Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой
теории поля

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера для тригонометрической R-матрицы

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:
студент 221 группы
Тимофей Владимирович Краснов

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Зотов А.В.

Долгопрудный
2016

Содержание

1. Введение

Классическая интегрируемая система это гамильтонова система удовлетворяющая условиям теоремы Лиувилля-Арнольда[4][15]. А именно, пусть имеется многообразие M размерности $2n$ с заданной на нем пуассоновой структурой. Функция F является первым интегралом системы с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда $\{H,F\}=0$. Предположим, что существует n первых интегралов, находящихся в *инволюции*:

$$\{F_i,F_j\}=0, \quad \forall i,j=\overline{1\dots n}, \quad F_1=H. \tag{1.1}$$

Тогда уравнения движения системы интегрируемы в квадратурах, т.е. их решение сводится к набору алгебраических операций и взятию интегралов от известных функций.

Найти n независимых интегралов движения можно при помощи *пары Лакса*[4]. Пусть имеются две матрицы L и M, удовлетворяющие соотношению:

$$\dot{L}=[L,M], \quad \dot{L}=\frac{dL}{dt}. \tag{1.2}$$

Тогда $F_k=\mathrm{tr}(L^k)$ будут интегралами движения. Матрицы L и M могут быть аналитическими функциями комплексного спектрального параметра z. В этом случае первыми интегралами будут коэффициенты разложения $\mathrm{tr}(L^k)$ в ряд Лорана по данному параметру.

Заметим, что формулы (1.2) не гарантируют, что интегралы F_k находятся в инволюции. Однако, данное свойство гарантируется существованием *классической r-матрицы*:

$$\{L_1(z),L_2(w)\}=[L_1(z)+L_2(w),r_{12}(z-w)], \quad L_1=L\otimes 1, \quad L_2=1\otimes L, \tag{1.3}$$

либо

$$\{L_1(z),L_2(w)\}=[L_1(z)L_2(w),r_{12}(z-w)], \tag{1.4}$$

причем матрица $r(z)$, действующая в $\mathbb{C}_1^N\otimes\mathbb{C}_2^N$, удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера:

$$[r_{12}(z-w),r_{13}(z)]+[r_{12}(z-w),r_{23}(w)]+[r_{13}(z),r_{23}(w)]=0. \tag{1.5}$$

В работах [7][8][9][10] рассматривался класс интегрируемых систем, которые являются обобщением волчка Эйлера. Запишем уравнения движения волчка в следующем виде:

$$\frac{dS}{dt}=[S,J(S)], \tag{1.6}$$

$$S=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2i}\sigma_\alpha S_\alpha, \qquad J(S)=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2i}\sigma_\alpha S_\alpha J_\alpha. \tag{1.7}$$

Здесь σ_α — матрицы Паули, J_α — величины, обратные главным моментам инерции, S_α — компоненты вектора момента импульса. При обобщении данных систем предлагается заменить набор матриц $\{\sigma_\alpha\}$(базис в $\mathrm{su}(2)$) на $\{T_\alpha\}$ — базис в другой алгебре Ли $\mathfrak{g}$(в нашем случае gl_N). Данный тип динамических систем был предложен Арнольдом [2]. При некоторых $J(S)$ рассматривыемый волчок является интегрируемым [6][11][12]. В данной работе для построения интегрируемых волчков используется квантовая R-матрица, удовлетворяющая квантовому уравнению Янга-Бакстера:

$$R^\hbar_{12}(z-w)R^\hbar_{13}(z)R^\hbar_{23}(w)=R^\hbar_{23}(w)R^\hbar_{13}(z)R^\hbar_{12}(z-w), \tag{1.8}$$

и условию унитарности:

$$R^\hbar_{12}(z)R^\hbar_{21}(z)=1\otimes 1\Phi^\hbar(z)\Phi^\hbar(-z). \tag{1.9}$$

Чтобы построить уравнения движения волчка, квантовая R-матрица должна раскладываться в ряд Лорана по параметрам $\hbar$ и z следующим образом:

$$R^\hbar_{12}(z)=\frac{1}{z}P_{12}+R^{\hbar,(0)}_{12}+zR^{\hbar,(1)}_{12}+O(z^2)=\frac{1}{\hbar}1\otimes 1+r_{12}(z)+\hbar m_{12}(z)+O(\hbar^2). \tag{1.10}$$

Отметим, что $r_{12}(z)$ является классической r-матрицей, и из квантового уравнения Янга-Бакстера для R следует классическое уравнение Янга-Бакстера для r. Для построения пары Лакса R-матрица должна обладать несколькими дополнительными свойствами. Во первых, она должна быть антисимметричной:

$$R^{\hbar}_{ab}(z_a - z_b) = -R^{-\hbar}_{ba}(z_b - z_a). \tag{1.11}$$

В вторых, должно выполняться *ассоциативное уравнения Янга-Бакстера*:

$$R^{\hbar}_{ab}R^{\hbar'}_{bc} = R^{\hbar'}_{ac}R^{\hbar-\hbar'}_{ab} + R^{\hbar'-\hbar}_{bc}R^{\hbar}_{ac}. \tag{1.12}$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$R^{\hbar}_{ab} = R^{\hbar}_{ab}(z_a - z_b). \tag{1.13}$$

Релятивистский интегрируемый волчок задается при помощи (обратного) тензора инерции:

$$J^{\eta}(\mathcal{S}) = \mathrm{tr}_2((R^{\eta,(0)}_{12} - r^{(0)}_{12})\mathcal{S}_2), \quad \mathcal{S}_2 = 1 \otimes \mathcal{S}. \tag{1.14}$$

Для динамических переменных $\mathcal{S}$ уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = [\mathcal{S}, J^{\eta}(\mathcal{S})]. \tag{1.15}$$

Матрицы L и M определяются следующими соотношением:

$$L^{\eta}(z, \mathcal{S}) = \mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)\mathcal{S}_2), \quad M^{\eta}(z, \mathcal{S}) = -\,\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)\mathcal{S}_2). \tag{1.16}$$

Нерелятивистский волчок задается схожими соотношениями:

$$J(S) = \mathrm{tr}_2(m_{12}(0)S_2), \quad \dot{S} = [S, J(S)], \tag{1.17}$$

$$L(z, S) = \mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2), \quad M(z, S) = \mathrm{tr}_2(m_{12}(z)S_2). \tag{1.18}$$

Необходимо отметить, что не всякая квантовая R-матрица обеспечивает согласованность уравнений движения (1.15) с уравнениями Лакса (1.2). Однако, если R-матрица обладает свойством (1.11) и удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера (1.12), то уравнения Лакса с парой Лакса (1.16) эквивалентны уравнениям движения (1.15).

Используя классическую r-матрицу, можно задать пуассонову струкутуру:

$$\{L^{\eta}_1(z), L^{\eta}_2(w)\} = [L^{\eta}_1(z)L^{\eta}_2(w), r_{12}(z - w)], \tag{1.19}$$

В рациональном, эллиптическом[7][8] и в тригонометрическом случае(для 7-ми вершинной R-матрицы) релятивистский интегрируемый волчок эквивалентен модели Русенаарса-Шнайдера (Ruijsenaars-Schneider, далее RS-модель)[13]. Нерелятивистский интегрируемый волчок, получаемый в пределе $\eta \to 0$, эквивалентен модели Калоджеро-Мозера(далее CM-модель)[5]. Его уравнения движения и матрица Лакса имееют вид(1.17),(1.18). Пуассонова структура в данном случае линейна(1.3).

Существует другой предел матрицы (1.16). А именно, введем новую переменную:

$$\tilde{S}_0 = \frac{2}{\eta}\,\mathrm{tr}\,\mathcal{S}. \tag{1.20}$$

Тогда, перейдя к пределу $\eta \to 0$, получим квадратичную r-матричную структуру(1.4) с матрицей Лакса:

$$\tilde{L}(z, \tilde{S}) = \tilde{S}_0 1_{2\times 2} + L(z, \tilde{S}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,L(z, \tilde{S})1_{2\times 2}, \tag{1.21}$$

которая не зависит от η. Данное описание(η-независимое) связано с η-зависимым описанием явной заменой переменных:

$$\mathcal{S}(\eta,\tilde{S})=\frac{1}{2}\tilde{L}(\frac{\eta}{2},\tilde{S}), \tag{1.22}$$

$$L^{\eta}\left(z-\frac{\eta}{2},\tilde{L}(\frac{\eta}{2},S)\right)=g(z,\eta)\tilde{L}(z,S), \tag{1.23}$$

где $g(z,\eta)$ — некая функция, определенная ниже. η-независимое описание, так же как и η-зависимое, является эквивалентом RS-модели, хотя пуассонова структура и уравнения движения различаются. Отметим также, что η-независимое описание исопльзует только классическую r-матрицу. M-оператор для данного описания совпадает с таковым для нерелятивистского волчка.

В данной работе мы имеем дело с тригонометрической квантовой R-матрицей(полученной в [1]):

$$\begin{aligned}
R^{\hbar}(z)_{ij,kl}=&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}(\coth(z)+\coth(\hbar))\\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{1}{\sinh(\hbar)}\exp\Big(-\frac{\hbar}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i\neq k)\frac{1}{\sinh(z)}\exp\Big(\frac{z}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j<i<l)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l<i<j)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)\\
&+\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l<N)\exp\Big(-\frac{2}{N}(iz+k\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j<N)\exp\Big(+\frac{2}{N}(kz+i\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}2\sinh(z+\hbar)\exp\Big(-\frac{2}{N}(i-\frac{N}{2})(z-h)\Big)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

где ε(условие) равно 1 если условие верно, 0 в другом случае. При $N=2$ получаем 7-ми вершинную R-матрицу:

$$R^{\hbar}(z)=\begin{pmatrix}\coth(z)+\coth(\hbar)&0&0&0\\0&\sinh^{-1}(\hbar)&\sinh^{-1}(z)&0\\0&\sinh^{-1}(z)&\sinh^{-1}(\hbar)&0\\-\sinh(z+\hbar)&0&0&\coth(z)+\coth(\hbar)\end{pmatrix} \tag{1.25}$$

В данной работе будет произведено прямое докательство ассоциативного уравнения Янга-Бакстера для R-матрицы(1.24), и, таким образом, показано, что она отвечает интегрируемому волчку. Будет найден явный вид пуассоновой структуры интегрируемого волчка в случае $N=2$ и показано, что он эквивалентен двухчастичной модели Русенаарса-Шнайдера(либо Калоджеро-Мозера в нерелятивистском случае).

2. Тригонометрическая R-матрица в N-мерном случае

2.1. Различные решения ассоциативного уравнения Янга-Бакстера

Прямое доказательство ассоциативного уравнения Янга-Бакстера для тригонометрической R-матрицы дано в приложении. Здесь мы отметим ряд свойств R-матрицы. Разобьем её на сумму матриц P(появлялась в работах [3][14]) и U:

$$R^{\hbar}_{12}=P^{\hbar}_{12}(z)+U^{\hbar}_{12}(z) \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
P^{\hbar}(z)_{ij,kl} =&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}(\coth(z)+\coth(\hbar))\\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{1}{\sinh(\hbar)}\exp\Big(-\frac{\hbar}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{1}{\sinh(z)}\exp\Big(\frac{z}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{\hbar}(z)_{ij,kl} =&\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l{<}N)\exp\Big(-\frac{2}{N}(iz+k\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j{<}N)\exp\Big(+\frac{2}{N}(kz+i\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}2\sinh(z+\hbar)\exp\Big(-\frac{2}{N}(i-\frac{N}{2})(z-h)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

В свою очередь, P-матрицу (2.2) также разобьем на сумму двух матриц:

$$
P^{\hbar}_{12}=S^{\hbar}_{12}(z)+T^{\hbar}_{12}(z)
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{\hbar}(z)_{ij,kl} =&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}(\coth(z)+\coth(\hbar))\\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{1}{\sinh(\hbar)}\exp\Big(-\frac{\hbar}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{1}{\sinh(z)}\exp\Big(\frac{z}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{\hbar}(z)_{ij,kl} =&\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)\\
&-\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z+(k-j)\hbar)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Матрица S есть *стандартная* тригонометрическая R-матрица[16]. В процессе доказательства отмечено, что каждая из матриц $S^{\hbar}(z)$, $P^{\hbar}(z)$, $U^{\hbar}(z)$ также удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера. Поэтому последнии три слагаемых у R матрицы(или U-матрицу) можно домножить на произвольный коэффициент c, поскольку:

$$
(P^{\hbar}_{12}+cU^{\hbar}_{12})(P^{\hbar'}_{23}+cU^{\hbar'}_{23})=P^{\hbar}_{12}P^{\hbar'}_{23}+c(P^{\hbar}_{12}U^{\hbar'}_{23}+U^{\hbar}_{12}P^{\hbar'}_{23})+c^2U^{\hbar}_{12}U^{\hbar'}_{23}
\tag{2.7}
$$

Найдем классическую r-матрицу:

$$
\begin{aligned}
r_{12}(z) =&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\coth(\hbar)\\
&-\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i)}{N}\\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)\frac{1}{\sinh(z)}\exp\Big(\frac{z}{N}(2(k-i)-N\operatorname{sgn}(k-i))\Big)\\
&+\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)2\exp\Big(-\frac{2}{N}(l-k)z\Big)\\
&-\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)2\exp\Big(-\frac{2}{N}(l-k)z\Big)\\
&+\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l{<}N)\exp\Big(-\frac{2}{N}iz\Big)\\
&-\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j{<}N)\exp\Big(\frac{2}{N}kz\Big)\\
&-\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}2\sinh(z)\exp\Big(-\frac{2}{N}(i-\frac{N}{2})z\Big)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Данная r-матрица является решением классического уравнения Янга-Бакстера.

2.2. Явный вид обратного тензора инерции

По формуле (1.14) найдем обратный тензор инерции волчка, соответствующий тригонометрической R-матрице:

$$
\begin{aligned}
J^{\eta}(\mathcal{S})_{ij} =&\delta_{ij}\coth(\eta)\mathcal{S}_{ii}\\
+\delta_{ij}\sum_{k=1,k\neq i}^{N}&\Big(\frac{1}{\sinh(\eta)}\exp\Big(-\frac{\eta}{N}(2(k-i)-N\,\mathrm{sgn}(k-i))\Big)+\frac{2(k-i)-N\,\mathrm{sgn}(k-i)}{N}\Big)\mathcal{S}_{kk}\\
&+2\varepsilon(j<i)\sum_{k=j+1}^{N+j-i}\Big(\exp\Big(-\frac{2}{N}(k-j)\eta\Big)-1\Big)\mathcal{S}_{i-j+k,k}\\
&-2\varepsilon(i<j)\sum_{k=1}^{j-1}\Big(\exp\Big(-\frac{2}{N}(k-j)\eta\Big)-1\Big)\mathcal{S}_{i-j+k,k}\\
&+\delta_{j,N}\sum_{k=1}^{N-i+1}\Big(\exp\Big(-\frac{2k\eta}{N}\Big)-1\Big)\mathcal{S}_{i+k,k}\\
&-\varepsilon(j<N)\Big(\exp\Big(\frac{2i\eta}{N}\Big)-1\Big)\mathcal{S}_{N,j-i}\\
&-2\delta_{j,N}\sinh(\eta)\exp\Big(-\frac{2}{N}(i-\frac{N}{2})\eta\Big)\mathcal{S}_{N,N-i}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Для нерелятивистского волчка(1.17):

$$
\begin{aligned}
J(S)_{ij} =&\frac{1}{3}\delta_{ij}S_{ii}\\
+\delta_{ij}\sum_{k\neq i}&\Big(\frac{1}{2N^2}\big(2(k-i)-N\,\mathrm{sgn}(k-i)\big)^2-\frac{1}{6}\Big)S_{kk}\\
&+\frac{4}{N}\varepsilon(j<i)\sum_{k=j+1}^{N+j-i}(j-k)S_{i-j+k,k}\\
&-\frac{4}{N}\varepsilon(i<j)\sum_{k=1}^{j-1}(j-k)S_{i-j+k,k}\\
&-\frac{2}{N}\delta_{j,N}\sum_{k=1}^{N-i+1}kS_{i+k,k}\\
&-\frac{2}{N}\varepsilon(j<N)iS_{N,j-i}\\
&-2\delta_{j,N}S_{N,N-i}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Заметим, что в силу линейности обратного тензора инерции по R-матрице, и того, что S, P, U-матрицы удовлетворяют ассоциативному уравнению Янга-Бакстера, данные выражения содержат в себе тензоры инерций, соответстующие S, P и U-матрицам. Например, первые два слагаемых в (2.9) соответствует S-матрице, первые четыре — P-матрице и т.д.

3. От квантовой 7-ми вершинной R-матрицы к моделям Русенаарса-Шнайдера и Калоджеро-Мозера

3.1. Релятивисткий интегрируемый волчок

Для согласованности скобок Пуассона, полученных при помощи r-матричной структуры (1.4), с канонической скобкой в RS-модели $\{p,q\}=1$, полезно переопределить r-матрицу:

$$\tilde{r}_{12}(z)=-\frac{1}{c}r_{12}(z) \tag{3.1}$$

и записать квадратичную r-матричную структуру в виде:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z)L_2(w), \tilde{r}_{12}(z)]. \tag{3.2}$$

Подробнее см. раздел 3.4.

Выпишем в явном виде классическую r-матрицу

$$r(z) = \lim_{\hbar\to 0}(R^\hbar(z) - \frac{1}{\hbar}1\otimes 1) =$$
$$= \begin{pmatrix} \coth(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sinh^{-1}(z) & 0 & 0 \\ -\sinh(z) & 0 & 0 & \coth(z) \end{pmatrix} = \frac{P_{12}}{z} + O(z). \tag{3.3}$$

Подставив R-матрицу (1.25) в формулу (1.16) получим матрицу Лакса для релятивистского интегрируемого волчка в явном виде:

$$L^\eta(z) = (\coth(z) + \coth(\eta)) \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{22}\sinh^{-1}(\eta) & \mathcal{S}_{12}\sinh^{-1}(z) \\ \mathcal{S}_{21}\sinh^{-1}(z) - \mathcal{S}_{12}\sinh(z+\eta) & \mathcal{S}_{11}\sinh^{-1}(\eta) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Координатами данной системы являются компоненты двумерной матрицы $\mathcal{S} \in \mathrm{gl}_2$. Пуассонова структура возникает из квадратичной r-матричной структуры (1.19) и в силу (1.10) и (3.3) для динамических переменных $\mathcal{S}$ она имеет следующий вид:

$$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\} = [\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2, \tilde{r}^{(0)}_{12}] - \frac{1}{c}[L^{\eta,(0)}(\mathcal{S})_1\mathcal{S}_2, P_{12}]. \tag{3.5}$$

Учитывая, что $r^{(0)} = 0$, получаем:

$$\{\mathcal{S}_{ij}, \mathcal{S}_{kl}\} = \frac{1}{c}(L^{(0)}_{kj}\mathcal{S}_{il} - L^{(0)}_{il}\mathcal{S}_{kj}) \tag{3.6}$$

В итоге получаем скобки Пуассона для релятивистского волчка в η-зависимом описании:

$$c\{\mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{12}\} = \mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{12}\coth\eta + \frac{\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{22}}{\sinh(\eta)}, \tag{3.7}$$

$$c\{\mathcal{S}_{12}, \mathcal{S}_{22}\} = \mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{22}\coth(\eta) + \frac{\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{12}}{\sinh(\eta)}, \tag{3.8}$$

$$c\{\mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{22}\} = -\mathcal{S}^2_{12}\sinh(\eta), \quad c\{\mathcal{S}_{12}, \mathcal{S}_{21}\} = \frac{\mathcal{S}^2_{11} - \mathcal{S}^2_{22}}{\sinh(\eta)}, \tag{3.9}$$

$$-c\{\mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{21}\} = \mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{21}\coth(\eta) + \frac{\mathcal{S}_{21}\mathcal{S}_{22}}{\sinh(\eta)} + \mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{12}\sinh(\eta), \tag{3.10}$$

$$-c\{\mathcal{S}_{21}, \mathcal{S}_{22}\} = \mathcal{S}_{21}\mathcal{S}_{22}\coth(\eta) + \frac{\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{21}}{\sinh(\eta)} + \mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{22}\sinh(\eta). \tag{3.11}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что данная пуассонова структура согласованна с квадратичной r-матричной структурой (1.19). Полученные скобки Пуассона вырождены. Определим функции Казимира:

$$\det(L^\eta(z, \mathcal{S})) = \frac{1}{z^2}C_1 + \frac{1}{z}C_2 + \dots \tag{3.12}$$

Отсюда находим

$$C_1 = \mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22} - \mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{21} \tag{3.13}$$

$$C_2 = \frac{1}{\sinh(\eta)}(\mathcal{S}^2_{11} + \mathcal{S}^2_{22} + 2\cosh(\eta)\mathcal{S}_{11}\mathcal{S}_{22}) + \sinh(\eta)\mathcal{S}^2_{12} \tag{3.14}$$

Зафиксировав значение функций Казимира, получаем фазовое пространство системы. При фиксированных C_1 и C_2 скобки Пуассона (3.7)–(3.7) невырождены.

Для гамильтониана $H = -c\,\mathrm{tr}(\mathcal{S})$ уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot{\mathcal{S}}_{11} = -\dot{\mathcal{S}}_{22} = -\sinh(\eta)\mathcal{S}_{12}^2, \tag{3.15}$$

$$\dot{\mathcal{S}}_{12} = (\mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{22})\mathcal{S}_{12}\frac{1-\cosh(\eta)}{\sinh(\eta)}, \tag{3.16}$$

$$\dot{\mathcal{S}}_{21} = (\mathcal{S}_{11} - \mathcal{S}_{22})\left(\mathcal{S}_{12}\sinh(\eta) - \mathcal{S}_{21}\frac{1-\cosh(\eta)}{\sinh(\eta)}\right). \tag{3.17}$$

Эти уравнениния можно записать в виде:

$$\dot{\mathcal{S}} = [\mathcal{S}, J^\eta(\mathcal{S})], \tag{3.18}$$

где обратный тензор инерции $J^\eta(\mathcal{S})$ равен:

$$J^\eta(\mathcal{S}) = L^{(0)}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} \coth(\eta)\mathcal{S}_{11} + \dfrac{\mathcal{S}_{22}}{\sinh(\eta)} & 0 \\ -\sinh(\eta)\mathcal{S}_{12} & \dfrac{\mathcal{S}_{11}}{\sinh(\eta)} + \coth(\eta)\mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

M-матрица имеет вид:

$$M(z) = -\,\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)\mathcal{S}_2) = -\begin{pmatrix} \coth(z)\mathcal{S}_{11} & \dfrac{\mathcal{S}_{12}}{\sinh(z)} \\ \dfrac{\mathcal{S}_{21}}{\sinh(z)} - \sinh(z)\mathcal{S}_{12} & \coth(z)\mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Уравнения Лакса:

$$\dot{L}(z,\mathcal{S}) = [L(z,\mathcal{S}), M(z)] \tag{3.21}$$

согласованны с уравнениями движения (3.15)–(3.18).

3.2. Нерелятивистский случай

В нерелятивистском пределе $\eta \to 0$ матрица Лакса с точностью до знака равна релятивистской M-матрице:

$$L(z) = -M(z) = \begin{pmatrix} \coth(z)\mathcal{S}_{11} & \dfrac{\mathcal{S}_{12}}{\sinh(z)} \\ \dfrac{\mathcal{S}_{21}}{\sinh(z)} - \sinh(z)\mathcal{S}_{12} & \coth(z)\mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

r-матричная структура линейна:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z) + L_2(w), r_{12}(z-w)], \tag{3.23}$$

Пуассонова структура имеет вид:

$$\{S_1, S_2\} = [S_2, P_{12}]. \tag{3.24}$$

Зафиксируем функции Казимира:

$$C_1 = \mathrm{tr}(S) \tag{3.25}$$

$$C_2 = \mathrm{tr}(S^2)/2 \tag{3.26}$$

Для того, чтобы найти гамильтониан системы, вычислим след L-матрицы:

$$\mathrm{tr}(L) = \coth(z)(S_{11} + S_{22}) = \coth(z)\,\mathrm{tr}(S) \tag{3.27}$$

$$\mathrm{tr}(L^2) = \frac{\mathrm{tr}(S^2)}{\sinh^2(z)} + S_{11}^2 + S_{22}^2 - 2S_{12}^2 \tag{3.28}$$

поэтому в качестве гамильтониана берем $H = (-S_{12}/2)(S_{12}+S_{21})$(коэффициент $-1/2$ для согласования с M-матрицей), и уравнения движения имееют вид:

$$\dot{S}_{11} = -\dot{S}_{22} = -S_{12}^2 \tag{3.29}$$

$$\dot{S}_{12} = \frac{1}{2}S_{12}(S_{22}-S_{11}) \tag{3.30}$$

$$\dot{S}_{21} = \frac{1}{2}(S_{11}-S_{22})(S_{21}+2S_{12}) \tag{3.31}$$

Эти уравнения можно записать в виде:

$$\dot{S} = [S, J(S)], \tag{3.32}$$

где обратный тензор инерции $J(S)$ равен:

$$J(S) = M(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2S_{11}-S_{22} & 0 \\ -6S_{12} & -S_{11}+2S_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

M-матрица имеет вид:

$$M(z) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2S_{11}-S_{22} & 0 \\ -6\cosh(z)S_{12} & -S_{11}+2S_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Уравнения Лакса (3.21) эквиваленты уравнениям движения (3.29)–(3.32).

3.3. η-независимое описание

Матрица Лакса:

$$\tilde{L}(z,\tilde{S}) = \tilde{S}_0 1_{2\times2} + L(z,\tilde{S}) - \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(z,\tilde{S})1_{2\times2} \tag{3.35}$$

или

$$\tilde{L}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{S}_0 + \frac{1}{2}\coth(z)(\tilde{S}_{11}-\tilde{S}_{22}) & \dfrac{\tilde{S}_{12}}{\sinh(z)} \\ \dfrac{\tilde{S}_{21}}{\sinh(z)} - \sinh(z)\tilde{S}_{12} & \tilde{S}_0 + \frac{1}{2}\coth(z)(\tilde{S}_{22}-\tilde{S}_{11}) \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Пуассонова структура имеет вид:

$$\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2\} = -\frac{1}{c}\tilde{S}_0[\tilde{S}_2, P_{12}] \tag{3.37}$$

$$\{\tilde{S}_0, \tilde{S}\} = -\frac{1}{c}[\tilde{S}, J(\tilde{S})] \tag{3.38}$$

Уравнения движения(для гамильтониана $H = \tilde{S}_0$) совпадают с уравнениями движения для нерелятивистского волчка. Функции Казимира можно найти из:

$$\begin{aligned} \det\tilde{L}(z) = \tilde{S}_0^2 + \tilde{S}_{12}^2 - \frac{\tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21}}{\sinh^2(z)} - \frac{1}{4}\coth^2(z)(\tilde{S}_{11}+\tilde{S}_{22})^2 = \\ = -\frac{1}{z^2}((\tilde{S}_{11}+\tilde{S}_{22})^2 + \tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21}) + \\ + \tilde{S}_0^2 + \tilde{S}_{12}^2 + \frac{1}{3}\tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21} - \frac{1}{6}(\tilde{S}_{11}+\tilde{S}_{22})^2 + O(z) \end{aligned} \tag{3.39}$$

В итоге:

$$C_1 = (\tilde{S}_{11}+\tilde{S}_{22})^2 + \tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21}, \quad C_2 = \tilde{S}_0^2 + \tilde{S}_{12}^2 + \frac{1}{2}\tilde{S}_{12}\tilde{S}_{21} \tag{3.40}$$

Связь между двумя описаниями. Матрицы Лакса связаны друг с другом следующим соотношением:

$$L^\eta\left(z-\frac{\eta}{2}, \tilde{L}(\frac{\eta}{2}, S)\right) = \frac{\sinh(z)}{\sinh(z-\frac{\eta}{2})\sinh(\frac{\eta}{2})}\tilde{L}(z,S). \tag{3.41}$$

Явная замена переменных:

$$\mathcal{S}(\eta,\tilde{S})=\frac{1}{2}\tilde{L}(\frac{\eta}{2},\tilde{S}). \tag{3.42}$$

Формулы перехода от $\mathcal{S}$ к $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}_0=\mathcal{S}_{11}+\mathcal{S}_{22},\quad \tilde{S}_{11}-\tilde{S}_{22}=2\tanh(\frac{\eta}{2})(\mathcal{S}_{11}-\mathcal{S}_{22}), \tag{3.43}$$

$$\tilde{S}_{12}=2\sinh(\frac{\eta}{2})\mathcal{S}_{12},\quad \tilde{S}_{21}=2\sinh(\frac{\eta}{2})\mathcal{S}_{21}+2\sinh^3(\frac{\eta}{2})\mathcal{S}_{12}. \tag{3.44}$$

3.4. Связь с моделями Русенаарса и Калоджеро

Матрица Лакса модели Русенаарса имеет вид:

$$L^{RS}(z)=g^{-1}(z)g(z+\eta)e^{P/c}, \tag{3.45}$$

где $P=\mathrm{diag}\{p_1,p_2\}$, а матрица $g(z)$ равна:

$$g(z)=\Xi D,\quad \Xi=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cosh(z+q_1) & \cosh(z+q_2)\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{diag}\{1,-1\}. \tag{3.46}$$

Выпишу в явном виде матрицу Лакса RS-модели:

$$L^{RS}=\begin{pmatrix} \frac{\cosh(z+q_1+n)-\cosh(z+q_2)}{\cosh(z+q_1)-\cosh(z+q_2)}e^{p_1/c} & \frac{\cosh(z+q_2+n)-\cosh(z+q_2)}{\cosh(z+q_2)-\cosh(z+q_1)}e^{p_2/c} \\ \frac{\cosh(z+q_1+n)-\cosh(z+q_1)}{\cosh(z+q_1)-\cosh(z+q_2)}e^{p_1/c} & \frac{\cosh(z+q_2+n)-\cosh(z+q_1)}{\cosh(z+q_2)-\cosh(z+q_1)}e^{p_2/c}\end{pmatrix} \tag{3.47}$$

В системе центра масс $p_1=-p_2=p$ и $q_1=-q_2=q$, то есть мы имеем дело с одной парой канонических переменных:

$$\{p,q\}=1. \tag{3.48}$$

Связь с η-зависимым описанием. Матрица Лакса релятивистского волчка получается из модели Русенаарса путем калибровочного преобразования:

$$L^{\eta}(z)=g(z)L^{RS}(z)g^{-1}(z)=g(z+\eta)e^{P/c}g^{-1}(z), \tag{3.49}$$

или в явном виде:

$$L^{\eta}(z)=\begin{pmatrix} \frac{e^{-p/c}\cosh(z-q)-e^{p/c}\cosh(z+q)}{2\sinh(z)\sinh(q)} & \frac{e^{p/c}-e^{-p/c}}{2\sinh(z)\sinh(q)} \\ \frac{e^{-p/c}\cosh(z+q)\cosh(\eta+z-q)-e^{p/c}\cosh(z-q)\cosh(\eta+z+q)}{2\sinh(z)\sinh(q)} & \frac{e^{p/c}\cosh(\eta+z+q)-e^{-p/c}\cosh(\eta+z-q)}{2\sinh(z)\sinh(q)}\end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Сравнение этой формулы с (3.4) дает явную заменену переменных(формулы перехода от RS-модели к рел. волчку в η-зависимом описании):

$$\mathcal{S}_{11}=-\frac{1}{2}\coth(q)(e^{p/c}-e^{-p/c}),\quad \mathcal{S}_{12}=\frac{e^{p/c}-e^{-p/c}}{2\sinh(q)}, \tag{3.51}$$

$$\mathcal{S}_{21}=-\coth(q)(\frac{1}{2}\cosh(q)(e^{p/c}-e^{-p/c})+\sinh(\eta/2)(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c})), \tag{3.52}$$

$$\mathcal{S}_{22}=\frac{1}{2}\coth(q)(e^{p/c}-e^{-p/c})+\frac{\sinh(\eta/2)}{\sinh(q)}(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c}). \tag{3.53}$$

Поскольку мы подставили в квадратичную r-матричную структуру (1.4) матрицу $\tilde{r}_{12}(z)$ вместо $r_{12}(z)$, каноническая скобка Пуассаона $\{p,q\}=1$ согласованна со скобками Пуассона для переменных $\mathcal{S}$ (3.7)–(3.11)

Гамильтониан волчка пропорционален:

$$\operatorname{tr}\mathcal{S}(p,q)=\mathcal{S}_{11}(p,q)+\mathcal{S}_{22}(p,q)=\frac{\sinh(\eta/2)}{\sinh(q)}(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c}) \tag{3.54}$$

Поэтому гамильтониан Русенаарса определяю как:

$$H^{RS}=\frac{\sinh(q+\frac{\eta}{2})}{\sinh(q)}e^{p/c}+\frac{\sinh(q-\frac{\eta}{2})}{\sinh(q)}e^{-p/c}. \tag{3.55}$$

Связь с η-независимым описанием. Используя формулы перехода от координат $\mathcal{S}$ к $\tilde{S}$, получаем:

$$\tilde{S}_0=\frac{\sinh(\eta/2)}{\sinh(q)}(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c}), \tag{3.56}$$

$$\tilde{S}_{11}-\tilde{S}_{22}=-2\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)(\coth(q)(e^{p/c}-e^{-p/c})+ \tag{3.57}$$

$$+\frac{\sinh(\eta/2)}{\sinh(q)}(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c})) \tag{3.58}$$

$$\tilde{S}_{12}=\sinh(\frac{\eta}{2})\frac{e^{p/c}-e^{-p/c}}{\sinh(q)} \tag{3.59}$$

$$\tilde{S}_{21}=-2\sinh(\frac{\eta}{2})\cosh(q)(\frac{1}{2}\coth(q)(e^{p/c}-e^{-p/c})+\frac{\sinh(\eta/2)}{\sinh(q)}(\sinh(q+\frac{\eta}{2})e^{p/c}+ \tag{3.60}$$

$$+\sinh(q-\frac{\eta}{2})e^{-p/c}))+\sinh^3(\frac{\eta}{2})\frac{e^{p/c}-e^{-p/c}}{\sinh(q)} \tag{3.61}$$

Модель Калоджеро. В нерелятивистском пределе:

$$\eta=\nu/c,\quad c\to\infty, \tag{3.62}$$

гамильтониан (3.55) имеет вид:

$$H^{RS}=2+\frac{2}{c^2}H^{CM}+o(\frac{1}{c^3}), \tag{3.63}$$

где

$$H^{CM}=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\nu\coth(q)p+\frac{\nu^2}{8}=\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2}\nu\coth(q))^2-\frac{\nu^2}{8\sinh^2(q)} \tag{3.64}$$

Стандартный вид $H^{CM}=(1/2)p^2+(1/2)\nu^2\sinh^{-2}(q)$ получается,если совершить каноническую замену переменных $p\to p+(1/2)\nu\coth(q)$, $q'\to q$ и замену $\nu\to\sqrt{-2}\nu$. Далее, рассмотрим предел (3.62) матрицы $\mathcal{S}$:

$$S=-\lim_{c\to\infty}c\mathcal{S}=\begin{pmatrix} p\coth(q) & -\frac{p}{\sinh(q)} \\ \cosh(q)(p\coth(q)+\nu) & -p\coth(q)-\nu \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Скобки Пуассона между элементами матрицы S удовлетворяют соотношениям (3.24).

4. Заключение

В данной работе исследован ряд свойств квантовой тригонометрической R-матрицы(1.24). Показано, что для данной матрицы выполняется ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (1.12). Кроме того, данное уравнение выполняется для матриц (2.2), (2.3), (2.5). Как было отмечено во введении, выполнение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера для R-матрицы гарантирует, что у соответствующего данной R-матрице волчка Эйлера-Арнольда(релятивистского (1.15) либо классического (1.17)) уравнения движения эквивалентны уравнениям Лакса с парой Лакса (1.16) для релятивистского волчка и (1.18) для классического. Выписаны в явном виде обратные тензоры инерции (2.9) и (2.10).

В частном случае 7-ми вершинной R-матрицы (1.25) исследована пуассонова структура интегрируемых волчков, получаемая из квадратичной r-матричной структуры (1.4). Было показано, что пуассонова структура и r-матричная структура согласованны, поэтому соответствующий волчок интергрируем в терминах теоремы Лиувилля-Арнольда. Произведен переход от η-зависимого описания релятивистского волчка к η-незвависимого, связь матриц Лакса и явная замена переменных даны формулами (3.41)–(3.44). С помощью калибровочного преобразования (3.49) от релятивистского волчка можно перейти к двухчастичной модели Русенаарса-Шнайдера. В нерялятивистском пределе мы получаем двухчастичную модель Калоджеро, которая эквивалентна нерелятивистскому волчку. Данное построение должно работать и в случае произвольного числа размерностей. Эллиптический и рациональный случай изложены в работах [7][8].

A. Прямое доказательство ассоциативного уравнения Янга-Бакстера для тригонометрческой R-матрицы.

Запишем тригонометрическую R-матрицу в виде:

$$\begin{aligned} R^{\hbar}(z)_{ij,kl} =&\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}f_1(z,\hbar) + \delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)f_2(z,\hbar)_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)f_3(z,\hbar)_{ik} \\ &+\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)f_4(z,\hbar)_{jkl} + \delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)(-f_4(z,\hbar)_{jkl}) \\ &+\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l{<}N)f_5(z,\hbar)_{ik} - \delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j{<}N)f_5(-z,-\hbar)_{ki} \\ &-\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}f_6(z,\hbar)_i \end{aligned} \tag{A.1}$$

где:

$$f_1(z,\hbar) = \coth(z) + \coth(\hbar) \tag{A.2}$$

$$f_2(z,\hbar)_{ik} = \frac{1}{\sinh(\hbar)}\exp\Big(-\frac{\hbar}{N}(2(k-i) - N\,\mathrm{sgn}(k-i))\Big) \tag{A.3}$$

$$f_3(z,\hbar)_{ik} = \frac{1}{\sinh(z)}\exp\Big(\frac{z}{N}(2(k-i) - N\,\mathrm{sgn}(k-i))\Big) \tag{A.4}$$

$$f_4(z,\hbar)_{jkl} = 2\exp\Big(-\frac{2}{N}((l-k)z + (k-j)\hbar)\Big) \tag{A.5}$$

$$f_5(z,\hbar)_{ik} = c\exp\Big(-\frac{2}{N}(iz + k\hbar)\Big) \tag{A.6}$$

$$f_6(z,\hbar)_i = 2c\sinh(z+\hbar)\exp\Big(-\frac{2}{N}(i-\frac{N}{2})(z-h)\Big) \tag{A.7}$$

Разобьем R-матрицу на сумму матриц:

$$R^{\hbar}(z) = P^{\hbar}(z) + U^{\hbar}(z) \tag{A.8}$$

$$P^{\hbar}(z) = S^{\hbar}(z) + T^{\hbar}(z) \tag{A.9}$$

$$S^{\hbar}(z)_{ij,kl} = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}f_1(z,\hbar) + \delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)f_2(z,\hbar)_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)f_3(z,\hbar)_{ik} \tag{A.10}$$

$$T^{\hbar}(z)_{ij,kl} = \delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)f_4(z,\hbar)_{jkl} + \delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)(-f_4(z,\hbar)_{jkl}) \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} U^{\hbar}(z)_{ij,kl} = \delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l{<}N)f_5(z,\hbar)_{ik} - \delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j{<}N)f_5(-z,-\hbar)_{ki} \\ -\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}f_6(z,\hbar)_i \end{aligned} \tag{A.12}$$

Переставим индексы у этих матриц местами:

$$S^{\hbar}(z)_{kl,ij} = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}f_1(z,\hbar) + \delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i{\neq}k)f_2(z,\hbar)_{ki} + \delta_{il}\delta_{jk}\varepsilon(i{\neq}k)f_3(z,\hbar)_{ki} = \tilde{S}^{\hbar}(z)_{ij,kl} \tag{A.13}$$

$$T^{\hbar}(z)_{kl,ij}=\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j<i<l)(-f_4(-z,-\hbar)_{jkl})+ \\ +\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l<i<j)f_4(-z,-\hbar)_{jkl}=\tilde{T}^{\hbar}(z)_{ij,kl} \tag{A.14}$$

$$U^{\hbar}(z)_{kl,ij}=\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l<N)(-f_5(-z,-\hbar)_{ik})+\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j<N)f_5(z,\hbar)_{ki} \\ -\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}f_6(z,\hbar)_k=\tilde{U}^{\hbar}(z)_{ij,kl} \tag{A.15}$$

$$\tilde{R}^{\hbar}(z)=\tilde{S}^{\hbar}(z)+\tilde{T}^{\hbar}(z)+\tilde{U}^{\hbar}(z) \tag{A.16}$$

Запишем ассоциативное уравнение Янга-Бакстера в координатах:

$$R^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}R^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}= \\ =R^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ia,mn}R^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{aj,kl}+R^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl,ma}R^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik,an} \tag{A.17}$$

Воспользовавшись $\tilde{R}$-матрицей перепишем это уравнение в виде:

$$R^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}R^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}= \\ =\tilde{R}^{\hbar'}(z_1-z_3)_{mn,ia}R^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{aj,kl}+R^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl,ma}\tilde{R}^{\hbar}(z_1-z_3)_{an,ik} \tag{A.18}$$

т.е. произведения R-матриц имееют одинаковый вид с точностью до замены переменных z и $\hbar$ и перестановок индексов:

$$(ij,kl,mn)\leftrightarrow(mn,ij,kl)\leftrightarrow(kl,mn,ij) \tag{A.19}$$

а также замены знаков и индексов у функций f.

Докажем, что матрица S удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера. Вычислим произведение:

$$\begin{aligned}
S^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}S^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn} &= \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{ik}\delta_{ln}f_1(z_1-z_2,\hbar)f_1(z_2-z_3,\hbar') \\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{ik}\varepsilon(l\neq n)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln} \\
&+\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ik}\delta_{lm}\varepsilon(l\neq n)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl} \\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{ln}\varepsilon(i\neq k)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_1(z_2-z_3,\hbar') \\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\delta_{ln}\varepsilon(i\neq k)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_1(z_2-z_3,\hbar') \\
&+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l\neq n)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln} \\
&+\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l\neq n)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl} \\
&+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l\neq n)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln} \\
&+\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l\neq n)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Для первых пяти слагаемых выпишем, когда они отличны от нуля:

$$\begin{array}{l}
1)i=j=k=l=m=n \mid i=j=k=l=m=n \mid i=j=k=l=m=n \\
2)i=j=k=l\neq m=n \mid m=n=i=j\neq k=l \mid k=l=m=n\neq i=j \\
3)i=j=k=n\neq l=m \mid m=n=i=l\neq j=k \mid k=l=m=j\neq n=i \\
4)k=l=m=n\neq i=j \mid i=j=k=l\neq m=n \mid m=n=i=j\neq k=l \\
5)i=l=m=n\neq j=k \mid m=j=k=l\neq n=i \mid k=n=i=j\neq l=m
\end{array} \tag{A.21}$$

Каждое из следующих четырех слагаемых отлично от нуля в двух случаях:

$$\begin{aligned}
&6.1) i=j=m=n\neq k=l \mid m=n=k=l\neq i=j \mid k=l=i=j\neq m=n\\
&6.2) i=j\neq m=n\neq k=l \mid m=n\neq k=l\neq i=j \mid k=l\neq i=j\neq m=n\\
&7.1) i=j=l=m\neq k=n \mid m=n=j=k\neq i=l \mid k=l=n=i\neq m=j\\
&7.2) i=j\neq l=m\neq k=n \mid m=n\neq j=k\neq i=l \mid k=l\neq n=i\neq m=j\\
&8.1) j=k=m=n\neq i=l \mid n=i=k=l\neq m=j \mid l=m=i=j\neq k=n\\
&8.2) j=k\neq m=n\neq i=l \mid n=i\neq k=l\neq m=j \mid l=m\neq i=j\neq k=n\\
&9.1) j=k=l=m\neq i=n \mid n=i=j=k\neq m=l \mid l=m=n=i\neq k=j\\
&9.2) j=k\neq l=m\neq i=n \mid n=i\neq j=k\neq m=l \mid l=m\neq n=i\neq k=j
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Объединяя слагаемые, ненулевые при одних и тех же i,j,k,l,m,n, получаем соотношения для функций f:

$$\begin{aligned}
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) =& f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)+f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)f_1^{\hbar}(z_1-z_3)\\
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ij} =& f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ij}f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{ij}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) =& f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ij}+f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ji}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ij} =& f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ji}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{ij}f_1^{\hbar}(z_1-z_3)\\
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ij} =& f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ij}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ji}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{ij}f_1^{\hbar}(z_1-z_3)\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) =& f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ij}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{ji}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ij} =& f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ij}f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)+f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{jk} =& f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ik}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ij}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{jk}f_1^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik}\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ik} =& f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ik}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{kj}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{jk}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{jk} =& f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{jk}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ik} =& f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ik}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ij}\\
0 =& f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jk}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kj}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что данные соотношения выполнены.

Теперь докажем ассоциативное уравнение Янга-Бакстера для P-матрицы.

$$\begin{aligned}
&S_{12}^{\hbar}T_{23}^{\hbar'}+T_{12}^{\hbar}S_{23}^{\hbar'}+T_{12}^{\hbar}T_{23}^{\hbar'}=\\
&\quad=S_{13}^{\hbar'}T_{12}^{\hbar-\hbar'}+T_{13}^{\hbar'}S_{12}^{\hbar-\hbar'}+S_{13}^{\hbar'}S_{12}^{\hbar-\hbar'}+S_{23}^{\hbar'-\hbar}T_{13}^{\hbar}+T_{23}^{\hbar'-\hbar}S_{13}^{\hbar}+T_{23}^{\hbar'-\hbar}T_{13}^{\hbar}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Вычислим произведения:

$$\begin{aligned}
&S^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}T^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}=\\
&\quad=\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{k+m,l+n}\varepsilon(l<k<n)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad-\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{k+m,l+n}\varepsilon(n<k<l)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad+\delta_{ij}\varepsilon(i\neq k)\delta_{k+m,l+n}\varepsilon(l<k<n)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad-\delta_{ij}\varepsilon(i\neq k)\delta_{k+m,l+n}\varepsilon(n<k<l)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad+\delta_{jk}\varepsilon(i\neq k)\delta_{i+m,l+n}\varepsilon(l<i<n)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad-\delta_{jk}\varepsilon(i\neq k)\delta_{i+m,l+n}\varepsilon(n<i<l)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
&T^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}S^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}=\\
&\quad=\delta_{mn}\delta_{ln}\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j<i<l)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkl}f_1(z_2-z_3,\hbar')\\
&\quad-\delta_{mn}\delta_{ln}\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l<i<j)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkl}f_1(z_2-z_3,\hbar')
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$
\begin{aligned}
&+\delta_{mn}\varepsilon(l{\neq}n)\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(j{<}i{<}l)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkl}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln}\\
&-\delta_{mn}\varepsilon(l{\neq}n)\delta_{i+k,j+l}\varepsilon(l{<}i{<}j)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkl}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln}\\
&+\delta_{lm}\varepsilon(l{\neq}n)\delta_{i+k,j+n}\varepsilon(j{<}i{<}n)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkn}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}\\
&-\delta_{lm}\varepsilon(l{\neq}n)\delta_{i+k,j+n}\varepsilon(n{<}i{<}j)f_4(z_1-z_2,\hbar)_{jkn}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&T^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}T^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}=\\
&\quad=\delta_{i+k+m,j+l+n}\varepsilon(j{<}i)\varepsilon(j{<}k)\varepsilon(l{<}m{<}n)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad-\delta_{i+k+m,j+l+n}\varepsilon(j{<}i)\varepsilon(j{<}k)\varepsilon(n{<}m{<}l)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad-\delta_{i+k+m,j+l+n}\varepsilon(i{<}j)\varepsilon(k{<}j)\varepsilon(l{<}m{<}n)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&\quad+\delta_{i+k+m,j+l+n}\varepsilon(i{<}j)\varepsilon(k{<}j)\varepsilon(n{<}m{<}l)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

Выпишем, когда данные 16 слагаемых отличны от нуля:

$$
\begin{aligned}
&1a) i=j=k,\ k+m=l+n,\ l<k<n;\\
&1b) m=n=i,\ i+k=j+l,\ j<i<l;\\
&1c) k=l=m,\ m+i=n+j,\ n<m<j;
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&2a) i=j=k,\ k+m=l+n,\ n<k<l;\\
&2b) m=n=i,\ i+k=j+l,\ l<i<j;\\
&2c) k=l=m,\ m+i=n+j,\ j<m<n;
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&3a) i=j\neq k,\ k+m=l+n,\ l<k<n; i=n\\
&3b) m=n\neq i,\ i+k=j+l,\ j<i<l;\\
&3c) k=l\neq m,\ m+i=n+j,\ n<m<j;
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&4a) i=j\neq k,\ k+m=l+n,\ n<k<l;\\
&4b) m=n\neq i,\ i+k=j+l,\ l<i<j;\\
&4c) k=l\neq m,\ m+i=n+j,\ j<m<n;
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

$$
\begin{aligned}
&5a) k=j\neq i,\ i+m=l+n,\ l<i<n;\\
&5b) i=n\neq m,\ m+k=j+l,\ j<m<l;\\
&5c) m=l\neq k,\ k+i=n+j,\ n<k<j;
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&6a) k=j\neq i,\ i+m=l+n,\ n<i<l;\\
&6b) i=n\neq m,\ m+k=j+l,\ l<m<j;\\
&6c) m=l\neq k,\ k+i=n+j,\ j<k<n;
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&7a) m=n=l,\ i+k=j+l,\ j<i<l;\\
&7b) k=l=j,\ m+i=n+j,\ n<m<j;\\
&7c) i=j=n,\ k+m=l+n,\ l<k<n;
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&8a) m=n=l,\ i+k=j+l,\ l<i<j;\\
&8b) k=l=j,\ m+i=n+j,\ j<m<n;\\
&8c) i=j=n,\ k+m=l+n,\ n<k<l;
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

$$
\begin{aligned}
&9a) m=n\neq l,\ i+k=j+l,\ j<i<l;\\
&9b) k=l\neq j,\ m+i=n+j,\ n<m<j;\\
&9c) i=j\neq n,\ k+m=l+n,\ l<k<n;
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&10a) m=n\neq l,\ i+k=j+l,\ l<i<j;\\
&10b) k=l\neq j,\ m+i=n+j,\ j<m<n;\\
&10c) i=j\neq n,\ k+m=l+n,\ n<k<l;
\end{aligned}
\tag{A.38}
$$

$$
\begin{aligned}
&11a) m=l\neq n,\ i+k=j+n,\ j<i<n;\\
&11b) k=j\neq l,\ m+i=n+l,\ n<m<l;\\
&11c) i=n\neq j,\ k+m=l+j,\ l<k<j;
\end{aligned}
\tag{A.39}
$$

$$
\begin{aligned}
&12a) m=l\neq n,\ i+k=j+n,\ n<i<j;\\
&12b) k=j\neq l,\ m+i=n+l,\ l<m<n;\\
&12c) i=n\neq j,\ k+m=l+j,\ j<k<l;
\end{aligned}
\tag{A.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&13a) i+k+m=j+n+l,\ j<i,\ j<k,\ l<m<n;\\
&13b) i+k+m=j+n+l,\ n<m,\ n<i,\ j<k<l;\\
&13c) i+k+m=j+n+l,\ l<k,\ l<m,\ n<i<j;
\end{aligned}
\tag{A.41}
$$

$$
\begin{aligned}
&14a) i+k+m=j+n+l,\ j<i,\ j<k,\ n<m<l;\\
&14b) i+k+m=j+n+l,\ n<m,\ n<i,\ l<k<j;\\
&14c) i+k+m=j+n+l,\ l<k,\ l<m,\ j<i<n;
\end{aligned}
\tag{A.42}
$$

$$
\begin{aligned}
&15a) i+k+m=j+n+l,\ i<j,\ k<j,\ l<m<n;\\
&15b) i+k+m=j+n+l,\ m<n,\ i<n,\ j<k<l;\\
&15c) i+k+m=j+n+l,\ k<l,\ m<l,\ n<i<j;
\end{aligned}
\tag{A.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&16a) i+k+m=j+n+l,\ i<j,\ k<j,\ n<m<l;\\
&16b) i+k+m=j+n+l,\ m<n,\ i<n,\ l<k<j;\\
&16c) i+k+m=j+n+l,\ k<l,\ m<l,\ j<i<n;
\end{aligned}
\tag{A.44}
$$

Сгруппировав слагаемые, ненулевые при одинаковых i,j,k,l,m,n, получаем следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nkl}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lk}+f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmn}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{kn}\\
(1a;\ 9c \text{ при } i=k;\ 12b \text{ при } i=j) \text{ и } (2a;\ 10c \text{ при } i=k;\ 11b \text{ при } i=j),\ k+m=l+n\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkl}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{li}=f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lij}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
(1b;\ 9a \text{ при } i=n;\ 12c \text{ при } i=m) \text{ и } (2b;\ 10a \text{ при } i=n;\ 11c \text{ при } i=m),\ i+k=j+l\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jmn}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nm}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jm}+f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(1c;\ 9b \text{ при } k=m;\ 12a \text{ при } k=l) \text{ и } (2c;\ 10b \text{ при } k=m;\ 11a \text{ при } k=l),\ i+n=j+m\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkl}f_1^{\hbar'}(z_2-z_3)=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{il}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{lij}\\
(7a;\ 3b \text{ при } l=n;\ 6c \text{ при } l=n) \text{ и } (8a;\ 4b \text{ при } l=n;\ 5c \text{ при } l=n),\ i+k=j+l\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{jmn}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nij}f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{jm}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(7b;\ 3c \text{ при } k=l;\ 6a \text{ при } k=l) \text{ и } (7b;\ 3c \text{ при } k=l;\ 6a \text{ при } k=l),\ i+m=j+n\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{nk}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=-f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{nm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{nkl}+f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmn}f_1^{\hbar}(z_1-z_3)\\
(7c;\ 3a \text{ при } j=n;\ 6b \text{ при } j=n) \text{ и } (8c;\ 4a \text{ при } j=n;\ 5b \text{ при } j=n),\ k+m=l+n
\end{gathered}
\tag{A.45}
$$

$$
\begin{gathered}
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmn}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{in}\\
(3a \text{ и } 9c \text{ при } n,k>i \text{ или } n,k<i) \text{ и } (4a \text{ и } 10c \text{ при } n,k>i \text{ или } n,k<i),\ k+m=l+n\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkl}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ln}=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{in}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}\\
(3b \text{ и } 9a \text{ при } i,l>n \text{ или } i,l<n) \text{ и } (4b \text{ и } 10a \text{ при } i,l>n \text{ или } i,l<n),\ i+k=j+l\\
0=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jl}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lm}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(3c \text{ и } 9b \text{ при } m,j>k \text{ или } m,j<k) \text{ и } (4c \text{ и } 10b \text{ при } m,j>k \text{ или } m,j<k),\ i+m=j+n\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nil}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lj}\\
(5a \text{ и } 12b \text{ при } i,l>j \text{ или } i,l<j) \text{ и } (6a \text{ и } 11b \text{ при } i,l>j \text{ или } i,l<j),\ i+m=l+n\\
0=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{nm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmj}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{nj}\\
(5b \text{ и } 12c \text{ при } m,j>n \text{ или } m,j<n) \text{ и } (6b \text{ и } 11c \text{ при } m,j>n \text{ или } m,j<n),\ k+m=j+l\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkn}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nl}=f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(5c \text{ и } 12a \text{ при } k,n>l \text{ или } k,n<l) \text{ и } (6c \text{ и } 11a \text{ при } k,n>l \text{ или } k,n<l),\ i+k=j+n
\end{gathered}
\tag{A.46}
$$

$$
\begin{gathered}
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=-f_4^{\hbar'}(-z_1+z_3)_{inm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ikl}+f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmn}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{in}\\
(3a \text{ и } 9c \text{ при } k<i<n;\ 16b \text{ при } i=j),\ k+m=l+n\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar'}(-z_1+z_3)_{inm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ikl}+f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmn}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{in}\\
(4a \text{ и } 10c \text{ при } n<i<k;\ 13b \text{ при } i=j),\ k+m=l+n\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkl}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ln}=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{in}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{-\hbar'+\hbar}(z_2-z_3)_{nlk}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(3b \text{ и } 9a \text{ при } i<n<l;\ 16c \text{ при } m=n),\ i+k=j+l\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkl}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{ln}=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{in}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}+f_4^{-\hbar'+\hbar}(z_2-z_3)_{nlk}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(4b \text{ и } 10a \text{ при } l<n<i;\ 13c \text{ при } m=n),\ i+k=j+l\\
-f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{lji}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jl}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lm}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(3c \text{ и } 9b \text{ при } m<l<j;\ 16a \text{ при } k=l),\ i+m=j+n\\
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{lji}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{nij}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jl}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lm}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(4c \text{ и } 10b \text{ при } j<l<m;\ 13a \text{ при } k=l),\ i+m=j+n
\end{gathered}
\tag{A.47}
$$

$$
\begin{gathered}
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{nil}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lj}+f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlj}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}\\
(5a \text{ и } 12b \text{ при } l<j<i;\ 15c \text{ при } j=k),\ i+m=l+n\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{nil}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lj}-f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlj}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}\\
(6a \text{ и } 11b \text{ при } i<j<l;\ 14c \text{ при } j=k),\ i+m=l+n\\
-f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kjn}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{nm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmj}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{nj}\\
(5b \text{ и } 12c \text{ при } j<n<m;\ 15a \text{ при } i=n),\ k+m=j+l\\
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kjn}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{nm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{lmj}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{nj}\\
(6b \text{ и } 11c \text{ при } m<n<j;\ 14a \text{ при } i=n),\ k+m=j+l\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkn}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nl}=-f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inl}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}\\
(5c \text{ и } 12a \text{ при } n<l<k;\ 15a \text{ при } l=m),\ i+k=j+n\\
f_4^{\hbar}(z_1-z_2)_{jkn}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nl}=f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inl}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kl}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}\\
(6c \text{ и } 11a \text{ при } k<l<n;\ 14a \text{ при } l=m),\ i+k=j+n
\end{gathered}
\tag{A.48}
$$

$$
\begin{gathered}
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar'}(-z_1+z_3)_{inm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}\\
(13a \text{ при } k<l; 15b \text{ при } l<m) \text{ и } (13b \text{ при } j<i; 14a \text{ при } n<i) \text{ и}\\
(16a \text{ при } l<k; 14b \text{ при } m<l) \text{ и } (16b \text{ при } i<j; 15a \text{ при } i<n),\ i+k+m=j+l+n\\
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{-\hbar'+\hbar}(z_2-z_3)_{mlk}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(13a \text{ при } l<k; 14c \text{ при } j<k) \text{ и } (13c \text{ при } m<n; 15a \text{ при } n<i) \text{ и}\\
(16a \text{ при } k<l; 15c \text{ при } k<j) \text{ и } (16b \text{ при } n<m; 14a \text{ при } i<n),\ i+k+m=j+l+n\\
0=f_4^{\hbar'}(-z_1+z_3)_{inm}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}-f_4^{-\hbar'+\hbar}(z_2-z_3)_{mlk}f_4^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{nij}\\
(13b \text{ при } i<j; 15c \text{ при } j<k) \text{ и } (13c \text{ при } n<m; 14b \text{ при } l<m) \text{ и}\\
(16b \text{ при } j<i; 14c \text{ при } k<j) \text{ и } (16c \text{ при } m<n; 15b \text{ при } m<l),\ i+k+m=j+l+n
\end{gathered}
\tag{A.49}
$$

Если матрица U подчиняется ассоциативному уравнению Янга-Бакстера, то выполнено следующее соотношение:

$$
P_{12}^{\hbar}U_{23}^{\hbar'}+U_{12}^{\hbar}U_{23}^{\hbar'}=P_{13}^{\hbar'}U_{12}^{\hbar-\hbar'}+U_{13}^{\hbar'}P_{12}^{\hbar-\hbar'}+P_{23}^{\hbar'-\hbar}U_{13}^{\hbar}+U_{23}^{\hbar'-\hbar}P_{13}^{\hbar}
\tag{A.50}
$$

Вычислим произведения:

$$
\begin{aligned}
P^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}U^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}={}&\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{k+m,n}\delta_{l,N}\varepsilon(n<N)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_5(z_2-z_3,\hbar')_{km}\\
&-\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{k+m,n}\delta_{n,N}\varepsilon(l<N)f_1(z_1-z_2,\hbar)f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{mk}\\
&-\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{k+m,N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}f_1(z_1-z_2,\hbar)f_6(z_2-z_3,\hbar')_{k}\\
&+\delta_{ij}\delta_{k+m,n}\delta_{l,N}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(n<N)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_5(z_2-z_3,\hbar')_{km}\\
&-\delta_{ij}\delta_{k+m,n}\delta_{n,N}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l<N)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{mk}\\
&-\delta_{ij}\delta_{k+m,N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}\varepsilon(i\neq k)f_2(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_6(z_2-z_3,\hbar')_{k}\\
&+\delta_{jk}\delta_{i+m,n}\delta_{l,N}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(n<N)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_5(z_2-z_3,\hbar')_{im}\\
&-\delta_{jk}\delta_{i+m,n}\delta_{n,N}\varepsilon(i\neq k)\varepsilon(l<N)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{mi}\\
&-\delta_{jk}\delta_{i+m,N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}\varepsilon(i\neq k)f_3(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_6(z_2-z_3,\hbar')_{i}\\
&+\delta_{i+k+m,j+n}\delta_{l,N}\varepsilon(j<i)\varepsilon(j<k)\varepsilon(m<n<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_5(z_2-z_3,\hbar')_{n-m,m}\\
&-\delta_{i+k+m,j+l}\delta_{n,N}\varepsilon(j<i)\varepsilon(j<k)\varepsilon(m<l<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{m,l-m}\\
&-\delta_{i+k+m,j+N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}\varepsilon(j<i)\varepsilon(j<k)\varepsilon(m<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_6(z_2-z_3,\hbar')_{N-m}\\
&-\delta_{i+k+m,j+n}\delta_{l,N}\varepsilon(j>i)\varepsilon(j>k)\varepsilon(m<n<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_5(z_2-z_3,\hbar')_{n-m,m}\\
&+\delta_{i+k+m,j+l}\delta_{n,N}\varepsilon(j>i)\varepsilon(j>k)\varepsilon(m<l<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{m,l-m}\\
&+\delta_{i+k+m,j+N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}\varepsilon(j>i)\varepsilon(j>k)\varepsilon(m<N)f_4(z_1-z_2,-\hbar)_{kji}f_6(z_2-z_3,\hbar')_{N-m}
\end{aligned}
\tag{A.51}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka}P^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn}={}&\delta_{mn}\delta_{ln}\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l<N)f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_1(z_2-z_3,\hbar')\\
&-\delta_{mn}\delta_{ln}\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(j<N)f_5(-z_1+z_2,-\hbar)_{ki}f_1(z_2-z_3,\hbar')\\
&-\delta_{mn}\delta_{ln}\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}f_6(z_1-z_2,\hbar)_{i}f_1(z_2-z_3,\hbar')
\end{aligned}
\tag{A.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\delta_{mn}\delta_{i+k,l}\delta_{j,N}\varepsilon(l{\neq}n)\varepsilon(l{<}N)f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln}\\
&-\delta_{mn}\delta_{i+k,j}\delta_{l,N}\varepsilon(l{\neq}n)\varepsilon(j{<}N)f_5(-z_1+z_2,-\hbar)_{ki}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln}\\
&-\delta_{mn}\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}\varepsilon(l{\neq}n)f_6(z_1-z_2,\hbar)_{i}f_2(z_2-z_3,\hbar')_{ln}\\
&+\delta_{lm}\delta_{i+k,n}\delta_{j,N}\varepsilon(l{\neq}n)\varepsilon(n{<}N)f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}\\
&-\delta_{lm}\delta_{i+k,j}\delta_{n,N}\varepsilon(l{\neq}n)\varepsilon(j{<}N)f_5(-z_1+z_2,-\hbar)_{ki}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}\\
&-\delta_{lm}\delta_{i+k,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}\varepsilon(l{\neq}n)f_6(z_1-z_2,\hbar)_{i}f_3(z_2-z_3,\hbar')_{nl}\\
&+\delta_{i+k+m,l+n}\delta_{j,N}\varepsilon(l{<}m{<}n)\varepsilon(i+k{<}N)f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}\\
&-\delta_{i+k+m,l+n}\delta_{j,N}\varepsilon(m{<}m{<}l)\varepsilon(i+k{<}N)f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik}f_4(z_2-z_3,\hbar')_{lmn}
\end{aligned}
\tag{A.53}
$$

Выпишем, когда данные 26 слагаемых отличны от нуля:

#	$a(ij,kl,mn)$	$b(mn,ij,kl)$	$c(kl,mn,ij)$
1	$(i=j=k)\wedge m<n<l=N$	$(m=n=i)\wedge k<l<j=N$	$(k=l=m)\wedge i<j<n=N$
2	$(i=j=k)\wedge m<l<n=N$	$(m=n=i)\wedge k<j<l=N$	$(k=l=m)\wedge i<n<j=N$
3	$(i=j=k)\wedge m<l=n=N$	$(m=n=i)\wedge k<j=l=N$	$(k=l=m)\wedge i<j=n=N$
4	$k\wedge m<n<l=N$ $i=j\neq k$	$i\wedge k<l<j=N$ $m=n\neq i$	$m\wedge i<j<n=N$ $k=l\neq m$
5	$k\wedge m<l<n=N$ $i=j\neq k$	$i\wedge k<j<l=N$ $m=n\neq i$	$m\wedge i<n<j=N$ $k=l\neq m$
6	$k\wedge m<l=n=N$ $i=j\neq k$	$i\wedge k<j=l=N$ $m=n\neq i$	$m\wedge i<j=n=N$ $k=l\neq m$
7	$i\wedge m<n<l=N$ $k=j\neq i$	$m\wedge k<l<j=N$ $i=n\neq m$	$k\wedge i<j<n=N$ $m=l\neq k$
8	$i\wedge m<l<n=N$ $k=j\neq i$	$m\wedge k<j<l=N$ $i=n\neq m$	$k\wedge i<n<j=N$ $m=l\neq k$
9	$i\wedge m<l=n=N$ $k=j\neq i$	$m\wedge k<j=l=N$ $i=n\neq m$	$k\wedge i<j=n=N$ $m=l\neq k$
10	$(j<i\wedge k)\wedge m<n<l=N$	$(n<m\wedge i)\wedge k<l<j=N$	$(l<k\wedge m)\wedge i<j<n=N$
11	$(j<i\wedge k)\wedge m<l<n=N$	$(n<m\wedge i)\wedge k<j<l=N$	$(l<k\wedge m)\wedge i<n<j=N$
12	$(j<i\wedge k)\wedge m<l=n=N$	$(n<m\wedge i)\wedge k<j=l=N$	$(l<k\wedge m)\wedge i<j=n=N$
13	$(i\wedge k<j)\wedge(m<n<l=N)$	$(m\wedge i<n)\wedge(k<l<j=N)$	$(k\wedge m<l)\wedge(i<j<n=N)$
14	$(i\wedge k<j)\wedge(m<l<n=N)$	$(m\wedge i<n)\wedge(k<j<l=N)$	$(k\wedge m<l)\wedge(i<n<j=N)$
15	$(i\wedge k<j)\wedge(m<l=n=N)$	$(m\wedge i<n)\wedge(k<j=l=N)$	$(k\wedge m<l)\wedge(i<j=n=N)$
16	$i\wedge k<m=n=l<j=N$	$m\wedge i<k=l=j<n=N$	$k\wedge m<i=j=n<l=N$
17	$i\wedge k<j<m=n=l=N$	$m\wedge i<n<k=l=j=N$	$k\wedge m<l<i=j=n=N$
18	$i\wedge k<m=n=l=j=N$	$m\wedge i<k=l=j=n=N$	$k\wedge m<i=j=n=l=N$
19	$i\wedge k<l<j=N$ $m=n\neq l$	$m\wedge i<j<n=N$ $k=l\neq j$	$k\wedge m<n<l=N$ $i=j\neq n$
20	$(i\wedge k<j)\wedge(m=n)<l=N$	$(m\wedge i<n)\wedge(k=l)<j=N$	$(k\wedge m<l)\wedge(i=j)<n=N$
21	$i\wedge k\wedge(m=n)<j=l=N$	$m\wedge i\wedge(k=l)<j=n=N$	$k\wedge m\wedge(i=j)<l=n=N$
22	$i\wedge k<n<j=N$ $m=l\neq n$	$m\wedge i<l<n=N$ $k=j\neq l$	$k\wedge m<j<l=N$ $i=n\neq j$
23	$(i\wedge k<j)\wedge(m=l)<n=N$	$(m\wedge i<n)\wedge(k=j)<l=N$	$(k\wedge m<l)\wedge(i=n)<j=N$
24	$i\wedge k\wedge(m=l)<j=n=N$	$m\wedge i\wedge(k=j)<l=n=N$	$k\wedge m\wedge(i=n)<j=l=N$
25	$(l<m)\wedge i\wedge k<n\wedge(j=N)$	$(j<k)\wedge m\wedge i<l\wedge(n=N)$	$(n<i)\wedge k\wedge m<j\wedge(l=N)$
26	$(n<m)\wedge i\wedge k<l\wedge(j=N)$	$(l<k)\wedge m\wedge i<j\wedge(n=N)$	$(j<i)\wedge k\wedge m<n\wedge(l=N)$

(A.54)

Для всех этих слагаемых также выполнено соотношение $i{+}k{+}m=j{+}l{+}n{-}N$. Сгруппировав слагаемые, ненулевые при одинаковых i,j,k,l,m,n, получаем следующие тождества:

$$
\begin{gathered}
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{km}=f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{km}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{kn}\\
(1a;\ 19c \text{ при } i=k;\ 23b \text{ при } i=k), k+m=n\\
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_5^{-\hbar'}(-z_2+z_3)_{mk}=f_5^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{mk}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lk}+f_5^{-\hbar'+\hbar}(-z_2+z_3)_{mk}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{kN}\\
(2a;\ 20c \text{ при } i=k;\ 22b \text{ при } i=k), k+m=l\\
f_1^{\hbar}(z_1-z_2)f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{k}=f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_{k}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{k}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{kN}\\
(3a;\ 21c \text{ при } i=k;\ 24b \text{ при } i=k), k+m=N\\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{li}=f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ik}+f_5^{-\hbar'+\hbar}(-z_2+z_3)_{ik}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(1b;\ 19a \text{ при } i=m;\ 23c \text{ при } i=m), i+k=l\\
f_5^{-\hbar}(-z_1+z_2)_{ki}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Ni}=f_1^{\hbar'}(z_1-z_3)f_5^{-\hbar+\hbar'}(-z_1+z_2)_{ki}+f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{ki}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
(2b;\ 20a \text{ при } i=m;\ 22c \text{ при } i=m), i+k=j
\end{gathered}
\tag{A.55}
$$

$$
\begin{gathered}
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_i f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Ni} = f_1^{\hbar'}(z_1-z_3) f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_i + f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_i f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN} \\
(3b;\ 21a \text{ при } i=m;\ 24c \text{ при } i=m), i+k=N \\
f_5^{-\hbar}(-z_1+z_2)_{ki} f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nk} = f_5^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{ki} f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jk} + f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3) f_5^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{ki} \\
(1c;\ 19b \text{ при } k=m;\ 23a \text{ при } k=m), k+i=j \\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nk} = f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{ik} f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk} + f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3) f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik} \\
(2c;\ 20b \text{ при } k=m;\ 22a \text{ при } k=m), k+i=n \\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_i f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nk} = f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_i f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk} + f_1^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3) f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
(3c;\ 21b \text{ при } k=m;\ 24a \text{ при } k=m), k+i=N
\end{gathered}
\tag{A.56}
$$

$$
\begin{gathered}
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) = f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ik} + f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik} \\
(16a;\ 4b \text{ при } l=n;\ 8c \text{ при } l=n), i+k=m \\
f_5^{-\hbar}(-z_1+z_2)_{ki} f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) = f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{iN} f_5^{-\hbar+\hbar'}(-z_1+z_2)_{ki} + f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kN} f_5^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{ki} \\
(17a;\ 5b \text{ при } l=n;\ 7c \text{ при } l=n), i+k=j \\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_i f_1^{\hbar'}(z_2-z_3) = f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{iN} f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_i + f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{kN} f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
(18a;\ 6b \text{ при } l=n;\ 9c \text{ при } l=n), i+k=j \\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{-\hbar'}(-z_2+z_3)_{mi} = f_5^{-\hbar'}(-z_2+z_3)_{mi} f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2) + f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{mi} \\
(16b;\ 4c \text{ при } l=j;\ 8a \text{ при } l=j), i+m=k \\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{iN} f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im} = f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im} f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2) + f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{Nm} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{im} \\
(17b;\ 5c \text{ при } l=j;\ 7a \text{ при } l=j), i+m=n \\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{iN} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_i = f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_i f_1^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2) + f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{Nm} f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
(18b;\ 6c \text{ при } l=j;\ 9a \text{ при } l=j), i+m=N \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{km} = -f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im} f_5^{-\hbar+\hbar'}(-z_1+z_2)_{km} + f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_1^{\hbar}(z_1-z_3) \\
(16c;\ 4a \text{ при } j=n;\ 8b \text{ при } j=n), k+m=i \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{Nk} f_5^{\hbar'}(-z_2+z_3)_{mk} = -f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{mk} + f_5^{-\hbar'+\hbar}(-z_2+z_3)_{mk} f_1^{\hbar}(z_1-z_3) \\
(17c;\ 5a \text{ при } j=n;\ 7b \text{ при } j=n), k+m=l \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{Nk} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_k = f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_m + f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_k f_1^{\hbar}(z_1-z_3) \\
(18c;\ 6a \text{ при } j=n;\ 9b \text{ при } j=n), k+m=N
\end{gathered}
\tag{A.57}
$$

$$
\begin{gathered}
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{km} + f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm} f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,i-k} = f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{in} \\
(4a \text{ при } k<i<n;\ 19c \text{ при } k<i<n;\ 14b \text{ при } i=j, n<N), k+m=n \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{km} = f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ikl} + f_5^{\hbar+\hbar'}(z_3-z_2)_{mk} f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN} \\
(5a \text{ при } i<k;\ 20c \text{ при } i<k;\ 25b \text{ при } i=j, l<N), k+m=l \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_k = f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{iNm} f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,i-k} + f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_k f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN} \\
(6a \text{ при } k<i<n;\ 21c \text{ при } k<i;\ 14b \text{ при } i=j, n=N), k+m=N \\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_k = f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ikN} + f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_k f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN} \\
(6a \text{ при } i<k;\ 21c \text{ при } i<k;\ 25b \text{ при } i=j, l=N), k+m=N \\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lm} = f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{ik} - f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,m-i} \\
(4b \text{ при } i<m<l;\ 19a \text{ при } i<m<l;\ 14c \text{ при } m=n, l<N), i+k=l \\
f_5^{-\hbar}(z_2-z_1)_{ki} f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lm} = f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im} f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{ki} + f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{mij} \\
(5b \text{ при } m<i;\ 20a \text{ при } i<m;\ 25c \text{ при } m=n, j<N), i+k=j \\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_i f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm} = f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im} f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_i + f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mNk} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,m-i} \\
(6b \text{ при } i<m<N;\ 21a \text{ при } i<m;\ 14c \text{ при } m=n, l=N), i+k=N \\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_i f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm} = f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im} f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_i + f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{miN} \\
(6b \text{ при } m<i;\ 19a \text{ при } m<i;\ 25c \text{ при } m=n, j=N), i+k=N \\
-f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji} f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{m,k-m} = f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jk} + f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{mi} \\
(4c \text{ при } m<k<j;\ 19b \text{ при } m<k<j;\ 14a \text{ при } k=l, j<N), i+m=j \\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{kmn} = f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im} f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk} + f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{im} \\
(5c \text{ при } k<m;\ 20b \text{ при } k<m;\ 25a \text{ при } k=l, n<N), i+m=n
\end{gathered}
\tag{A.58}
$$

$$
\begin{gathered}
-f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{m,k-m}=f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_i f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_i\\
(6c\text{ при } m<k<N;\ 21b\text{ при } m<k;\ 14a\text{ при } k=l,j=N),\ i+m=N\\
-f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{kmN}=f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_i f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_i\\
(6c\text{ при } k<m;\ 21b\text{ при } k<m;\ 25a\text{ при } k=l,n=N),\ i+m=N
\end{gathered}
\tag{A.59}
$$

$$
\begin{gathered}
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{km}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{in}\\
(4a\text{ при } i<k\text{ или } n<i;\ 19c\text{ при } i<k\text{ или } n<i),\ k+m=n\\
f_2^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{-\hbar'}(-z_2+z_3)_{km}=f_5^{-\hbar'+\hbar}(-z_2+z_3)_{mk}f_2^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(5a\text{ при } k<i<N;\ 20c\text{ при } k<i),\ k+m=l\\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lm}=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{i,k}\\
(4b\text{ при } m<i\text{ или } l<m;\ 19a\text{ при } m<i\text{ или } l<m),\ i+k=l\\
f_5^{-\hbar}(-z_1+z_2)_{ki}f_2^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lm}=f_2^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{-\hbar+\hbar'}(-z_1+z_2)_{ki}\\
(5b\text{ при } i<m<l;\ 20a\text{ при } i<m),\ i+k=j\\
0=f_5^{-\hbar'}(-z_1+z_3)_{mi}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jk}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{-\hbar}(-z_1+z_3)_{mi}\\
(4c\text{ при } k<m\text{ или } j<k;\ 19b\text{ при } k<m\text{ или } j<k),\ i+m=j\\
0=f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_2^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_2^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{im}\\
(5c\text{ при } m<k;\ 20b\text{ при } m<k),\ i+m=n
\end{gathered}
\tag{A.60}
$$

$$
\begin{gathered}
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im}=f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}+f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nik}\\
(7a\text{ при } k<i;\ 23b\text{ при } k<i;\ 26c\text{ при } k=j,n<N),\ i+m=n\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{mi}=f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lk}-f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{k-i,i}\\
(8a\text{ при } i<k<n;\ 22b\text{ при } i<k<n;\ 13c\text{ при } k=j,l<N),\ i+m=l\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i}=f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_{i}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}-f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{Nik}\\
(9a\text{ при } k<i;\ 24b\text{ при } k<i;\ 26c\text{ при } k=j,n=N),\ i+m=N\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i}=f_6^{\hbar'}(z_1-z_3)_{i}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}-f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mNk}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{k-i,i}\\
(9a\text{ при } i<k<N;\ 24b\text{ при } i<k;\ 13c\text{ при } k=j,l=N),\ i+m=N\\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmi}=-f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{mk}+f_5^{\hbar-\hbar'}(z_3-z_2)_{mk}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(7b\text{ при } i<m;\ 23c\text{ при } i<m;\ 26a\text{ при } i=n,l<N),\ k+m=l\\
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i-m,m}=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{km}-f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}\\
(8b\text{ при } m<i<j;\ 22c\text{ при } m<i<j;\ 13a\text{ при } i=n,j<N),\ k+m=j\\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nmi}=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{m}+f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{k}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(9b\text{ при } i<m;\ 24c\text{ при } i<m;\ 26a\text{ при } i=n,l=N),\ k+m=N\\
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i-m,m}=f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{m}+f_6^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{k}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(9b\text{ при } m<i<N;\ 24c\text{ при } m<i;\ 13a\text{ при } i=n,j=N),\ k+m=N\\
ff_5^{-\hbar}(z_2-z_1)_{ki}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm}=-f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkm}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{ki}\\
(7c\text{ при } m<k;\ 23a\text{ при } m<k;\ 26b\text{ при } m=l,j<N),\ i+k=j\\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nm}=f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{m-k,k}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik}\\
(8c\text{ при } k<m<j;\ 22a\text{ при } k<m<j;\ 13b\text{ при } m=l,n<N),\ i+k=n\\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_{i}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm}=-f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nkm}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_{i}\\
(9c\text{ при } m<k;\ 24a\text{ при } m<k;\ 26b\text{ при } m=l,j=N),\ i+k=N\\
f_6^{\hbar}(z_1-z_2)_{i}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm}=-f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{iNm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{m-k,k}+f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_{i}\\
(9c\text{ при } k<m<N;\ 24a\text{ при } k<m;\ 13b\text{ при } m=l,n=N),\ i+k=N
\end{gathered}
\tag{A.61}
$$

$$
\begin{gathered}
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{im}=f_5^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nk}\\
(7a\text{ при } i<k<N;\ 23b\text{ при } i<k),\ i+m=n\\
f_3^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_5^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{mi}=f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_3^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{lk}\\
(8a\text{ при } k<i\text{ или } n<k<N;\ 22b\text{ при } k<i\text{ или } n<k),\ i+m=l\\
f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{mk}=f_5^{\hbar-\hbar'}(z_3-z_2)_{mk}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{iN}\\
(7b\text{ при } m<i<N;\ 23c\text{ при } m<i),\ k+m=l
\end{gathered}
\tag{A.62}
$$

$$f_3^{\hbar'}(z_1-z_3)_{im}f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{km}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_3^{\hbar}(z_1-z_3)_{ij}$$
$$(8b \text{ при } i<m \text{ или } j<i<N;\ 22c \text{ при } i<m \text{ или } j<i), k+m=j$$
$$f_5^{-\hbar}(z_2-z_1)_{ki}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nm}=f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{ki} \tag{A.63}$$
$$(7c \text{ при } k<m<N;\ 23a \text{ при } k<m), i+k=j$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_3^{\hbar'}(z_2-z_3)_{nm}=f_3^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{ik}$$
$$(8c \text{ при } m<k \text{ или } j<m<N;\ 23a \text{ при } m<k \text{ или } j<m), i+k=n$$

$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{n-m,m}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}$$
$$(10a;\ 26c \text{ при } n<l, j<k), i+k+m=j+n$$
$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{m,l-m}=f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}$$
$$(11a;\ 25b \text{ при } l<n, j<i), i+k+m=j+l$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{l-k,k}$$
$$(10b;\ 26a \text{ при } l<j, n<i,), i+k+m=l+n$$
$$f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,j-k}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij} \tag{A.64}$$
$$(11b;\ 25c \text{ при } j<l, n<m), i+k+m=j+n$$
$$f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{j-i,i}$$
$$(10c;\ 26b \text{ при } j<n, l<m), i+k+m=j+l$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,n-i}$$
$$(11c;\ 25a \text{ при } n<j, l<k), i+k+m=n+l$$

$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{N-m}=-f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkN}+f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{Nij}$$
$$(12a;\ 25b \text{ при } n=l, j<k;\ 26c \text{ при } n=l, j<k), i+k+m=j+N$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{Nmn}=-f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{N-k}+f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{niN} \tag{A.65}$$
$$(12b;\ 25c \text{ при } j=l, n<m;\ 26a \text{ при } j=l, n<i), i+k+m=n+N$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmN}=f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{Nkl}-f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i}$$
$$(12c;\ 25a \text{ при } j=n, l<k;\ 26b \text{ при } j=n, l<m), i+k+m=l+N$$

$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{l-k,k}$$
$$(25a \text{ при } k<l;\ 13b \text{ при } l<m), i+k+m=l+n$$
$$f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{j-i,i}$$
$$(25b \text{ при } i<j;\ 13c \text{ при } j<k), i+k+m=j+l$$
$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{n-m,m}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}$$
$$(25c \text{ при } m<n;\ 13a \text{ при } n<i), i+k+m=j+n$$
$$f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik}f_4^{\hbar'}(z_2-z_3)_{lmn}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,n-i} \tag{A.66}$$
$$(26a \text{ при } i<n;\ 14c \text{ при } n<m), i+k+m=l+n$$
$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_3-z_2)_{m,l-m}=f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi}f_4^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{jkl}$$
$$(26b \text{ при } m<l;\ 14a \text{ при } l<k), i+k+m=j+l$$
$$f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,j-k}=f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km}f_4^{-\hbar}(z_3-z_1)_{nij}$$
$$(26c \text{ при } k<j;\ 14b \text{ при } j<i), i+k+m=j+n$$

$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{n-m,m}=f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,j-k}$$
$$(13a \text{ при } i<n, j<N;\ 14b \text{ при } i<j, n<N), i+k+m=j+n$$
$$f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{l-k,k}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,n-i} \tag{A.67}$$
$$(13b \text{ при } m<l, n<N;\ 14c \text{ при } m<n, l<N), i+k+m=l+n$$
$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kji}f_5^{\hbar'}(z_3-z_2)_{m,l-m}=f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk}f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{j-i,i}$$
$$(13c \text{ при } k<j, l<N;\ 14a \text{ при } k<l, j<N), i+k+m=j+l$$

$$f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi}f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{n-m,m}=$$
$$f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{inm}f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{N-k}+f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mNk}f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,n-i} \tag{A.68}$$
$$(13a \text{ при } i<n, j=N;\ 14c \text{ при } m<n, l=N; 15b \text{ при } n<N), i+k+m=n+N$$

$$
\begin{aligned}
&f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi} f_5{}^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{m,l-m} = \\
&\qquad f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{iNm} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{l-k,k} + f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mlk} f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
&\qquad (13b \text{ при } m<l, n=N;\ 14a \text{ при } k<l, j=N; 15c \text{ при } l<N), i+k+m=l+N \\
&f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi} f_6{}^{\hbar'}(z_2-z_3)_{N-m} = \\
&\qquad -f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{iNm} f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,j-k} + f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mNk} f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{j-i,i} \\
&\qquad (13c \text{ при } k<j, l=N;\ 14b \text{ при } i<j, n=N; 15a \text{ при } j<N), i+k+m=j+N
\end{aligned}
\tag{A.69}
$$

$$
\begin{gathered}
f_4^{-\hbar}(z_1-z_2)_{kNi} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{N-m} = -f_4^{\hbar'}(z_3-z_1)_{iNm} f_6^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{N-k} + f_4^{\hbar-\hbar'}(z_2-z_3)_{mNk} f_6^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
(15a \text{ при } j=N;\ 15b \text{ при } n=N; 15c \text{ при } l=N), i+k+m=2N
\end{gathered}
\tag{A.70}
$$

Осталось доказать, что матрица U удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера. В произведении U-матриц есть всего 3 ненулевых слагаемых:

$$
\begin{aligned}
&U^{\hbar}(z_1-z_2)_{ij,ka} U^{\hbar'}(z_2-z_3)_{al,mn} = \\
&\quad +\delta_{i+k+m,n}\delta_{j,N}\delta_{l,N}\varepsilon(i+k<N)\varepsilon(n<N) f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik} f_5(z_2-z_3,\hbar')_{i+k,m} \\
&\quad -\delta_{i+k+m,l}\delta_{j,N}\delta_{n,N}\varepsilon(i+k<N)\varepsilon(l<N) f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik} f_5(-z_2+z_3,-\hbar')_{m,i+k} \\
&\quad -\delta_{i+k+m,N}\delta_{j,N}\delta_{l,N}\delta_{n,N}\varepsilon(i+k<N) f_5(z_1-z_2,\hbar)_{ik} f_6(z_2-z_3,\hbar')_{i+k}
\end{aligned}
\tag{A.71}
$$

Выпишем, когда они отличны от нуля:

#	$a(ij,kl,mn)$	$b(mn,ij,kl)$	$c(kl,mn,ij)$
1	$i\wedge k\wedge m<n<j=l=N$	$i\wedge k\wedge m<l<j=n=N$	$i\wedge k\wedge m<j<l=n=N$
2	$i\wedge k\wedge m<l<j=n=N$	$i\wedge k\wedge m<j<l=n=N$	$i\wedge k\wedge m<n<j=l=N$
3	$i\wedge k\wedge m<j=l=n=N$	$i\wedge k\wedge m<j=l=n=N$	$i\wedge k\wedge m<j=l=n=N$

(A.72)

Также, для всех слагаемых выполнено $i+k+m=j+l+n-2N$. Сгруппировав слагаемых, ненулевые при одинаковых i,j,k,l,m,n, получаем следующие тождества:

$$
\begin{aligned}
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i+k,m} &= f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_{i,k+m} \\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_5^{-\hbar'}(z_3-z_2)_{m,i+k} &= f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{i+m,k} \\
f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_1)_{k,i+m} &= f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{-\hbar}(z_3-z_1)_{k+m,i} \\
f_5^{\hbar}(z_1-z_2)_{ik} f_6^{\hbar'}(z_2-z_3)_{i+k} &= \\
&\quad -f_5^{-\hbar'}(z_3-z_1)_{mi} f_5^{\hbar-\hbar'}(z_1-z_2)_{i+m} + f_5^{\hbar'-\hbar}(z_2-z_3)_{km} f_5^{\hbar}(z_1-z_3)_i \\
&\quad (\text{в последнем соотношении } i+k+m=N)
\end{aligned}
\tag{A.73}
$$

Таким образом, тригонометрическая R-матрица является решением ассоциативного уравнения Янга-Бакстера.

Список литературы

[1] A. Antonov, K Hasegawa,A Zabrodin, Nucl. Phys. **B503** (1997) 747–770; arXiv:hep-th/9704074.

[2] V.I.Arnold, Annales de I'institut Fourier, 16:1 (1996) 319–361.

[3] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, Commun. Math. Phys. **178** (1996) 281–299.

[4] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press (2003).

[5] F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411–416;
F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 16 (1976) 77–88;
J. Moser, Adv. Math. 16 (1975) 1–523;
M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Phys. Rep. 71 (1981) 313–400.

[6] L.Dikii, Funct. Anal. Appl. 6:4 (1972) 326–327.

[7] A. Levin, M. Olsanetsky, A. Zotov, JHEP 07 (2014) 012; arXiv:1405.7523 [hep-th].

[8] A. Levin, M. Olsanetsky, A. Zotov, Nuclear Physics B 887 (2014) 400–422; arXiv:1406.2995 [math-ph].

[9] A. Levin, M. Olsanetsky, A. Zotov, JHEP 10 (2014) 109; arXiv:1408.6246 [hep-th].

[10] A. Levin, M. Olsanetsky, A. Zotov; arXiv:1603.06101 [math-ph].

[11] S. V. Manakov, Funct. Anal. Appl., 10:4 (1976) 328–329.

[12] A. S. Mishenko, Funct. Anal. Appl., 4:3 (1970) 232–235.

[13] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, Annals of Physics, 146:1 (1986) 1–34;
S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, Commun. Math. Phys., 110 (1987) 191–213

[14] Y. Shibukawa, K. Ueno, *Infinite dimensional R matrix with complete* $\mathbf{Z}$ *symmetry*, in: Quantum groups, integrable statistical models and knot theory, 302–318, eds. M.L.Ge and H.J. de Vega, Singapore: World Scientific (1993).

[15] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Едиториал УРСС (2003).

[16] П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *О решения уравнения Янга-Бакстера*, Зап. Научн. Сем. ЛОМИ **95** (1980) 129–160.