

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ)"

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

**Исследование динамики неустойчивости
Ландау-Даррье на примере фазовых
переходов.**

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:

студент 221 группы
Кукуруз Глеб Георгиевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., Глазырин С. И.

Долгопрудный
2016

Содержание

1 Введение	3
2 Постановка задачи	4
3 Дефлаграция	5
4 Неустойчивость Ландау-Даррье	7
5 Теоретическая оценка роста возмущений при фазовом переходе в эксперименте Фроста	11
5.1 Оценка из кинетики испарения	12
5.2 Оценка через число столкновений	14
5.3 Сферический фронт	16
6 Заключение	19
Список литературы	20

1 Введение

Среди всех типов вспышек сверхновых звёзд очень большой интерес представляют сверхновые типа Ia. К этому типу относятся те вспышки, которые не имеют в своём спектре линии водорода, в отличие от II типа, но имеют сильную линию кремния в отличие от Ib, Ic и линию гелия, в отличие от Ic (см, например [1]). Параметры вспышек хорошо повторяются у этих звёзд, что делает их удобным средством для измерения расстояния. Благодаря чему эти звезды называют стандартизуемыми свечами (см, [2]). В статье "The physics of supernova explosions"[2] (Woosley & Weaver, 1986) рассматриваются многие вопросы по теме вспышек сверхновых, согласно данным статьи существует много моделей для описания механизма взрыва сверхновых Ia. Одна из них, наиболее популярная в данный момент, построена на предположении о белых карликах в двойных системах, которые растут до критической массы, получая вещество со звезды-партнёра (см, [2]).

Данный сценарий предполагает начало ядерного горения где-то вблизи центра белого карлика и дальнейшее распространение реакций по всему объёму. Горение может проходить в двух режимах: дозвуковом - дефлаграция и сверхзвуковом - детонация. Каждый из этих режимов в одиночку не в состоянии описать картину взрыва сверхновых Ia, так как расчёты показывают, что горение начинается в дефлаграционном режиме, но при сохранении этого режима в течение всего времени прогорания никакого взрыва не происходит (см, [1], [2], [6]). Поэтому большие надежды возлагаются на описание данной картины при помощи комбинации этих режимов, - горение начнётся в виде дефлаграции, а затем, в силу каких-то причин, перейдёт в детонацию. Причины эти состоят в развитии большего числа различных неустойчивостей, в данной работе рассмотрена только одна из них - Ландау-Даррье, приведён её вывод для плоского бесконечно тонкого фронта пламени. Существуют работы в которых данную неустойчивость используют для описания процессов в белом карлике для ядерного горения, но окончательного понимания её динамики нет. (см, [18], [17], [16], [15], [14], [6])

Есть основания полагать, что развитие неустойчивости Ландау-Даррье вносит вклад в дестабилизацию фронта и на фронтах фазовых переходов жидкость-газ (см, [11]), в частности в опыте с закипанием перегретой капли диэтилового эфира "Dynamics of explosive boiling of a droplet"[3] (D.L. Frost, 1988). Поэтому этот эксперимент является удобным способом «взорвать сверхновую» в лабораторных условиях. Если обработка результатов данного опыта (а возможно и каких-то последующих) покажет, что в SN Ia и капле эфира причины развития неустойчивостей фронта схожи, то это даст хорошую экспериментальную базу для решения вопросов сверхновых.

2 Постановка задачи

В статье "Dynamics of explosive boiling of a droplet"[3] (D.L. Frost, 1988) рассказывается о наблюдении всех стадий закипания капли эфира. Имеются фото данного процесса. В ней было отмечено сходство механизма неустойчивости фронта испарения и механизма неустойчивости Ландау-Даррье для ламинарного пламени.

Целью работы является анализ развития неустойчивости Ландау-Даррье при фазовом переходе жидкость-газ, на основе экспериментов из статьи [3]. В данных экспериментах граница фаз является сильно возмущённой (неустойчивой). Необходимо определить, какую роль в этих возмущениях играет неустойчивость Ландау-Даррье. Для этого будет проведён детальный анализ динамики и структуры фронта фазового перехода, показана его аналогия с фронтом горения.

3 Дефлаграция

В книге Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика [4] есть параграф, посвященный дефлаграции. Ниже рассмотрены описание и выводы соотношений для данного режима горения, приведенные авторами.

Пусть имеется какой-то объем газовой смеси, в этом объеме при определенных условиях может начаться горение. Рассмотрим один из режимов в котором может протекать такая реакция. Реакция горения является сильно экзотермической. Когда повышается температура в одном каком-то месте смеси, начавшаяся в этом месте реакция будет сама распространяться по всему объему вещества, так как выделившееся тепло повышает температуру в соседних областях, и в них также начинается процесс. В таких случаях имеет место режим дозвукового горения - дефлаграция.

Пусть l - какой-то характерный размер задачи. По порядку величины ширину зоны горения можно оценить из среднего расстояния, на которое распространяется тепло от реакции за время τ , а τ есть длительность реакции в данном участке газа. Если χ - температуропроводность газа, то имеем:

$$\delta \sim \sqrt{\chi\tau}. \quad (3.1)$$

Рассматриваем случай $l \gg \delta$. При соблюдении этого условия можно считать, что фронт горения - поверхность, которая разделяет горючее и сгоревший газ. Так как параметры сгоревшего и горючего газа разные, эта поверхность является поверхностью разрыва.

Символом v_1 далее обозначается *нормальная скорость пламени*. Это есть скорость поверхности относительно газа в нормальном направлении к фронту. На расстояние порядка δ горение распространяется за время τ . Таким образом скорость пламени:

$$v_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \left(\frac{\chi}{\tau}\right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Для числа Маха (отношение скорости волны к местной скорости звука) получим, что оно пропорционально отношению времени свободного пробега τ ко времени реакции. При этом учтено, что температуропроводность порядка величины произведения времени τ на квадрат скорости звука:

$$v_1/c \sim (\chi/\tau c^2)^{1/2} \sim (\tau_c/\tau)^{1/2}. \quad (3.3)$$

В реакцию вступает очень малая часть сталкивающихся молекул. Поэтому $\tau_c \ll \tau$ и, следовательно, $v_1 \ll c$. Таким образом горение действительно дозвуковое.

Запишем условия непрерывности потоков вещества, импульса и энергии. Первое условие $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ или

$$v_1/v_2 = V_1/V_2 \quad (3.4)$$

где V_1, V_2 - удельные объёмы несгоревшего газа и продуктов горения.

Благодаря малости числа Маха, второе и третье условия:

$$p_1 = p_2, w_1 = w_2 \quad (3.5)$$

где w - это тепловая функция, а p - давление. Газ считаем политропным:

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2. \quad (3.6)$$

Пусть $w_{01} - w_{02} = q$. q - это теплота, выделяющаяся при реакции, деленная на единицу массы, если бы эта реакция протекала при $T = 0$. Таким образом получается для сгоревшего газа (2) и для газа исходного (1):

$$p_1 = p_2, T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (3.7)$$

Хорошо известно, что рассмотренный режим дефлаграции является неустойчивым. Этот факт очень важен для сверхновых типа Ia, где необходим переход медленного горения (дефлаграции) в детонацию. В данном дипломе сосредоточимся на основной неустойчивости таких тонких фронтов - неустойчивости Ландау-Даррье.

4 Неустойчивость Ландау-Даррье

В книге Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва [5] рассказывается об исследованиях устойчивости плоского фронта дозвукового горения, которые провёл Ландау, получив решение, названное впоследствии неустойчивостью Ландау-Даррье (Французский учёный Даррье провёл такого же рода исследования). В этой главе рассмотрим эту работу Ландау, а затем будем использовать полученный им закон роста возмущений.

Течение газа, между двумя областями (за фронтом и перед ним), возникающее в результате случайных возмущений вблизи фронта, удовлетворяет двум уравнениям. Первое - уравнение неразрывности

$$(\vec{\nabla}\vec{U}) = 0, \quad (4.1)$$

второе - уравнению Эйлера

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \quad (4.2)$$

Решаем эти уравнения методом Фурье. Выберем такую систему координат, что в ней невозмущенное плоское пламя покоится, а плоскость фронта лежит на плоскости (y, z) , ось x направлена в сторону с продуктами горения. Тогда для невозмущенного течения имеем следующие соотношения:

$$x < 0, u^0 = u_n, v^0 = 0, \rho^0 = \rho_1, P^0 = P_1; \quad (4.3)$$

$$x > 0, u^0 = \alpha u_n, v^0 = 0, \rho^0 = \frac{\rho_1}{\alpha}, P^0 = P_1; (\alpha = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} = \frac{u_2^0}{u_1^0}). \quad (4.4)$$

Индекс 1 для области с горючим газом ($x < 0$), индекс 2 для области продуктов горения ($x > 0$). Нестационарные решения (4.1), (4.2) будем искать в виде

$$u_i = u^0 + u'(x, y, t), v_i = v'(x, y, t), P_i = P^0 + P'(x, y, t); (i = 1, 2). \quad (4.5)$$

Подставим решения вида (4.5) в решаемую систему, используя малость отклонения нестационарного решения от стационарного, оставим только линейные относительно возмущения члены

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial P'}{\partial x}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u^0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial P'}{\partial y}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (4.8)$$

Для областей с горючим газом и для области с продуктами горения будут получены разные решения уравнений (4.6)-(4.8). Кроме того нужно, чтобы решения с двух сторон были согласованы на возмущенной поверхности пламени.

Дифференцируем (4.6) по x , а (4.7) по y и складываем, с учётом (4.8) получим, что P' удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P'}{\partial y^2} = 0. \quad (4.9)$$

Решения этого уравнения ищем в виде

$$P' = Ae^{\omega t + iky} e^{nx}, \quad (4.10)$$

где A - амплитуда, $k > 0$ волновое число возмущения вдоль оси y , ω - инкримент, определяющий временные изменения возмущений, n - константа, определяющая пространственные изменения возмущений. Подстановка (4.10) в (4.9) даёт

$$n^2 = k^2. \quad (4.11)$$

В области $x < 0$ в решении для P' выбираем знак плюс перед k , а в $x > 0$ знак минус для того, чтобы возмущение стремилось к нулю при удалении от фронта пламени.

Подставляем выражения для возмущения давления в исходные уравнения Эйлера. Для v' тогда получаем

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u'}{\partial x} = \mp \frac{k}{\rho_0} Ae^{\omega t + iky} e^{\pm nx}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u^0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{ik}{\rho_0} Ae^{\omega t + iky} e^{\pm nx}, \quad (4.13)$$

(верхний знак для горючего газа, нижний для продуктов горения).

Решения

$$u'(x, y, t) = \left(Be^{-\frac{\omega}{u^0}x} \mp \frac{Ak}{\rho^0(\omega \pm u^0k)} e^{\pm kx} \right) e^{\omega t + iky}, \quad (4.14)$$

$$v'(x, y, t) = \left(Ce^{-\frac{\omega}{u^0}x} - \frac{iAk}{\rho^0(\omega \pm u^0k)} e^{\pm kx} \right) e^{\omega t + iky}, \quad (4.15)$$

необходимо помнить, что в двух разных областях у нас разные A , B и C .

Необходимо искать неустойчивые решения задачи, если окажется, что их нет, то решение устойчиво. Для неустойчивого решения условие выглядит так:

$$Re\omega > 0; \quad (4.16)$$

так как в этом случае возмущения неограничено растут во времени по экспоненте.

В области горючей смеси первые слагаемые в скобках правых частей решений для v' и u' растут с удалением от фронта пламени, поэтому, чтобы выполнялось условие роста возмущений вдали от фронта, константы B и C в этой области полагаем равными нулю. В области продуктов горения связь B и C можно получить, подставив выражения для u' и v' в уравнение неразрывности

$$C = \frac{\omega}{iku^0} B. \quad (4.17)$$

В итоге для области $x < 0$

$$u'_1(x, y, t) = -\frac{a_1 k}{\rho_1(\omega + u_1^0 k)} e^{kx} e^{\omega t +iky}, \quad (4.18)$$

$$v'_1(x, y, t) = -\frac{ia_1 k}{\rho_1(\omega + u_1^0 k)} e^{kx} e^{\omega t +iky}, \quad (4.19)$$

$$P'_1(x, y, t) = a_1 e^{kx} e^{\omega t +iky}, \quad (4.20)$$

в области $x > 0$

$$u'_2(x, y, t) = \left(be^{-\frac{\omega}{u_2^0} x} + \frac{a_2 k}{\rho_2(\omega - u_2^0 k)} e^{-kx} \right) e^{\omega t +iky}, \quad (4.21)$$

$$v'_2(x, y, t) = \left(\frac{\omega b}{iku_2^0} e^{-\frac{\omega}{u_2^0} x} - \frac{ia_2 k}{\rho_2(\omega - u_2^0 k)} e^{-kx} \right) e^{\omega t +iky}, \quad (4.22)$$

$$P'_2(x, y, t) = a_2 e^{-kx} e^{\omega t +iky}. \quad (4.23)$$

Таким образом, остались 3 произвольные константы в решениях.

Чтобы найти дисперсионное соотношение нужно задаться формой возмущенного фронта пламени. Представим её в таком виде

$$x_f(y, t) = de^{\omega t +iky}, \quad (4.24)$$

Теперь у нас 4 константы, значит нужно 4 граничных условия для решения. Рассмотрим эти условия.

Во-первых, мы считаем, что скорость распространения пламени по горючему газу постоянна, поэтому возмущение у нормальных составляющих скоростей горючего газа и сгоревшего равны скоростям, с которыми перемещается в этих направлениях фронт.

$$u'_1 = \frac{\partial x_f}{\partial t}, \quad (4.25)$$

$$u'_2 = \frac{\partial x_f}{\partial t}. \quad (4.26)$$

Далее необходимо равенство касательных составляющих скоростей по обеим сторонам фронта. Запишем это условие для малых возмущений в линейном приближении:

$$v'_1 + u'_1 \frac{\partial x_f}{\partial y} = v'_2 + u'_2 \frac{\partial x_f}{\partial y}. \quad (4.27)$$

И последнее, из постоянства скорости распространения пламени по горючему газу имеем постоянный перепад давления, а из него следует:

$$P'_1 = P'_2. \quad (4.28)$$

Теперь подставим решения (25)-(29) в условия (32)-(35), получим систему четырёх линейных уравнений относительно констант a_1 , a_2 , b , d . Для существования нетривиального решения, определитель матрицы системы должен равняться нулю. Это даст квадратное уравнение для поиска инкремента задачи ω :

$$\tilde{\omega}^2 + \frac{2}{1 + \alpha} \tilde{\omega} + \frac{1 - \alpha}{\alpha(1 + \alpha)} = 0, \quad (4.29)$$

где $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{ku_1^0 \alpha}$ - безразмерный инкремент задачи, $\alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Находим решение уравнения (4.29) и получаем

$$\tilde{\omega} = -\frac{1}{\alpha + 1} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha}} \right). \quad (4.30)$$

Корень характеристического уравнения со знаком минус даёт неустойчивое решение $Re\omega > 0$. Следовательно, бесконечно тонкий плоский фронт будет неустойчив перед малыми возмущениями. Это вывод, к которому пришел Л.Д. Дандау.

Считается, что неустойчивость Ландау-Даррье способна привести к переходу от дефлаграции к быстрому сверхзвуковому режиму горения - детонации. (см, [13]). Такая особенность этой неустойчивости играет важную роль во многих физических явлениях. В частности во взрывном кипении жидкости (см, [13],[3]).

5 Теоретическая оценка роста возмущений при фазовом переходе в эксперименте Фроста

Для того, чтобы воспользоваться дисперсионным соотношением Ландау-Даррье, необходимо знать нормальную скорость фронта фазового перехода и скачок плотности через фронт. В качестве нулевого приближения оценим эту скорость по фотографиям опыта Фроста.

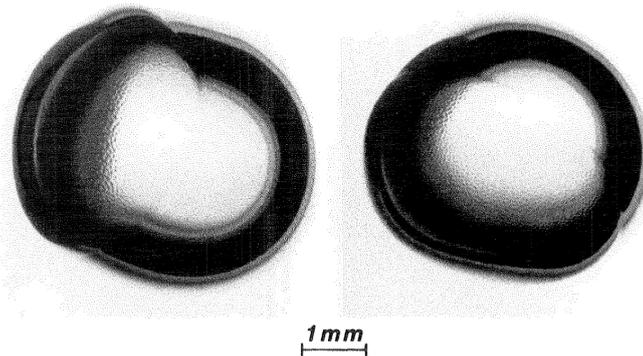


Рис. 1: Капля диэтилового эфира перед началом неустойчивого кипения

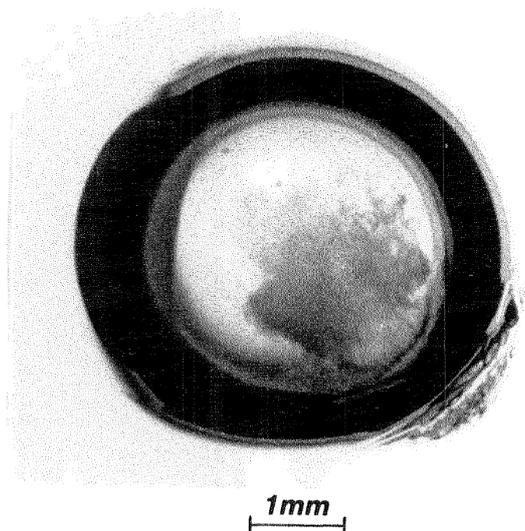


Рис. 2: Спустя 120 мкс после начала неустойчивого кипения

Данные фотографии показывают, что $U_n \approx 3.5$ м/с. Что касается скачка плотности, рассчитаем его так: $\rho_{fluid} = 662$ кг/м³, $\rho_{vap} = 0.9$ кг/м³ значит,

$\alpha \approx 736$, эти данные приводит в своей статье Фрост. А для волнового числа при помощи фото получим приблизительное значение $8,8 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ (для этого необходимо поделить 2π на длину волны, измеренную на рисунке). Используя эти значения, проведём первые оценки.

Подставляем данные в (4.30) и, вспоминая, как вводится $\tilde{\omega}$, получаем $\omega \approx 21 \text{ с}^{-1}$

Возьмём действительную часть соотношения для формы пламени.

$$x_f(y, t) = de^{\omega t} \cos(ky). \quad (5.1)$$

Тогда для пика волны возмущений в момент времени $t = 2.25$ мсек после начала неустойчивого кипения с учетом данных из эксперимента [3] (в работе [3] сказано, что начальная амплитуда волн возмущений имеет масштаб 50-100 мкм), амплитуда вырастает за 2.25 мсек до

$$\Delta r(0.0025) = \Delta r(0)e^{0,05} = 0.105 \text{ mm}. \quad (5.2)$$

По фотографиям видно, что за это время возмущения должны увеличиваться до масштабов 1 мм.

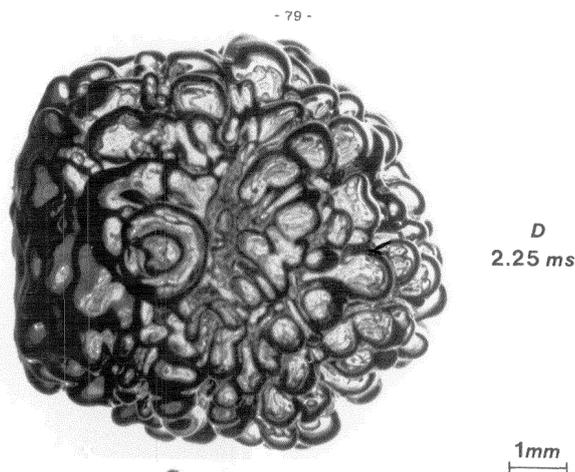


Рис. 3: Спустя 2.25 мс после начала неустойчивого кипения

Но этого не происходит по нашим оценкам.

Но, возможно, была сделана слишком грубая оценка скорости по фотографиям. Чтобы более точно убедиться в том, что мы не получаем нужного роста, необходим более аккуратный подход.

Проведём независимую оценку скорости фронта фазового перехода и посмотрим, как изменится результат, если мы воспользуемся значением, которое мы из этой оценки получим.

5.1 Оценка из кинетики испарения

В статье "On the Kinetics of Evaporation" [7] (S.S. Penner, 1952) с точки зрения классической химической кинетики для темпа испарения приводится

оценка (Уравнение Кнудсена с коэффициентом испарения - единицей)

$$G = 2ep_s \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)}, \quad (5.3)$$

где e - экспонента, p_s - давление пара, M - молярная масса молекулы. R - универсальная газовая постоянная.

Темп испарения G - величина, которая показывает, какая масса вещества испаряется в секунду с единицы поверхности фронта. Из неё можно получить скорость фронта, поделив её на плотность

$$u_n = \frac{G}{\rho}. \quad (5.4)$$

Подстановка значений в уравнения (5.3) и (5.4) даёт $u_n \approx 155$ м/с. Что даёт развитие возмущений более сильное, чем получилось в опыте. Причиной такой разницы могут быть коэффициент в формуле (5.3), который появится, если использовать более точную модель. Или стабилизирующие эффекты, например эффект Маркштейна (См, [5]).

Подходя к вопросу расчёта темпа испарения с точки зрения теории абсолютных скоростей реакции, в статье [7] приводится уравнение Кнудсена с коэффициентом испарения ϵ , заменённым на произведение экспоненты и коэффициента трансмисии K

$$G = eKp_s \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)}. \quad (5.5)$$

Расчёт при помощи этой формулы даст нам значение для скорости фронта $u_n \approx 29$ м/с ($eK = 1$).

Так же, согласно работе Хиршфельдера (J. O. Hirschfelder, J. Chem. Phys.,) [8], в рамках неравновесной теории абсолютных скоростей реакции следует дополнить уравнение ещё одним фактором - 0.387, а фактор K уточняется. Далее он полагается близким к единице. Таким образом уравнение

$$G = 0.387eKp_s \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)} \quad (5.6)$$

даёт $u_n \approx 30$ м/с. Для такой скорости фронта $\omega \approx 180$, следовательно

$$\Delta r(0.0025) = \Delta r(0)e^{0.4} = 0,149. \quad (5.7)$$

Этот результат показывает, что расчёт с данным уточнением не позволяет объяснить сильный рост возмущений.

Последнее уточнение, которое можно сделать связано с тем, что формулы (5.3), (5.5), (5.6) применимы только для жидкостей со сферически

симметричными молекулами. Учёт геометрии (учёт торможения вращения) согласно замечанию Кинкейда и Эйринга в работе (J. F. Kincaid and N. Eyring, J. Chem. Phys.,) [9] приводит к более точному виду формулы для темпа испарения, найденному в работе Пеннера

$$G = K\varphi p_s \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)}, \quad (5.8)$$

где φ - отношение вращательной функции распределения в жидкости к вращательной функции распределения газа - FAR (free-angle ratio). $\varphi < 1$. Для сферически симметричной молекулы $\varphi = \epsilon$. Приведём для наглядности таблицу со значениями φ для некоторых соединений из [10].

TABLE I
COMPARISON BETWEEN MEASURED EVAPORATION
COEFFICIENTS ϵ AND FREE-ANGLE RATIOS φ ,
AFTER WYLLIE¹¹

Liquid	T, °K.	ϵ	φ
CCl ₄	273	1	1
C ₆ H ₆	279	0.90	0.85
CHCl ₃	275	.16	.54
C ₂ H ₅ OH	273	.020	.018
CH ₃ OH	273	.045	.048
H ₂ O	283 to 303	0.036 to 0.040	.04

Рис. 4: Таблица со значениями φ для некоторых соединений

Нет смысла точно выяснять значения для диэтилового эфира. Так как $\varphi < 1$, мы в любом случае не добъёмся искомого роста возмущений.

5.2 Оценка через число столкновений

В книге [5] скорость фронта реакции даётся приближенной формулой

$$u_n \approx \sqrt{\frac{2\lambda_b\Theta}{\rho_0 c_p (T_b - T_0)} \frac{1}{t_r}} = \sqrt{\frac{2\Theta}{T_b - T_0}} \sqrt{\frac{\chi_b}{t_r}}, \quad (5.9)$$

где $\Theta = \frac{RT_b^2}{E}$, t_r - среднее время реакции. Это есть среднее время, за которое горючее вещество нагревается до температуры пламени (в нашем случае - жидкость до температуры кипения); $\lambda_b = const$ - коэффициент теплопроводности, $\chi_b = \frac{\lambda_b}{\rho_0 c}$ - коэффициент температуропроводности, для неё далее понадобится выражение: $\chi \sim \Lambda c_s$ (Λ - длина свободного пробега, c_s - скорость звука); $(T_b - T_0)$ - разность температур в зоне реакции и в горючей смеси (в нашем случае - разность температуры газа и температуры жидкости).

Среднее время реакции t_r - это произведение среднего числа Z столкновений молекулы готовой к реакции за это время на время между двумя столкновениями и среднего времени между двумя столкновениями

$$t_r = Z \frac{\Lambda}{c_s}. \quad (5.10)$$

Теперь подставим это выражение и выражение для коэффициента температуропроводности в (5.9)

$$u_n \approx \sqrt{\frac{2\Theta}{T_b - T_0}} \frac{c_s}{\sqrt{Z}}. \quad (5.11)$$

Для среднего числа столкновение молекул со стенкой в книге [12] даётся выражение:

$$Z = 0.25n \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}. \quad (5.12)$$

Для концентрации запишем $n = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m N_a}{\mu V} = \frac{\rho N_A}{\mu}$.

Таким образом мы получим среднее число соударений частиц с одним квадратным метром поверхности в секунду.

Подставим численные значения в (5.12). Для концентрации возьмём $\rho = 0.713 / \text{л}^3$ - плотность диэтилового эфира, $\mu = 74, 12 / \text{г}^{\cdot}$ - его молярная масса, $N_A = 6, 02 \cdot 10^{23}$ - число Авогадро.

$$Z \approx 1, 5 \cdot 10^{28} (c \cdot \text{м}^2)^{-1}. \quad (5.13)$$

Теперь выберем из этого числа то количество соударений, которое приходится на площадку, приблизительно равную площади поверхности молекулы, и которое приводит к одной реакции.

Площадь оценим как объём молекулы в степени $2/3$, а объём, в свою очередь, как сумму объёмов атомов (такой точности хватит, чтобы увидеть порядок скорости фронта и убедиться, что скорость найденная таким способом даёт такой же ответ на вопрос о развитии неустойчивости, как и скорости найденные другим способом)

$$\sigma \approx V^{2/3} = (4/3\pi(r_C^3 \cdot 4 + r_H^3 \cdot 10 + r_O^3))^{2/3}. \quad (5.14)$$

Так как диэтиловый эфир имеет формулу $(C_2H_5)_2O$, а для радиусов молекул приводятся следующие значения $r_C=70$ пм, $r_H = 53$ пм, $r_O=60$ пм, получаем, $\sigma \approx 5, 5 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$.

В итоге, число столкновений, испытываемое молекулой перед реакцией, равно произведению времени, за которое происходит одно столкновение, приводящее к реакции, на число столкновений молекулы в единицу времени ($Z\sigma$). А это время равно произведению полного числа столкновений,

площади поверхности молекулы и специального вероятностного фактора из закона Аррениуса $e^{-\frac{E_A}{RT}}$. В итоге

$$Z = (Z\sigma e^{-\frac{E_A}{RT}})^{-1} Z\sigma = e^{\frac{E_A}{RT}}. \quad (5.15)$$

Для разности температур на фронте перехода и жидкости в статье [3] даётся значение $T_b - T_0 = 80K$. Скорость звука в эфире $c_s \approx 1000$ м/с. Энергию активации можно приблизительно посчитать согласно статье Пеннера [7], как $E_A = H_v - RT$, где H_v - теплота испарения в расчёте на один моль; $L = 353$ кДж/кг - удельная теплота парообразования $H_v = LM$, $M = 0,074$ кг/моль - это молярная масса диэтилового эфира. В итоге для энергии активации имеем:

$$E_A = LM - RT. \quad (5.16)$$

Это позволяет найти скорость фронта. Подставим все результаты в (49)

$$u_n = \sqrt{\frac{RT^2}{(T_b - T_0)E_A} \frac{c_s}{\sqrt{e^{\frac{E_A}{RT}}}}}. \quad (5.17)$$

Подстановка всех численных значений даёт $u_n \approx 6$ м/с. Для такой скорости фронта $\omega \approx 36$, следовательно

$$\Delta r(0.0025) = \Delta r(0)e^{0,08} = 0,108. \quad (5.18)$$

5.3 Сферический фронт

Если перейти к сферическому фронту фазового перехода, то форма сферического пламени задаётся в виде (см, [5])

$$\frac{r'_f}{r_0} = f_4(\tau) \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta). \quad (5.19)$$

где $r_0 = u_n t \alpha$, P_n^m - присоединённый полином Лежандра. $f_4 = {}_1t^{\omega_1} + {}_2t^{\omega_2}$, где $\omega_{1,2}$ находятся из уравнения $\omega^2 + d_1\omega + d_2 = 0$, в котором $d_1 = \frac{2n(n+2\alpha)+3(n+1)}{n(\alpha+1)+1}$, $d_2 = \frac{(1-\alpha)n^3+2\alpha n^2+3\alpha n(\alpha+1)-n+2\alpha}{\alpha(n(\alpha+1)+1)}$. $C_1 = 0$, так как один из корней уравнения на ω всегда отрицательный, он не будет влиять на возникновение неустойчивости.

В итоге

$$\frac{r'_f}{r_0} = C_2 t^{\omega_2} \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta). \quad (5.20)$$

Для небольших $n \ll 100$ получаем $d_1 \approx 2$, $d_2 \approx -3$, $\omega \approx 0,8$, а для значения амплитуды возмущений

$$A = C_2 t^{1.8} u_n \alpha. \quad (5.21)$$

Необходимо вычислить коэффициент C_2 и понять, что представляет собой время t (дело в том, что в начале фронт двигается с одной скоростью, а затем, после начала неустойчивого кипения, с другой). Для поиска константы C_2 воспользуемся данными из [3]. Согласно данным к моменту начала неустойчивого кипения возмущения должны быть порядка 0.1 мм, скорость фронта в режиме устойчивого кипения хорошо видна по фотографиям, скачок плотности $\alpha = 736$, радиус пузырька $r_0 \approx 1.5$ мм, а время $t = 2.82 \cdot 10^{-3}$ с. Это даёт

$$C_2 = \frac{A}{t^{1.8} \alpha u_n} \approx 5.2 \cdot 10^{-3}, \quad (5.22)$$

при этом размерность у этой константы такая, что $C_2 t^\omega$ - безразмерно.

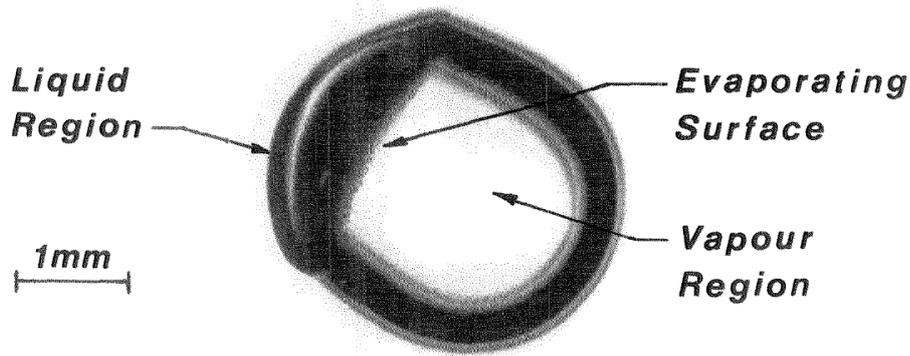


Рис. 5: Вид пузырька после 2.82 мкс устойчивого кипения

Кроме того, в своей диссертации ([19]) Фрост приводит график зависимости $R(t)$ для начальной стадии кипения.

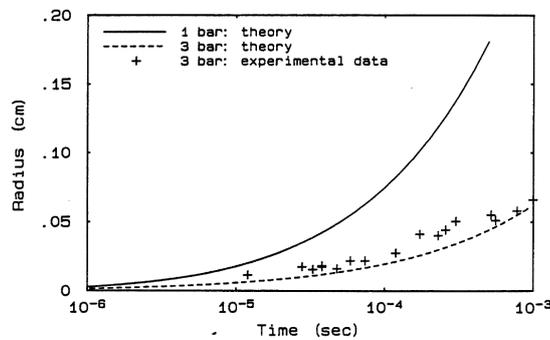


Рис. 6: Экспериментальный и теоретический устойчивый рост пузырька эфира

Теперь найдём амплитуду возмущений, которая наблюдается спустя $t_{nonst} = 2.25$ мс с момента начала неустойчивого кипения. Для этого представим время t в формуле (5.21) в таком виде $t = t_{st}^{eff} + t_{nonst}$. Введение эффективного времени устойчивого парообразования t_{st}^{eff} позволит избежать трудности с переменной скоростью фронта. Мы просто возьмём меньшее в нужное количество раз время и будем считать, что скорость фронта была постоянной. Так как $\frac{u_n^{nonst}}{u_n^{st}} \approx 15$, то $t_{st}^{eff} = 94$ мкс. В итоге $A \approx 1$ мм.

Этот результат означает, что учёт сферичности фронта, возможно, позволяет объяснить рост возмущений. На самом деле это очень неожиданно, поскольку известно, что сферичность фронта пламени стабилизирует его (см, [5]). Но поскольку при фазовом переходе мы наблюдаем скачок плотности на 2 порядка выше, чем при горении, то данная ситуация выглядит разумной. В любом случае, для того, чтобы сделать окончательный вывод, необходимо провести вычисления с учетом ряда стабилизирующих эффектов. (Например, эффект Маркштейна см, [5]).

6 Заключение

В ходе данной работы была проведена оценка роста возмущений фронта фазового перехода жидкость-газ в перегретом диэтиловом эфире (раздел 5). Использовались данные из эксперимента описанного в [3]. Одной из основных задач решению, которой посвящены разделы 5.1 и 5.2, была независимая оценка скорости фронта фазового перехода. Она была проведена различными способами. Результаты в них отличаются в 2-3 раза, но по порядку величины, в основном, совпадают с данными из опыта Фроста [3] и не дают разных ответов на главный вопрос данной работы. На основе вычисленной скорости получена оценка для роста амплитуды неустойчивости Ландау-Даррье. Сравнивая её с экспериментальными данными, можно сделать вывод о роли этой неустойчивости в возмущении границы фазового перехода. Кроме того, оценка была произведена для двух разных случаев: для плоского фронта в начале раздела 5 и для сферического фронта в 5.3.

В данной таблице наглядно представлены все результаты:

	Скор. фронта	Итоговая амп-да
Оценка скорости по фотографиям	3.5 м/с	105 мкм
Из теории абс. скоростей реакции	29 м/с	147 мкм
Из нер-ой теории абс.скор.р-ии	30 м/с	149 мкм
С учетом геометрии молекул	<30 м/с	<149 мкм
Через число столкновений	6 м/с	108 мкм
С учетом сферичности фронта	15 м/с	1 мм
σ	не более 15 %	

Таблица № 2

Таким образом получается результат - неустойчивость Ландау-Даррье, согласно оценкам для плоского фронта, не в состоянии объяснить роста возмущений в опыте Фроста, поскольку все оценки дают рост лишь до порядка 100 мкм, что на порядок меньше необходимого роста в 1 мм. Для сферического фронта возможна иная ситуация. Согласно оценкам необходимый рост имеет место. Но более точный анализ требует учёта ряда стабилизирующих эффектов, поэтому окончательный вывод пока сделать нельзя. Кроме того, возможно, неустойчивость Релея-Тейлора на самом деле является важным фактором, играющим роль, но для проверки этого предположения необходимо проводить более детальный анализ скорости фронта. В частности, вычислить его ускорение.

Список литературы

- [1] Wolfgang Hillebrandt and Jens C. Niemeyer Type Ia supernova explosion models. // ARAA. (2000). Vol. 38: p. 191-230.
- [2] Woosley & Weaver The physics of supernova explosions. // ARAA. , (1986). Vol. 24: p.205-253.
- [3] D.L. Frost Dynamics of explosive boiling of a droplet // Phys. Fluids. , (1988). Vol. 31: p.2554-2561.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Издание 6-е. — Гидродинамика. // Физматлит. (2004). Vol. 6: p. 728.
- [5] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва // Наука. (1980). Vol. 1: p. 478.
- [6] Глазырин С. И. Свойства фронтов горения в сверхновых типа Ia. // ИТЭФ. 2014. p. 107.
- [7] S. S. Penner On the Kinetics of Evaporation. // Phys. Fluids. , (1952). Vol. 56: p. 475.
- [8] J. O. Hirschfelder, J. Chem. // Phys. , (1948). Vol. 16: p. 22.
- [9] J. F. Kincaid and H. Eyring, J. Chem. // Phys. , (1938). Vol. 6: p. 620-629.
- [10] G. Wyllie, Proc. Roy. Soc. (London), 197A, 383. // (1949). Vol. 197A: p. 383.
- [11] D. Frost and B. Sturtevant Effect of Ambient Pressure on the Instability of a Liquid Boiling Explosively at the Superheat Limit // Heat Transfer. (1986). Vol.108. p. 424.
- [12] Д.В. Сивухин Общий курс физики термодинамика и молекулярная физика // Наука. (1990). Vol.2. p. 565.
- [13] Blinnikov S. I., Sasorov P. V. Landau-Darrieus instability and the fractal dimension of flame fronts // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4827–4841.
- [14] Niemeyer J. C., Hillebrandt W. Microscopic Instabilities of Nuclear Flames in Type IA Supernovae // The Astrophysical Journal. 1995. Vol. 452. p. 779.
- [15] Bychkov V., Liberman M. A. Hydrodynamic instabilities of the flame front in white dwarfs. // Astronomy and Astrophysics. 1995. Vol. 302. p. 727.
- [16] Blinnikov S. I., Sasorov P. V., Woosley S. E. Self-Acceleration of Nuclear Flames in Supernovae // Space Science Reviews. 1995. Vol. 74. P. 299–311.
- [17] Bychkov V. V., Liberman M. A. On the dynamics of a curved deflagration front // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1997. Vol. 84. P. 281–288.
- [18] Röpke F. K., Niemeyer J. C., Hillebrandt W. On the Small-Scale Stability of Thermonuclear Flames in Type Ia Supernovae // The Astrophysical Journal. 2003. Vol. 588. P. 952–961.
- [19] D. L. Frost Effects of ambient pressure on the instability of a liquid boiling explosively at the superheat limit // California Institute of Technology. 1985. P. 145.