Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой
теории поля

Швингеровское рождение пар и возможность его наблюдения в твердых телах с индуцированной релятивистской инвариантностью

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:
студент 221 группы
Руслан Алексеевич Абрамчук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Зубков М.А.

Долгопрудный
2016

Содержание

1 Введение 3

2 Релятивистские фермионы Дираковских и Вейлевских полуметаллах 5

3 Уровни Ландау и соответствующие волновые функции 5

4 Рождение пар на нулевом уровне 7

5 Швингеровское рождение во внешнем магнитном поле 8
5.1 Квазиклассическое рассмотрение 8
5.2 Точное рассмотрение 10

6 Частота рождения пар и вероятность перехода вакуум-вакуум 13

7 Вклад процесса рождения пар в проводимость 14
7.1 Идеальная невзаимодействующая система при нулевой температуре 14
7.2 Грубое рассмотрение плазмы квазичастиц 15

8 Заключение и обсуждение 16

1 Введение

Данная работа основана на нашей статье [36]. Недавно Дираковские [1, 2, 3, 4, 5, 6] и Вейлевские [7]полуметаллы были открыты экспериментально. Это открытие оказало влияние на взаимосвязь между физикой твёрдого тела и физикой высоких энергий, так как эти материалы (подобно ^{3}He-A [8]) могут служить площадкой для экспериментальной проверки различных эффектов, специфичных для физики высоких энергий [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Эффективная низкоэнергетическая теория квазичастиц-фермионов в Дираковских и Вейлевских полуметаллах обладает индуцированной релятивистской инвариантностью [8, 16]. Эти фермионы заряжены и взаимодействуют с внешними электромагнитными полями, что позволяет наблюдать различные эффекты, связанные с киральной аномалией [17, 18, 3, 13].

Киральную аномалию можно рассматривать как эволюцию состояний на нижнем уровне Ландау. Рождение пар на нулевом уровне доминирует в случае $E/B \ll 1$. Швингеровское рождение относится к остальным уровням и даёт поправки в разложении по E/B. В данной работе рассмотрен этот эффект и дана оценка его вклада в проводимость[1].

Особо отметим, что необходимо различать Vacuum decay rate и частоту рождения пар [19]. Логарифм вероятности перехода вакуум-вакуум равен Vacuum decay rate с обратным знаком. Vacuum decay rate как мнимая часть действия для Дираковских массивных фермионов был вычислен во многих работах (например [20, 21]). Частота рождения пар в присутствии постоянных электрического и магнитного полей была вычислена в [24] посредством точного решения уравнения Дирака. В [23] тот же результат был получен в квазиклассическом приближении. При этом рассматриваемый процесс до сих пор не наблюдался из-за того, что все известные заряженные частицы массивны, а постоянная тонкой структуры мала.

Недавно открытые Дираковские полуметаллы предоставляют возможность наблюдать Швингеровское рождение экспериментально. Отличительной особенностью этих материалов является почти что нулевая масса квазичастиц. В случаях нулевой и малой массы вычисления формально отличаются из-за различной структуры собственных состояний гамильтониана одночастичной задачи. Заметим, что переход к пределу $m \to 0$ вызывает некоторые трудности. Например, в этом пределе выражение для Vacuum decay rate расходится. Ниже показано, что эта расходимость отражает киральную аномалию. При этом частота рождения пар остаётся конечной.

Здесь частота рождения пар получена двумя способами — квазиклассически и посредством явного решения уравнения Вейля. В последнем случае задача о рождении пар сведена к задаче рассеяния. В ходе решения

[1] Аномальное рождение квазичастиц можно воспринимать как вырожденный случай Швингеровского рождения, происходящего с единичной вероятностью.

этой задачи мы сталкиваемся с так называемым парадоксом Клейна. С той же проблемой столкнулся автор [22] при рассмотрении массивных Дираковских фермионов. Парадокс проявляется в нефизической величине амплитуды отражённой волны. В [24] применяется метод, предложенный в [22]: предлагается определение падающей и отражённой волн и специальная неинтуитивная нормировка их амплитуд. В работе [25] предлагается другой способ, близкий к нашему. В любом случае, конечные выражения для Vacuum decay rate совпадают с классическим результатом [20]. Тот же ответ получен в [26] с помощью операторной техники, являющейся развитием канонического формализма для теорий с нестабильным вакуумом (см. [27] и ссылки там): постулируются коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения состояний, стационарных в присутствии потенциальной ступеньки.

Мы предлагаем свой способ разрешения парадокса Клейна в контексте задачи о рождении пар. Мы считаем, что в постулировании коммутационных соотношений и построении квантовой теории поля во внешнем электрическом поле нет необходимости. В контексте физики твёрдого тела эта проблема должна иметь решение на уровне многочастичной квантовой механики. Мы определяем падающую и отражённую волны, рассматривая электрические токи, возникающие в ответ на внешнее поле (результат оказывается схожим с [25]). При использовании нашего определения волн в случае ненулевой массы частота рождения пар получается согласованной с Швингеровским значением Vacuum decay rate. В безмассовом случае нет такого способа проверки ответа, так как Vacuum decay rate расходится. В то же время частота рождения пар конечна и может быть получена из экспериментов по измерению кинетических коэффициентов.

В частности в [28] предлагается наблюдать аномальное рождение через вклад в проводимость, который отождествляется с киральным магнитным (CME) [29] вкладом в проводимость. При таком рассмотрении проводимость оказывается пропорциональной квадрату магнитного поля. Возможное экспериментальное наблюдение этого вклада описано в [4] (см. обсуждение в [16, 31, 17, 18, 5, 30]). В [4] дано квазиравновесное описание. Однако в [32] показано, что в релятивистской квантовой теории поля не существует равновесного кирального магнитного эффекта. Поэтому мы полагаем, что наблюдаемое увеличение проводимости имеет отличную от CME физическую основу. Здесь мы предлагаем другое выражение для поправки к проводимости, основанное на рождении пар, предполагая, что в реальных материалах киральная аномалия не приводит к появлению (квази) равновесного кирального химического потенциала.

2 Релятивистские фермионы Дираковских и Вейлевских полуметаллах

Рассмотрим эффективную теорию недавно открытых Дираковских полуметаллов Cd_3As_2 и Na_3Bi с двумя ферми-точками [1, 2, 3]. В окрестности каждой из двух ферми-точек есть левые или правые Вейлевские фермионы. Действия для правых (около точки $+\mathbf{K}$) имеет вид [33]

$$S_R = \frac{1}{2}\int d^4y|\mathbf{e}|[\bar{\Psi}ie_b^j\sigma^b\mathcal{D}_j\Psi - [\mathcal{D}_j\bar{\Psi}]ie_b^j\sigma^b\Psi] \tag{2.1}$$

где

$$i\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu + A_\mu(x) \tag{2.2}$$

ковариантная производная, отвечающая калибровочной группе $U(1)$. То же для левых (около $-\mathbf{K}$)

$$S_L = \frac{1}{2}\int d^4y|\mathbf{e}|[\bar{\Psi}ie_b^j\bar{\sigma}^b\mathcal{D}_j\Psi - [\mathcal{D}_j\bar{\Psi}]ie_b^j\bar{\sigma}^b\Psi] \tag{2.3}$$

$$i\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu - A_\mu(x) \tag{2.4}$$

Всюду $\bar{\sigma}^0 = 1$, $\bar{\sigma}^a = -\sigma^a$, $a = 1,2,3$. Тетрада при отсутствии упругих деформаций имеет вид

$$[e_0^0]^{-1} = |\mathbf{e}| = v_F, \quad e_a^i = \hat{f}_a^i, \quad e_0^i = 0, \quad e_a^0 = 0 \tag{2.5}$$

где v_F – скорость Ферми, $a,i,j,k = 1,2,3$, а $f_a^i = v_F\hat{f}_a^i$ имеет смысл анизотропии скорости Ферми, описываемой матрицей 3×3

$$\hat{f} = \mathrm{diag}(\nu^{-1/3}, \nu^{-1/3}, \nu^{2/3}) = \mathrm{diag}(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3) \tag{2.6}$$

Скорости Ферми по осям 1 и 2 приблизительно равны. Например в Cd_3As_2 [2] $v_F\hat{f}_1 \sim v_F\hat{f}_2 \sim c/200$ в то время как $\hat{f}_3 \sim 0.1\hat{f}_1$. В Na_3Bi [1] $v_F\hat{f}_1 \approx 4.17\times 10^5 m/s$, $v_F\hat{f}_2 \approx 3.63\times 10^5 m/s \sim c/800$, а $v_F\hat{f}_3 \approx 1.1\times 10^5 m/s$. Таким образом $\hat{f}_3 \approx 0.27\hat{f}_1$.

3 Уровни Ландау и соответствующие волновые функции

Рассмотрим безмассовые заряженые фермионы в постоянном и однородном магнитном поле $\vec{H}$, направленном вдоль x_3. Уравнение Дирака

$$i\partial_0\Psi = \mathcal{H}\Psi, \quad \mathcal{H} = (v_F\vec{\alpha}\,\hat{f}\,(-i\nabla - \vec{A}) + A_0) \tag{3.1}$$

Выбираем представление $\vec{\alpha}$ и калибровку $A = (A_0, \vec{A})$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Hx_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = 0$$

Для упрощения формул масштабируем координаты и компоненты калибровочного поля следующим образом: $y_i = v_F \hat{f}_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$, суммирование по i не производится) и $B = v_F^2 \hat{f}_1 \hat{f}_2 H$.

Ищем решение в виде

$$\Psi = e^{i(p_2 y_2 + p_3 y_3 - \mathcal{E} y_0)} \begin{pmatrix} \xi(y_1) \\ \eta(y_1) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

В выбранном представлении (3.1) распадается

$$\mathcal{E}\xi = \sigma_1(-i\xi') + \sigma_2(p_2 - By_1)\xi + \sigma_3 p_3 \xi \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E}\eta = -\sigma_1(-i\eta') - \sigma_2(p_2 - By_1)\eta - \sigma_3 p_3 \eta \tag{3.4}$$

При замене $\mathcal{E} \to -\mathcal{E}$ уравнение для ξ превращается в уравнение для η и наоборот, поэтому ограничимся рассмотрением уравнения для ξ. Для $\xi_{1,2}$ получаем уравнения типа гармонического осциллятора

$$(\mathcal{E}^2 - p_3^2 + \sigma_3 B)\xi = -\xi'' + B^2 \left(y_1 - \frac{p_2}{B} \right)^2 \xi \tag{3.5}$$

Решение системы имеет вид $\xi_1 = \psi_n(y_1 - p_2/B)$, $\xi_2 = a_n \psi_{n-1}(y_1 - p_2/B)$, $\mathcal{E}_{np_3} = \pm\sqrt{2nB + p_3^2}$ для $n \geq 0$. ψ_n – волновые функции осциллятора ($\psi_{-1} = 0$, H_n – полиномы Эрмита)

$$\psi_n(y) = \left(\frac{B}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{B}{2} y^2 \right) H_n(y\sqrt{B}) \tag{3.6}$$

При помощи свойств полиномов Эрмита и следующих из них свойств волновых функций

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x) \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ \psi_n' &= -By\psi_n + \sqrt{2nB}\psi_{n-1} \\ \psi_{n-1}' &= By\psi_{n-1} - \sqrt{2nB}\psi_n \end{aligned} \tag{3.7}$$

вычисляем a_n посредством подстановки решения в (3.3). Нормированные на единицу решения (3.3) имеют вид

$$\xi_{np_3}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\mathcal{E}_{np_3} - p_3)^2}{2nB}}} \begin{pmatrix} \psi_n\left(y_1 - \frac{p_2}{B}\right) \\ -i\frac{\mathcal{E}_{np_3} - p_3}{\sqrt{2nB}} \psi_{n-1}\left(y_1 - \frac{p_2}{B}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{np_3} = \pm\sqrt{2nB + p_3^2}, \quad n \geq 1$$

$$\xi_{0p_3}(y_1) = \begin{pmatrix} \psi_0\left(y_1 - \frac{p_2}{B}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_{0p_3} = p_3 \tag{3.8}$$

4 Рождение пар на нулевом уровне

В этом разделе воспроизведено известное (например, [28]) выражение для частоты рождения пар, относящегося к киральной аномалии.

К системе, рассмотренной в разделе 3, добавляем однородное электрическое поле $\vec{E}$, действующее при $0 < t < T$, направленное вдоль третьей оси. Проследим за эволюцией состояний (3.1) на нулевом уровне. Выбираем калибровку ($\tilde{E} = v_F \hat{f}_3 E$)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ By_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = -\tilde{E}y_3 \tag{4.1}$$

H, E всюду считаются неотрицательными. В противном случае рассмотрение подобно изложенному.

Подробно проследим за эволюцией левых — верхней половины ψ в (3.1). При $0 < t < T$

$$\begin{aligned} \xi(t) =& e^{-i\mathcal{H}_L t}\xi(0) \\ =& \exp\left(i\tilde{E}ty_3 + i\int_0^t (p_3 + \tilde{E}t')dt' + ip_2y_2 + ip_3y_3\right)\xi_{0p_3}(y_1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$\xi(t)$ не является собственной функцией гамильтониана, но является собственной функцией оператора импульса с собственным значением $p_3 + \tilde{E}t$.

После выключения электрического поля $t \geq T$ волновые функции левых и правых частиц являются собственными для гамильтониана.

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (p_3 + \tilde{E}t)\begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Если при $t = 0$ левая частица имела нулевую энергию, то в момент времени T она имеет энергию $\tilde{E}T$. Таким образом, если при $t = 0$ система находилась в основном состоянии, то при $t = T$ состояния левых фермионов с энергией $\mathcal{E} < \tilde{E}T$ оказываются занятыми, а правых с энергией $\mathcal{E} > -\tilde{E}T$ — свободными.

Число состояний на уровне Ландау в интервале импульса Δp_3 в объёме $\tilde{V}$ есть

$$\frac{B\tilde{V}}{4\pi^2}\Delta p_3$$

тогда частота рождения пар в единичном объёме на нулевом уровне

$$\dot{\rho}_0 = \frac{dN}{Vdt} = \frac{EH}{4\pi^2} \tag{4.4}$$

5 Швингеровское рождение во внешнем магнитном поле

5.1 Квазиклассическое рассмотрение

Пусть теперь электрическое поле существует в сколь угодно большой, но конечной области пространства $0 < y_3 < \tilde{L}$ $(0 < x_3 < L)$.

Для ненулевых уровней Ландау процесс рождения пар может быть рассмотрен как туннелирование. В этом разделе мы в общих чертах следуем [23].

Выбираем независящую от времени калибровку

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ By_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } y_3 \leq 0 \\ -\tilde{E}y_3 & \text{при } 0 < y_3 < \tilde{L} \\ -\tilde{E}\tilde{L} & \text{при } \tilde{L} \leq y_3 \end{cases} \tag{5.1}$$

Правые частицы в море Дирака ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_{np_3} < 0$) на уровнях $n \geq 1$ двигаются вправо $p_3 > 0$ из бесконечности $y_3 < 0$. L предполагается достаточно большим, по крайней мере $\mathcal{E} + EL > 0$. Уравнение Вейля для правых частиц имеет вид

$$(\mathcal{E} - A_0)\eta = i\sigma_1\partial_1\eta - \sigma_2(p_2 - By_1)\eta + i\sigma_3\partial_3\eta \tag{5.2}$$

Ищем решение в виде

$$\eta = \begin{pmatrix} \psi_n\left(y_1 - \frac{p_2}{B}\right) f_1(y_3) \\ \psi_{n-1}\left(y_1 - \frac{p_2}{B}\right) f_2(y_3) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

С помощью свойств (3.7) волновых функций осциллятора получаем

$$(\mathcal{E} - A_0)f = \sqrt{2nB}\sigma_2 f + i\sigma_3\partial_3 f \tag{5.4}$$

Переходим к безразмерной переменной z

$$\begin{gathered} z = (\mathcal{E} + \tilde{E}y_3)\sqrt{\frac{2}{\tilde{E}}} \\ z_L = \mathcal{E}\sqrt{\frac{2}{\tilde{E}}}, \quad z_R = (\mathcal{E} + \tilde{E}\tilde{L})\sqrt{\frac{2}{\tilde{E}}} \\ \hat{z} = \begin{cases} z_L & \text{при } z \leq z_L \\ z & \text{при } z_L < z < z_R \\ z_R & \text{при } z \geq z_R \end{cases} \end{gathered} \tag{5.5}$$

и обозначаем $a = \sqrt{n\frac{B}{\tilde{E}}}$. В новых обозначениях

$$(\sigma_1\partial_z + \frac{\hat{z}}{2}\sigma_2 - a)f = 0 \tag{5.6}$$

В диагональном виде

$$(\partial_z^2 + \frac{\hat{z}^2}{4} - a^2 + \frac{i}{2}\sigma_3\partial_z\hat{z})f = 0 \tag{5.7}$$

Квазиклассическое приближение применимо, если поворотные точки $\pm z_0 = \pm 2a$ сильно удалены, то есть $a \gg 1$. В таком случае пренебрегаем членом $\frac{i}{2}\sigma_3\partial_z\hat{z}$. Вероятность туннелирования в квазиклассическом приближении

$$D_{np_3} = \exp\left(-2\int_{-z_0}^{z_0} dz\sqrt{a^2 - z^2/4}\right) = \exp\left(-2\pi a^2\right) \tag{5.8}$$

Её можно интерпретировать как экспоненциальный фактор в выражении для вероятности рождения пары частица-античастица на n-м уровне.

Падающая волна имеет отрицательную энергию, а прошедшая — положительную при условии $z_L < -2a$ и $z_R > 2a$ соответственно. Вместе эти условия имеют вид

$$\tilde{E}\tilde{L} - \sqrt{2nB} > |\mathcal{E}| > \sqrt{2nB} \tag{5.9}$$

Отсюда получаем условие $0 \leq p_3 \leq p^{(c)}$, $p^{(c)} \approx \tilde{E}\tilde{L}$. Полное число рождённых пар в квазиклассическом пределе

$$N = \tilde{L}\sum_n \int_0^{+p^{(c)}} \frac{dp_3}{2\pi}\frac{HL_1L_2}{2\pi}\exp\left(-2\pi n\frac{B}{\tilde{E}}\right) \tag{5.10}$$

Заменяем $\tilde{L} = T$, где T — время всего процесса.

Всё то же справедливо для левых частиц. В конечном итоге приходим к выражению для частоты рождения пар в единичном объёме на n-м уровне Ландау

$$\dot{\rho}_n = \frac{EH}{2\pi^2}\exp\left(-2\pi n v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right) \tag{5.11}$$

Для того чтобы записать это выражение в ковариантном виде вводим обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{4}F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{jk} \\ \mathcal{P} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{1}{8}F_{ij}F_{kl}\epsilon^{ijkl} \end{aligned} \tag{5.12}$$

где

$$g^{ij} = e_a^i e_b^j \eta_{ab} = \begin{pmatrix} v_F^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^{-2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^{-2/3} & \\ 0 & 0 & 0 & -\nu^{4/3} \end{pmatrix}$$

η_{ab} – метрика в пространстве Минковского, g – определитель матрицы, обратной к g^{ij}. Заметим, что $\sqrt{-g} = |\mathbf{e}| = v_F$. (5.11) принимает вид

$$\dot{\rho}_n = \sqrt{-g}\frac{|\mathcal{P}|}{2\pi^2}\exp\left(-2\pi n\frac{|\mathcal{P}|}{\sqrt{\mathcal{S}^2 + \mathcal{P}^2} - \mathcal{S}}\right) \tag{5.13}$$

5.2 Точное рассмотрение

Два независимых решения уравнения Вебера (5.7) в области $z_L < z < z_R$ могут быть записаны в виде (для второй компоненты f)

$$M(a,z) = \exp\left(i\frac{z^2}{4}\right)\Phi\left(\frac{a^2 i}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{z^2}{2}\right) \tag{5.14}$$

$$N(a,z) = z\exp\left(i\frac{z^2}{4}\right)\Phi\left(\frac{1+a^2 i}{2}, \frac{3}{2}, -i\frac{z^2}{2}\right) \tag{5.15}$$

Где Φ – вырожденная гипергеометрическая функция. Для первой компоненты f два независимых решения суть M^* и N^*. Пользуясь следующими свойствами вырожденной гипергеометрической функции

$$\Phi(\alpha,\gamma,x) = e^x\Phi(\gamma-\alpha,\gamma,-x) \tag{5.16}$$

$$0 = \gamma\Phi(\alpha,\gamma,x) - \gamma\Phi(\alpha-1,\gamma,x) - x\Phi(\alpha,\gamma+1,x) \tag{5.17}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(\alpha,\gamma,x) = \frac{1-\gamma}{x}(\Phi(\alpha,\gamma,x) - \Phi(\alpha,\gamma-1,x)) \tag{5.18}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(\alpha,\gamma,x) = \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,x) \tag{5.19}$$

можно показать, что

$$\left(\partial_z - i\frac{z}{2}\right)M = a^2 N^* \tag{5.20}$$

$$\left(\partial_z - i\frac{z}{2}\right)N = M^* \tag{5.21}$$

Тогда общее решение уравнения (5.6) имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} AM^* + aBN^* \\ BM + aAN \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

В областях $z < z_L$ и $z > z_R$ решения уравнения (5.6) — плоские волны

$$\begin{gathered} g = A_{L,R}\chi_+ e^{ikz} + B_{L,R}\chi_- e^{-ikz} \\ k = k_{L,R} = \sqrt{\frac{z_{L,R}^2}{4} - a^2} \\ \chi_\pm = \frac{1}{N_{L,R}^\pm}\begin{pmatrix} i(\pm k - \frac{z_{L,R}}{2}) \\ a \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5.23}$$

где $N_{L,R}^\pm = \sqrt{a^2 + (\pm k - \frac{z_{L,R}}{2})^2}$

В области $z < z_L$ существуют и падающая, и отражённая волны, в области $z > z_R$ — только прошедшая, а значит

$$\begin{aligned} e^{ikz}\chi_+ + Re^{-ikz}\chi_- = f \qquad & \text{при } z = z_L,\ k = k_L \\ Te^{ikz}\chi_+ = f \qquad & \text{при } z = z_R,\ k = k_R \end{aligned} \tag{5.24}$$

Фазовые множители могут быть включены в коэффициенты T и R. Тогда уравнения приобретают вид

$$\begin{pmatrix} M_R^* & aN_R^* \\ aN_R & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{T}{N_R^+} \begin{pmatrix} i(k_R - z_R/2) \\ a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} M_L^* & aN_L^* \\ aN_L & M_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_L^+} i(k_L - \frac{z_L}{2}) - \frac{R}{N_L^-}(k_L + \frac{z_L}{2}) \\ a(1/N_L^+ + R/N_L^-) \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

При $z_R \gg 1$

$$M_R \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((1 - ia^2)/2)} e^{\frac{\pi}{4}a^2} e^{i(z^2/4 - \frac{a^2}{2}\log z^2/2)}$$
$$N_R \approx \frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma((2 - ia^2)/2)} e^{\frac{\pi}{4}a^2} e^{i(z^2/4 - \frac{a^2}{2}\log z^2/2)} \tag{5.26}$$

Предположим, что $|z_L| \gg 1$ (эта область вносит главный вклад в интеграл по импульсу для частоты рождения пар при достаточно большом размере системы, таком что $L\sqrt{\frac{E}{v_F \hat{f}_3}} \gg 1$). В таком случае получаем

$$M_L \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((1 - ia^2)/2)} e^{\frac{\pi}{4}a^2} e^{i(z^2/4 - \frac{a^2}{2}\log z^2/2)}$$
$$N_L \approx \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma((2 - ia^2)/2)} e^{\frac{\pi}{4}a^2} e^{i(z^2/4 - \frac{a^2}{2}\log z^2/2)} \tag{5.27}$$

В том же приближении (5.25) упрощается

$$\begin{pmatrix} M_R^* & aN_R^* \\ aN_R & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \approx T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} M_L^* & aN_L^* \\ aN_L & M_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} i \\ R \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Пользуясь соотношениями

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = -\frac{\pi x}{\sin(\pi + \pi x)}$$
$$\Gamma(1/2 + x)\Gamma(1/2 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2 + \pi x)} \tag{5.29}$$

получаем

$$|T|^2 = \frac{1}{\exp\left(2\pi n v_F \nu^{-4/3} \frac{H}{E}\right) - 1} \tag{5.30}$$

$$|R|^2 = \frac{\exp\left(2\pi n v_F \nu^{-4/3} \frac{H}{E}\right)}{\exp\left(2\pi n v_F \nu^{-4/3} \frac{H}{E}\right) - 1} \tag{5.31}$$

Здесь мы сталкиваемся с парадоксом Клейна

$$|R|^2 = 1 + |T|^2 > 1$$

который не позволяет интерпретировать $|R|^2$ как вероятность отражения. Тоже касается коэффициента $|T|^2$, который может оказаться большим единицы при достаточно малых H. Возможный путь решения этого парадокса предложен в [24] (развитие этого подхода см. [26]). В [24] предлагается считать $|T|^2$ *относительной* вероятностью рождения пар. Для вычисления *абсолютной* вероятности рождения нужно домножить *относительную* вероятность на фактор $|C|^2$, определяемый соотношением

$$|C|^2 + |C|^2 \times |T|^2 = 1 \tag{5.32}$$

Левая часть этого уравнения понимается как сумма вероятности $D_{np_3} = |C|^2 \times |T|^2$ рождения пары и вероятности $|C|^2$ того, что рождения не произошло. В [26] проведено каноническое квантование теории поля в присутствии потенциальной ступеньки и фактор $|C|^2$ появляется автоматически. С помощью этого правила можно воспроизвести результат Швингера [20] для вероятности того, что вакуум останется вакуумом массивного Дираковского поля, изначально полученного совершенно другим методом.

Мы предлагаем альтернативное и очень простое объяснение правила, предложенного в [24]. Ограничимся рассмотрением правых фермионов (для левых — аналогично). Выпишем плотность электрического тока (заряд частицы -1) с обеих сторон потенциального барьера. Справа имеем прошедшую волну

$$j_T = -f^+\sigma^3 f = |T|^2 \tag{5.33}$$

Слева — падающую и отражённую

$$j_R = -f^+\sigma^3 f = |R|^2, \quad j_i = -f^+\sigma^3 f = -1 \tag{5.34}$$

Легко видеть, что направления токов прошедшей и "отражённой" волн совпадают. Таким образом, в области перед барьером направления волнового вектора и плотности тока оказываются противоположными, а значит "отражённую" волну нужно считать падающей и наоборот. Это соответствует замене $k \to -k$ в области античастиц, предложенной в [25]. Нормируя правильную падающую волну на единицу сразу получаем коэффициент прохождения

$$D_{np_3} = \frac{|T|^2}{1 + |T|^2} = \exp\left(-2\pi n v_F \nu^{-4/3} \frac{H}{E}\right) \tag{5.35}$$

совпадающий с полученным выше в квазиклассическом приближении. Заметим, что тот же результат получается при решении этой задачи с помощью формализма, разработанного в [26]. Напомним, что этот гамильтонов формализм основан на специальном выборе in- и out-состояний в присутствии потенциальной ступеньки и постулировании коммутационных соотношений.

Полная частота рождения пар Γ включает в себя вклад аномалии

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2}{VT}\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{dp_3}{2\pi}T\frac{HL_1L_2}{2\pi}D_{np_3}+\frac{EH}{4\pi^2} \\ &= \frac{EH}{4\pi^2}\mathrm{cth}\left(\pi v_F\nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

6 Частота рождения пар и вероятность перехода вакуум-вакуум

Во многих работах показано ([20], [22], [23]), что вероятность того, что вакуум останется вакуумом любого 4-объёма $\Omega = \Delta V\Delta t$ в рассматриваемых условиях (результат адаптирован к случаю анизотропии скорости Ферми)

$$P = e^{-w\Omega} \tag{6.1}$$

где

$$w = \frac{EH}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathrm{cth}\left(k\, v_F\nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right)\exp\left(-\frac{k\pi m^2}{v_F\nu^{2/3}E}\right) \tag{6.2}$$

а m – масса частицы. Легко видеть, что w расходится в пределе $m\to 0$, а P становится равной нулю. Это неудивительно, так как эволюция уровней энергии одночастичного гамильтониана предсказывает появления пар левых и правых частиц. Поэтому вакуум не может сохраниться.

Однако это не означает, что частота рождения пар бесконечна. В самом деле, в предыдущей секции получено конечное выражение для Γ, совпадающее с первым членом по k ряда (6.2). Согласно [22], w вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}\equiv w &= \frac{2}{VT}\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{dp_3}{2\pi}T\frac{HL_1L_2}{2\pi}\log(1-D_{np_3}) \\ &\quad+\frac{1}{VT}\int\frac{dp_3}{2\pi}T\frac{HL_1L_2}{2\pi}\log(1-D_{0p_3}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

В безмассовом случае $D_{0p_3} = 1$, что означает рождение пары на нижнем уровне Ландау с единичной вероятностью. В результате мнимая часть лагранжиана расходится.

7 Вклад процесса рождения пар в проводимость

7.1 Идеальная невзаимодействующая система при нулевой температуре

Рождающиеся частицы имеют энергию $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \tilde{E}\tilde{L}$ (отсчитываемую от уровня $-EL$) и импульс $p_3' = \sqrt{(\mathcal{E} + \tilde{E}\tilde{L})^2 - 2nB}$. Чтобы выяснить какой импульс p_3'' имеют дырки, воспользуемся уравнением $\frac{d}{dy_0}\langle p_3 \rangle = \tilde{E}$. Если туннелирования не происходит, то эволюция такого занятого состояния подчиняется этому уравнению. Пусть начальный импульс частицы в этом состоянии p_3. Средний импульс меняется со временем. Принимая во внимание, что общая длительность процесса T равна длине L делённой на скорость частицы, совпадающей со скоростью Ферми $v_F \nu^{2/3}$, получим $T = \tilde{L}$ и

$$\langle p_3'' \rangle = p_3 + \tilde{E}\tilde{L} \tag{7.1}$$

Тогда энергия дырки, рождающейся в паре с частицей, может быть оценена как

$$\langle \mathcal{E}'' \rangle \approx \sqrt{(\tilde{E}\tilde{L})^2 + \mathcal{E}^2 + \tilde{E}\tilde{L}\sqrt{\mathcal{E}^2 - 2nB}} \approx \tilde{E}\tilde{L} + |\mathcal{E}| \tag{7.2}$$

Швингеровское рождение стоит энергии. Предположим, что рождается пара из частицы с энергией $\mathcal{E} + \tilde{E}\tilde{L}$ и дырки с энергией $\approx |\mathcal{E}| + \tilde{E}\tilde{L}$. Для этого требуется энергия $2LE$. В идеальной системе пары не аннигилируют, а значит числа заполнения возбуждённых состояний увеличиваются со временем. Но в силу принципа запрета Паули число заполнения не может быть больше единицы и это нужно учитывать при рассмотрении рождения пар и составлении уравнения энергетического баланса. Рассмотрим систему при малых временах, когда числа заполнения ещё малы, и пренебрежём принципом запрета. Энергия, необходимая для рождения

$$\Delta N = \frac{EH}{4\pi^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-2\pi v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right)\right) L_1 L_2 L_3 \Delta t$$

пар равна $j^{(1)} E V \Delta t$, где $j^{(1)}$ – вклад процесса рождения пар в полную плотность электрического тока. Отсюда получим плотность тока

$$j^{(1)} = 2L\frac{EH}{4\pi^2}\,\mathrm{cth}\left(\pi\, v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right) \tag{7.3}$$

и поправку к проводимости

$$\sigma^{(1)} \equiv \frac{dj^{(1)}}{dE} = L\frac{H}{2\pi^2} \times \left[\operatorname{cth}\left(\pi\, v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right) \right.$$
$$\left. + \pi v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\left(1 - \operatorname{cth}^2\left(\pi\, v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right)\right)\right] \tag{7.4}$$

Здесь мы рассмотрели вклад от одного сорта Дираковских фермионов. Конечно, в реальных кристаллах это выражение видоизменяется.

7.2 Грубое рассмотрение плазмы квазичастиц

В реальном кристалле частицы взаимодействуют друг с другом. Кроме того, существуют тепловые флуктуации. В ходе Швингеровского рождения пар и их аннигиляции образуется плазма.

В [4] рассматриваются пары из только левых или только правых квазичастиц. Плотность таких пар на нижнем уровне Ландау ρ_0 описывается кинетическим уравнением

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{\rho_0}{\tau_0} + \frac{1}{4\pi^2}HE \tag{7.5}$$

Первый член в правой части отвечает за столкновения с изменением киральности. Такие столкновения происходят между квазичастицами, между квазичастицами и примесями или между квазичастицами и другими существующими в кристалле возбуждениями. Соответствующее время свободного пробега τ_0. Второй член отвечает за возникновение кирального заряда, вызванное киральной аномалией. Решение (7.5) при $t \gg \tau_0$

$$\rho_0 = \frac{\tau_0}{4\pi^2}HE \tag{7.6}$$

Нижние уровни Ландау вносят основной вклад при $v_F H \gg E$. Можно учесть поправку к (7.5) обусловленную рождением пар на остальных уровнях Ландау. При этом должна появиться система уравнений для плотностей на разных уровнях. Но мы ограничимся вычислением соответствующей поправки к проводимости. Для этого введём ещё одно время релаксации $\tau_1 \ll \tau_0$, отвечающее как процессам с аннигиляцией частиц одной киральности, так и процессам рассеяния частиц друг на друге, примесях и других возбуждениях без изменения киральности. Такие приближения справедливы при условии

$$E\tau_1 \gg \sqrt{2H}$$

В этом случае в (7.4) вместо размера образца мы подставляем длину свободного пробега[2], равную $v_F \nu^{2/3}\tau_1$. В общем случае время свободного пробега τ_1 может зависеть от плотностей квазичастиц, а значит от E и H. Для

[2]Имеется в виду длинна свободного пробега в направлении электрического и магнитного полей.

простоты мы пренебрегаем этой зависимостью[3]. Таким образом получаем поправку к проводимости

$$\sigma^{(1)} \equiv \frac{dj^{(1)}}{dE} = N_D v_F \nu^{2/3}\tau_1 \frac{H}{2\pi^2} \times \left[\mathrm{cth}\left(\pi\, v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right) + \pi v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\left(1-\mathrm{cth}^2\left(\pi\, v_F \nu^{-4/3}\frac{H}{E}\right)\right)\right] \tag{7.7}$$

N_D – количество Дираковских точек в рассматриваемом полуметалле. В частности, для Cd_3As_2 и Na_3Bi $N_D = 2$. При $v_F H \gg E$ получается вклад киральной аномалии

$$\sigma^{(1)} \approx N_D v_F \nu^{2/3}\tau_1 \frac{H}{2\pi^2}, \quad v_F H \gg E \tag{7.8}$$

в то время как в [4] $\sigma^{(1)} \sim H^2$. В [4] используется равновесное рассмотрение кирального магнитного эффекта: $j = \frac{\mu_5}{2\pi^2}H$, где $\mu_5 = \frac{6\,v_F^3}{T^2}\rho_0$, $\mu_5 \gg v_F E\tau_1$ – киральный химический потенциал. Однако существование такого эффекта опровергается в [32]. Мы используем закон сохранения энергии: энергия, необходимая для рождения пар есть часть работы электрического поля Ej. Предполагается, что квазичастицы появляются на расстоянии порядка длины свободного пробега и имеют энергию $v_F E\nu^{2/3}\tau_1$ каждая. Мы пренебрегаем принципом запрета Паули, считая, что числа заполнения малы, то есть $T \ll v_F E\tau_1$. В обратном пределе $T \gg v_F E\tau_1$, из распределения Ферми следует, что числа заполнения $\approx 1/2$, а значит (7.7) нужно домножить на 1/2.

Выше мы предполагали, что электрическое и магнитное поля направлены вдоль третьей оси. Чтобы рассмотреть случай произвольно направленных полей, перепишем результат в ковариантном виде

$$\sigma^{(1)} \approx N_D v_F \tau_1 \frac{\sqrt{\sqrt{\mathcal{S}^2+\mathcal{P}^2}+\mathcal{S}}}{2\pi^2} \times \left[\mathrm{cth}\,(\pi\,\kappa) + \pi\,\kappa\,\left(1-\mathrm{cth}^2\,(\pi\,\kappa)\right)\right] \tag{7.9}$$

$$\kappa = \frac{|\mathcal{P}|}{\sqrt{\mathcal{S}^2+\mathcal{P}^2}-\mathcal{S}}$$

где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{P}$ определяются формулами (5.12).

Помимо $\sigma^{(1)}$ существует обычный омический вклад в проводимость $\sigma^{(0)}$, не имеющий отношения к рождению пар.

8 Заключение и обсуждение

В данной работе мы вычислили частоту рождения пар в Дираковских полуметаллах в постоянных электрическом и магнитном полях, направленных

[3]Такое приближение может отвечать случаю высоких температур.

вдоль оси симметрии кристалла, используя решение соответствующей задачи квантовой механики. В окрестности ферми-точек движение описывается парой уравнений Вейля. В отличии от, например, [26] мы не пытались строить аксиоматическую квантовую теорию поля с нестабильным вакуумом. С нашей точки зрения, для описания движения электронов в твёрдом теле достаточно многочастичной квантовой механики.

Для того чтобы задача была стационарной, выбрана не зависящая от времени калибровка. Проведены квазиклассическое и явное рассмотрения. Рождение пар сведено к задаче рассеяния. При этом вероятность рождения пары пропорциональна коэффициенту прохождения. Ранее эта задача решалась для массивных Дираковских фермионов и в квазиклассическом приближении [23], и точно [24]. Однако рассмотрение в безмассовом случае отличается из-за другой структуры собственных состояний. Предложено решение возникающего при точном рассмотрении парадокса Клейна. В [24] без строгого обоснования предлагается домножить коэффициент прохождения на дополнительный фактор. Смысл этого действия позже раскрывается в [26], где построена аксиоматическая квантовая теория поля. Здесь же вычисляются токи частиц и выясняется, что в области перед барьером направления тока и волнового вектора противоположны. С учётом этого определяются падающая и отражённая волны. При рассмотрении массивных частиц этот способ приводит к классическому Швингеровскому выражению для для вероятности перехода вакуум-вакуум (в безмассовом случае эта величина расходится).

Чтобы оценить вклад рождения пар в проводимость, используется баланс энергии: работа поля $Ej^{(1)}$, где $j^{(1)}$ ток рождённых частиц, приравнивается к энергии, необходимой для рождения пар. В идеальном кристалле с невзаимодействующими фермионами из такого баланса вычисляется поправка к проводимости $\sigma^{(1)}$, пропорциональная размеру кристалла L. В качестве грубой оценки в случае реальных кристаллов предлагается заменить L на длину свободного пробега квазичастицы. В пределе $v_F H \gg E$ полученное выражение для $\sigma^{(1)}$ отличается от полученного в [4], где предполагается, что частицы, рождённые в ходе неравновесного процесса в присутствии электрического поля находятся в термодинамическом равновесии с химическим потенциалом $\pm\mu_5$ в зависимости от киральности, и используется выражение для кирального магнитного тока. Однако в [32] показано, что в реальных полуметаллах не может существовать кирального магнитного эффекта из-за структуры одночастичного гамильтониана в дали от ферми-точек. Таким образом мы не соглашаемся моделью, предложенной в [4].

Исчерпывающее рассмотрение задачи о вкладе эффекта рождения пар в проводимость требует значительных усилий и должно применять современные методы кинетики. Мы ограничились лишь грубым рассмотрением, основанном на решении задачи квантовой механики в пренебрежении взаимодействием между квазичастицами и феноменологическом рассмотрении процесса рождения пар в приближении времени релаксации. Зависимость поправки к проводимости (7.7) от электрического и магнитного полей может отличаться от зависимости полной проводимости от тех же величин. Это может позволить впервые экспериментально наблюдать Швингеровское рождение в трёхмерной системе (возможность наблюдения этого эффекта в графене активно обсуждалась, см. например [34, 35] и ссылки там).

Список литературы

[1] Z. K. Liu et al., *“Discovery of a Three-dimensional Topological Dirac Semimetal, Na_3Bi”*, Science (2014) **343**, 864 [arXiv:1310.0391].

[2] M. Neupane et al., “Observation of a topological 3D Dirac semimetal phase in high-mobility Cd_3As_2” Nature Commun. **05**, 3786 (2014) [arXiv:1309.7892].

[3] S. Borisenko et al., “Experimental Realization of a Three-Dimensional Dirac Semimetal”, Phys. Rev. Lett. **113**, 027603 (2014) [arXiv:1309.7978].

[4] Q. Li, D. E. Kharzeev, C. Zhang, Y. Huang, I. Pletikosic, A. V. Fedorov, R. D. Zhong, J. A. Schneeloch, G. D. Gu, and T. Valla, arXiv:1412.6543.

[5] R. Y. Chen, S. J. Zhang, J. A. Schneeloch, C. Zhang, Q. Li, G. D. Gu, N. L. Wang, *“Optical spectroscopy study of three dimensional Dirac semimetal $ZrTe_5$”*, arXiv:1505.00307.

[6] Devendra Kumar, Archana Lakhani, *“Observation of three-dimensional Dirac semimetal state in topological insulator Bi_2Se_3”*, arXiv:1504.08328.

[7] B. Q. Lv et al., *“Experimental discovery of Weyl semimetal TaAs”*, Phys. Rev. X 5, 031013 (2015), arXiv:1502.04684; X. Huang, *“Observation of the chiral anomaly induced negative magneto-resistance in 3D Weyl semi-metal TaAs”*, Phys. Rev. X 5, 031023 (2015), arXiv:1503.01304; B. Q. Lv et al., *“Observation of Weyl nodes in TaAs”*, arXiv:1503.09188.

[8] G.E. Volovik, *“The Universe in a Helium Droplet”*, Clarendon Press, Oxford (2003)

[9] M. Vazifeh and M. Franz, *“Electromagnetic response of weyl semimetals”*, Phys. Rev. Lett. **111**, 027201 (2013) [arXiv:1303.5784].

[10] Y. Chen, S. Wu, and A. Burkov, *“Axion response in Weyl semimetals”*, Phys. Rev. B **88**, 125105 (2013) [arXiv:1306.5344].

[11] Y. Chen, D. Bergman, and A. Burkov, *“Weyl fermions and the anomalous Hall effect in metallic ferromagnets”*, Phys. Rev. B **88**, 125110 (2013) [arXiv:1305.0183]; David Vanderbilt, Ivo Souza, and F. D. M. Haldane Phys. Rev. B **89**, 117101 (2014) [arXiv:1312.4200].

[12] S. T. Ramamurthy and T. L. Hughes, *“Patterns of electro-magnetic response in topological semi-metals”*, arXiv:1405.7377.

[13] L. P. He et al., *Quantum Transport Evidence for the Three-Dimensional Dirac Semimetal Phase in Cd_3As_2*, Phys. Rev. Lett. **113**, 246402 (2014) [arXiv:1404.2557].

[14] A. A. Zyuzin and A. A. Burkov, *"Topological response in Weyl semimetals and the chiral anomaly,"* Phys. Rev. B **86** (2012) 115133 [arXiv:1206.1868 [cond-mat.mes-hall]].

[15] Pallab Goswami, Sumanta Tewari, *Axionic field theory of (3+1)-dimensional Weyl semi-metals*, Phys. Rev. B 88, 245107 (2013), arXiv:1210.6352

[16] M.N.Chernodub and M.Zubkov, *"Intrinsic chiral magnetic effect in Dirac semimetals due to dislocations,"* arXiv:1508.03114 [cond-mat.mes-hall].

[17] Cheng Zhang, Enze Zhang, Yanwen Liu, Zhi-Gang Chen, Sihang Liang, Junzhi Cao, Xiang Yuan, Lei Tang, Qian Li, Teng Gu, Yizheng Wu, Jin Zou, Faxian Xiu, *"Detection of chiral anomaly and valley transport in Dirac semimetals"*, arXiv:1504.07698.

[18] Tian Liang,Quinn Gibson, Mazhar N. Ali, Minhao Liu, R. J. Cava, N. P. Ong, *Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2*, Nature Mater. **14**, 280 (2015) [arXiv:1404.7794].

[19] Thomas D. Cohen, David A. McGady "The Schwinger mechanism revisited", Phys.Rev.D78:036008,2008, arXiv:0807.1117.

[20] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

[21] F. Sauter, Z. Phys. 69, 742 (1931); W. Heisenberg and H. Euler, Z. Physik 98, 714 (1936); V. Weisskopf, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. 14, No. 6 (1936).

[22] A.I. Nikishov "Pair Production by a Constant External Field", JETP, Vol. 30, No 4, p. 660 (April 1970).

[23] S. P. Kim and D. N. Page, "Schwinger pair production in electric and magnetic fields", Phys.Rev.D73:065020,2006, arxiv:hep-th/0301132v3.

[24] A.I. Nikishov, "Barrier scattering in field theory. Removal of Klein paradox", Nuclear Physics B 21 (1970) 346-358

[25] A. Hansen, F. Ravndal, Phys. Scripta 23 (1981) 1033

[26] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, "Vacuum polarization and particle creation in the presence of a potential step," Int. J. Mod. Phys. A **31** (2016) no.02n03, 1641031. doi:10.1142/S0217751X16410311

[27] E. S. Fradkin, D. M. Gitman, and S. M. Shvartsman, “Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum”, Springer-Verlag, Berlin,1991.

[28] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “Adler-bell-jackiw Anomaly And Weyl Fermions In Crystal”, Phys. Lett. B **130** (1983) 389. doi:10.1016/0370-2693(83)91529-0

[29] K. Fukushima, D.E. Kharzeev, H.J. Warringa, Phys.Rev.D 78:074033,2008

[30] Hui Li, Hongtao He, Hai-Zhou Lu, Huachen Zhang, Hongchao Liu, Rong Ma, Zhiyong Fan, Shun-Qing Shen, Jiannong Wang, “Negative Magnetoresistance in Dirac Semimetal Cd_3As_2”, arXiv:1507.06470;

[31] S. Parameswaran, T. Grover, D. Abanin, D. Pesin, and A. Vishwanath, “Probing the chiral anomaly with nonlocal transport in Weyl semimetals”, Phys. Rev. X **4**, 031035 (2014) [arXiv:1306.1234].

[32] Mikhail Zubkov, "On the absence of equilibrium chiral magnetic effect."2016. <hal-01275180v3> https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01275180v3/document, to appear in Phys.Rev.D (2016)

[33] M.A.Zubkov, “Emergent gravity and chiral anomaly in Dirac semimetals in the presence of dislocations”, Annals of Phys., **360**, 655 (2015), [arXiv:1501.04998]

[34] M. I. Katsnelson, G. E. Volovik and M. A. Zubkov, “Euler - Heisenberg effective action and magnetoelectric effect in multilayer graphene”, Annals Phys. **331** (2013) 160 doi:10.1016/j.aop.2012.12.010 [arXiv:1206.3973 [cond-mat.mes-hall]].

[35] M. A. Zubkov, “Schwinger pair creation in multilayer graphene,” Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **95** (2012) 540 doi:10.1134/S0021364012090135 [arXiv:1204.0138 [hep-ph]].

[36] M. A. Zubkov, R. A. Abramchuk, arXiv:1605.02379v1 [cond-mat.mes-hall].