ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный
университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Различные киральные волны в киральной кинетической теории

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:
студент 221 группы
Давид Михайлович Френклах

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Горский А.С.

Долгопрудный
2016

Содержание

1 Введение

Вызванные аномалиями эффекты переноса в киральных системах в последнее время вызывают большой интерес. Они могут быть индуцированы внешним магнитным полем, как в Киральном Магнитном Эффекте(КМЭ), где при наличии аксиального химического потенциала генерируется электрический ток вдоль направления магнитного поля ([1]). Также в магнитном поле существует Киральный Разделительный Эффект, где наоборот в присутствии векторного химпотенциала генерируется аксиальный ток вдоль направления магнитного поля ([2, 3]). Другой пример - Киральный Вращательный Эффект (КВЭ) ([4, 5, 6, 7]), имеющий место во вращающихся киральных системах.

Эти аномальные эффекты переноса связывают между собой плотности векторного и аксиального зарядов и соответствующие токи, что приводит к существованию таких возбуждений, как Киральная Магнитная Волна (КМВ) ([8]), Киральная Вращательная Волна (КВВ) ([9]), Киральная Тепловая Волна(КТВ) и различные смешивания этих волн ([10]).

Естественным аппаратом для изучения неравновесных процессов в киральных средах является киральная кинетическая теория. Ранее с ее помощью были воспроизведены выражения для КМЭ и КВЭ и дисперсионные соотношения соответствующих возбуждений - КМВ ([11]) и КВВ ([9]). В данной работе мы с помощью киральной кинетической теории получим некоторые выражения для дисперсионных соотношений киральных волн, таких как КТВ и различных смешанных волн: Киральной Вращательно-Тепловой Волны, Киральной Магнитно-Тепловой Волны и Киральной Магнитно-Вращательно-Тепловой Волны. Данная работа основана на ([14]).

2 Общее обсуждение кинетической теории

Мы будем изучать систему правых и левых Вейлевских фермионов, которые будут обозначаться индексами R и L соответственно. Существуют частицы и античастицы обоих типов, которые мы будем обозначать индексами $+$ и $-$, так что $R+$ — это правые частицы, а $R-$ — античастицы к ним (во избежание путаницы следует отметить, что эти античастицы обладают левой спиральностью) и аналогично для левых. Мы всегда будем рассматривать вращающуюся систему и обозначать угловую скорость через $\boldsymbol{\omega}$. Иногда также будут требоваться внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$ и векторный химический потенциал μ. Фоновый аксиальный химпотенциал всегда будем полагать нулевым. Температура обозначается через T и полагается большой по сравнению со всеми прочими параметрами, такими как ω, μ и $\sqrt{B}$, что необходимо для применимости кинетической теории и адекватного описания системы в терминах функции распределения почти не взаимодействующих частиц (подробнее см. [11])

Начнем с кинетических уравнений для всех видов частиц и античастиц:

$$\frac{\partial f_{\pm R/L}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f_{\pm R/L}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_{\pm R/L}}{\partial \mathbf{p}} = C_{\pm R/L}[f_{+R/L}, f_{-R/L}], \tag{2.1}$$

где $f_{\pm R/L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ - функции распределения, а $C_{\pm R/L}[f_+, f_-]$ - интегралы столкновений.

Для общности пока что будем рассматривать случай включенного магнитного поля. Тогда уравнения движения для правых частиц и их античастиц в их локальной системе покоя есть

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{b}, \;\; \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}'_\pm. \tag{2.2}$$

Здесь $p = |\mathbf{p}|$ - абсолютная величина импульса, $\hat{\mathbf{p}} = \dfrac{\mathbf{p}}{p}$ -единичный вектор в направлении импульса и $\mathbf{b} = \dfrac{\hat{\mathbf{p}}}{2p^2}$ - кривизна Берри в импульсном пространстве (см. [12]) -важнейший элемент киральной кинетической теории, который позволяет воспроизводить аномальные квантовые эффекты при более-менее классическом описании. Через $\mathbf{B}'_\pm = \mathbf{B} \pm 2p\, \boldsymbol{\omega}$ обозначено эффективное магнитное поле, через которое выражена суммарная действующая на частицу сила, являющаяся суммой силы Лоренца и силы Кориолиса. Уравнения для L такие же с точностью до замены $\mathbf{b} \to -\mathbf{b}$. Разрешая эти уравнения относительно $\dot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{p}}$, получим:

$$\sqrt{G_{\pm R}}\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{B}'_\pm}{2p^2}, \tag{2.3}$$

$$\sqrt{G_{\pm L}}\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{B}'_\pm}{2p^2}, \tag{2.4}$$

$$\sqrt{G_{\pm R}}\dot{\mathbf{p}} = \sqrt{G_{\pm L}}\dot{\mathbf{p}} = \pm \mathbf{p} \times \mathbf{B}'_\pm, \tag{2.5}$$

где множители $\sqrt{G_{\pm R}} = 1 + \dfrac{\mathbf{B}'_\pm \cdot \mathbf{p}}{p^2}$ и $\sqrt{G_{\pm L}} = 1 - \dfrac{\mathbf{B}'_\pm \cdot \mathbf{p}}{p^2}$ модифицируют фазовый объем.

Наш следующий шаг - линеаризовать кинетическое уравнение. Для этого будем рассматривать малые возмущения над равновесным рапределением Ферми-Дирака $f_{0\pm R/L}(p)$:

$$f_{\pm R/L} = f_{0\pm R/L}(p) - \partial_p f_{o\pm R/L}(p) \delta f_{\pm R/L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \tag{2.6}$$

и положим Фурье-образ от $\delta f_{\pm R/L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ равным $h_{\pm R/L}(\nu, \mathbf{k}, \mathbf{p})$. Кроме того, линеаризуем интеграл столкновений, воспользовавшись тем, что для равновесной функции распределения он должен зануляться:

$$C[f_{\pm R/L}] = \partial_p f_{0\pm R/L} I_{\pm R/L}[h_{\pm R/L}] + O(h^2), \tag{2.7}$$

где $I[h]$ - линейный функционал. Теперь кинетическое уравнение (2.1) в порядке $O(h)$ после сокращения на $\partial_p f_{0\pm R/L}$ записывается, как

$$-i\nu h_{\pm R/L} + \dot{\mathbf{x}}(i\mathbf{k} \pm \mathbf{B}_\pm \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}})h_{\pm R/L} = I_{\pm R/L}[h_{\pm R/L}]. \tag{2.8}$$

Далее, используя различные законы сохранения, можно избавиться от столкновительных членов. Для начала определим следующее усреднение по импульсному пространству:

$$\langle ... \rangle_{\pm R/L} = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_{\pm R/L}} \partial_p f_{0\pm R/L}(p)(...), \tag{2.9}$$

где $\int_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$. Из условия сохранения полного числа правых или левых частиц , $\{R/L+\} - \{R/L-\}$,

$$\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_{+R/L}} C_{+R/L}[f_+, f_-] - \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_{-R/L}} C_{-R/L}[f_+, f_-] = 0, \tag{2.10}$$

для произвольной $f_{\pm R/L}$. Отсюда в порядке $O(h)$ следует

$$\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_{+R/L}} \partial_p f_{0+R/L} I_{+R/L}[h_{\pm R/L}] - \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_{-R/L}} \partial_p f_{0-R/L} I_{-R/L}[h_{\pm R/L}] = 0, \tag{2.11}$$

Для произвольных $h_{\pm R/L}$. Кроме того, член с "силой Лоренца"зануляется после усреднения и интегрирования по частям. Итак, усредняя уравнения (2.8) для правых/левых частиц и античастиц с помощью соответствующих скобок и вычитая одни из других, получаем

$$\nu(\langle h_{+R}\rangle_{+R} - \langle h_{-R}\rangle_{-R}) - \mathbf{k}(\langle \dot{\mathbf{x}} h_{+R}\rangle_{+R} - \langle \dot{\mathbf{x}} h_{-R}\rangle_{-R}) = 0, \tag{2.12}$$

$$\nu(\langle h_{+L}\rangle_{+L} - \langle h_{-L}\rangle_{-L}) - \mathbf{k}(\langle \dot{\mathbf{x}} h_{+L}\rangle_{+L} - \langle \dot{\mathbf{x}} h_{-L}\rangle_{-L}) = 0. \tag{2.13}$$

Еще одним законом сохранения, которым можно воспользоваться, является закон сохранения энергии. Чтобы использовать его, домножим (2.8) на p, усредним с соответствующей скобкой и сложим все четыре получившихся уравнения. Столкновительный член занулится в силу соханения энергии, и мы получим

$$\nu(\langle p\ h_{+R}\rangle_{+R} + \langle p\ h_{-R}\rangle_{-R} + \langle p\ h_{+L}\rangle_{+L} + \langle p\ h_{-L}\rangle_{-L}) - \tag{2.14}$$
$$\mathbf{k}(\langle p\ \dot{\mathbf{x}}\ h_{+R}\rangle_{+R} + \langle p\ \dot{\mathbf{x}}\ h_{-R}\rangle_{-R} + \langle p\ \dot{\mathbf{x}}\ h_{+L}\rangle_{+L} + \langle p\ \dot{\mathbf{x}}\ h_{-L}\rangle_{-L}) = 0.$$

В последующих нескольких разделах мы будем изучать уравнения (2.12-2.14) в гидродинамическом режиме при наличии различных внешних условий. Это можно сделать двумя способами: сначала рассмотреть самый общий случай, когда есть и магнитное поле, и ненулевой равновесный векторный химпотенциал, и "спуститься"от этого выражения к более простым случаям; другой способ - начав с простейшего случая $\mathbf{B} = 0$, $\mu = 0$ постепенно усложнять ситуацию. Мы воспользуемся вторым способом.

3 Различные волны в гидродинамическом режиме в кинетической теории

3.1 Чистая тепловая волна

Сейчас мы рассмотрим случай $\mu_V = \mu_A = \mu_L = \mu_R = 0$ в равновесии и выключенного магнитного поля, $\mathbf{B} = 0$. В этом случае существует только тепловая волна. Мы будем изучать гидродинамический режим, в котором отклонения от равновесной функции распределения соответствуют инфинетиземальным сдвигам химпотенциалов и температуры. Расмотрим пока не независимые возмущения химпотенциалов $\delta\mu_R = -\delta\mu_L \equiv \delta\mu$ — как мы увидим в следующем разеделе, этого будет достаточно для случая чистой тепловой волны. Равновесная функция распределения Ферми-Дирака имеет вид $f_{0\pm R/L} = \dfrac{1}{e^{\beta p}+1}$. Соответствующий сдвигу химпотенциала сдвиг функции распределения имеет вид $\delta f_{+R} = -\partial_p f_0(p)\beta\delta\mu = -\delta f_{-R} = -\delta f_{L+} = \delta f_{L-}$. Для сдвига температуры $\delta\beta$ соответствующий сдвиг функции распределения равен $\delta f_{\pm R/L} = \partial_\beta f_0 \delta\beta = \partial_p f_0 \dfrac{p}{\beta}\delta\beta$. Для приведения обозначений в соответствие с предыдущим разделом переобозначим $-\beta\delta\mu \to h_1$ и $\dfrac{\delta\beta}{\beta^2} \to h_2$. Тогда суммарное возмущение над равновесной функцией распределения запишется как

$$\delta f_{R+} = \partial_p f_0(p)(h_1 + \beta p\ h_2) = \delta f_{L-}, \tag{3.1}$$

$$\delta f_{R-} = \partial_p f_0(p)(-h_1 + \beta p\ h_2) = \delta f_{L+}. \tag{3.2}$$

Теперь подставим это в (2.12) и (2.14)

$$\begin{aligned}\nu(\langle h_1 + \beta p\ h_2\rangle_{+R} - \langle -h_1 + \beta p\ h_2\rangle_{-R}) + \\ \mathbf{k}(\langle \dot{\mathbf{x}}(h_1 + \beta p\ h_2)\rangle_{+R} - \langle \dot{\mathbf{x}}(-h_1 + \beta p\ h_2)\rangle_{-R}) = 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\nu(\langle p\ h_1 + \beta p^2\ h_2\rangle_{+R} + \langle -p\ h_1 + \beta p^2 h_2\rangle_{-R}) + \\ \mathbf{k}(\langle \dot{\mathbf{x}}(p\ h_1 + \beta p^2\ h_2)\rangle_{+R}) + \langle \dot{\mathbf{x}}(-p\ h_1 + \beta p^2\ h_2)\rangle_{-R}) = 0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем обозначения $\sqrt{G_{R+}} = \sqrt{G_{L-}} \equiv G_1$ и $\sqrt{G_{R-}} = \sqrt{G_{L+}} \equiv G_2$. Перепишем уравнения выше:

$$\nu \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [(G_1 + G_2) h_1 + \beta p (G_1 - G_2) h_2] + \tag{3.5}$$

$$\mathbf{k} \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [(G_1 \dot{\mathbf{x}} + G_2 \dot{\mathbf{x}}) h_1 + \beta p (G_1 \dot{\mathbf{x}} - G_2 \dot{\mathbf{x}}) h_2] = 0,$$

$$\nu \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [p (G_1 - G_2) h_1 + \beta p^2 (G_1 + G_2) h_2] + \tag{3.6}$$

$$\mathbf{k} \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [p (G_1 \dot{\mathbf{x}} - G_2 \dot{\mathbf{x}}) h_1 + \beta p^2 (G_1 \dot{\mathbf{x}} + G_2 \dot{\mathbf{x}}) h_2] = 0.$$

Заметим, что $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{p} g(p) = 0$ для произвольной $g(p)$, поэтому для вычисления интегралов $G_{1,2} \sim 1$ и $G_{1,2}\dot{\mathbf{x}} \sim \pm \frac{\boldsymbol{\omega}}{p}$. С учетом этого, два последних уравнения переписываются как

$$2\nu h_1 \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 + 2\beta (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}) h_2 \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 = 0, \tag{3.7}$$

$$2\nu \beta h_2 \int_{\mathbf{p}} p^2 \partial_p f_0 + 2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}) h_1 \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 = 0. \tag{3.8}$$

В будущем будет удобно спользовать физический смысл следующих интегралов, которые встретились нам в этих уравнениях:

$$2 \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 = - \int_{\mathbf{p}} (G_1 + G_2) \frac{\partial f_0}{\partial \mu} = - \frac{\partial n_R}{\partial \mu} \equiv -\chi, \tag{3.9}$$

где n_R - плотность правых частиц и χ - зарядовая восприимчивость. С другой стороны,

$$\int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 \partial_p f_0 dp = - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p \, dp}{e^{\beta p} + 1} = - \frac{T^2}{12} \tag{3.10}$$

Также,

$$\int_{\mathbf{p}} p^2 \partial_p f_0 = \beta \int_{\mathbf{p}} p \; \partial_\beta (\frac{1}{e^{\beta p} + 1}) = \beta \int_{\mathbf{p}} \partial_\beta (f_0 p) = \frac{\beta}{4} \partial_\beta \epsilon = \frac{-T C_V}{4}, \tag{3.11}$$

где ϵ - плотность энергии, а C_V - темплоемкость. И вновь, с другой стороны:

$$\int_{\mathbf{p}} p^2 \partial_p f_0 = - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\beta p} + 1} = - \frac{7\pi^2}{30} T^4, \tag{3.12}$$

Используя эти соотношения, перепишем уравнения (3.7, 3.8) как

$$\nu h_1 + \beta(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k})h_2 = 0, \tag{3.13}$$

$$\nu\frac{C_V}{2}h_2 + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k})\chi h_1 = 0. \tag{3.14}$$

Исключая один из h из этой системы получи дисперсионное соотношение для $\mathbf{k}||\boldsymbol{\omega}$:

$$\nu = v_{CHW}k, \tag{3.15}$$

где

$$v_{CHW} = \omega\sqrt{\frac{2\chi}{C_V T}}. \tag{3.16}$$

Используя соотношение $\chi = \frac{T^2}{6}$, можно преобразовать последнее выражение

$$v_{CHW} = \frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{T^3}{2C_V\chi}}, \tag{3.17}$$

что согласуется с [10], если учесть, что в в той работе определение χ отличается на фактор 2 от определения в этой работе.

Также может быть интересно выразить скорость тепловой волны в терминах лишь температуры и угловой скорости - единственных независимых параметров:

$$v_{CHW} = \frac{\omega}{\pi T}\sqrt{\frac{5}{14}} \tag{3.18}$$

3.2 Смешанная тепловая и вращательная волна

Теперь рассмотрим случай $\mu_V = \mu_R = \mu_L \equiv \mu \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$. При этом равновесные функции Ферми-Дирака есть $f_{0R+} = f_{0L+} = \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)}+1} \equiv f_{0+}$ и $f_{0R-} = f_{0L-} = \frac{1}{e^{\beta(p+\mu)}+1} \equiv f_{0-}$. Мы снова будем изучать гидродинамический режим, однако в этот раз не накладывая ограничений на возможные флуктуации химпотенциала. Итого, имеем 3 независимых флуктуации: $\delta\mu_R$, $\delta\mu_L$ и $\delta\beta$. Соответствующие флуктуации в функциях распределения

$$\delta f_{+R/L} = \partial_p f_{0+}(-\beta\delta\mu_{R/L} + \frac{p-\mu}{\beta}\delta\beta), \tag{3.19}$$

$$\delta f_{-R/L} = \partial_p f_{0-}(\beta\delta\mu_{R/L} + \frac{p+\mu}{\beta}\delta\beta). \tag{3.20}$$

Обозначая $-\beta\delta\mu_R - \dfrac{\mu}{\beta}\delta\beta$ как h_1, $-\beta\delta\mu_L + \dfrac{\mu}{\beta}\delta\beta$ как h_2 и $\dfrac{\delta\beta}{\beta^2}$ как h_3 и подставляя эти выражения в (2.12) - (2.14), получим

$$\begin{aligned}
&\nu\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_1(h_1+\beta p\; h_3)-\partial_p f_{0-}G_2(-h_1+\beta p\; h_3)]+\\
&\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_1\dot{\mathbf{x}}(h_1+\beta p\; h_3)-\partial_p f_{0-}G_2\dot{\mathbf{x}}(-h_1+\beta p\; h_3)]=0, \qquad (3.21)\\
&\nu\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_2(h_2+\beta p\; h_3)-\partial_p f_{0-}G_1(-h_2+\beta p\; h_3)]+\\
&\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_2\dot{\mathbf{x}}(h_2+\beta p\; h_3)-\partial_p f_{0-}G_1\dot{\mathbf{x}}(-h_2+\beta p\; h_3)]=0, \qquad (3.22)\\
&\nu\int_{\mathbf{p}}(\partial_p f_{0+}G_1 p(h_1+\beta p\; h_3)+\partial_p f_{0-}G_2 p(-h_1+\beta p\; h_3)+\\
&\qquad\partial_p f_{0+}G_2 p(h_2+\beta p\; h_3)+\partial_p f_{0-}G_1 p(-h_2+\beta p\; h_3))+\\
&\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}}(\partial_p f_{0+}G_1\dot{\mathbf{x}}p(h_1+\beta p\; h_3)+\partial_p f_{0-}G_2\dot{\mathbf{x}}p(-h_1+\beta p\; h_3)+\\
&\qquad\partial_p f_{0+}G_2\dot{\mathbf{x}}p(h_2+\beta p\; h_3)+\partial_p f_{0-}G_1\dot{\mathbf{x}}p(-h_2+\beta p\; h_3))=0. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Из этих уравнений, используя определения $G_{1,2}$ и уравнения движения, а также интегралы

$$\int_{\mathbf{p}}(\partial_p f_{0+}+\partial_p f_{0-})=-\chi, \tag{3.24}$$

$$\int_{\mathbf{p}}2p^2(\partial_p f_{0+}+\partial_p f_{0-})=-TC_V, \tag{3.25}$$

$$\int_{\mathbf{p}}p(\partial_p f_{0+}-\partial_p f_{0-})=-\frac{\mu T^2}{2}, \tag{3.26}$$

$$\int_{\mathbf{p}}\frac{1}{p}(\partial_p f_{0+}-\partial_p f_{0-})=-\frac{\mu}{2\pi^2}, \tag{3.27}$$

можно преобразовать систему к виду

$$\left[\nu\begin{pmatrix}\chi & 0 & \mu T/2\\ 0 & \chi & \mu T/2\\ \mu T/2 & \mu T/2 & C_V/T\end{pmatrix}+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})\begin{pmatrix}\mu/2\pi^2 & 0 & \chi/T\\ 0 & -\mu/2\pi^2 & -\chi/T\\ \chi/T & -\chi/T & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

В этот момент становится ясно, что если $\mu=0$, тогда $h_1=-h_2$, как мы и предполагали в предыдущем разделе. Вводя новые переменные $h_V = h_1+h_2$, $h_A=h_1-h_2$, приходим к системе

$$\left[\nu\begin{pmatrix}\chi & 0 & \mu T\\ 0 & \chi & 0\\ \mu T/2 & 0 & C_V/T\end{pmatrix}+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})\begin{pmatrix}0 & \mu/2\pi^2 & 0\\ \mu/2\pi^2 & 0 & 2\chi/T\\ 0 & \chi/T & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_V\\ h_A\\ h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Умножая это уравнение на матрицу, обратную к матрице, стоящей при ν и оставляя только члены вплоть до второго порядка по μ(поскольку мы работаем в приближнии μ, малого по сравнению с T), получим

$$\left[\nu E+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})\begin{pmatrix}0 & \frac{\mu}{2\pi^2\chi}-\frac{\mu T}{2C_V} & 0\\ \frac{\mu}{2\pi^2\chi} & 0 & \frac{2}{T}\\ 0 & \frac{\chi}{C_V}-\frac{\mu^2T^2}{2\pi^2C_V\chi}+\frac{\mu^2T^3}{2C_V^2} & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_V\\ h_A\\ h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

где E - единичная матрица 3×3. Коэффициент в линейном дисперсионном соотношении(т. е. скорость волны) определяется собственными значениями второй матрицы в этом уравнении, которые равны 0 и $\pm v_{CHVW}$, где

$$v_{HV}=\omega\sqrt{\frac{2\chi}{TC_V}-\frac{\mu^2T}{2\pi^2C_V\chi}+\frac{\mu^2T^2}{C_V^2}+\frac{\mu^2}{4\pi^4\chi^2}}. \tag{3.31}$$

Еще раз отметим, что этот результат правилен вплоть до второго порядка по μ, поскольку мы пренебрегли членами высшего порядкав процессе получения этого ответа.

3.3 Смешанная тепловая и магнитная волна

Теперь рассмотрим случай $\mu=0$, $\mathbf{B}\neq 0$. Как и раньше, в случае чистой тепловой волны, рановесные функции распределения все равны $f_0=\dfrac{1}{e^{\beta p}+1}$ и, как и в случае смешанной тепловой и вращательной волн, мы параметризуем возмущения, как $\delta f_{R\pm}=\dfrac{\partial f_0}{\partial p}(\pm h_1+\beta p\, h_3)$ и $\delta f_{L\pm}=\dfrac{\partial f_0}{\partial p}(\pm h_2+\beta p\ h_3)$. Обозначим множители модифицированного фазового объема как $\sqrt{G_{R+}}=1+\mathbf{B}'_+\cdot\mathbf{b}\equiv G_1$, $\sqrt{G_{R-}}=1+\mathbf{B}'_-\cdot\mathbf{b}\equiv G_2$, $\sqrt{G_{L+}}=1-\mathbf{B}'_+\cdot\mathbf{b}\equiv G_3$, $\sqrt{G_{L-}}=1-\mathbf{B}'_-\cdot\mathbf{b}\equiv G_4$. Тогда, подставляя в (2.12) - (2.14), будем иметь

$$\nu \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [G_1(h_1 + \beta p\, h_3) - G_2(-h_1 + \beta p\, h_3)] +$$

$$\mathbf{k} \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [G_1 \dot{\mathbf{x}}(h_1 + \beta p\, h_3) - G_2 \dot{\mathbf{x}}(-h_1 + \beta p\, h_3)] = 0, \qquad (3.32)$$

$$\nu \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [G_3(h_2 + \beta p\, h_3) - G_4(-h_2 + \beta p\, h_3)] +$$

$$\mathbf{k} \int_{\mathbf{p}} \partial_p f_0 [G_3 \dot{\mathbf{x}}(h_2 + \beta p\, h_3) - G_4 \dot{\mathbf{x}}(-h_2 + \beta p\, h_3)] = 0, \qquad (3.33)$$

$$\nu \int_{\mathbf{p}} \{\partial_p f_0 p\, [G_1(h_1 + \beta p\, h_3) + G_2(-h_1 + \beta p\, h_3) + G_3(h_2 + \beta p\, h_3) +$$
$$G_4(-h_2 + \beta p\, h_3)]\} + \mathbf{k} \int_{\mathbf{p}} \{\partial_p f_0 p\, [G_1 \dot{\mathbf{x}}(h_1 + \beta p\, h_3) + G_2 \dot{\mathbf{x}}(-h_1 + \beta p\, h_3) +$$
$$G_3 \dot{\mathbf{x}}(h_2 + \beta p\, h_3) + G_4 \dot{\mathbf{x}}(-h_2 + \beta p\, h_3)]\} = 0. \qquad (3.34)$$

Используя уравнения движения, а также интегралы, вычисленные в разделе (3.1), получим систему

$$\left[\nu \begin{pmatrix} \chi & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{C_V}{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{4\pi^2} & 0 & \dfrac{T(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{6} \\ 0 & \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{4\pi^2} & -\dfrac{T(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{6} \\ \dfrac{T^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{6} & -\dfrac{T^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{6} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.35)$$

Вводя, как раньше, новые переменные $h_V = h_1 + h_2$, $h_A = h_1 - h_2$, получим

$$\left[\nu E + \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})/(4\pi^2\chi) & 0 \\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})/(4\pi^2\chi) & 0 & T^2/(6\chi)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}) \\ 0 & T^2/(3C_V)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} h_V \\ h_A \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.36)$$

Значения частоты ν, соответствующие данному волновому вектору $\mathbf{k}$ — это просто собственные значения второй матрицы, которые равны 0 и $\pm\sqrt{\dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})^2}{16\pi^4\chi^2} + \dfrac{T^3}{18\chi C_V}(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}$. Нас интересуют максимальное и минимальное возможное отношение ν/k для $\mathbf{k}$, лежащих в той же плоскости, что и $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}$ (тогда, аналогично [10] мы сможем найти скорость волны для произвольного направления $\mathbf{k}$). Введем следующие углы: ϕ между $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}$, ϕ_1 между $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\omega}$ и ϕ_2 между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}$ (так что $\phi_2 = \phi - \phi_1$). Тогда для нетривиальных ν имеем:

$$(\frac{\nu}{k})^2 = \frac{B^2}{16\pi^4\chi^2}\cos^2\phi_1 + \frac{T^3\omega^2}{18\chi C_V}\cos^2\phi_2. \quad (3.37)$$

Максимум и минимум этого выражения лежат в точках, где $\tan 2\phi_1 = \frac{v_{CHW}^2 \sin 2\phi}{v_{CMW}^2 + v_{CHW}^2\cos 2\phi}$, и равны в этих точках

$$v_{MH\pm}^2 = \frac{v_{CHW}^2 + v_{CMW}^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v_{CHW}^4 + v_{CMW}^4 + 2v_{CHW}^2 v_{CMW}^2\cos 2\phi}. \quad (3.38)$$

Здесь мы использовали выражения для скорости чистой тепловой волны (3.17) и выражение для скорости Киральной Магнитной Волны $v_{CMW} = \frac{B}{4\pi^2\chi}$ ([8], [11]). Заметим, что большая из скоростей никогда не равняется нулю, так что всегда существует распространяющаяся мода.

3.4 Смешанная тепловая, магнитная и вращательная волна

Наконец, рассмотрим случай $\mathbf{B} \neq 0, \mu \neq 0$, в котором смешиваются все три волны. Равновесные функции распределения снова $f_{0R+} = f_{0L+} = f_{0+} = \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)}+1}$, $f_{0R-} = f_{0L-} = f_{0-} = \frac{1}{e^{\beta(p+\mu)}+1}$ и мы параметризуем возмущения над ними, как $\delta f_{R\pm} = \frac{\partial f_{0\pm}}{\partial p}(\pm h_1 + \beta p\, h_3)$ and $\delta f_{L\pm} = \frac{\partial f_{0\pm}}{\partial p}(\pm h_2 + \beta p\, h_3)$ (как в 3.2). Используя обозначения $G_i(i = \overline{1,4})$ из раздела 3.3 и подставляя в (2.12-2.14), получим

$$\nu\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_1(h_1 + \beta p\, h_3) - \partial_p f_{0-}G_2(-h_1 + \beta p\, h_3)] +$$
$$\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_1\dot{\mathbf{x}}(h_1 + \beta p\, h_3) - \partial_p f_{0-}G_2\dot{\mathbf{x}}(-h_1 + \beta p\, h_3)] = 0, \quad (3.39)$$
$$\nu\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_3(h_2 + \beta p\, h_3) - \partial_p f_{0-}G_4(-h_2 + \beta p\, h_3)] +$$
$$\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}}[\partial_p f_{0+}G_3\dot{\mathbf{x}}(h_2 + \beta p\, h_3) - \partial_p f_{0-}G_4\dot{\mathbf{x}}(-h_2 + \beta p\, h_3)] = 0, \quad (3.40)$$
$$\nu\int_{\mathbf{p}} p(\partial_p f_{0+}[G_1(h_1 + \beta p\, h_3) + G_3(h_2 + \beta p\, h_3)] +$$
$$\partial_p f_{0-}[G_2(-h_1 + \beta p\, h_3) + G_4(-h_2 + \beta p\, h_3)]) +$$
$$\mathbf{k}\int_{\mathbf{p}} p(\partial_p f_{0+}[G_1\dot{\mathbf{x}}(h_1 + \beta p\, h_3) + G_3\dot{\mathbf{x}}(h_2 + \beta p\, h_3) +$$
$$\partial_p f_{0-}G_2\dot{\mathbf{x}}(-h_1 + \beta p\, h_3) + G_4\dot{\mathbf{x}}(-h_2 + \beta p\, h_3)] = 0. \quad (3.41)$$

Используя уравнения движения и посчитанные ранее интегралы, а также переходя к переменным $h_V = h_1 + h_2$ и $h_A = h_1 - h_2$, мы получаем

$$\left[\nu \begin{pmatrix} \chi & 0 & \mu T \\ 0 & \chi & 0 \\ \mu T/2 & 0 & C_V/T \end{pmatrix} + \hat{M}\right] \begin{pmatrix} h_V \\ h_A \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}) + 2\mu(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\pi^2} & 0 \\ \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}) + 2\mu(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\pi^2} & 0 & \dfrac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}) + 4\pi^2\chi(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2\pi^2 T} \\ 0 & \dfrac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}) + 4\pi^2\chi(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\pi^2 T} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Как и в разделе (3.2) мы домножаем это уравнение на матрицу, обратную к матрице, стоящей при ν и оставляем члены вплоть до квадратичных по μ. Получаем, что есть три ветви дисперионного соотношения, выглядящих как $\nu = 0, \pm\lambda$, где λ - это положительное собственное значение (если есть хотя бы одно ненулевое) матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi^2\chi} + \dfrac{\mu^2(T^3 - \chi T)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{8\pi^2\chi^2 C_V} - \dfrac{\mu T(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2C_V} & 0 \\ \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4pi^2\chi} & 0 & \dfrac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{2\pi^2 T\chi} + \dfrac{2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{T} \\ 0 & -\dfrac{\mu T^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi^2\chi C_V} + \dfrac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{4\pi^2 C_V} + \dfrac{(2\chi C_V + \mu^2 T^3)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2C_V^2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

которое равно

$$\{\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi^2\chi}\left[\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi^2\chi} + \frac{5\mu^2 T^3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{48\pi^2\chi^2 C_V} - \frac{\mu T(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2C_V}\right] + \tag{3.45}$$
$$\left[\frac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{2\pi^2 T\chi} + \frac{2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{T}\right]\left[\frac{\mu(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})}{4\pi^2 C_V} - \frac{\mu T^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi^2\chi C_V} + \frac{(2C_V\chi + \mu^2 T^3)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2C_V^2}\right]\}^{1/2}$$

Здесь $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + 2\mu\boldsymbol{\omega}$. Нас вновь интересуют максимальное и минимальное возможные отношения ν/k для $\mathbf{k}$, $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\omega}$ лежащих в одной плоскости и мы вводим углы так же, как и в разделе 3.3. Тогда выражение для $(\lambda/k)^2$ имеет вид

$$\frac{\lambda^2}{k^2} = a_1 \cos^2\phi_1 + a_2 \cos\phi_1 \cos\phi_2 + a_3 \cos^2\phi_2, \tag{3.46}$$

где коэффициенты

$$a_1 = \frac{B^2}{16\pi^4\chi^2}\left(1+\frac{5\mu^2 T}{6\chi C_V}\right), \tag{3.47}$$

$$a_2 = \frac{B\mu\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2\pi^2\chi^2}-\frac{T}{4C_V\chi}+\frac{2}{TC_V}+\frac{\mu^2 T}{8\pi^2\chi^2 C_V}+\frac{\mu^2 T^2}{2\chi C_V^2}\right), \tag{3.48}$$

$$a_3 = \omega^2\left(\frac{2\chi}{TC_V}+\mu^2\left[\frac{1}{4\pi^2\chi^2}-\frac{5T}{\pi^2\chi C_V}+\frac{T^2}{C_V^2}\right]\right) = v_{CHVW}^2. \tag{3.49}$$

Максимум и минимум выражения (3.40) равны

$$v_{HMV\pm}^2 = \frac{a_1+a_2\cos\phi+a_3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_2(a_1+a_3)\cos\phi+2a_1a_3\cos 2\phi}, \tag{3.50}$$

и достигаются в точках, в которых

$$\tan 2\phi_1 = \frac{a_2\sin\phi+a_3\sin 2\phi}{a_1+a_2\cos\phi+a_3\cos 2\phi}. \tag{3.51}$$

Заметим, что выражение для $v_{CHMVW\pm}$ с коэффициентами (3.41) всегда больше нуля, поскольку мы работаем в случае $\mu \ll T$. Значит, большая из скоростей всегда положительна и всегда есть распространяющаяся мода.

4 Заключение

Мы подтвердили наличие Киральной Тепловой Волны и её смешиваний с Киральной Магнитной Волной и Киральной Вращательной Волной, существование которых было впервые предложено в [10], в киральной кинетической теории. Были получены результаты для скоростей этих волн, которые не везде вполне согласуются с [10] (о причинах этих расхождений см. ([14]))

Однако остаётся ещё немалое количество неисследованных тем, связанных с этой. К примеру, как такие волны выглядят в кинетической в противоположном, низкотемпературном, плотном пределе. Также может быть интересно исследовать переход между этими волнами и нулевым звуком (аналогичный анализ для Киральной Магнитной Волны был проведен в [11]). Надеемся, что ответы на эти вопросы появятся в скором будущем.

Список литературы

[1] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *“The Chiral Magnetic Effect”*, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008) [arXiv:0808.3382].

[2] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, *"Quantum anomalies in dense matter"*, Phys. Rev. D **70**, 074018 (2004) [hep-ph/0405216].

[3] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, *"Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter"*, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2005) [hep-ph/0505072].

[4] N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Dutta, R. Loganayagam and P. Surowka, *"Hydrodynamics from charged black branes"*, JHEP **1101**, 094 (2011) [arXiv:0809.2596].

[5] J. Erdmenger, M. Haack, M. Kaminski and A. Yarom, *"Fluid dynamics of R-charged black holes"*, JHEP **0901**, 055 (2009) [arXiv:0809.2488].

[6] D. T. Son and P. Surowka, *"Hydrodynamics with Triangle Anomalies"*, Phys. Rev. Lett. **103**, 191601 (2009) [arXiv:0906.5044].

[7] K. Landsteiner, E. Megias and F. Pena-Benitez, *"Gravitational Anomaly and Transport"*, Phys. Rev. Lett. **107**, 021601 (2011) [arXiv:1103.5006].

[8] D. E. Kharzeev and H. U. Yee, *"Chiral Magnetic Wave"*, Phys. Rev. D **83**, 085007 (2011) [arXiv:1012.6026].

[9] Y. Jiang, X. G. Huang and J. Liao, *"Chiral vortical wave and induced flavor charge transport in a rotating quark-gluon plasma"*, arXiv:1504.03201 [hep-ph].

[10] M. N. Chernodub, *"Chiral Heat Wave and wave mixing in chiral media"*, arXiv:1509.01245 [hep-th].

[11] M. A. Stephanov, H. U. Yee and Y. Yin, *"Collective modes of chiral kinetic theory in a magnetic field"*, Phys. Rev. D **91**, 125014 (2015) [arXiv:1501.00222].

[12] M. A. Stephanov, Y. Yin, *"Chiral Kinetic Theory"* Phys. Rev. Lett. **109**,162001 (2012)[arXiv:1207.0747]

[13] K. Landsteiner, E. Megias, L. Melgar and F. Pena-Benitez, *"Holographic Gravitational Anomaly and Chiral Vortical Effect"*, JHEP **1109**, 121 (2011) [arXiv:1107.0368].

[14] D. Frenklakh, *"Chiral heat wave and mixed waves in kinetic theory"* arXiv:1603.08971 [hep-th]