{C}[\bar{A}}U^{A}_{\bar{B}]}\right) \ . \tag{4.17}$$

Задача о нахождении твист-матриц в случае, когда не равны нулю только $Y_{\bar{A}\bar{B}}$, была решена в [40] , где был рассмотрен анзац с симметрией $CSO(p,q,r)$, являющейся группой симметрий пространства $H^{p,q} \times R^{r}$, где $H^{p,q}$ - гиперболоид, и получена в результате геометрическая метрика, отвечающая этому пространству, как в статье [41] .

При редукции Шерка-Шварца скалярный потенциал (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{64}(3X_{MN,R}{}^{S}X_{PQ,S}{}^{R}M^{MP}M^{NQ} - X_{MP,Q}{}^{N}X_{NR,S}{}^{M}M^{PR}M^{QS}) \\ &+\frac{1}{96}(X_{MN,R}{}^{S}X_{PQ,T}{}^{U}M^{MP}M^{NQ}M^{RT}M_{SU} + X_{MP,Q}{}^{N}X_{NR,S}{}^{M}M^{PQ}M^{RS}) \\ &= \frac{1}{64}(2M^{MN}Y_{NP}M^{PQ}Y_{QM} - (M^{MN}Y_{MN})^{2}) \\ &+Z^{MN,P}Z^{QR,S}(M_{MQ}M_{NR}M_{PS} - M_{MQ}M_{NP}M_{RS}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4 Калибровки $\overline{\mathbf{40}}$

Мы хотим найти явную форму твист-матриц, соответствующую определенным орбитам под действием группы U-дуальности, принадлежащим к представлению $\overline{\mathbf{40}}$. Калибровка $Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}}$ выбрана в следующей форме

$$Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}} = v^{[\bar{A}}w^{\bar{B}]\bar{C}}, \tag{4.19}$$

где $\omega^{\bar{B}\bar{C}} = \omega^{\bar{C}\bar{B}}$ является симметричной матрицей. Чтобы выбрать представителя на этой орбите, мы фиксируем вектор v и матрицу w следующим образом

$$\begin{aligned} v^{\bar{A}} &= [1,0,0,0,0], \\ w^{\bar{A}\bar{B}} &= \mathrm{diag}[1,\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q},\underbrace{0,\ldots,0}_{r}], \end{aligned} \tag{4.20}$$

где $p+q+r=4$. В самом деле, вектор v может быть зафиксирован действием группы SL(5), в то время, как оставшаяся свобода в выборе SL(4)используется для диагонализации матрицы w. На уровне $D=7$ калибровочной теории этот выбор соответствует $CSO(p,q,r) := SO(p,q)\times\mathbb{R}^r$ калибровочной группе.

Случай $q=0=r$ дает $SO(4)$ теорию, которая может быть интерпретирована как компактификации супергравитации типа IIB на сферу [42]. Калибровки с $q\neq 0$ дают некомпактные калибровочные группы и соответствуют редукциям на гиперболоид $H^{p,q}$.

Вводя зависящую от $\mathbb{X}$ масштабную функцию ρ мы записываем уравнения для твист-матрицы $U_A^{\bar{A}}$ и обратной к ней . Исчезновение симметричной части калибровки $Y_{\bar{A}\bar{B}}$ дает

$$\partial_{CD}U^C_{(\bar{A}}U^D_{\bar{B})} = 0 \tag{4.21}$$

в то время как из исчезновения калибровки тромбона следует

$$\partial_{CD}(\rho^{-6}U^{CD}_{\bar{A}\bar{B}}) = 0, \text{ or } \partial_{CD}U^{CD}_{\bar{A}\bar{B}} = 6\rho^{-1}U^{CD}_{\bar{A}\bar{B}}\partial_{CD}\rho \tag{4.22}$$

для ненулевых калибровок из $\overleftarrow{40}$ мы получаем

$$U^{GHE}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\partial_{GH}U^{\bar{D}}_{E} - 2U^{GH}_{[\bar{A}\bar{B}}\delta^{\bar{D}}_{\bar{C}]}\partial_{GH}\ln\rho = \epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{G}\bar{H}}v^{\bar{G}}w^{\bar{H}\bar{D}} \tag{4.23}$$

где $v^{\bar{A}} = \delta^{\bar{A}}_{\bar{0}}$, $w^{\bar{H}\bar{0}} = 0$, $w^{\bar{h}\bar{d}} = \mathrm{diag}(1..-1..0)$ (здесь и далее мы используем малые латинские индексы для 1..4) .

Умножая уравнение (4.23) на U^{ABC}_{KLM} и свертывая с ϵ^{KLMRS} мы получаем

$$\epsilon^{GHERS}\partial_{GH}U^{\bar{D}}_{E} - 2\epsilon^{GHMRS}U^{\bar{D}}_{M}\partial_{GH}\ln\rho = U^{RS}_{\bar{G}\bar{H}}v^{\bar{G}}w^{\bar{H}\bar{D}}, \tag{4.24}$$

где было использовано условие $U^{\bar{A}}_{B}\in SL(5)$. Из этого уравнения следуют серьезные ограничения. Например, из него следует, что случай $r=0$ (у w нет 0 на диагонали) не может быть получен как решение условия проекции с симметрией $GL(4)$ (см. Приложение). Следовательно, невозможно получить эти калибровки из теории типа IIA .

4.5 Геометрическая редукция типа IIB

Как было описано в предыдущем разделе, чтобы построить решение в $D = 7$ типа IIB супергравитации с помощью SL(5) исключительной теории поля нужно рассмотреть решение условия проекции, которое зависит только от координат $\mathbb{X}^{\alpha\beta}$, где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Уравнения (4.24) тогда принимают следующую форму

$$\epsilon^{\alpha\beta ERS}\partial_{\alpha\beta}U_E^{\bar{D}} - 2\epsilon^{\alpha\beta MRS}U_M^{\bar{D}}\partial_{\alpha\beta}\ln\rho = U_{\bar{G}\bar{H}}^{RS}v^{\bar{G}}w^{\bar{H}\bar{D}}. \tag{4.25}$$

При выборе $\{RS\} = \{\gamma\delta\}$ из этих уравнений следует $U_{\bar{0}\bar{h}}^{\alpha\beta} = 0$, так как левая часть тождественно равна нулю из-за свойств полностью антисимметричного тензора. Чтобы твист-матрица была невырожденной, ($\det U \neq 0$) необходимо положить $U_{\bar{0}}^{\alpha} = 0$ для всех α (детали см. Приложение). Определяя геометрические координаты ξ^α как $\partial_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma 04}\partial^\gamma$ мы можем записать твист-матрицу, решающая эти уравнения, в следующем виде

$$\begin{aligned}
&U_0^{\bar{0}} = \psi(x), \quad U_m^{\bar{0}} = 0 = U_0^{\bar{m}},\\
&U_\alpha^{\bar{\alpha}} = f(x)\delta_{\bar{\alpha}}^{\alpha} + x^\alpha x^{\bar{\alpha}}g(x),\\
&U_\alpha^{\bar{4}} = a(x)x^\alpha, \quad U_4^{\bar{\alpha}} = b(x)x^{\bar{\alpha}},\\
&U_4^{\bar{4}} = c(x),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

где $x = \sqrt{x^\alpha x^\alpha}$ и a, b, c, f, g некоторые функции от x, которые будут определены ниже. В матричной форме анзац записывается как

$$U_A^{\bar{A}} = \begin{pmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1x^1g(x) + f(x) & x_1x^2g(x) & x_1x^3g(x) & x_1a(x) \\ 0 & x_2x^1g(x) & x_2x^2g(x) + f(x) & x_2x^3g(x) & x_2a(x) \\ 0 & x_3x^1g(x) & x_3x^2g(x) & x_3x^3g(x) + f(x) & x_3a(x) \\ 0 & x^1b(x) & x^2b(x) & x^3b(x) & c(x) \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

Явная форма неизвестных функций существенным образом зависит от калибровочной группы, которая полностью определяется сигнатурой и рангом матрицы w^{mn}. Вообще, для случая группы SO(4) и SO(3,1), когда матрица невырождена и ее сигнатура имеет вид diag[1,1,1,1] и diag[1,1,1,-1] соответственно, мы получаем ($\lambda = \pm 1$)

$$
\begin{aligned}
\rho &= const \\
c &= \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} B^2} \\
b &= \frac{\gamma B}{x} \\
g &= Gb, f = Fb \\
a &= A/x^3 \\
A &= Rc - B \\
F &= \mu\gamma B^{-2} x^2 \\
G &= R/x - \mu\gamma B^{-2} \\
R' &= \mu\gamma B^{-2} x^2
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

где для B задана неявно уравнением: для SO(4) ($\lambda = 1$)

$$
\frac{\mu\gamma}{3} x^3 + const = \frac{1}{2} \frac{B\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} B^2}}{\frac{\gamma^2}{\lambda}} + \frac{1}{2} \frac{\arctan(\frac{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda}} B}{\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} B^2}})}{(\frac{\gamma^2}{\lambda})^{3/2}}, \tag{4.29}
$$

И для SO(3,1) ($\lambda = -1$)

$$
\frac{\mu\gamma}{3} x^3 + const = -\frac{1}{2} \frac{B\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} B^2}}{\frac{\gamma^2}{\lambda}} + \frac{1}{2} \frac{\ln(\sqrt{-\frac{\gamma^2}{\lambda}} B + \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} B^2})}{(-\frac{\gamma^2}{\lambda})^{3/2}} \tag{4.30}
$$

В случае $\alpha = 0$ мы находим явное решение

$$
\begin{aligned}
\rho &= const \\
c &= \gamma\sqrt{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu} \\
b &= \frac{\gamma\sqrt{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu}}{x} \\
g &= (\frac{\ln(\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu)}{2\gamma x} + \frac{\kappa}{x} - \frac{\mu\gamma}{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu})\frac{\gamma\sqrt{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu}}{x}, \\
f &= \frac{\mu\gamma x^2}{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu}\frac{\gamma\sqrt{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu}}{x} \\
a &= (\frac{\ln(\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu)}{2} + \kappa\gamma - 1)\sqrt{\frac{2}{3}\mu\gamma^2 x^3 + \nu x^{-3}}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Твист-матрца U, заданная в (4.27) с таким образом определенными функциями g, f, a, b, и c, дает калибровку $Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}} \in \bar{\mathbf{40}}$ в виде $Z^{\bar{A}\bar{B},\bar{C}} = v^{[\bar{A}} w^{\bar{B}]\bar{C}}$, где $v^{[\bar{A}}$ и $w^{\bar{B}]\bar{C}}$ определены в

(4.20). При этом $q = 0$ или 1, что соответствует SO(4) или SO(1,3). С точки зрения 7-мерной супергравитации это соответствует компактификации на $\mathbb{S}^3$ или $H^{1,3}$.

5 Заключение

Мы рассмотрели в этой работе случай обобщенной геометрии с группой SL(5). Мы рассмотрели тензор вложения с ненулевыми калибровками, отвечающими компактификации на сферу и гиперболоид, и получили явную форму соответствующих твист-матриц.

Семимерная теория, скаляры в которой преобразуются под действием глобальной симметрии $GL(4)/SO(4)$ была построена как $N = 2$ супергравитация в работах [43] и [44]. Позднее, в работе [42] была рассмотрена SL(5) исключительная теория поля с тензором вложения , отвечающим представлению $\overline{\mathbf{40}}$ и истолкована как редукция супергравитации типа IIB на трехмерную сферу. Тензор вложения с SO(4) симметрией был найден явным образом. Скалярная часть лагранжиана при такой компактификации совпала с [43], из чего был сделан вывод, что это та же теория. Было предположено, что тензор вложения с CSO(p,q,r) симметрии отвечает редукции супергравитации типа IIB на $H^{p,q} \oplus T^r$.

Здесь мы исследовали полученный в работе [42] тензор вложения. Мы получили, что теория типа IIA не является решением, в то время как теория типа IIB является, и оно было предоставлено нами в явной форме.

В дальнейшем планируется исследовать тензоры вложения с ненулевыми компонентами не только из $\overline{\mathbf{40}}$, но и из **15**. (Решение для тензора вложения с ненулевыми компонентами только из **15** было найдено в [40]). Ожидается, что такие решения уже дадут нам негеометрические орбиты.

Задача о полной классификации всех решений, выполненная для групп меньшей размерности в [19], в данном случае еще не решена. Хотя в работе [45] флаксы и были проклассифицированы и разделены на геометрические и негеометрические под действием подгруппы SL(4) группы SL(5), задача о полной классификации решений по орбитам выглядит крайне трудоемкой. Так, будучи записанными в базисе Гребнера, полная система состоит из более чем 50 уравнений, и попытки решить их с помощью программ компьютерной алгебры на персональном компьютере за обозримое время пока не увенчались успехом.

6 Приложение

6.1 Несостоятельность решения с симметрией $GL(4)$

Для решения с симметрией $GL(4)$ единственные ненулевые производные это ∂_{0i} . Подставим это в уравнение (4.24)

$$\epsilon^{0hERS}\partial_{0h}U_E^{\bar{D}} - 2\epsilon^{0hMRS}U_M^{\bar{D}}\partial_{0h}\ln\rho = U_{\bar{G}\bar{H}}^{RS}v^{\bar{G}}w^{\bar{H}\bar{D}} \tag{6.1}$$

Легко видеть, что, выбирая RS как $0s$ мы получаем 0 в левой части. Следовательно, мы имеем условие на матрицу U

$$U^{0s}_{\bar{G}\bar{H}} v^{\bar{G}} w^{\bar{H}\bar{D}} = 0 \tag{6.2}$$

Подставляя v и w, легко видеть

$$U^{0s}_{\bar{0}\bar{h}} = 0 \tag{6.3}$$

Проблема заключается в том, что из этого уравнения мы немедленно получаем, что детерминант U равен нулю. Покажем, как именно. Перепишем уравнение.

$$U^{0}_{\bar{0}} U^{s}_{\bar{h}} = U^{0}_{\bar{h}} U^{s}_{\bar{0}} \tag{6.4}$$

Здесь мы видим два возможных случая: $U^0_0 \neq 0$ и $U^0_0 = 0$. Начнем с первого. Разделим обе части на U^0_0 и получим

$$U^{s}_{\bar{h}} = U^{0}_{\bar{h}} \frac{U^{s}_{\bar{0}}}{U^{0}_{\bar{0}}} \tag{6.5}$$

Выбирая $s = 1$ и полагая h пробегающим остальные значения, мы получаем, что два столбца матрицы U пропорциональны, что означает, что детерминант равен нулю.

Во втором случае мы получаем

$$U^{0}_{\bar{h}} U^{s}_{\bar{0}} = 0 \tag{6.6}$$

что означает, что или $U^0_{\bar{h}} = 0$ для всех h или же $U^s_{\bar{0}} = 0$ для всех s . Что вновь означает, что детерминант равен 0. Следовательно, решение с симметрией $GL(4)$ не подходит, и единственный возможный случай обладает симметрией$SL(3)$.

6.2 Решение с симметрией $SL(3)$

Без потери общности выберем ненулевые производные как $\partial_{12}, \partial_{23}, \partial_{31}$. Здесь нужно заметить, что анзац (4.23) нарушает $SL(5)$ до $GL(4)$ в подчеркнутых индексах, в то время как условие проекции нарушает ее в неподчеркнутых, что означает, что эти два нарушения являются независимыми и выбор координат $0, 1, 2$ эквивалентен выбору $1, 2, 3$.

Мы можем переписать (4.24) следующим способом

$$\epsilon^{\alpha\beta ERS} \partial_{\alpha\beta} U^{\bar{D}}_{E} - 2\epsilon^{\alpha\beta MRS} U^{\bar{D}}_{M} \partial_{\alpha\beta} \ln \rho = U^{RS}_{\bar{G}\bar{H}} v^{\bar{G}} w^{\bar{H}\bar{D}} \tag{6.7}$$

Выберем теперь $(RS) = (\gamma\delta)$. Так как греческие индексы пробегают только три значения, мы видим, что левая часть ноль и получаем следующее ограничение в случае $SO(p, q)$

$$U^{\alpha\beta}_{\bar{0}\bar{h}} = 0 \tag{6.8}$$

Мы получаем отсюда, что с необходимостью (учитывая требование $\det U = 1$) мы имеем $U_{\bar{0}}^{\alpha} = 0$ для всех α .

Перепишем сейчас (4.23) в более удобной форме, содержащей только матрицы с нижними подчеркнутыми индексами.

$$U^{GH}_{[\bar{A}\bar{B}}\partial_{GH}U^{F}_{\bar{C}]} + 2U^{GHF}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\partial_{GH}\ln\rho = -\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{G}\bar{H}}v^{\bar{G}}w^{\bar{H}\bar{D}}U^{F}_{\bar{D}} \tag{6.9}$$

Применяя решение условия проекции с симметрией $SL(3)$ получим

$$U^{\alpha\beta}_{[\bar{A}\bar{B}}\partial_{\alpha\beta}U^{F}_{\bar{C}]} + 2U^{\alpha\beta F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\partial_{\alpha\beta}\ln\rho = -\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{0}\bar{H}}w^{\bar{H}\bar{D}}U^{F}_{\bar{D}} \tag{6.10}$$

Рассмотрим компоненту $\bar{C} = 0$ и используем $U_{\bar{0}}^{\alpha} = 0$. После небольших выкладок мы получаем

$$U_{\bar{0}}^{F} = C^{F}\rho^{-2} \tag{6.11}$$

где C^F константы. Для матриц с верхними подчеркнутыми индексами мы отсюда легко получаем

$$U_{0}^{\bar{A}}C^{0} + U_{4}^{\bar{A}}C^{4} = \delta_{\bar{0}}^{\bar{A}}\rho^{2} \tag{6.12}$$

Теперь вернемся к уравнению (6.10) и перепишем его более удобным способом, используя уравнение на тромбон (4.22)

$$\rho^{4}\partial_{\alpha\beta}(U^{\alpha\beta F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\rho^{-4}) = -\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{0}\bar{H}}w^{\bar{H}\bar{D}}U^{F}_{\bar{D}} \tag{6.13}$$

Это уравнение может быть упрощено еще сильнее. Домножим его на $\epsilon^{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{K}\bar{L}}$ и после небольших преобразований получим

$$U_{F}^{\bar{A}}\rho^{4}\partial^{\gamma}(\delta^{FMN}_{\gamma 04}U^{\bar{K}\bar{L}}_{MN}\rho^{-4}) = -\delta^{\bar{K}\bar{L}}_{\bar{0}\bar{H}}w^{\bar{H}\bar{A}} \tag{6.14}$$

Введем $T_{B}^{\bar{A}} = \rho^{-2}U_{B}^{\bar{A}}$. Тогда мы получаем

$$T_{\gamma}^{\bar{A}}\partial^{\gamma}T_{04}^{\bar{K}\bar{L}} + T_{4}^{\bar{A}}\partial^{\gamma}T_{\gamma 0}^{\bar{K}\bar{L}} + T_{0}^{\bar{A}}\partial^{\gamma}T_{4\gamma}^{\bar{K}\bar{L}} = -3\delta^{\bar{K}\bar{L}}_{\bar{0}\bar{H}}w^{\bar{H}\bar{A}}\rho^{-6} \tag{6.15}$$

Выбирая различные A, K, L, мы получаем 4 отдельных уравнения.

$$\begin{gathered}
T_{\gamma}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{04}^{\bar{k}\bar{l}} + T_{4}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{\gamma 0}^{\bar{k}\bar{l}} + T_{0}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{4\gamma}^{\bar{k}\bar{l}} = 0 \\
T_{\gamma}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{04}^{\bar{k}\bar{l}} + T_{4}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{\gamma 0}^{\bar{k}\bar{l}} + T_{0}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{4\gamma}^{\bar{k}\bar{l}} = 0 \\
T_{\gamma}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{04}^{\bar{k}\bar{0}} + T_{4}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{\gamma 0}^{\bar{k}\bar{0}} + T_{0}^{\bar{0}}\partial^{\gamma}T_{4\gamma}^{\bar{k}\bar{0}} = 0 \\
T_{\gamma}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{04}^{\bar{k}\bar{0}} + T_{4}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{\gamma 0}^{\bar{k}\bar{0}} + T_{0}^{\bar{a}}\partial^{\gamma}T_{4\gamma}^{\bar{k}\bar{0}} = -\frac{3}{2}w^{\bar{k}\bar{a}}\rho^{-6}
\end{gathered} \tag{6.16}$$

Используя условие (6.12), которое принимает в терминах матрицы T форму

$$T_0^{\bar{A}} C^0 + T_4^{\bar{A}} C^4 = \delta_{\bar{0}}^{\bar{A}} \tag{6.17}$$

мы получаем, что первое уравнение удовлетворяется тождественно, остальные принимают вид

$$\partial^\gamma T_{4\gamma}^{\bar{k}\bar{l}} = 0 \tag{6.18}$$

$$-\frac{1}{2} T_\gamma^{\bar{k}} \partial^\gamma T_4^{\bar{0}} + \frac{1}{2} T_4^{\bar{k}} \partial^\gamma T_\gamma^{\bar{0}} = 0 \tag{6.19}$$

$$-\frac{1}{2} T_\gamma^{\bar{a}} \partial^\gamma T_4^{\bar{k}} + \frac{1}{2} T_4^{\bar{a}} \partial^\gamma T_\gamma^{\bar{k}} = \frac{3}{2} C^0 w^{\bar{k}\bar{a}} \rho^{-6} \tag{6.20}$$

Легко видеть, что первое является антисимметризацией последнего. Перепишем последнее в форме

$$-\frac{1}{2} T_\gamma^{\bar{a}} \partial^\gamma T_4^{\bar{k}} = \frac{3}{2} C^0 w^{\bar{k}\bar{a}} \rho^{-6} - \frac{1}{2} T_4^{\bar{a}} \partial^\gamma T_\gamma^{\bar{k}} \tag{6.21}$$

мы видим, что в левой части у нас матрица, ранг которой не превышает трех, а значит, детерминант матрицы в правой части должен быть равен нулю. Это достигается требованием

$$T_4^{\bar{b}} w_{ba} \partial^\gamma T_\gamma^{\bar{a}} = C \rho^{-6} \tag{6.22}$$

Если, используя это условие, мы домножим уравнение на $T_4^c w_{ck}$ мы получим замечательное условие: $\partial_\gamma (T_4^k T_4^c w_{ck}) = 0$, что означает, что мы нашли один из интегралов уравнения. Теперь мы заканчиваем с общим анализом и хотим найти какое-нибудь решение, для чего подставляем анзац.

6.3 Анзац.

Рассмотрим случай, когда матрица w имеет вид $\mathrm{diag}[\lambda, \lambda, \lambda, 1]$, где $\lambda^2 = 1$ (т.е. SO(4) и SO(3,1)).

Рассмотрим следующий анзац

$$\begin{aligned}
T_\gamma^{\bar{4}} &= x_\gamma a \\
T_4^{\bar{\alpha}} &= x^\alpha b \\
T_4^{\bar{4}} &= c \\
T_\gamma^{\bar{\alpha}} &= (x_\gamma x^\alpha g + \delta_\gamma^\alpha f) \\
T_a^0 &= T_0^a = 0 \\
T_0^0 &= \frac{1}{C^0}
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Легко видеть, что этот анзац удовлетворяет уравнению (6.19) тождественным образом. Более того, если мы найдем обратную матрицу и подставим ее в (4.21), мы увидим, что и это уравнение удовлетворено тождественно, а уравнение (4.22) сведено к частному случаю (6.20), которое и остается единственным нетривиальным уравнением на этот анзац. Подставляя, мы получаем систему уравнений ($u = x^2$)

$$\begin{aligned}
-2uac' + c(3a + 2ua') &= C\rho^{-6} \\
-a(b + 2ub') + c(4g + 2ug' + 2f') &= 0 \\
-(ug + f)2c' + b(3a + 2ua') &= 0 \\
fb &= -\lambda C\rho^{-6} \\
-2ugb' - 2fb' + 3bg + 2ubg' + 2bf' &= 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Мы знаем, что $\det T = \rho^{-10}$ так как $\det U = 1$. Используя наш анзац, это уравнение принимает вид

$$\frac{2}{3}C\rho^{-10} = cf^2(f + u(g - \frac{ab}{c})) \tag{6.25}$$

Используя найденный выше интеграл, мы можем решить эту систему в смысле задачи решения неявной функцией и получить ответ, уже данный в главной части.

Литература

[1] M. B. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory. Vol. 1: Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987.

[2] E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions," *Nucl.Phys.* **B443** (1995) 85–126, `arXiv:hep-th/9503124 [hep-th]`.

[3] E. Fradkin and A. A. Tseytlin, "QUANTUM EQUIVALENCE OF DUAL FIELD THEORIES," *Annals Phys.* **162** (1985) 31.

[4] K. Kikkawa and M. Yamasaki, "Casimir effects in superstring theories," *Phys.Lett.* **B149** (1984) 357.

[5] N. Sakai and I. Senda, "Vacuum energies of string compactified on torus," *Prog.Theor.Phys.* **75** (1986) 692.

[6] C. Vafa, "Lectures on strings and dualities," `arXiv:hep-th/9702201 [hep-th]`.

[7] A. Giveon, M. Porrati, and E. Rabinovici, "Target space duality in string theory," *Phys.Rept.* **244** (1994) 77–202, arXiv:hep-th/9401139 [hep-th].

[8] N. Obers and B. Pioline, "U duality and M theory," *Phys.Rept.* **318** (1999) 113–225, arXiv:hep-th/9809039 [hep-th].

[9] J. H. Schwarz, "Introduction to M theory and AdS / CFT duality," arXiv:hep-th/9812037 [hep-th].

[10] M. G. del Moral, "Dualities as symmetries of the Supermembrane Theory," arXiv:1211.6265 [hep-th].

[11] C. Hull and P. Townsend, "Unity of superstring dualities," *Nucl.Phys.* **B438** (1995) 109–137, arXiv:hep-th/9410167 [hep-th].

[12] G. Aldazabal, D. Marques, and C. Nunez, "Double Field Theory: A Pedagogical Review," arXiv:1305.1907 [hep-th].

[13] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, "Supergravity theory in eleven-dimensions," *Phys.Lett.* **B76** (1978) 409–412.

[14] E. Cremmer and B. Julia, "The N=8 supergravity theory. 1. The lagrangian," *Phys.Lett.* **B80** (1978) 48.

[15] E. Cremmer and B. Julia, "The SO(8) supergravity," *Nucl.Phys.* **B159** (1979) 141.

[16] W. Siegel, "Superspace duality in low-energy superstrings," *Phys.Rev.* **D48** (1993) 2826–2837, arXiv:hep-th/9305073 [hep-th].

[17] C. Hull, "Generalised geometry for M-theory," *JHEP* **0707** (2007) 079, arXiv:hep-th/0701203 [hep-th].

[18] G. Dibitetto, A. Guarino, and D. Roest, "Exceptional Flux Compactifications," *JHEP* **1205** (2012) 056, arXiv:1202.0770 [hep-th].

[19] G. Dibitetto, J. Fernandez-Melgarejo, D. Marques, and D. Roest, "Duality orbits of non-geometric fluxes," arXiv:1203.6562 [hep-th].

[20] F. Hassler and D. Lüst, "Non-commutative/non-associative IIA (IIB) Q- and R-branes and their intersections," arXiv:1303.1413 [hep-th].

[21] S. Jensen, "The KK-Monopole/NS5-Brane in Doubled Geometry," *JHEP* **1107** (2011) 088, arXiv:1106.1174 [hep-th].

[22] D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Lust, and P. Patalong, "Non-Geometric Fluxes in Supergravity and Double Field Theory," arXiv:1204.1979 [hep-th].

[23] A. Coimbra, C. Strickland-Constable, and D. Waldram, "$E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$ Generalised Geometry, Connections and M Theory," arXiv:1112.3989 [hep-th].

[24] D. S. Berman, M. Cederwall, A. Kleinschmidt, and D. C. Thompson, "The gauge structure of generalised diffeomorphisms," arXiv:1208.5884 [hep-th].

[25] O. Hohm and H. Samtleben, "Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB," *Phys.Rev.* **D89** (2014) 066016, arXiv:1312.0614 [hep-th].

[26] O. Hohm and H. Samtleben, "Exceptional field theory. II. $\mathrm{E}_{7(7)}$," *Phys.Rev.* **D89** no. 6, (2014) 066017, arXiv:1312.4542 [hep-th].

[27] O. Hohm and H. Samtleben, "U-duality covariant gravity," *JHEP* **1309** (2013) 080, arXiv:1307.0509 [hep-th].

[28] O. Hohm and H. Samtleben, "Exceptional Form of D=11 Supergravity," *Phys.Rev.Lett.* **111** (2013) 231601, arXiv:1308.1673 [hep-th].

[29] O. Hohm and H. Samtleben, "Exceptional field theory. III. $\mathrm{E}_{8(8)}$," *Phys.Rev.* **D90** no. 6, (2014) 066002, arXiv:1406.3348 [hep-th].

[30] O. Hohm and Y.-N. Wang, "Tensor hierarchy and generalized Cartan calculus in SL(3) Γ— SL(2) exceptional field theory," *JHEP* **1504** (2015) 050, arXiv:1501.01600 [hep-th].

[31] A. Abzalov, I. Bakhmatov, and E. T. Musaev, "Exceptional field theory: $SO(5,5)$," arXiv:1504.01523 [hep-th].

[32] E. Musaev, "U-dualities in Type II string theories and M-theory," arXiv:1311.3331 [hep-th].

[33] P. West, "Dual gravity and E11," arXiv:1411.0920 [hep-th].

[34] P. West, "E11, generalised space-time and equations of motion in four dimensions," *JHEP* **1212** (2012) 068, arXiv:1206.7045 [hep-th].

[35] P. West, "Generalised geometry, eleven dimensions and E11," *JHEP* **1202** (2012) 018, arXiv:1111.1642 [hep-th].

[36] E. T. Musaev, "Gauged supergravities in 5 and 6 dimensions from generalised Scherk-Schwarz reductions," *JHEP* **1305** (2013) 161, arXiv:1301.0467 [hep-th].

[37] D. S. Berman and D. C. Thompson, "Duality Symmetric String and M-Theory," arXiv:1306.2643 [hep-th].

[38] H. Samtleben, "Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications," *Class.Quant.Grav.* **25** (2008) 214002, arXiv:0808.4076 [hep-th].

[39] E. Cremmer, B. Julia, H. Lu, and C. Pope, "Dualization of dualities. 1.," *Nucl.Phys.* **B523** (1998) 73–144, `arXiv:hep-th/9710119 [hep-th]`.

[40] O. Hohm and H. Samtleben, "Consistent Kaluza-Klein Truncations via Exceptional Field Theory," *JHEP* **1501** (2015) 131, `arXiv:1410.8145 [hep-th]`.

[41] C. Hull and N. Warner, "Noncompact Gaugings From Higher Dimensions," *Class.Quant.Grav.* **5** (1988) 1517.

[42] H. Samtleben and M. Weidner, "The Maximal D=7 supergravities," *Nucl.Phys.* **B725** (2005) 383–419, `arXiv:hep-th/0506237 [hep-th]`.

[43] A. Salam and E. Sezgin, "SO(4) Gauging of $N = 2$ Supergravity in Seven-dimensions," *Phys.Lett.* **B126** (1983) 295–300.

[44] M. Cvetic, H. Lu, and C. Pope, "Consistent Kaluza-Klein sphere reductions," *Phys.Rev.* **D62** (2000) 064028, `arXiv:hep-th/0003286 [hep-th]`.

[45] C. D. A. Blair and E. Malek, "Geometry and fluxes of SL(5) exceptional field theory," *JHEP* **1503** (2015) 144, `arXiv:1412.0635 [hep-th]`.