

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ)"

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

Вопросы устойчивости маломассивных нейтронных звёзд

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:

студент 221 группы
Алексей Иванович Осколков

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., Юдин А.В.

Долгопрудный
2016

Содержание

1 Введение	3
2 Постановка задачи	7
3 Расчёт конфигураций	8
4 Уравнения состояния	11
5 Изолинии момента	19
5.1 Случай без вращения	19
5.2 Неточности в расчётной программе	24
5.3 Настоящие изолинии в случае с вращением	31
6 Перенос масс	34
7 Заключение	38
Список литературы	40

1 Введение

Вопросы устойчивости нейтронных звёзд важны для разработки некоторых астрофизических моделей. Одной из таких моделей является, например, ротационный механизм взрыва сверхновых, предложенный В. С. Имшенником [1]. Этот механизм был создан в 1992 году, вскоре после наблюдения взрыва сверхновой SN1987A, и опирался на ряд работ, выполненных сотрудниками ИТЭФ (см., например, [2]).

Взрывом сверхновых заканчивается существование большинства звёзд с массой $M \gtrsim 8M_{\odot}$, где M_{\odot} — масса Солнца. В конце своей эволюции такие звёзды теряют гидродинамическую устойчивость и испытывают катастрофический коллапс, приводящий к образованию нейтронной звезды и выбросу оболочки, который и наблюдается нами как взрыв сверхновой. Коллапс самых массивных звёзд приводит, по-видимому, к образованию чёрной дыры.

Выделяют два типа сверхновых – СNI и СNIИ. Различие заключается в спектрах: сверхновые первого типа не имеют в своих спектрах линий водорода, вместо которого присутствуют линии более тяжёлых элементов, например гелия или кремния, а в спектрах сверхновых второго типа водород есть. Также первый тип характеризуется меньшей массой изначально существующей звезды, а процесс самой вспышки – термоядерный взрыв. Сверхновые же второго типа – это продукт гидродинамического коллапса [3]. В данной работе основной интерес представляют сверхновые второго типа.

Основным наблюдаемым параметром вспышек сверхновых является энерговыделение. Масштабы энерговыделения для взрывов сверхновых укладываются в окрестность величины 10^{51} эрг. Одномерные модели гидродинамического коллапса, которые были созданы до ротационного механизма, не могли объяснить это значение. В центре коллапсирующего тела формируется протонейтронная звезда, на которую аккрецирует вещество. Ударная волна, образующаяся в результате отражения этого потока, теряет энергию на диссоциацию ядер в оболочке и не приводит к её сбросу. Сферически-симметричные модели также не в состоянии объяснить асимметрию, наблюдаемую в остатках сверхновой SN1987A, и два нейтринных сигнала, полученных при регистрации её же вспышки.

SN1987A – первая вспышка сверхновой, зарегистрированная в 1987 году. Взрыв произошёл в Большом Магеллановом Облаке, галактике-спутнике Млечного Пути, и был зарегистрирован четырьмя нейтринными детекторами в разных точках планеты 23 февраля [4]. Взорвавшаяся звезда была голубым сверхгигантом, и за двое суток его светимость увеличилась в полторы тысячи раз. Присутствие линий поглощения водорода в спектре сверхновых второго типа говорит о том, что вспышка произошла до потери звёздной оболочки, а из формы кривой блеска можно установить, что эта

оболочка имела радиус порядка $10^3 - 10^4 R_{\odot}$.

Зарегистрированные 23 февраля на Баксанском скитилляционном телескопе и советско-итальянском LSD под Монбланом нейтринные сигналы имели важную особенность: выделялось две группы событий, первая из которых не вписывалась в стандартную модель коллапса, хотя и примерно совпадала по времени с визуально зарегистрированной вспышкой. Одномерная стандартная модель коллапса без учёта эффектов вращения оказалась неспособна объяснить значительную разницу во времени между наблюдавшимися нейтринными сигналами [5].

Механизм взрыва сверхновых, предложенный В.С. Имшенником, объясняет и двухстадийность нейтринного сигнала, полученного 23 февраля 1987 года (расстояние между группами событий составило порядка 4.7 часов), и полное энерговыделение масштаба около 10^{51} эрг. Сценарий предусматривает коллапс вращающегося железного ядра звезды, приводящий к первичному выбросу нейтрино, образование тесной двойной системы, состоящей из пары нейтронных звёзд, и эволюцию этой системы под воздействием гравитационного излучения и обмена масс между компонентами, приводящую к взрыву маломассивной компоненты и второму всплеску нейтринного излучения [1].

Первая стадия — взрыв вращающегося коллапсара — требует аксиально-симметричной модели, однако при задании твердотельного закона вращения вблизи центра звезды может быть применена квазиодномерная модель, позволяющая использовать аналитическое решение уравнения переноса для нейтрино и антинейтрино, предложенное, в частности, в [6]. Расчёты показывают, что стационарно вращающийся коллапсар подвержен азимутальным неустойчивостям при некоторых условиях, наложенных на параметры звезды. В частности, величина $\beta = E_{\text{rot}}/|E_{\text{grav}}|$, представляющая отношение энергии вращения к модулю гравитационной энергии звезды, должна превысить значение 0.27 [7].

При развитии неустойчивости одним из следствий может быть образование двойной системы нейтронных звёзд. При фрагментации коллапсара можно считать полную массу системы постоянной, а момент импульса при этом распределяется на орбитальное вращение компонент, их собственное вращение и различные эффекты, имеющие место в процессе самой фрагментации. Форма орбит, даже если изначально она была эллиптической, довольно быстро из-за гравитационного излучения становится круговой [5].

Теория эволюции двойных систем предусматривает различные процессы, важнейшими из которых являются гравитационное излучение и обмен масс. Кривые нулевого момента импульса на плоскости масса-радиус для нейтронных звёзд в устойчивых областях имеют отрицательный наклон, что означает обратную зависимость между массой и радиусом. Это связано с особенностями вырожденного вещества в таких объектах. Для двойных систем это означает, что более массивный компонент имеет меньший

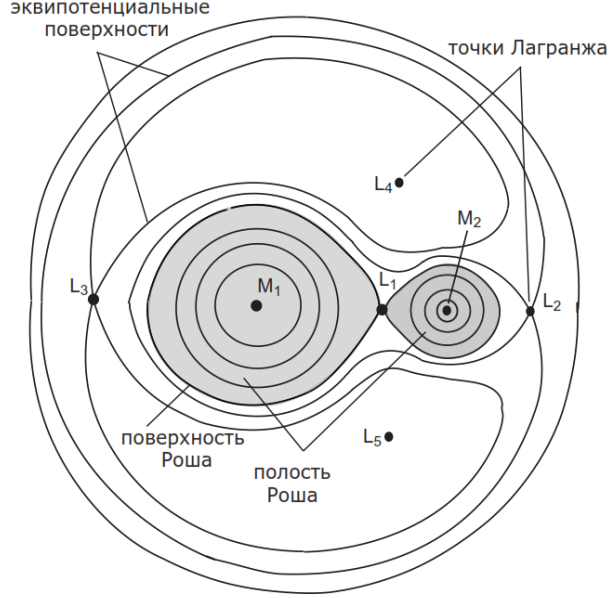


Рис. 1: Схематическое сечение эквипотенциальных поверхностей.

объём. Из оценки времени жизни двойной системы

$$t_{\text{grav}} = 2,84 \cdot 10^{-4} \frac{j_o^8}{m_o^{15} \delta_o^9 (1 - \delta_o)^9} \quad (1.1)$$

и сопоставления этого времени с расстоянием между нейтринными всплесками SN1987A можно заключить, что маломассивный компонент был нейтронной звездой [1], [9]. В этой формуле $j_o = J_o/8,81 \cdot 10^{49}$ эрг·с, $m_o = M_o/2M_\odot$, $\delta_o = M_1/(M_1 + M_2) \leq 0,5$. J_o – полный угловой момент системы, а M_o – полная масса. Эффекты общей теории относительности, как отмечается В.С. Имшенником, почти не влияют на результат. Роль параметра, определяющего степень применимости ньютоновской механики, играет отношение гравитационного радиуса звезды $r_{\text{grav}} = 2GM/c^2$ к её полному радиусу. В настоящей работе проводятся расчёты конфигураций нейтронных звёзд, претендующих на роль маломассивного компонента, взрыв которого приводит ко второму нейтринному выбросу, в области применимости ньютоновской механики.

Строение двойной системы имеет особенности, определяющие возможные сценарии взрыва маломассивной компоненты. Существует набор из пяти точек Лагранжа, то есть точек, в которых равнодействующая сил гравитационного притяжения не приводит к падению на какое-либо из тел системы. Эквипотенциальная поверхность, проходящая через первую точку Лагранжа, включает в себе объём, называемый полостью Роша.

В случае стационарного вращения объёмы звёзд ограничены эквипотенциальными поверхностями, имеющими почти сферическую форму на стадии, когда звёзды ещё далеки от заполнения полости Роша. По мере

эволюции гравитационное излучение изменяет конфигурацию вращения, и маломассивный компонент подходит по габаритам к полости, из-за приливных эффектов теряя сферическую форму. При приближении размера звезды к размеру полости Роша становится возможным перемещение вещества с одного компонента на другой без потери энергии [10].

Этот процесс называется процессом перетекания масс, и в нашей модели он предполагается консервативным. Когда один из компонентов теряет вещество, естественным образом изменяется и его момент импульса. В данной работе конфигурации маломассивного компонента рассматриваются как на предшествующей перетеканию вещества стадии, когда момент каждого компонента двойной системы можно считать постоянным (раздел 5), так и на стадии с обменом масс, когда перетекание приводит к изменению вращательного момента (раздел 6). Подробные расчёты потери устойчивости маломассивным компонентом проводились в работе [11], где был показан взрывной характер процесса разрушения нейтронной звезды при достижении ею минимального значения массы. В данной работе минимальной критической массе нейтронных звёзд уделяется особое внимание.

2 Постановка задачи

1. Замена уравнений состояния в расчётной программе (раздел 3) и адаптация уравнений под условия расчёта конфигураций. Обсуждение свойств уравнений состояния и мотивировка их выбора в разделе 4.
2. Исследование конфигураций нейтронных звёзд в случае без вращения (подраздел 5.1) в целях сравнения с известными результатами и проверки корректности работы расчётной программы с новыми уравнениями состояния.
3. Исправление неточности в расчётной программе и иллюстрация последствий её появления, в том числе исследование возникающей в области малых угловых моментов бифуркации вблизи конфигурации с $\rho = \rho_{crit}$, где $M|_{\rho=\rho_{crit}} = M_{min}$ (раздел 5.2).
4. Построение изолиний углового момента в координатах $M(R)$ и выяснение конфигураций с минимальной массой в случае с вращением. Эта задача служит для исследования устойчивости в предположении о вращении с сохраняющимся моментом импульса. Так как поведение центральной плотности на означенных изолиниях напрямую связано с некоторыми условиями устойчивости, оно также должно быть выяснено. Эта работа описана в подразделе 5.3.
5. Моделирование с помощью простейших предположений переноса масс в двойных системах. Изображение в координатах $M(R)$ траекторий процесса в приближении истечения вещества с экватора. Этой задаче посвящён раздел 6.

3 Расчёт конфигураций

Для построения конфигурации вращающейся нейтронной звезды использовался ньютоновский итерационный метод, предложенный в [12]. Квадратичная сходимость метода позволяет использовать довольно частую решётку, построенную для двух пространственных переменных, r и θ . Разрешение решётки накладывает серьёзные ограничения на возможность расчёта деформированных конфигураций, которые играют важную роль в исследовании вращательных эффектов.

Используемая модель – аксиально-симметричный самогравитирующий газ, вращающийся вокруг вертикальной оси. Для стационарного вращения должны выполняться уравнения равновесия:

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \rho\nabla\Phi + \nabla P = 0 \quad (3.1)$$

где ρ – плотность, v – скорость частиц, P – давление, а Φ – гравитационный потенциал; и Пуассона:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (3.2)$$

В случае осевой симметрии удобно перейти от сферических координат (r, θ, ϕ) к цилиндрическим (z, ϖ, ϕ) , где ϖ – экваториальный радиус. Скорость тогда представляется в виде $v_\varpi = 0$, $v_\phi = \varpi\Omega(\varpi, z)$, $v_z = 0$, а Ω – угловая скорость вращения материи. Уравнение состояния берётся в виде $P = P(\rho)$.

Из уравнения Эйлера (3.1) в цилиндрических координатах, расписывая проекции, получаем

$$\frac{1}{\rho}\partial_\varpi P = -\partial_\varpi\Phi + \varpi\Omega^2 \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{\rho}\partial_z P = -\partial_z\Phi \quad (3.4)$$

Это же можно получить, дописывая к радиальной проекции центробежный потенциал. Эффективный потенциал здесь включает в себя гравитационную и вращательную части, но для выполнения критерия потенциальности необходимо, чтобы

$$\partial_z\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Таким образом, $\Omega = \Omega(\varpi)$. Это утверждение называется теоремой Пуанкаре-Вавра и означает, что угловая скорость в случае осесимметричного вращения сохраняется на цилиндрах, сонаправленных с его осью. Отсюда, проинтегрировав уравнение равновесия, можно получить

$$H(\rho) + \Psi + \Phi = C, \quad (3.6)$$

где C – константа, Φ – гравитационный потенциал,

$$H = \int^{P(\rho)} \frac{dP}{\rho} \quad (3.7)$$

называется квазиэнтальпией, а Ψ представляет собой потенциал вращения, взятый в форме

$$\Psi = - \int^{\varpi} \Omega^2(\varpi) \varpi d\varpi. \quad (3.8)$$

В зависимости от задаваемых законов вращения, этот последний потенциал может иметь разный вид. Например, использованный для проведения настоящей работы твердотельный закон подразумевает постоянную угловую скорость по всему объёму, поэтому

$$\Psi = \frac{C_\psi \omega^2}{2}. \quad (3.9)$$

Для получения, например, постоянной линейной скорости вращения можно положить $\Psi = C_\psi \ln(d^2 + \omega^2)/2$. Константа регулируется заранее, получая определённое значение в рамках нулевого приближения.

Для расчёта конфигурации на вход в программу подаётся два значения – центральная плотность нейтронной звезды и мера «сплюснутости» – параметр Θ , равный отношению полярного радиуса звезды к экваториальному. Вращающиеся нейтронные звёзды не имеют, вообще говоря, формы эллипсоида или, тем более, сферы, поэтому этот параметр не имеет специального физического значения, обозначая только устройство расчётной сетки. Тем не менее, в этой работе Θ имеет первостепенную важность для исследования конфигураций, так как ей параметризуются многие интересные нас кривые, а топология некоторых полей вообще не имеет другого изменяемого в ручном режиме параметра для изучения. Таким образом, не представляя собой самостоятельную физическую величину вообще, в рамках данной конкретной работы этот вспомогательный параметр играет ключевую роль.

Ниже представлены графические изображения конфигураций, получившихся с использованием расчётной программы. Для проверки результатов использовалась теорема вириала: тестовый параметр в форме $V = |2\hat{T} + \hat{W} + 3\hat{\Pi}|/|\hat{W}|$ в испытаниях не превышал значения 10^{-5} .

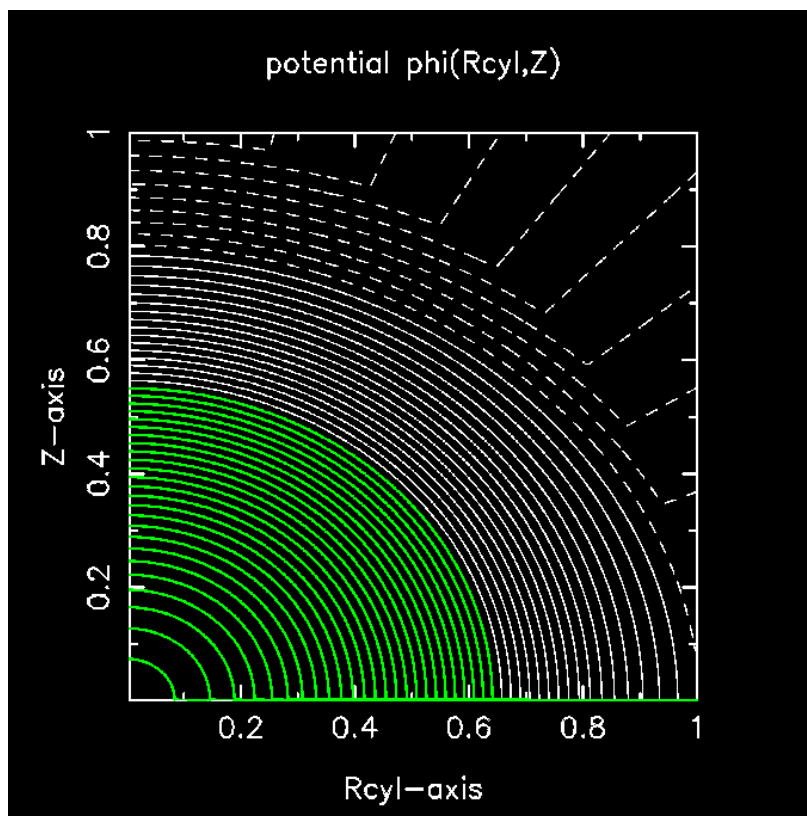


Рис. 2: Изопотенциальные линии в конфигурации звезды с $M = 0.9M_{\odot}$, $R \approx 14.6$ км и периодом вращения 1.6 мс.

Областью вариативности в таких расчётах являются не только закон вращения, плотность и Θ , но и уравнение состояния. Рабочее предположение о баротропном уравнении состояния приводит к совпадению изолиний плотности и давления, и границы звезды отсчитываются как раз по этим изолиниям. В случае введения зависимости давления от температуры или энтропии для сохранения этого свойства опускается результат теоремы Пуанкаре-Вавра, и закон вращения не может быть твердотельным. В дальнейшем мы везде полагаем температуру вещества равной нулю.

4 Уравнения состояния

Уравнения состояния вещества нейтронных звёзд – один из открытых вопросов. Множество уравнений используются для расчёта конфигураций, которые потом сравниваются с наблюдениями. Существует механизм отбраковки уравнений – тест на максимальную массу, позволяющий с помощью наблюдения нейтронной звезды, например, в двойной системе, отбросить уравнения состояния, максимальная масса для которых меньше зарегистрированной.

Использование баротропных уравнений состояний оправдано тем, что в обычных условиях нейтронная звезда состоит из вырожденной материи [13]. Уже при плотностях $\rho > 10^8$ г/см³ температура вплоть до 10^9 К не влияет на уравнение состояния. Однако до таких масштабов плотности температура играет роль, а описание материи при плотностях выше $\rho = 10^{15}$ г/см³ до сих пор не имеет ясности. Для построения же конфигурации нейтронной звезды необходимо охватывать как экстремально плотные области (в особенности, для определения максимальной массы), так и области разреженные – внешнюю оболочку, вкладывающую в полную массу незначительную, но важную для устойчивости часть.

При расчёте уравнений состояния нейтронных звёзд в качестве приближения берётся основное состояние материи, её составляющей [14]. Начиная с нулевого давления, то есть с оболочки нейтронной звезды, минимальная энергия на нуклон достигается в решётке ⁵⁶Fe, 8.790 МэВ. При этом максимальная энергия связи на нуклон достигается в ⁶²Ni, 8.7945 МэВ [15]. При увеличении плотности структура основного состояния сильно изменяется. Химический потенциал электронов μ_e , растёт, и при плотностях $\rho \sim 10^7$ г/см³ электроны становятся в значительной степени релятивистскими. Железная решётка при таких плотностях больше не является основным состоянием, электроны с высокими энергиями попадают в ядра, которые теряют энергию через испускание нейтрино, и насыщаются нейтронами.

Этот процесс возможен из-за того, что сумма энергии вырожденных электронов начинает хватать для того, чтобы пара из протона и электрона смогла образовать нейтрон (обратный β -распад или К-захват). Массы покоя электрона и протона в сумме меньше массы покоя нейтрона, поэтому для прохождения такого процесса требуется дополнительная энергия. Когда плотность достигает значения $\sim 4.3 \cdot 10^{11}$ г/см³, ядра настолько насыщаются нейтронами, что последние непрерывно заполняют пространство своих состояний [14]. Эта точка в литературе называется *neutron drip*. Между точкой *neutron drip* и ядерной плотностью материя состоит из ядер, образующих решётку, а также нейтронного и электронного газов. При достижении и превышении плотности $\rho_0 \sim 2 \cdot 10^{14}$ г/см³ ядра исчезают, и вещество представляет собой однородную смесь нейтронных, протонных и

электронных жидкостей. Важно отметить, что электроны становятся релятивистскими ($E_F \sim m_e c^2$) при плотностях $\rho \sim 10^7$ г/см³, а нуклоны – только при плотностях, превышающих $6 \cdot 10^{15}$ г/см³.

Запишем в сферически-симметричном случае уравнение равновесия

$$\partial_r P = -\rho(r) \frac{Gm}{r^2} \quad (4.1)$$

и уравнение неразрывности

$$\partial_r m = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (4.2)$$

Уравнение состояния звезды возьмём в форме

$$P = K \rho^\gamma \quad (4.3)$$

Подставив его в (4.1) и (4.2), получим

$$\partial_r (K \gamma r^2 \rho^{\gamma-2} \partial_r \rho) = -4\pi G \rho r^2 \quad (4.4)$$

Далее, если ввести безразмерные переменные θ и ξ , такие что $\rho = \rho_c \theta^n$, а $r = \alpha \xi$, где $n = (\gamma - 1)^{-1}$, запишем уравнение Лэна-Эмдена:

$$\frac{1}{\xi^2} \partial_\xi (\xi^2 \partial_\xi \theta) = -\theta^n \quad (4.5)$$

Для установления граничных условий рассмотрим асимптотику решений уравнений (4.1) и (4.2) в центре звезды, то есть при $r \rightarrow 0$:

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \quad (4.6)$$

$$P = P_c - \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2 \quad (4.7)$$

$$\rho = \rho_c - (\partial_\rho P)^{-1} \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 r^2 \quad (4.8)$$

Видно, что $\partial_r P|_{r=0} = 0$ и $\partial_r \rho|_{r=0} = 0$. Для безразмерных переменных это означает, что $\partial_\xi \theta|_{\xi=0} = 0$. При этом $\theta|_{\xi=0} = 1$. Пусть границе звезды

соответствует $\xi = \xi_b$. Тогда $\theta(\xi_b) = 0$. Масса звезды выражается через эти переменные следующим образом:

$$M = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{\xi_b} \theta^n \xi^2 d\xi = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3}{2n}-\frac{1}{2}} \int_0^{\xi_b} \theta^n \xi^2 d\xi \quad (4.9)$$

При $\gamma = 4/3$ масса звезды не зависит от центральной плотности и однозначно определяется константой в уравнении состояния. При больших показателях политропы масса растёт вместе с центральной плотностью, а при меньших падает. Необходимым [16] условием устойчивости конфигурации является

$$\frac{\partial M}{\partial \rho_c} > 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, устойчивые конфигурации соответствуют $\gamma > 4/3$. Релятивистские же газы имеют $\gamma = 4/3$, что делает уравнение состояния звёздного вещества более мягким. Нейтронизация вещества при достижении плотностей *neutron drip* смягчает уравнение состояния ещё больше [15], однако короткодействующее отталкивающее взаимодействие между нуклонами вносит значительную жёсткость. Однако даже такая жёсткость может оказаться недостаточной. Если плотность в центре нейтронной звезды не превышает значений $\sim 10\rho_0$, где ρ_0 – ядерная плотность, то нейтронные и протонные жидкости не становятся релятивистскими.

Вообще говоря, жёсткость уравнения состояния (чем больше изменяется давление при изменении плотности, тем уравнение жёстче) важна для сохранения механической устойчивости звезды. Если рост плотности не ведёт к значительному увеличению давления вырожденного газа, звезда становится подвержена гравитационному коллапсу. Эта характеристика важна для определения максимальной массы нейтронной звезды, и мягкие уравнения отсекаются наблюдениями [17].

В исследовании области минимальной массы, как показывают подсчёты в разделе 5, наибольший интерес представляют плотности, не превышающие удвоенной ядерной. Для определения основного состояния материи и, следовательно, её уравнения состояния, важна форма ядер, которая определяется кулоновским взаимодействием во внешних слоях звезды [18]. Кроме того, для точного подсчёта конфигураций важно равновесие в пограничных зонах на субъядерных плотностях. Грубая сшивка уравнений, описывающих слои разными моделями, может негативно сказаться на результате. По этой причине предпочтительнее выглядят уравнения состояния, в которых области высоких и низких плотностей описываются одной и той же моделью взаимодействия.

В настоящей работе было использовано уравнение состояния SLy, разработанное на основе эффективного гамильтониана сферических ядер в ос-

новном состоянии материи нейтронной звезды и плотности перехода к жидкости из нейтронов, протонов и электронов $\rho_{\text{edge}} = 1.3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ [19], а также уравнение FPS, в котором $\rho_{\text{edge}} = 1.6 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, а с $\rho \sim 1.1 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ начинается цепочка фазовых переходов [20]. В эффективном гамильтониане FPS с началом этой цепочки сферические ядра заменяются на цилиндрические, затем в ядерной материи появляются области, заполненные нейтронным газом, и при достижении ρ_{edge} нуклоны и электроны полностью замещают ядра. Скачок плотности при фазовых переходах в обоих уравнениях не превышает 1% [18].

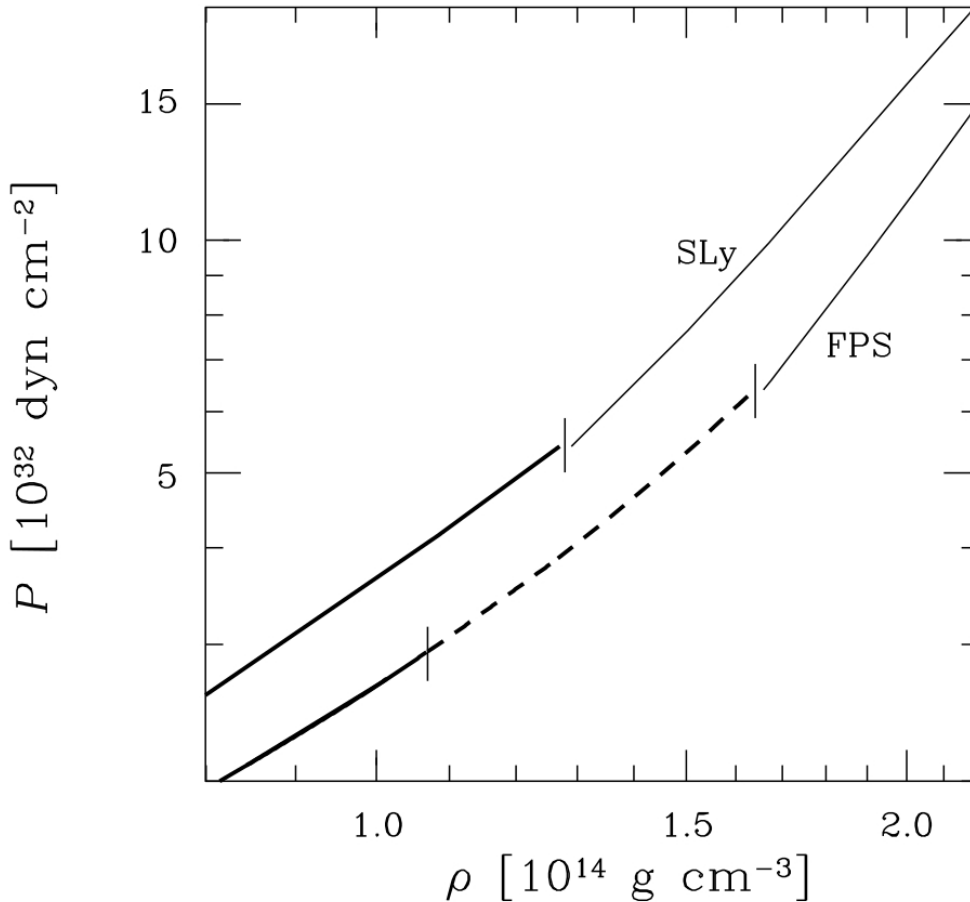


Рис. 3: Область *neutroNdrip* [18].

Для этих уравнений существует аналитическое представление, разработанное Хензелем и Потехиным [13]. Преимущество аналитического способа задания уравнения в том, что значения между узлами не зависят от метода интерполяции. Авторы также предоставили программы для расчёта нужных значений:

(<http://www.ioffe.ru/astro/NSG/NSEOS/nseintr.html>).

Области высоких плотностей обеспечиваются уравнениями SLy и FPS, в то время как для плотностей с 10^4 г/см^3 до 10^{10} г/см^3 используются уравнения HP94 [21] и BPS [14]. Как видно из графика, в области малых

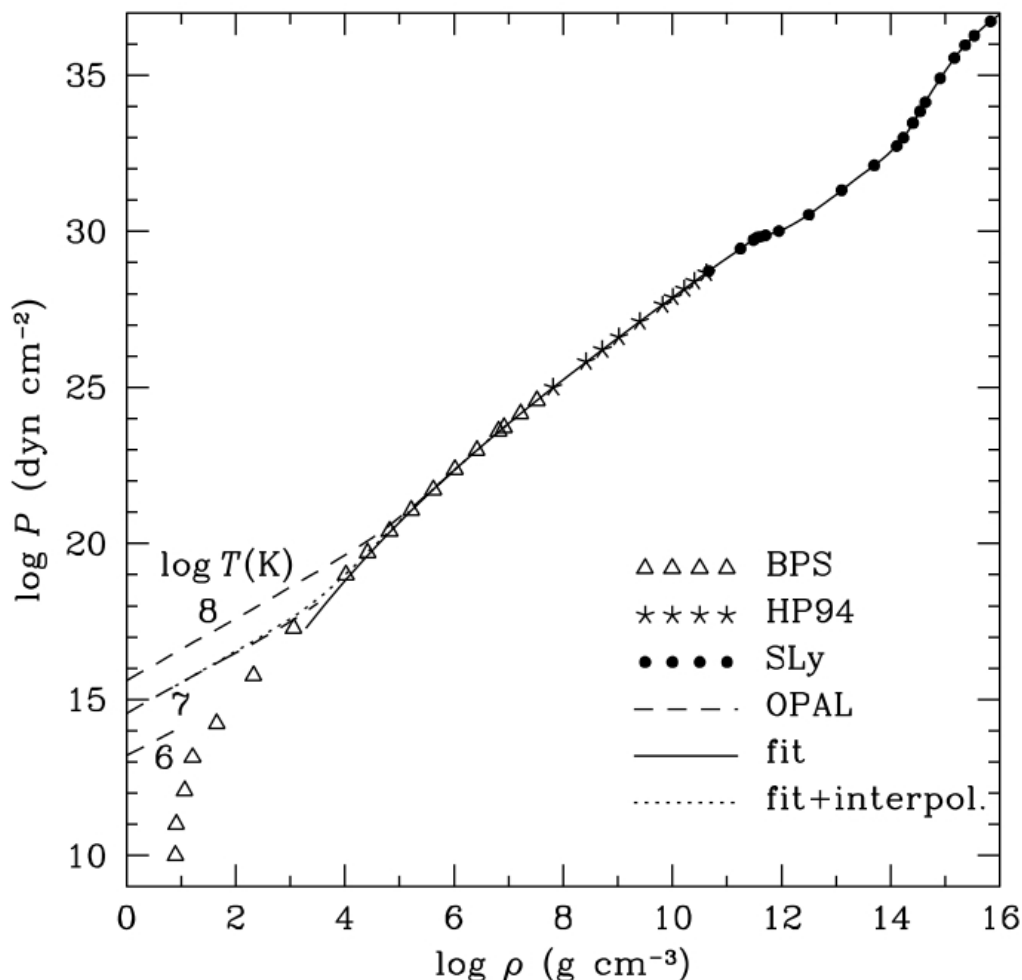


Рис. 4: Уравнение состояния, описывающее высокие плотности с помощью SLy [13].

плотностей уравнения перестают быть однопараметрическими, так как появляется зависимость от температуры. Кроме того, при низких плотностях в уравнении состояния Хензеля и Потехина присутствуют трудности, связанные с показателем адиабаты и его влиянию на устойчивость.

Овраг неустойчивости на пороге *neutron drip*, в эпицентре которого показатель адиабаты падает до значений ~ 0.4 , связан с нейтронизацией вещества, как уже было сказано выше. Ключевые среди "смягчающих" уравнение состояния факторов – совместное существование нейтронного газа и ядерной решётки и кулоновское взаимодействие, тогда как короткодействующее взаимодействие между нейтронами делает уравнение жёстче. В области ядерных и сверх-ядерных плотностей уравнение состояния становится гораздо жёстче, так как смягчающие факторы просто исчезают. Жёсткость уравнения в центре звезды важна для предотвращения гравитационного коллапса. При малых же плотностях показатель адиабаты в [13] приближается к единице, что соответствует случаю изотермической звезды:

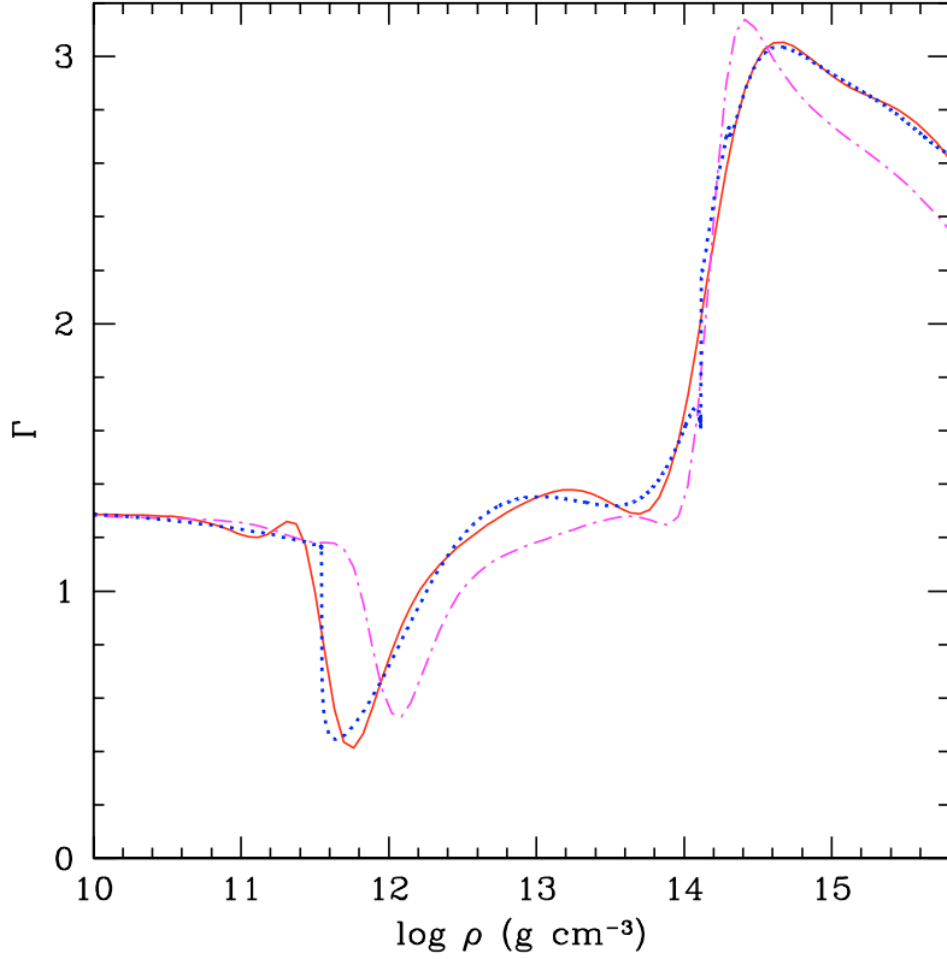


Рис. 5: Показатель адиабаты для SLy (пунктир – реальные значения, сплошная линия – аналитическое представление) и FPS (штрих-пунктирная) [13].

$$P \propto T\rho, \quad T = \text{const.} \quad (4.11)$$

Рассмотрим при таком показателе адиабаты асимптотику уравнений (4.1) и (4.2). В случае границы звезды $m|_{r=R} = M$. Интегрируя с учётом этого (4.1), получим

$$\int \frac{dP}{\rho} = \frac{GM}{r} + \text{const} \quad (4.12)$$

Так как границе звезды соответствует нулевая плотность, интеграл в левой части должен сходиться при $\rho \rightarrow 0$. Для изотермической атмосферы (4.11) интеграл расходится, то есть у звезды нет границы.

Этот фактор, вместе с потерей однопараметрического описания на малых плотностях, вынуждает использовать шивку с другим уравнением.

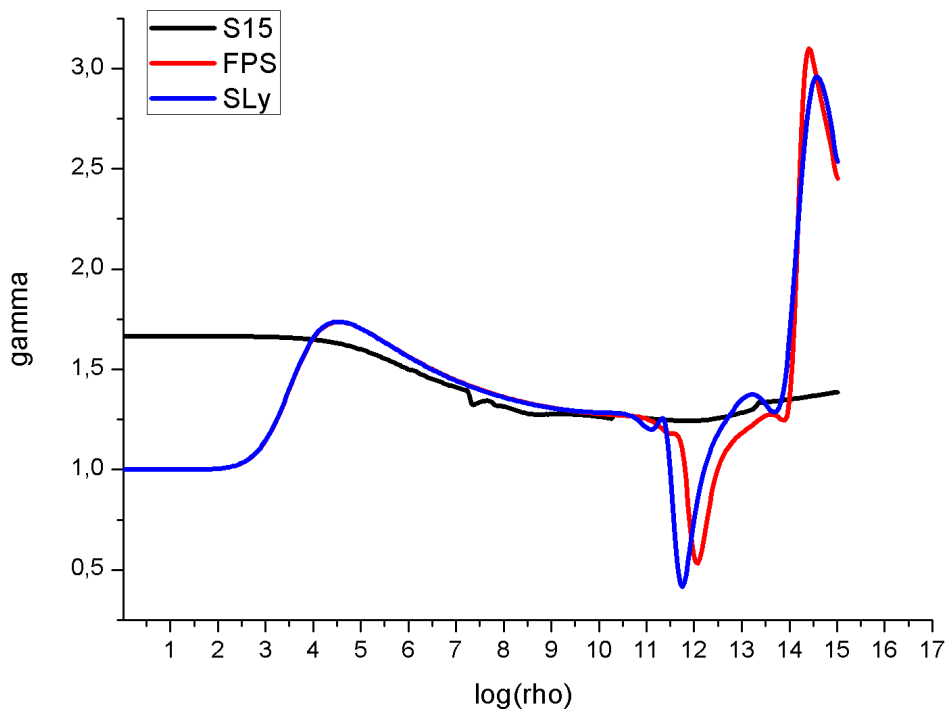


Рис. 6: Сравнение показателей адиабаты для трёх уравнений.

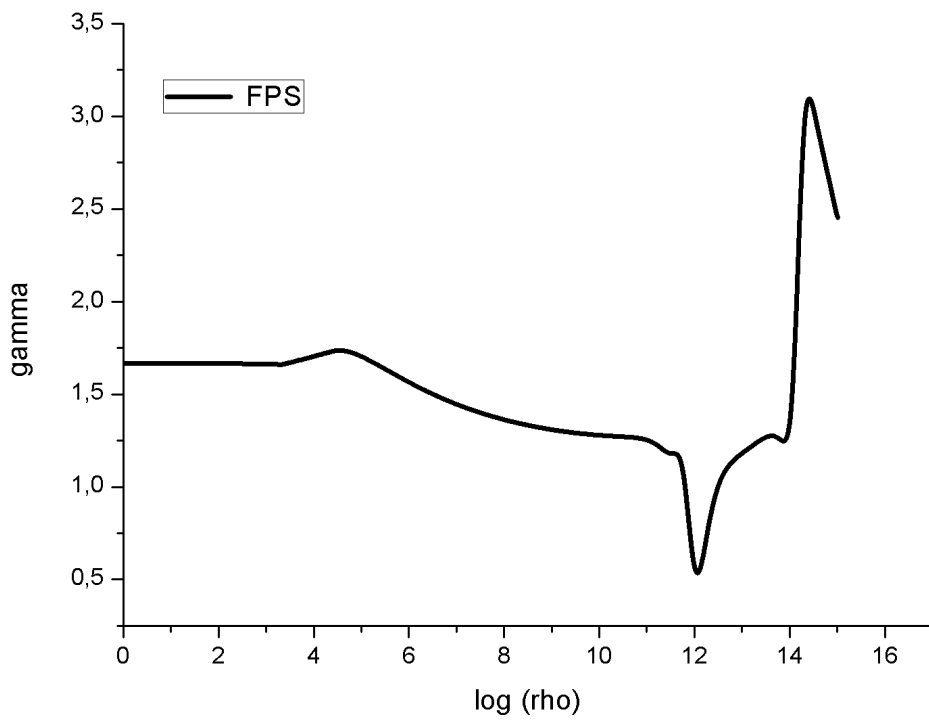


Рис. 7: Итоговый показатель адиабаты для модифицированного уравнения FPS.

Для сшивки было использовано уравнение состояния S15, получившееся в предположении о ядерном статистическом равновесии и распределении безразмерной энтропии $S/k = 1.5$ на нуклон. В области больших плотностей S15 гораздо мягче, чем FPS и Sly (рисунок (6)), а оврага нестабильности в районе *neutron drip* не имеет вообще, но при $\rho \leq 10^4$ показатель политропы выходит на уровень нерелятивистского газа, что обеспечивает достаточную устойчивость и возможность рассчитать конфигурацию. Сшитое уравнение состояния имеет показатель адиабаты, изображённый на рисунке (7).

5 Изолинии момента

5.1 Случай без вращения

Для исследования устойчивости вращающихся нейтронных звёзд необходимо исследовать кривые постоянного момента импульса в координатах $M(R)$. В первом приближении для расчёта конфигураций вращающихся нейтронных звёзд выбирался твердотельный закон вращения – угловая скорость не зависела от цилиндрического радиуса. В перспективе закон вращения должен быть изменён с учётом различных параметров вращения цилиндрических слоёв. Тем не менее, постоянство полного момента остаётся одним из условий задачи.

На входе в расчётную программу подаётся, фактически, две характеристики звезды – центральная плотность ρ и Θ – «сплюснутость» звезды, отношение полярного к экваториальному радиусу. Θ параметризует вращение, причём значению $\Theta = 1$ соответствует отсутствие вращения ($J = 0$). Этот случай достаточно хорошо исследован в разных работах, и полезно сравнить получившиеся результаты с уже имеющимися данными.

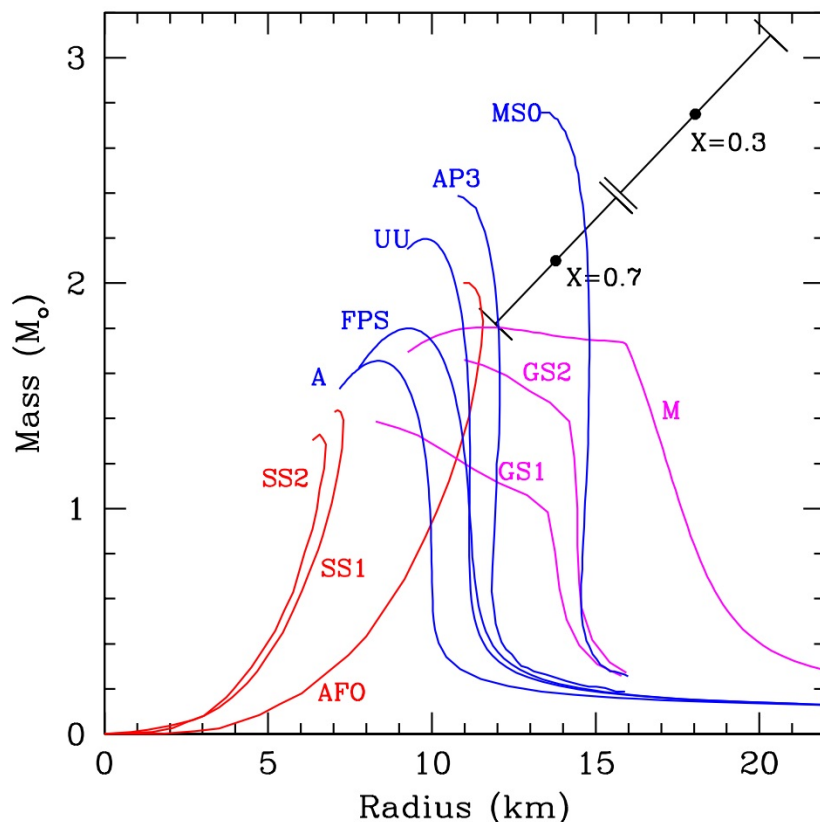


Рис. 8: Кривые масса-радиус без вращения для разных уравнений состояния. Синий цветом выделены безконденсатные уравнения состояния, в том числе используемый нами FPS. Красный и сиреневый цвета – уравнения для «странных» звёзд и звёзд с конденсатом и «экзотическими» фазами: кварками и т.п. [17]

Так выглядят кривые масса-радиус для разных уравнений состояния в случае отсутствия вращения. Общая их характеристика – резкое падение массы при радиусах около десяти километров $R \sim 10^6$ см и приближение к минимальному значению порядка одной десятой солнечной массы на радиусах порядка ста километров $R \sim 10^7$ см. Это достаточно грубое обобщение представляет собой первое необходимое условие соответствия результатов уже существующим расчётам.

Второе условие касается минимальной массы. Существование этой критической характеристики обусловлено строением нейтронной звезды. Согласно [10], нейтронная звезда состоит из четырёх условных зон:

1. Внешняя кора с $\rho \sim 10^{11}$ г/см³, состоящая из вырожденного электронного газа и ионов;
2. Внутренняя кора с $\rho \sim 10^{11} \div 10^{14}$ г/см³, то есть субъядерными плотностями, состоящая из сильно вырожденных релятивистских электронов и атомных ядер, обогащённых нейтронами;
3. Внешнее ядро с $\rho \sim (1 \div 5) \cdot 10^{14}$ г/см³, в котором доминируют сильно вырожденные электроны, мюоны, протоны и нейтроны;
4. Внутреннее ядро с $\rho \sim 5 \cdot 10^{14} \div 5 \cdot 10^{15}$ г/см³, состав которого в точности не известен.

Ядро нейтронных звёзд, состоящее из сильно вырожденных фермионов, удерживающихся вместе гравитационными силами, находится в состоянии бета-равновесия. Из-за сильного вырождения бета-распад невозможен – все потенциальные состояния для электронов заняты. При уменьшении плотности, однако, вырождение начинает слабеть, и в фазовом пространстве появляются свободные состояния для продуктов бета-распада. В предположении о степенном уравнении состояния ($P \sim \rho^\gamma$) при доминировании вырожденных нейтронов $\gamma = 5/3$, тогда как появляющиеся при бета-распаде электроны при субъядерных плотностях имеют ультрарелятивистские скорости, что приближает эффективное γ к $4/3$. Согласно теореме вириала,

$$Q = -\frac{1}{3(\gamma - 1)}U \quad (5.1)$$

такое значение показателя адиабаты соответствует предельному случаю устойчивости. Здесь Q – тепловая энергия, а U – гравитационная. Доказать эту теорему можно в предположении о баротропном уравнении состояния $P = K\rho^\gamma$. Удельная тепловая энергия

$$q = K\rho^{\gamma-1}(\gamma - 1)^{-1} = Kv^{1-\gamma}(\gamma - 1)^{-1}, \quad (5.2)$$

где $v = \rho^{-1}$ представляет собой удельный объём вещества. В равновесии вариация полной энергии $\delta\mathcal{E} = 0$ при любом $\delta r(m)$ [22]. Возьмём

$$\delta r = \alpha r, |\alpha| \ll 0. \quad (5.3)$$

Тогда

$$\delta v = 3\alpha v, \quad (5.4)$$

$$\delta U = -\alpha U, \quad (5.5)$$

$$\delta Q = -3(\gamma - 1)\alpha Q. \quad (5.6)$$

Полная энергия складывается из тепловой и гравитационной, и её вариация в равновесии равна нулю. Приравнивая нулю сумму (5.5) и (5.6), получаем утверждение теоремы (5.1). В предположении о степенном уравнении состояния и отсутствии вращения можно также выяснить напрямую зависимость массы звезды от центральной плотности, что было сделано в разделе 4 с помощью решения уравнения Лэна-Эмдена 4.9. Таким образом, в случае степенного уравнения состояния и $\gamma > 4/3$ масса является возрастающей функцией центральной плотности, то есть $\partial_{\rho_c} M > 0$.

Как будет видно ниже, такое поведение распространяется и на другие уравнения состояния, не предусматривающие степенной зависимости. Этот результат означает, в том числе, наличие интересующей нас некоторой минимальной (а также максимальной) критической массы. При этом, как показано в [15], нейтронные звёзды с массой больше максимального предела коллапсируют в чёрную дыру, а таковые с массой меньше критической минимальной – взорвутся [11].

Значения минимальной критической массы были подсчитаны во многих работах. Пренебрегая нуклонным взаимодействием, Oppenheimer и Serber получили значение $\sim 0.17M_{\odot}$ [23]. Tsuruta и Cameron рассчитали значение в $\sim 0.12M_{\odot}$, используя барион-барионный потенциал Левингера и Симонса [24]. Baum, Pethic и Sutherland, используя своё уравнение состояния BPS, получили $0.0925M_{\odot}$ [14]. Colpi, Shapiro и Teukolsky, используя уравнение состояния Харрисона-Виллера, получили значение минимальной критической массы в $0.196M_{\odot}$ [25]. Похожее значение ($0.18M_{\odot}$) получил и сам Харрисон [26]. Впрочем, в [15] утверждается, что это микрофизическое уравнение состояния на сегодня устарело. Haensel, Douchin и Zdunik получили значение в $0.1M_{\odot}$ для уравнений состояния FPS и SLy [18]. Причины выбора этих уравнений состояний описаны в разделе 4.

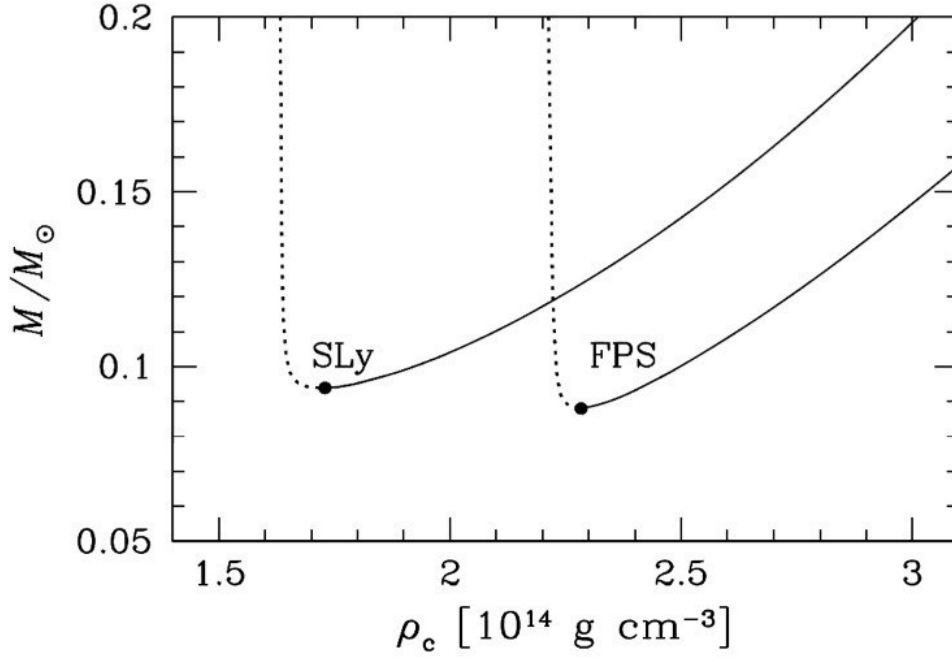


Рис. 9: Зависимость гравитационной массы M от центральной плотности вблизи критической минимальной массы [18].

Возвращаясь к кривым $M(R)$, заметим, что случай отсутствия вращения будет соответствовать линии уровня момента с $\Theta = 1$. Для политропы возможно напрямую получить зависимость радиуса звезды и её массы от центральной плотности, то есть ρ_c возможно параметризовать кривую масса-радиус. Это распространяется и на другие уравнения состояния, как видно ниже. Для дальнейшего перехода к случаю с вращением полезно отметить, что параметризация массы на устойчивой ветке кривой $M(R)$ монотонно возрастающая, и минимальной массе соответствует минимальная плотность. Минимальная масса, получившаяся для этого случая, $M_{\min} = (0.09 \pm 0.0006) \cdot M_{\odot}$. Соответствующая ей плотность $\rho_{\min} = (2.265 \pm 0.003) \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, радиус $R_{\min} = (220 \pm 8) \text{ км}$. Этот результат в целом соответствует тому, что было получено при расчётах ранее.

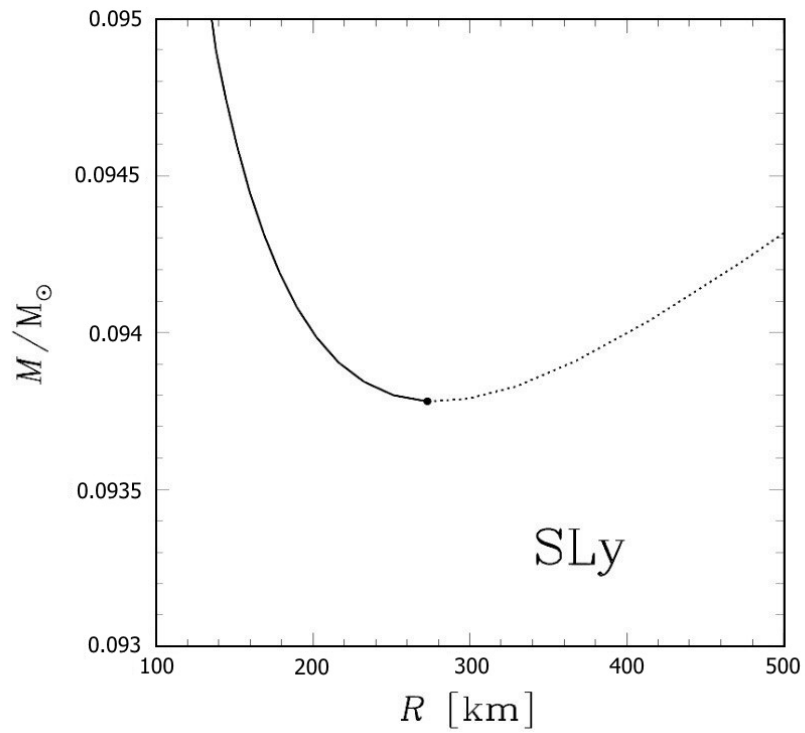


Рис. 10: Масса в зависимости от радиуса вблизи минимальной критической массы для уравнения состояния SLy [15].

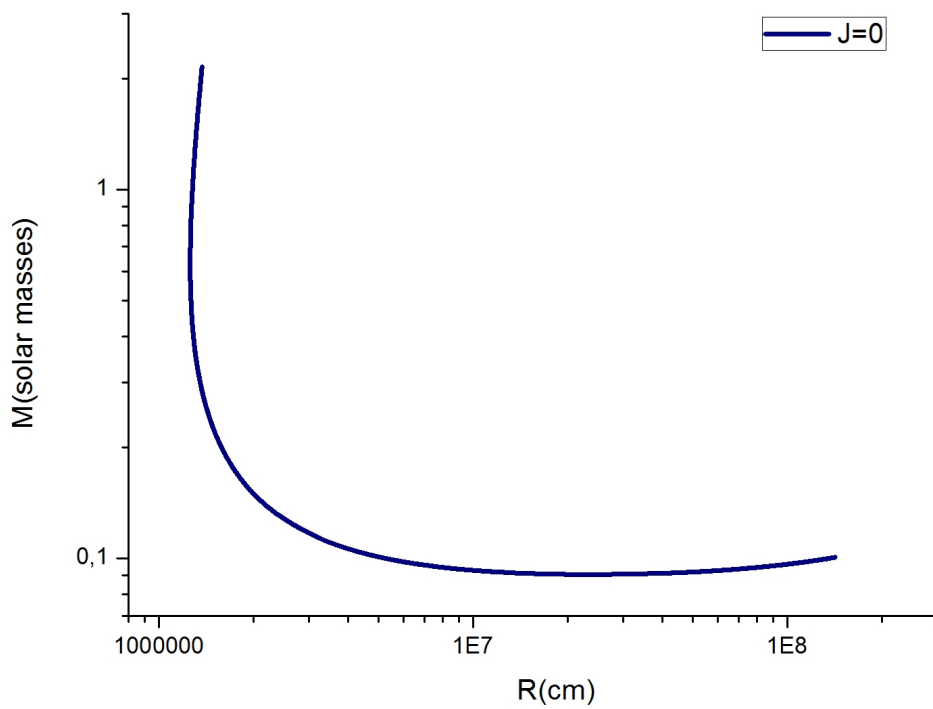


Рис. 11: Получившаяся кривая масса-радиус для случая без вращения, уравнение состояния FPS.

5.2 Неточности в расчётной программе

В изначальной версии программы присутствовала некая ошибка, позднее обнаружение которой привело к получению качественно и количественно неверных результатов (это не касается описанной выше кривой без вращения). Исследуемые изолинии были не только смещены, но и приобрели качественно не соответствующую реальной форму, а вблизи экстремальных значений плотности появилась достаточно сложная бифуркация, которая была исследована и описана.

Суть ошибки заключалась в неправильной интерпретации выходных данных. Это проявлялось у достаточно сильно сплюснутых конфигураций, когда переоценивался экваториальный радиус, а параметр Θ , соответственно, недооценивался. В результате изолинии углового момента продублировались, то есть получили несуществующие ветки с завышенными экваториальными радиусами и фиктивной параметризацией Θ . В области, близкой к минимальной плотности, линии имели замысловатые конфигурации, причём имело место некое пороговое значение, при котором сама их структура кардинально менялась.

Строго говоря, существует два отдельных ограничения на выходные данные, которые надо учитывать во избежание получения неправильной картины. Первое – проблемы с расчётной решёткой – указано выше. Второе – это предельное вращение. В твердотельных вращательных конфигурациях существует минимальное значение Θ , переход за которое невозможен из-за превышения центробежной силой на экваторе гравитационного притяжения. Вещество в таких условиях начинает истекать со звезды. Значение Θ_{min} зависит от уравнения состояния, а также от центральной плотности. Подробнее об этом рассказывается в разделе 5.3.

В случае отсутствия вращения $\Theta = 1$, поэтому ошибки не влияют на результат, как уже говорилось выше. При наличии же вращения конфигурация нейтронной звезды изменяется. Во-первых, теряется сферическая симметрия, вместо которой в расчётной программе предполагается симметрия осевая. В программе Θ наряду с центральной плотностью подаётся на вход, затем в зависимости от этих двух параметров рассчитывается геометрическая конфигурация звезды (включая экваториальный радиус), её масса, момент инерции, момент импульса, внутренняя и гравитационная энергия. Оговоримся сразу, что рассматриваться будут случаи значительных моментов, так как при приближении к нулю ситуация сильно усложняется.

Интересующие нас линии уровня углового момента в координатах $M(R)$ сдвигаются, а их параметризация центральной плотностью изменяется. Для какого-либо значения массы радиус устойчивой конфигурации увеличивается по сравнению со случаем нулевого вращения [3], то есть кривая сдвигается вправо. Так как изолинии, соответствующие разным моментам, не

могут пересекаться, кривая также должна сдвинуться вверх, то есть увеличится минимальная масса.

Так как напрямую подать на вход расчётной программе нужное значение момента импульса не представлялось возможным, нужно было искать требуемое сочетание плотности и Θ . Для этого существуют как минимум два очевидных способа:

1. Построение большого числа конфигураций, покрывающих нужные интервалы плотности (от $\sim 2 \cdot 10^{14}$ до $\sim 1 \cdot 10^{15}$ г/см³) и Θ (от 0.2 до 1). Это позволило бы построить коническую поверхность в пространстве (M, R, J) , горизонтальные сечения которой показывали бы нужные линии уровня.
2. Численный метод (например, деления пополам), который позволяет решить с определённой точностью уравнение вида $f(x) = 0$ при условии монотонности $f(x)$ в окрестности предполагаемого корня x_0 . Так как параметризация кривых уровня момента центральной плотностью известна лучше, предполагалось взять какое-нибудь значение центральной плотности, посчитать для него момент, затем изменить плотность и для нового её значения методом деления пополам найти требуемую для получения момента в определённом интервале Θ .

Первый способ почти не требует изменения кода программы, обладает хорошо предсказываемым временем работы и не зависит от сходимости различных методов, а также точности переменных. Однако, у него есть большой недостаток – получающаяся в результате поверхность не имеет прямоугольной равномерной решётки, что делает точность построения линий уровня неудовлетворительной. Кроме того, второй подход более удобен в смысле перехода в перспективе к расчёту нетвердотельного вращения, поэтому он и был выбран.

Для корректной работы метода деления пополам необходима монотонность функции, в данном случае $J(\Theta) |_{\rho=\text{const}}$. Для выявления областей такой монотонности был построен массив конфигураций, из которых потом отобраны изолинии плотности для некоторых её значений в координатах $J(\Theta)$. На этом шаге проявилась ошибка программы. Получившийся результат, как позже выяснилось, не соответствовал действительности и качественно изменял картину. Научной ценности, разумеется, он не имеет, но представляет интерес с точки зрения понимания механизма работы программы и расчётного метода в целом.

На ошибочном графике видно, что с изолинией каждой ρ_c у прямой $J = \text{const}$ может либо быть два пересечения, либо одно (тогда эта плотность экстремальна), либо вообще не быть. Ясно, что в случае нулевого момента пересечения со всеми изолиниями вырождаются в точки $\Theta = 1$ и $\Theta = 0$. Вторая точка – это тривиальный случай, когда звезда вообще отсутствует,

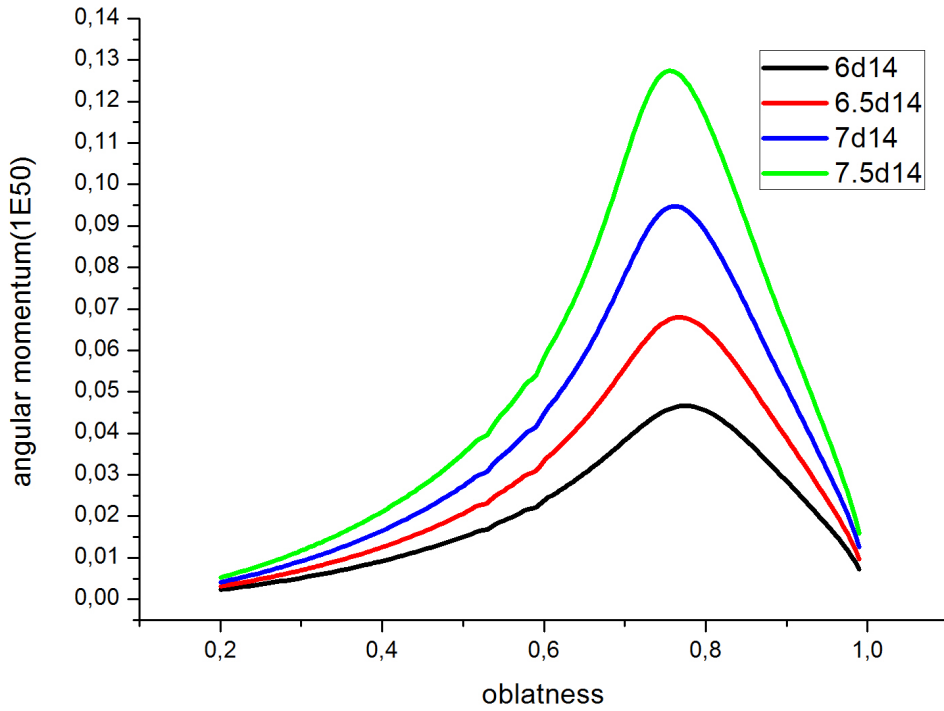


Рис. 12: Момент импульса в единицах 10^{50} г·см²/с в зависимости от Θ при постоянной плотности в единицах г/см³.

а первой была посвящена предыдущая часть параграфа. Особый интерес представляет пик в районе $\Theta \sim 0.8$, который и был главным качественным различием реальной и ошибочной картин.

Итак, из поведения линий уровня центральной плотности можно было сделать следующие выводы:

1. Для всех ненулевых значений момента конфигурации с некоторыми центральными плотностями просто не существуют. У каждого значения момента есть минимальная возможная центральная плотность. Это означает, что при параметризации начинать нужно именно с этого значения.
2. Монотонность функции $J(\Theta)$ для каждого значения центральной плотности существует в двух областях, к которым в целях обеспечения применимости метода деления пополам нужен отдельный подход.

Первое свойство, если принять во внимание необходимое условие устойчивости ($\partial_{\rho_c} M > 0$), устанавливало однозначное соответствие между минимальной массой и минимальной плотностью устойчивых конфигураций для данного момента. Минимуму изолинии момента в координатах $M(R)$ сопоставлялась центральная плотность, максимум изолинии которой в координатах $J(\Theta)$ соответствовал этому моменту. Этот факт позволял выбрать

корректное начальное значение ρ_c . Из-за наличия двух областей монотонности необходимо было обсчитать две ветви кривой (ещё одно значительное проявление качественной ошибки), оба раза увеличивая ρ_c , но по-разному изменяя Θ . Плотность ρ_c монотонно параметризовала две отдельные части изолинии момента, соединявшиеся при минимальной массе. Это свойство изолиний момента, состоявших из двух веток, входило в противоречие с соответствующей теорией, изложенной в [15]. Линия, соответствующая ненулевому значению момента, просто заканчивается на минимальной плотности и соответствующем ей значении Θ , а конфигурации с большим радиусом не существуют. Здесь важна разница между существованием и устойчивостью конфигураций – первый вопрос однозначно разрешается расчётами программы, тогда как второй требует рассмотрения эксплицитных критериев.

Ниже, на рис. (13), представлены отрисованные ошибочные изолинии момента, где при расчёте момент сохранялся с точностью $0.5 \div 1\%$. Начальный шаг Θ в разных случаях составлял от 0.02 до 0.05, шаг плотности составлял $2 \cdot 10^{12}$ г/см³, число итераций для каждой удачно посчитанной точки не превышало 10. Также проведены точками кривые постоянного гравитационного параметра – безразмерной величины $2GM/Rc^2 = r_g/R$. Гравитационный параметр показывает, насколько точно можно проводить расчёты в ньютоновской механике.

Итак, при наличии вращения со значительным угловым моментом (порядка 10^{48} г·см²/с) необходимое условие устойчивости выполнялось на обеих ветвях кривой, расходящихся от минимальной массы. Значений плотности, меньших, чем соответствующее минимальной массе, на этих линиях не существовало, однако линии были как бы "продублированы" по сравнению с настоящими – ветви с большими радиусами (справа от минимума на рисунке (13)) являются продуктом неправильной интерпретации выходных данных. Тем не менее, просто отбросить их нельзя – это не учтёт смещение из-за второго ограничивающего эффекта – предельного вращения.

Кривая с нулевым моментом параметризуется центральной плотностью во всём наблюдаемом диапазоне, а кривые с ненулевым – центральной плотностью на каждой отдельной ветке и величиной Θ на всей длине, что говорило о наличии бифуркации вблизи $J = 0$. Что касается гравитационного параметра, на интересующих нас массах и размерах звезды он достигает значений порядка 10^{-1} , а вблизи предполагаемой бифуркации – как минимум на порядок меньше.

Задача исследования бифуркации состояла в том, чтобы изобразить механизм перехода от одного режима параметризации к другому. Трудность этой задачи заключается в том, что конфигурации с требуемой малой плотностью находятся на пределе числового счёта. Это плохо влияет на сходимость метода, а подсчёт занимает много времени.

Так как изолинии углового момента строятся методом деления пополам,

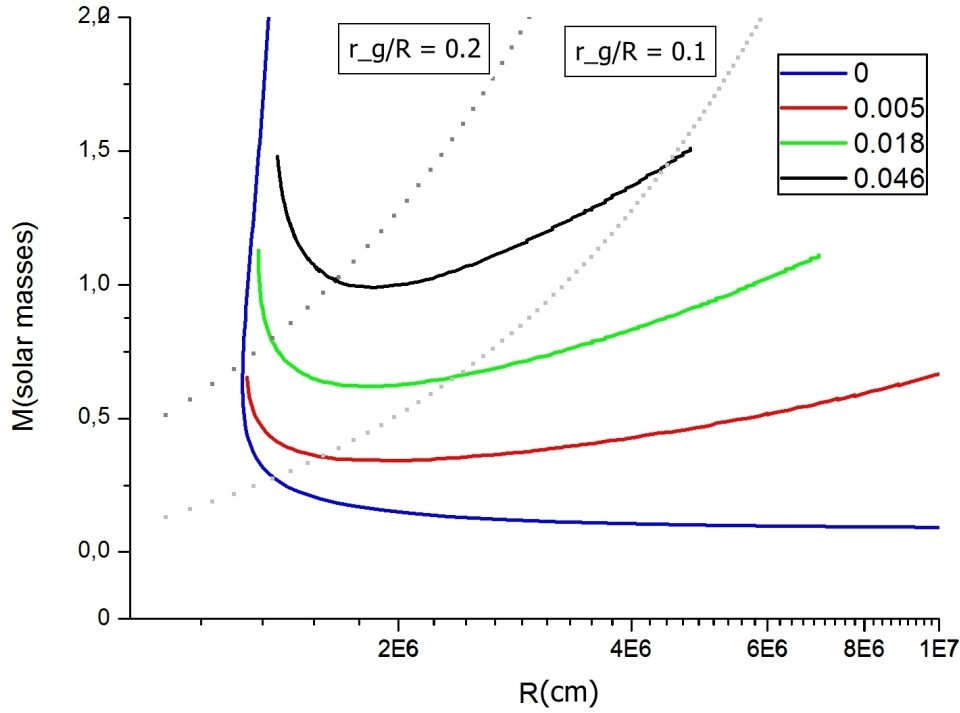


Рис. 13: Ошибочные изолинии момента импульса (в единицах 10^{50} г·см²/с) в координатах масса-радиус (сплошные линии). Линии постоянно-го гравитационного параметра показаны точками.

для установления областей монотонности снова были построены изолинии центральной плотности в координатах $J(\Theta)$ (рис. (14)).

Из рисунка видно, что существовало пороговое значение плотности, при котором изолинии меняли направление роста максимального значения. Эта пороговая плотность и соответствующий ей максимальный момент

$$\rho_{\text{tr}} \approx 2.295 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3, \quad J_{\text{tr}} \approx 3.56 \cdot 10^{45} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}. \quad (5.7)$$

Это добавляло к информации на графике (12) наличие конфигураций с $\rho < \rho_{\text{tr}}$, причём в означенной области центральная плотность для одной и той же Θ уменьшалась с ростом момента импульса, что говорило о наличии дополнительной кривой малых плотностей. Далее были смоделированы изомоментные последовательности конфигураций. Как видно из рисунка (14), для значения момента (постоянное значение J соответствует на графике горизонтальной линии) выше порогового существовали либо два пересечения с изолинией какой-либо плотности, либо одно, либо ни одного. Однако, с учётом смены направления при $\rho = \rho_{\text{tr}}$, это было верно и для плотностей $\rho < \rho_{\text{tr}}$ с той только разницей, что в этом случае единственное пересечение соответствовало максимальной на данной ветке плотности, а не минимальной, как при $\rho > \rho_{\text{tr}}$. В каком-то смысле, ситуация здесь была

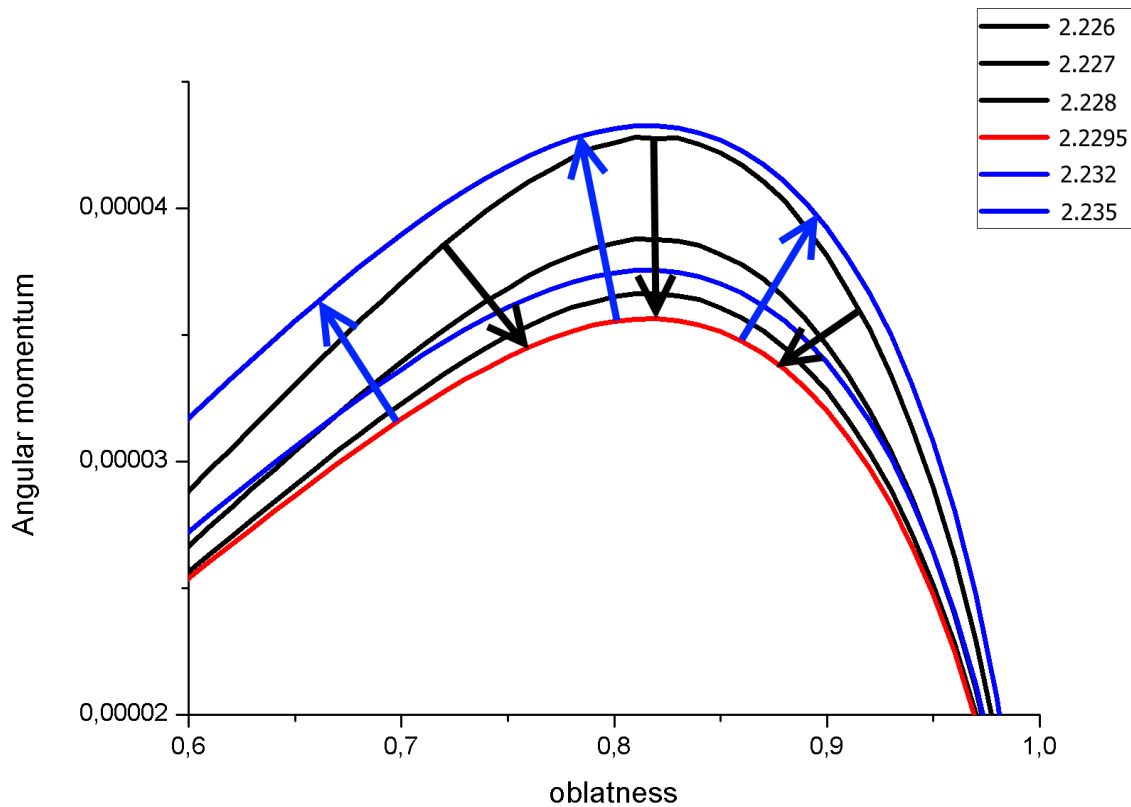


Рис. 14: Изолинии плотности в координатах $J(\Theta)$. Единицы $J - 10^{50}$ г·см²/с, единицы $\rho - 10^{14}$ г/см³. Стрелками показано направление роста плотности.

зеркальна. При этом, для $J \gg J_{tr}$ две кривые одного и того же момента были значительно отдалены друг от друга, так как максимальная плотность одной сильно меньше минимальной плотности другой. На каждой из кривых параметром служила Θ , свободно пробегающая все значения.

При подходе к J_{tr} кривые сближались, так как максимальная плотность для кривой $\rho < \rho_{tr}$ со своей стороны подходила к пороговому значению, как и минимальная плотность кривой $\rho > \rho_{tr}$. Наконец, когда $J = J_{tr}$, кривые соприкасались точками экстремальных плотностей. При дальнейшем уменьшении момента снова появлялся разрыв – конфигурации теперь существовали не для всех Θ . При этом было две группы Θ , и в каждой из них для $J = const$ пробегались все значения плотности. Разрыв между двумя кривыми одного и того же момента, таким образом, теперь проходил по Θ , и каждая из них параметризовалась плотностью.

Это объясняло процесс перехода от роли параметра от ρ_c на маленьких значениях углового момента к Θ на больших. На малых моментах ветка кривой с большими Θ слабо отличалась от линии $J = 0$ и практически "прикреплялась" к ней в пределе $\Theta \rightarrow 1$. Ветка же со сплюснутыми конфигурациями, но малым моментом находилась в стороне. При увеличении

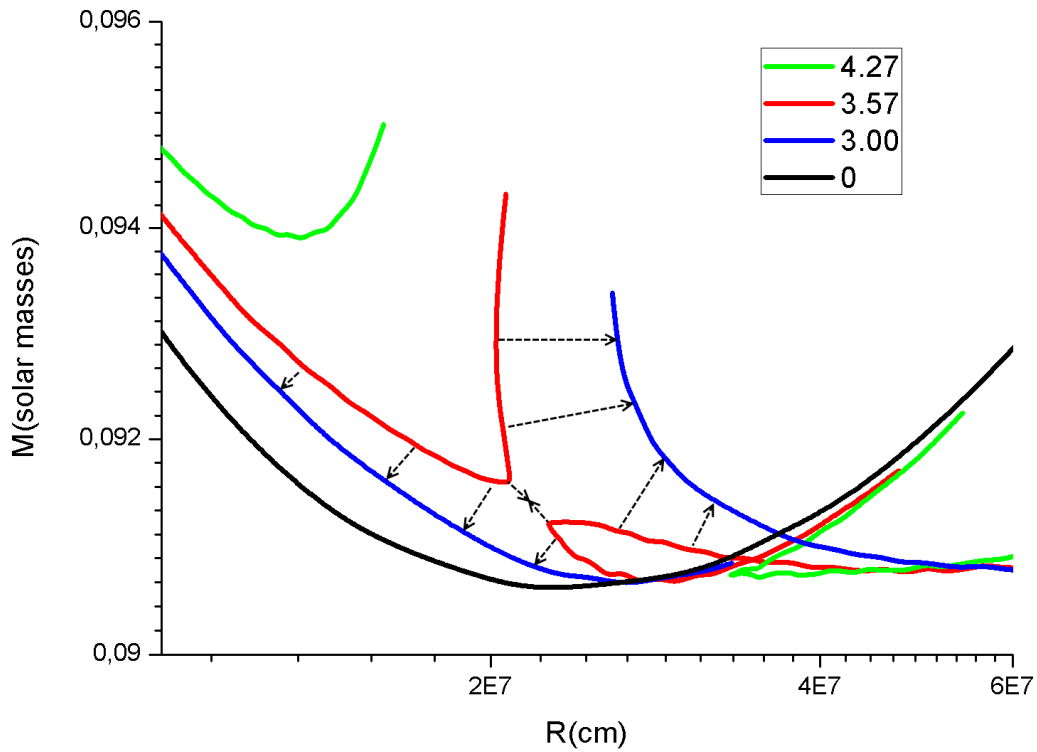


Рис. 15: Изолинии момента в координатах $M(R)$ Единицы $J - 10^{45} \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}$. Стрелками показано движение веток кривых при переходе пороговой точки.

момента изолинии соединялись в точке

$$J = J_{\text{tr}}, \quad (5.8)$$

$$\rho = \rho_{\text{tr}}, \quad (5.9)$$

каждая из них распадалась на две ветки, затем происходил "обмен" этими ветками. В результате при моментах больше порогового наблюдавшаяся ранее кривая с большими плотностями увеличивала свою минимальную массу с ростом момента, а кривая с плотностями $\rho < \rho_{\text{tr}}$ создавала довольно сложные фигуры.

Точность расчётов была для этой задачи увеличена по сравнению с таковой для предыдущей. Здесь относительная погрешность момента составляла не более 0.01%, то есть $(|\Delta J|/J \leq 0.0001)$. Тем не менее, из-за того, что конфигурации находятся на пределе численного счёта, гладкость кривых на графиках не могла быть удовлетворительной. Качество построения линий здесь значительно ограничено вычислительными возможностями.

5.3 Настоящие изолинии в случае с вращением

После исправления ошибки в расчёте остаётся ещё одно ограничение – предельное твердотельное вращение. Как уже упоминалось, при некотором пороге раскрутки вещество на экваторе начинает истекать со звезды, так как центробежные силы начинают превышать гравитационные. Параметры предельного вращения зависят от уравнения состояния, а для каждого уравнения состояния существует зависимость предельного значения Θ от центральной плотности. Для использованного в работе FPS эта зависимость в интересующем нас диапазоне выглядит следующим образом:

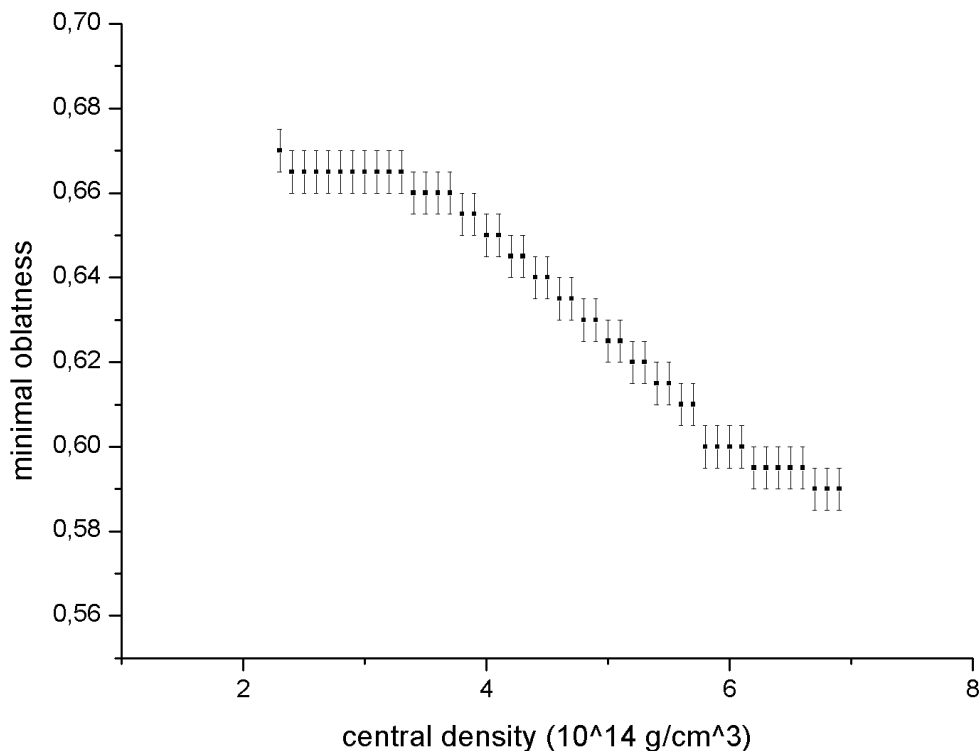


Рис. 16: Минимальное значение Θ для уравнения состояния FPS в зависимости от центральной плотности в единицах 10^{14} г/см^3 .

Проверка на минимальное значение осуществлялась эмпирическим путём с шагом по Θ в $5 \cdot 10^{-3}$. Этим определяются размер крестов погрешности. Выбор такого шага связан с разрешением сетки, которое принципиально не позволяет получать разные результаты для достаточно близких значений Θ . Получившиеся для каждой плотности Θ_{min} можно использовать как начальные параметры в расчёте изолиний.

Когда предельное твердотельное вращение учтено, а ошибка в программе исправлена, можно построить настоящие изолинии углового момента в координатах $M(R)$. Нахождение требуемых значений ведётся тем же методом деления пополам. В первую очередь для работы этого метода требуется

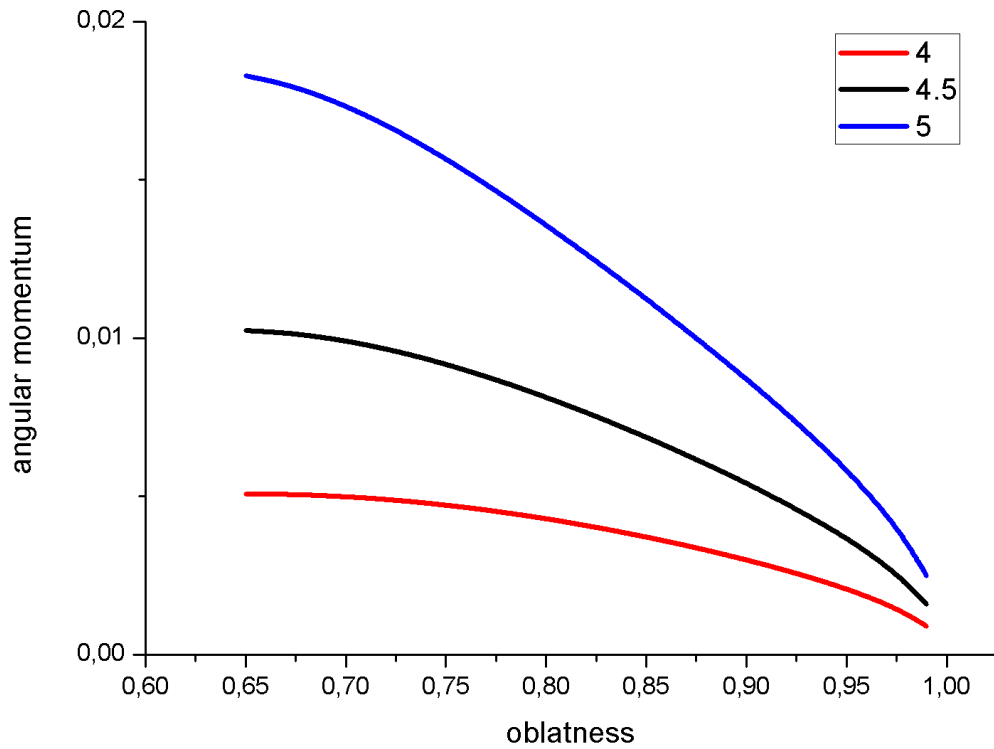


Рис. 17: Изолинии плотности в координатах $J(\Theta)$. Единицы $J - 10^{50}$ г·см²/с, единицы $\rho - 10^{14}$ г/см³.

найти области монотонности изолиний плотности в координатах $J(\Theta)$, как и в разделе с ошибочными данными. На рис. (17) видно, что ситуация в данном случае качественно проще – монотонность сохраняется на всё рассматриваемом промежутке. Это должно быть верно и в координатах $J(\rho)$ для изолиний Θ , что понадобится при переходе к шагу по последней. Такой переход обоснован влиянием на результат разрешения сетки, которое делает результат нечувствительным к малым изменениям Θ .

На рис. (18) представлены получившиеся изолинии углового момента. Они параметризуются и Θ , и центральной плотностью ρ_c , причём параметр Θ растёт с увеличением массы, приближаясь к единице, когда изолиния приближается к линии, соответствующей отсутствию вращения. Достигая минимальной массы, линия обрывается в момент, когда $\Theta = \Theta_{min}$. Если сравнить случай с вращением и случай без вращения, видны следующие особенности:

1. Минимальная масса в случае с вращением превышает минимальную массу для невращающихся звёзд.
2. Для одной и той же массы в случае с вращением экваториальный радиус больше, чем без вращения.

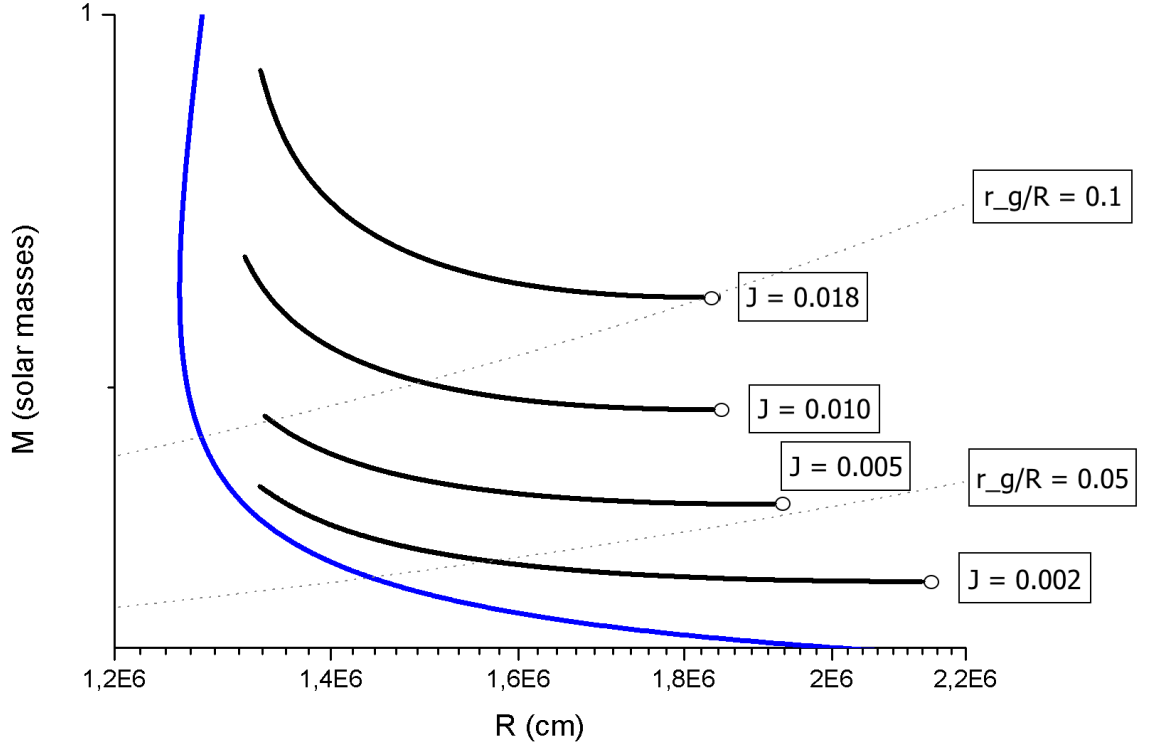


Рис. 18: Изолинии углового момента в координатах $M(R)$. Единицы J – 10^{50} г·см²/с.

3. Минимальная центральная плотность на изолиниях момента превышает ρ_{cr} для случая без вращения, где $M|_{\rho=\rho_{cr}} = M_{min}$.

Что касается параметризации линий центральной плотностью, необходимое условие устойчивости $\partial_{\rho_c} M > 0$ выполняется на всей длине. Достаточным условием это неравенство не является, и поиск точки потери устойчивости на этих изолиниях имеет смысл. Для этого закон вращения с постоянной угловой скоростью должен быть заменён нетвердательным, для которого угловая скорость сохраняется на цилиндрах, а вместо изолиний полного момента должны быть построены изолинии распределения $j(m)$, где $m = M_b/M$, то есть доля массы внутри цилиндра радиуса b .

Полученные результаты качественно соответствуют описанным в [15]. Указанные на рисунке (18) изолинии гравитационного параметра показывают, что точность допускает использование ньютоновской механики. В формулах общей теории относительности множители, например, содержащие этот параметр в форме $\sqrt{1 - r_g/R}$, представляются разложением в форме $1 - r_g/2R + o(r_g)$, то есть ошибка уменьшается в два раза, и её относительная величина порядка 10^{-2} .

6 Перенос масс

Эволюция звёзд в двойных системах отличается от эволюции одиночных звёзд, главным образом, из-за приливных сил и взаимодействия с другим компонентом. Впрочем, как показано в [7], на ранних стадиях эволюции не тесной двойной системы сферическая симметрия сохраняется с хорошей точностью. Это связано с тем, что основной угловой момент приходится на орбитальное вращение, хотя даже малое вращение может повлиять на характеристики устойчивости компонентов[3]. Одним из этапов эволюции двойных систем является перенос массы, и рассматриваться будет именно этот процесс.

Механизм переноса массы в тесной двойной системе можно описать с помощью модели Роша. Как уже упоминалось во введении, при образовании двойной системы орбиты могут не быть круговыми (в общем случае они эллиптические), однако довольно быстро достигают формы окружности благодаря гравитационному излучению, уносящему энергию. В случае синхронно вращающихся на плоской орбите звёзд можно в приближении точечных масс построить изопотенциальные линии, где потенциал учитывает и гравитационное взаимодействие, и вращение.

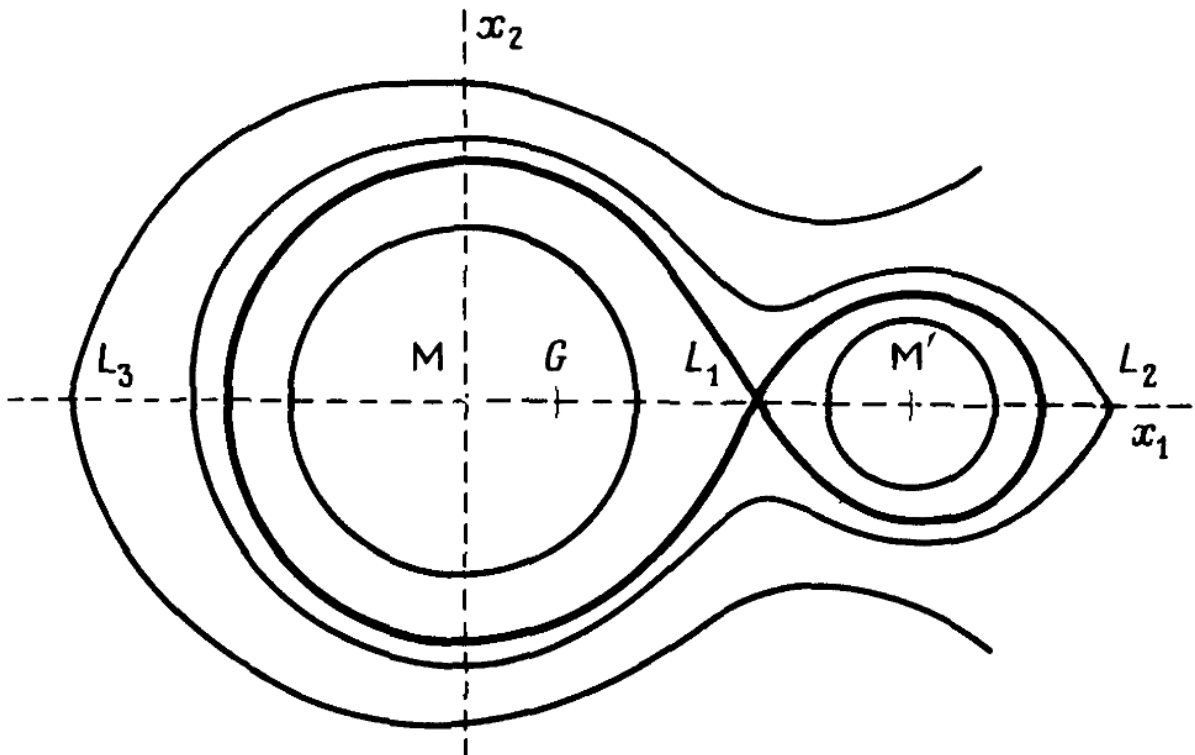


Рис. 19: Случай $M'/M_0 = 0.215$, где M' – масса маломассивного компонента, а M_0 – общая масса системы [27]. Случай на этом рисунке соответствует невырожденным объектам, для которых размеры больше при большей массе.

Критическая полость Роша – это граничное положение изопотенциальной поверхности между зоной, в которой обе звезды находятся внутри связанной замкнутой поверхности, и зоной, где каждая звезда находится внутри поверхности, не соприкасающейся с таковой другого компонента. Критическая полость Роша проходит через первую (внутреннюю) точку Лагранжа, то есть через одну из точек, в которых на пробное тело не действует сила, приводящая к падению на один из компонентов.

Как видно из рисунка, часть полости Роша, принадлежащая менее массивному компоненту, меньше по объёму. В случае нейтронной звёзды, как и других вырожденных объектов, масса и объём не растут совместно, поэтому менее массивный компонент будет, в большинстве случаев, более объёмным. С течением времени из-за гравитационного излучения критическая полость Роша будет уменьшаться и постепенно достигнет границ звезды. В этот момент конфигурация перестанет быть устойчивой, и начнётся перетекание массы на более массивный компонент [7].

Приливные силы практически не влияют на светимость звезды и увеличивают её радиус в среднем в несколько раз менее заметно, чем твердотельное вращение [28], [29]. Поэтому целесообразно воспользоваться приближением твердотельного вращения, чтобы промоделировать перетекание. В использованной модели масса уносилась с экватора. Истечение вещества при этом уменьшает угловой момент:

$$\Delta J = \Delta M R^2 \omega, \quad (6.1)$$

где ω – угловая скорость. Для того, чтобы построить кривую на плоскости $M(R)$, был выбран численный метод:

$$\frac{J_{i+1} - J_i}{J_i} = \frac{M_{i+1} - M_i}{M_i} \left(\frac{M_i R_i^2}{I_i} \right), \quad (6.2)$$

где I – момент инерции. Для решения уравнения использовался метод деления пополам. На вход в расчётную программу подаются две переменные – ρ и Θ . Для применения метода деления пополам нужна какая-нибудь монотонно возрастающая функция, и изолинии плотности и Θ в плоскости $J(M)$ подходят для этой цели. Фактически, чтобы найти точку с номером $i + 1$, нужно подобрать требуемый наклон отрезка, соединяющего её с точкой под номером i . Этот наклон полностью зависит от параметров последней.

Шаг делается по переменной Θ , затем методом деления пополам до получения нужного наклона отрезка подбирается требуемое значение ρ . Поиск происходит по одной из изолиний Θ , которые в выбранных координатах представляют собой графики монотонно возрастающих функций. Точность определения наклона $\Delta k/k = 0.0005$.

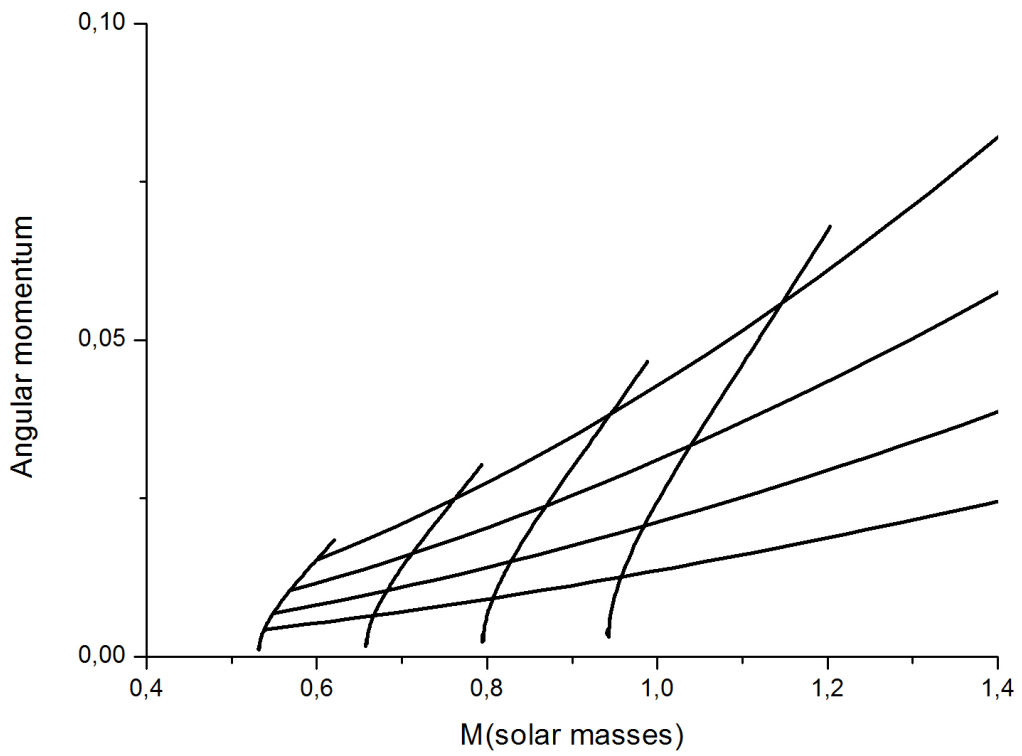


Рис. 20: Изолинии плотности и Θ в плоскости $J(M)$.

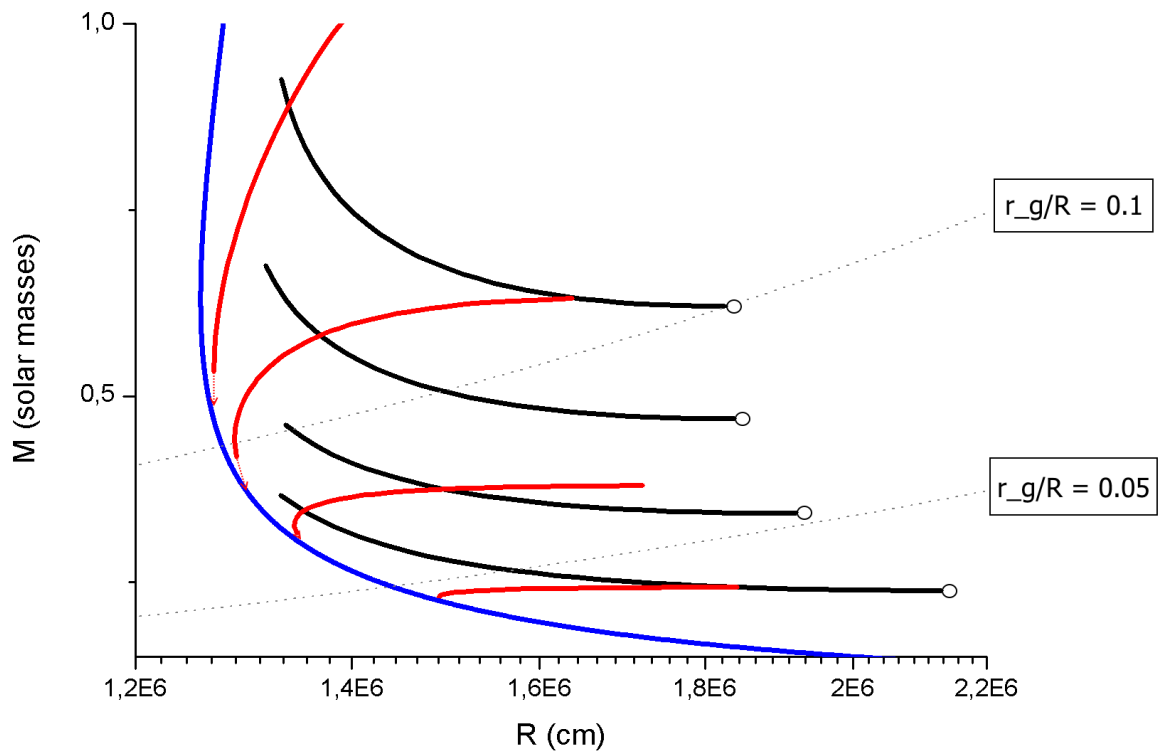


Рис. 21: Линии переноса масс на плоскости $M(R)$.

На рисунке (20) показаны изолинии Θ и ρ . Для начальной точки выбирался либо один из узлов, либо значение Θ , близкое к 1, что соответствует нулевому моменту. На рисунке (21) показаны некоторые получившиеся линии переноса (красный цвет). Синяя линия – отсутствие вращения, чёрные – изолинии некоторых значений углового момента. Предполагается, что перенос стартует с какой-либо из чёрных линий, и затем угловой момент окончательно уносится, переводя звезду на линию без вращения. Прерывистые стрелки примерно обозначают возможные траектории окончательного перехода на линию нулевого углового момента, которая соответствует $\Theta = 1$. Описанная модель даёт (6.2) даёт изображённый результат с относительной погрешностью 0.05%.

7 Заключение

Итак, в разделе 4 был проведён обзор некоторых свойств уравнений состояния. Для использования в расчётной программе были выбраны уравнения SLy и FPS, достаточно жёсткие, чтобы нейтронная звезда выдерживала гравитационное сжатие на больших плотностях и не коллапсировала. Эти уравнения не были до сих пор исключены тестами на максимальную массу. Различие между FPS и SLy заключается в их эффективных гамильтонианах. Они построены на разных ядерных моделях, а также по-разному описывают возникающий в точке *neutron drip* фазовый переход. При том, что уравнение FPS имеет последовательность небольших переходов и, тем самым, должно описывать вещество с меньшими скачками, оно обладает меньшей жёсткостью и меньшей максимальной массой, чем SLy. В области малых плотностей оба уравнения теряют возможность однопараметрической записи, так как становится заметным влияние температуры. В ключевой работе [13], описывающей эти уравнения, приведены некоторые изотермы, а также дано аналитическое представление уравнений. В настоящей же работе на малых плотностях уравнения были сшиты с изоэнтропийным S15, полученным из расчёта безразмерной энтропии $S/k = 1.5$ на нуклон, при этом энтропия, наряду с барионной компонентой, учитывает и электрон-позитронную плазму, и равновесное излучение. Это уравнение использовалось в расчётной программе ранее, но оно не сравнивается в жёсткости на больших плотностях с FPS и SLy.

Раздел 5 последовательно касается трёх подзадач. Первая из них, построение линии нулевого углового момента и выяснение минимальной массы для невращающихся конфигураций (подраздел 5.1), была своего рода проверкой корректности получаемых данных. Полученное значение минимальной массы находится в нужном диапазоне и сравнимо с результатами разных исследователей. Вид кривой и её положение, а также соответствующий минимальной массе радиус также с хорошей точностью совпадают с общепринятыми. Устойчивость конфигураций здесь проверяется необходимым условием – оно выполняется на одной ветке кривой. Точка минимума массы здесь соответствует экстремуму функции $M(\rho_c)$, в котором главная мода всегда теряет устойчивость [30].

В подразделе 5.2 была рассмотрена ошибка в расчётной программе. Неправильная интерпретация выходных данных и неучтённое предельное твёрдотельное вращение привели к качественно неверным результатам, среди которых бифуркация при малых значениях центральной плотности, связанная со сменой типа параметризации изолиний. Ошибка не затронула невращающиеся конфигурации, так как им соответствует случай $\Theta = 1$, однако в случае наличия вращения на больших плотностях экваториальный радиус, и вместе с ним и Θ , сильно переоценивались, что продублировало изолинии, которые в неправильной интерпретации состояли уже из

двух веток с отдельной параметризацией. Необходимое условие устойчивости $\partial_{\rho_c} M > 0$ выполнялось на обеих ветках. При уменьшении плотности изолинии стали представлять собой сложные кривые, при этом на пороговом значении плотности принципиально изменилось их устройство относительно входных параметров программы.

После исправления неточностей были построены настоящие изолинии углового момента, которым посвящён раздел 5.3. Принципиальное отличие результата от ошибочного состоит в том, что каждая изолиния имеет только одну ветку, на всей длине которой сохраняется параметризация входными параметрами. Качественные характеристики совпадают с описанными в литературе, например [3] [15]. Конфигурации оказались гораздо проще, чем полученные в неправильных расчётах, что поучительно с точки зрения философии научного знания. Точность в расчёте конфигураций составляла $|\Delta J/J| < 0.0001$, то есть ошибка не превышала 0.01%.

Необходимое условие устойчивости $\partial_{\rho_c} M > 0$ выполняется по всей длине изолиний, но оно не является достаточным. Для исследования устойчивости должны быть применены дополнительные инструменты, и построение изолиний углового момента здесь – подготовительный этап. Критическими точками для устойчивости являются экстремумы кривых зависимости различных величин от ρ_c [3] [30]. Закон вращения должен быть изменён с $\Omega = const$ на другой. Формирование нового закона вращения должно подчиняться теореме Пуанкаре (сохранение угловой скорости на цилиндрах, $\Omega = \Omega(\varpi)$), а распределение $j(m)$, где $m = M_b/M$, то есть доля массы внутри цилиндра радиуса b , должно сохраняться вместо полного момента J при переходе между конфигурациями. Такая работа будет проводиться в дальнейшем.

Что касается модели переноса масс, ей посвящён раздел 6. Эта модель имеет значение для описания двухстадийного механизма взрыва сверхновой. Одной из стадий взрыва является существование тесной двойной системы, в которой оба компонента могут быть нейтронными звёздами. Маломассивный компонент начинает терять массу, когда достигает поверхности критической полости Роша, например, первой точки Лагранжа. В простейшем приближении вещество истекает с экватора, и приведённая разностная схема обеспечивает расчёт кривых сброса углового момента в координатах $M(R)$. Точность в этом случае несколько хуже, чем при подсчёте изомоментных конфигураций, так как численный метод нахождения корня требует подбора двух переменных вместо одной. Тем не менее, кривые и в данном случае имеют правдоподобный вид.

Список литературы

- [1] В.С. Имшенник, УФН **180**, (2010).
- [2] S.I. Blinnikov, I.D. Novikov, T.V. Perevodchikova, A.G. Polnarev, Soviet Astronomy Letters **10**, 177, (1984).
- [3] Г.С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звёздной эволюции* (Москва, Наука, 1989).
- [4] В.С. Имшенник, О.Г. Ряжская, Письма в Астрономический журнал **30**, (2004).
- [5] В.С. Имшенник, Д.К. Надёжин, ЖЭТФ **63**, (1972).
- [6] Л.Н. Иванова, В.С. Имшенник, Д.К. Надёжин, Научные информации астрономического совета АН СССР **13**, (1969).
- [7] J.-L. Tassoul, *Theory os Rotating Stars* (PSA-1, 1979).
- [8] В.С. Имшенник, Д.В. Попов, Письма в Астрономический журнал **20**, (1994).
- [9] Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюции звёзд* (Москва, Наука, 1971).
- [10] А.В. Засов, К.А. Постнов, *Общая астрофизика* (Фрязино, Век 2, 2011).
- [11] S.I. Blinnikov, V.S. Imshennik, D.K. Nadezhin, I.D. Novikov, T.V. Perevodchikova, A.G. Polnarev, Soviet Astronomy **34**, (1990).
- [12] A.G. Aksyonov, S.I. Blinnikov, Astronomy and Astrphysics **290**, (1994).
- [13] P. Haensel, A.Y. Potekhin, Astronomy and Astrophysics **428**, (2004).
- [14] G. Baym, C. Pethick, P. Sutherland, Astrphysical Journal **170**, (1971).
- [15] P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev, *Neutron Stars 1* (Springer, 2007).
- [16] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wiley and Sons, 1983).
- [17] F. Ozel, Nature **441**, (2006).
- [18] P. Haensel, J.L. Zdunik, F. Douchin, Astronomy and Astrphysics **385**, (2002b).
- [19] F. Douchin, P. Haensel, Physical Letters **485**, (2000).

- [20] V.G. Pandharipande, D.G. Ravenhall, in *Nuclear Matter and Heavy Ion Collisions*, (1989).
- [21] P. Haensel, B. Pichon, *Astronomy and Astrophysics* **283**, (1994).
- [22] Я.Б. Зельдович, С.И. Блинников, Н.И. Шакура *Физические основы строения и эволюции звёзд*, (МГУ, 1981).
- [23] J.R. Oppenheimer, R. Serber, *Physical Review* **40**, (1938).
- [24] S. Tsuruta, A.G.W. Cameron, *Canadian Journal of Physics* **44**, (1966b).
- [25] M. Colpi, S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Astrophysical Journal* **369**, (1989).
- [26] B.K. Harrison, K.S. Thorne, M. Wakano, J.A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse* (Chicago, University of Chicago Press, 1965).
- [27] M. Plavec, *Journal of Advanced Research in Astrophysics and Astronomy* **6**, (1968).
- [28] S. Jackson, *Astrophysical Journal* **60**, (1970).
- [29] R. Kippenhahn, H.C. Thomas, in *Stellar Rotation*, (New York, Gordon and Breach, 1970).
- [30] G.S. Bisnovatyi-Kogan, S.I. Blinnikov, *Astronomy and Astrophysics* **31**, (1974).