

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)  
Факультет Общей и Прикладной Физики

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики  
Кафедра Теоретической Астрофизики и Квантовая Теория Поля

---

Выпускная квалификационная работа на  
соискание степени магистра

**Излучение Хокинга и секулярно растущие  
петлевые вклады.**

Выполнил студент 6 курса Попов Ф.К.  
Научный руководитель: д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Москва, 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Внешнее гравитационное поле</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Свободные гармоники</b>	<b>6</b>
3.1	Ин-гармоники до начала коллапса . . . . .	8
3.2	Ин-гармоники в течение последней стадии коллапса . . .	11
<b>4</b>	<b>Излучение Хокинга</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Петлевые поправки и секулярный рост</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>22</b>

## 1 Постановка задачи

Черные дыры представляют в настоящее время большой интерес для научного сообщества. Это связано с тем, что черная дыра является одним из тестов для теории квантовой гравитации. Любая состоятельная теория квантовой гравитации должна объяснять квантовую природу черных дыр — в частности, излучение Хокинга.

В 1974 году Стивен Хокинг на основании квазиклассического вычисления показал, что черные дыры излучают в термальном спектре [1]. Наличие температуры позволило рассматривать черную дыру как термодинамический объект. К примеру, можно ввести такое понятие как энтропия черной дыры, которое удовлетворяет стандартными термодинамическим соотношениям. Такое описание черных дыр очень привлекательно и интересно, но вызывает вопросы касающиеся микроскопического понимания энтропии и голографического описания гравитации [4]. Однако, термальный спектр черных дыр также приводит и к противоречию в виде информационного парадокса [5].

Излучение Хокинга - это квантовый эффект, который может быть получен в гауссовой квантовой теории поля, которая рассматривается на фоне гравитационного коллапса [1],[6]. В данной диссертации, мы поставим задачу в несколько иной форме.

Мы бы хотели рассматривать гравитационное поле, создаваемое в течение процесса эволюции звезды. А именно, до некоторого времени звезда была статична, но в некоторый момент она израсходовала все свое ядерное топливо, что привело к падению давления внутри звезды. Соответственно нет никаких сил которые будут противостоять грави-

тации и звезда начнет коллапсировать. Данный процесс приближено описывается при помощи решения Оппенгеймера-Снайдера (для случая коллапса сферически симметричной идеальной жидкости). Но для дальнейшего упрощения мы вместо этого решения будем рассматривать просто коллапс тонкой оболочки. И будем изучать на фоне данного гравитационного поля квантовую теорию скалярного массивного поля.

Гравитационное поле будет подробно описано в следующем параграфе. Сейчас мы только отметим качественное поведение оболочки при коллапсе. Как видно из рисунка 1 здесь присутствуют три фазы. Во время первой фазы оболочка, поддерживаемая некоторыми добавочными силами, статична и имеет радиус  $R(t) = R_0$ . Во время второй фазы, движение оболочки не универсально, оно сильно зависит от начальных данных и неровностей оболочки. Можно даже увидеть что эти неровности увеличиваются в процессе коллапса, если начальный радиус  $R_0$  достаточно большой. Во время третьей фазы, описывающей финальную стадию коллапса, все неровности исчезают и движение становится универсальным (не зависит от начальных данных), потому что все высшие мультипольные моменты поверхности, дипольный, квадрупольный, и т.д., исчезнут [13], [14]. Это связано со свойствами горизонта — поверхности с бесконечным красным смещением  $\sqrt{g_{00}} = 0$ . Также этот факт используется при доказательстве теоремы об отсутствии волос у черной дыры. Из-за того, что внешнее гравитационное поле нестационарно, возможно рождение частиц. А так как на последних стадиях коллапса движение стационарно и универсально, то темп рождения частиц должен быть тоже стационарным и универсальным. Тогда можно задаться вопросом о спектре рожденных частиц. Под этим подразумевается следующее. Во время первой фазы гамильтониан стационарен и, следовательно, может быть диагонализирован. Мы выберем в качестве начального состояния как раз основное состояние данного гамильтониана — ин-вакуум. Задав начальное состояние, мы можем проследить как оно эволюционирует в процессе коллапса. Очевидно, что оно не должно совпадать с аут-вакуумом - вакуум, который диагонализует гамильтониан во время третьей фазы. Что приводит, к тому, что мы видим некоторое возбуждение над аут-вакуумом во время третьей фазы. Это возбуждение как раз и может создавать некоторый поток энергии. Мы этот поток энергии подсчитаем и тем самым обобщим результат Хокинга для случая массивных полей.

Данное рассуждение можно обобщить и для не свободных теорий. Нужно только учесть, что состояние начинает меняться под действием данного взаимодействия. Используя диаграммную технику Келдыша — Швингера данную процедуру можно легко выполнить [8], [9].

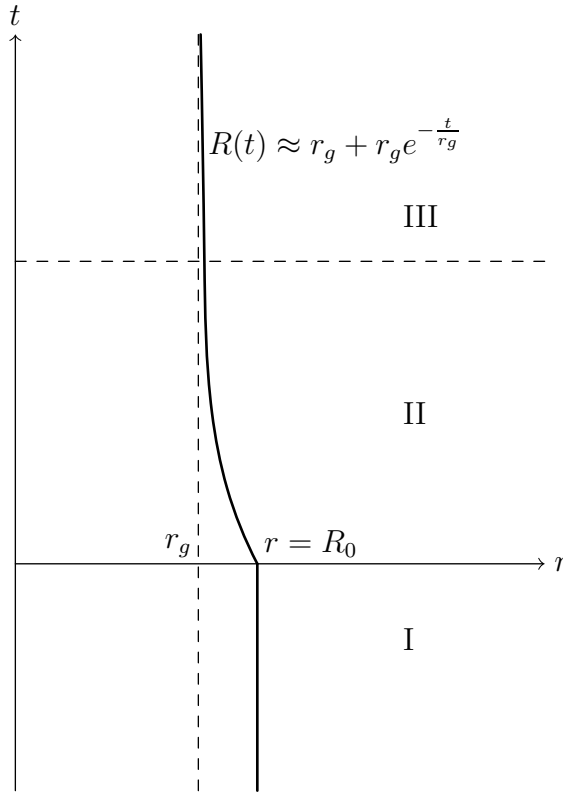


Рис. 1: График зависимости радиуса оболочки от времени. I, II и III соответствует трем стадиям коллапса.

## 2 Внешнее гравитационное поле

Как писалось в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать гравитационный коллапс сферическо-симметричной, массивной, тонкой оболочки. До момента времени  $t = 0$ , в системе отсчета наблюдателя находящимся далеко от оболочки, оболочка придерживалась некоторыми дополнительными силами на фиксированном радиусе  $r = R_0$ . А после момента  $t = 0$  оболочка отпускается и начинает свободно падать (см. рис. 1). Используя теорему Биркгофа для сферическо - симметричного распределения материи, мы получаем что гравитационное поле внутри описывается плоской метрикой, а снаружи метрикой Шварцшильда:

$$ds^2 = \begin{cases} dt_-^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, & r \leq R(t) \\ (1 - \frac{r_g}{r}) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2, & r \geq R(t) \end{cases}$$

где  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$ ,

(1)

где  $R(t)$  - радиальная координата оболочки, которая до начала коллапса была фиксирована  $R(t \leq 0) = R_0$ ;  $r_g/2$  - есть АДМ масса оболочки и  $t$  ( $t_-$ ) есть временная координата снаружи (внутри) оболочки. Мы предположим, что  $R_0 > r_g$ , но сама оболочка до начала коллапса была

очень близка к своему радиусу Шварцшильда  $|R_0 - r_g| \ll r_g$ . Конечно, можно было бы рассмотреть более реалистичную модель - коллапс настоящей звезды, радиус которой может быть хоть какой и необязательно приблизительно равный радиусу Шварцшильда. Тем не менее, модель тонкой компактной оболочки позволяет сделать все вычисления явно и найти поведение гармоник в бесконечном будущем, что и определяет выбор данной модели.

Как видно, мы должны ещё связать две метрики (1), указав как связаны между собой внутреннее и внешнее время  $t = t(t_-)$ , а также найти зависимость радиуса оболочки от времени. Это можно сделать воспользовавшись уравнениями гравитации  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$  и условиями непрерывности метрики [31, 32]. До момента начала коллапса достаточно воспользоваться условием непрерывности метрики на оболочке  $r = R_0$  и уравнением движения для неё  $\dot{R} = 0$ , что бы получить связь времен из условия сшивки метрик (1):

$$t_- = \sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}} t, \quad t \leq 0. \quad (2)$$

После начала коллапса, мы предполагаем, что падение свободно, и тогда индуцированная метрика на оболочке есть  $ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) d\Omega^2$ . Сравнивая это выражение с внутренней метрикой (1) мы получаем следующее соотношение

$$\left(\frac{dt_-}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 1.$$

Сравнивая с внешней метрикой, мы получим аналогичное соотношение

$$\left(1 - \frac{r_g}{R}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{\dot{R}^2}{1 - \frac{r_g}{R}} = 1, \quad (3)$$

где  $\dot{R} = \frac{dR}{d\tau}$ . Используя предположение о близости оболочки к радиусу Шварцшильда  $|R - r_g| \ll r_g$ , замечая что  $\dot{R} \neq 0$  и  $\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , мы можем пренебречь единицей по сравнению с левой частью уравнения и проинтегрировать данное уравнения. Тем самым мы найдем движение оболочки относительно внешнего наблюдателя:

$$R(t) \approx r_g \left(1 + \frac{R_0 - r_g}{r_g} e^{-\frac{t}{r_g}}\right). \quad (4)$$

Для внутреннего наблюдателя в пределе  $|R_0 - r_g| \ll r_g$  движение можно считать равномерным со скоростью  $\nu$ :

$$\nu \equiv \left|\frac{dR(t_-)}{dt_-}\right| = \frac{|\dot{R}|}{\sqrt{1 + \dot{R}^2}}, \quad \text{и} \quad R(t_-) \approx R_0 - \nu t_-. \quad (5)$$

Используя соотношения (4) и (5), мы находим соотношение между внутренним и внешним временами  $t_-, t$ :

$$t_- \approx \frac{R_0 - r_g}{\nu} \left(1 - e^{-\frac{t}{r_g}}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Когда  $t \rightarrow \infty$ , оболочка приближается к радиусу Шварцшильда  $R(t) \rightarrow r_g$ . С другой стороны,  $t_- \approx (R_0 - r_g)/\nu < \infty$  - момент когда оболочка пересечет радиус Шварцшильда и горизонт будет сформирован. После этого момента нет никакого соотношения между этими двумя временами. В последующих главах мы воспользуемся соотношением между внешним и внутренним временем на начальной и финальной стадиях коллапса для того, чтобы найти поведение гармоник скалярного поля в данных ситуациях.

Для изучения поведения гармоник в процессе коллапса, мы сделаем ещё предположение о том, что скорость оболочки близка к скорости света  $\nu \sim 1$ . Чтобы понять, когда выполняется данное соотношение, мы склеиваем метрики (1), используя тензор энергии-импульса оболочки, и получаем следующее уравнение на  $R(t)$  [31][33]:

$$\frac{r_g}{2} = M \sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{M^2}{2R}, \quad (7)$$

где  $M = \text{const}$  определяет тензор энергии импульса оболочки и может быть интерпретирована как собственная масса оболочки. Оно имеет простую общефизическую интерпретацию. Данное соотношение устанавливает, что полная энергия оболочки,  $r_g/2$ , является суммой кинетической энергии оболочки,  $M \sqrt{1 + \dot{R}^2}$  (где дифференцирование проводится по собственному времени оболочки  $\tau$ ), и её потенциальной энергий,  $M^2/2R$ . Что бы избежать отскока оболочки, когда  $\dot{R} = 0$ , т.е. что бы происходил настоящий гравитационный коллапс, мы должны наложить условие  $r_g > 2M$ . Однако мы будем требовать более сильного условия, а именно,  $r_g \gg 2M$ . Пренебрегая разницей между  $R(\tau)$  и  $r_g$  в уравнении (7), мы получаем:

$$\dot{R} \approx -\sqrt{\left(\frac{r_g}{2M} + \frac{M}{2r_g}\right)^2 - 1}.$$

Условие  $r_g \gg 2M$  предполагает, что  $|\dot{R}| \gg 1$  и  $\nu \approx 1$ , т.е. оболочка на последних стадиях коллапса будет двигаться со скоростью света также и относительно внутреннего наблюдателя.

За пределами оболочки удобно использовать так называемые чере-

пашьи координаты:

$$r_* = r + r_g \log \left( \frac{r}{r_g} - 1 \right).$$

В черепаших координатах движение оболочки приближенно описывается следующим образом

$$R_*(t) \approx R_0^* - t + (r_g - R_0) \left( 1 - e^{-\frac{t}{r_g}} \right), \quad (8)$$

где  $R_0^* = R_0 + r_g \log (R_0/r_g - 1)$ .

### 3 Свободные гармоникаи

Мы будем изучать на фоне коллапсирующей оболочки теорию действительного скалярного поля с  $\phi^4$  взаимодействием:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ (\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (9)$$

В данном параграфе мы рассмотрим случай свободной теории поля  $\lambda = 0$ .

Так как метрика сферически-симметричная, то поле  $\phi$  мы разложим по сферическим гармоникам:

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \phi_l(t, r),$$

Где мы выбрали базис сферических гармоник действительными  $Y_{l,n}^*(\theta, \varphi) = Y_{l,n}(\theta, \varphi)$ . Действие для свободного поля можно расписать для каждой компоненты  $\phi_l$

$$S = \sum_l (2l + 1) S_{l,m}, \quad \text{где} \quad (10)$$

$$S_{l,m} = \int dt \int_0^{R(t)} dr r^2 \left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right)^2 (\partial_t \phi_l)^2 - (\partial_r \phi_l)^2 - \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \phi_l^2 \right] \\ + \int dt \int_{R(t)}^\infty dr r^2 \left[ \frac{(\partial_t \phi_l)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) (\partial_r \phi_l)^2 - \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \phi_l^2 \right].$$

Варьируя данное действие, можно получить уравнения движения на гармоникаи:

$$\begin{cases} \left[ \partial_{t_-}^2 - \partial_r^2 + m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] (r\phi_l) = 0, & r \leq R(t) \\ \left[ \partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right) \right] (r\phi_l) = 0, & r \geq R(t) \end{cases} \quad (11)$$

и граничные условия,

$$\phi_l[R(t) - 0] = \phi_l[R(t) + 0], \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t_-}\right) \left|\frac{dR}{dt}\right| \partial_t \phi_l - \left(\frac{\partial t_-}{\partial t}\right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)-0} = \frac{\partial_t \phi_l}{1 - \frac{r_g}{r}} \left|\frac{dR}{dt}\right| - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)+0}$$

Второе условие выражает непрерывность нормальной производной на поверхности оболочки. В пределе  $t \rightarrow \infty$ , нормальная производная к оболочке за её пределами становится производной по нулевой координате  $u = t - r_*$ .

Причина по которой мы можем приближенно решить уравнения (11) и (12) заключается в том, что мы можем разделить уравнения движения по переменным  $t$  и  $r$ , в том случае когда ситуация стационарна. Более того, потенциал,

$$U(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[ m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right], \quad r > R_0, \quad (13)$$

во втором уравнении в (11) исчезает в пределе  $r \rightarrow r_g$  и становится постоянным равным  $m^2$  в пределе  $r \rightarrow \infty$ . Следовательно непосредственно рядом с оболочкой (нужно помнить, что оболочка находится близко к радиусу Шварцшильда  $|R(t) - r_g| \ll r_g$ ) гармоники могут быть аппроксимированы плоскими волнами. Также в пределе  $r \rightarrow \infty$ , мы получаем что опять  $r \approx r_*$  (данное приближение асимптотично, в смысле что  $|r - r_*| \ll r$ , но может само не стремиться к нулю) и гармоники опять плоские волны. Соотношения между асимптотиками гармоник в данных пределах могут быть найдены явно, если решать задачу рассеяния для потенциала (13).

Используя уравнения движения, свободный гамильтониан может быть переписан в следующей форме

$$H_0(t) = \sum_{l,n} \int_0^\infty \frac{dr \sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left[ g^{tt} (\partial_t \phi_{l,n})^2 - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \phi_{l,n} \partial_t \left( \sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \phi_{l,n} \right) \right]. \quad (14)$$

В случае коллапса оболочки с использованием метрики (1) гамильто-



ниан можно записать как

$$\begin{aligned}
H_0(t) = & \sum_{l,n} \int_0^{R(t)} r^2 dr \left[ \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right) (\partial_t \phi_l)^2 - \phi_l \partial_t \left( \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right) \partial_t \phi_l \right) \right] + \\
& + \sum_{l,n} \int_{R(t)}^{\infty} \frac{r^2 dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \left[ (\partial_t \phi_l)^2 - \phi_l \partial_t^2 \phi_l \right] + \\
& + \sum_{l,n} R^2(t) \phi_l \left[ \left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)-0} - \left( 1 - \frac{r_g}{R(t)} \right) \partial_r \phi_l \Big|_{r=R(t)+0} \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Где мы использовали, что  $\phi_{l,n}$  при фиксированном  $l$  удовлетворяют одним и тем же уравнением и поэтому мы обозначили их как  $\phi_l$ . Последний член в этом выражении является вкладом от значений полей на оболочке. Гамильтониан определяет эволюцию состояние по отношению к времени внешнего наблюдателя  $t$ .

### 3.1 Ин-гармоники до начала коллапса

В течение первой стадии коллапса, когда оболочка стационарна, мы можем найти гармоники, которые диагонализуют свободный гамильтониан и тем самым ввести понятие частиц.

Используя обычное каноническое квантование, мы раскладываем поле по следующим гармоникам  $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$ :

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{x}, t) &= \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ a_{\omega,l,n} \bar{h}_{\omega,l}(r, t) + \text{h.c.} \right], \\
\pi(\underline{x}, t) &= g^{tt} \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ a_{\omega,l,n} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}(r, t) + \text{h.c.} \right],
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $\omega$  в данном случае нумерует гармоники, “h.c.” означает эрмитово сопряжение, а под знаком интеграла понимается ещё и суммирование по дискретным частотам, которые могут возникнуть вблизи оболочки. Гармоники  $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$  являются базисными решениями для уравнения Клейна-Гордона (11). Гармоники, с которыми мы хотим работать, должны диагонализировать гамильтониан в первой фазе коллапса. Соответствующее основное состояние, мы как всегда определяем как то, что аннигилируется всеми операторами уничтожения,  $a_{\omega,l,n} |\text{in}\rangle = 0$ .

Следуя процедуре канонического квантования, мы определяем следующие коммутационные соотношения на поле  $\phi(\underline{x}, t)$  и соответствующую

щего сопряженного канонического импульса

$$[\phi(\underline{x}, t), \pi(\underline{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{y}) \quad (17)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Мы нормируем гармоники  $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$  таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$[a_{\omega,l,n}, a_{\omega',l',n'}^\dagger] = 2\pi\delta_{ll'}\delta_{nn'}\delta(\omega - \omega'), \quad (18)$$

Подставляя явно разложение (16) в коммутационное соотношение (17) мы получаем следующие условие на нормировку гармоник:

$$\begin{aligned} \sum_{l,n} Y_{l,n}(\theta, \varphi) Y_{l,n}(\theta', \varphi') g^{tt} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \bar{h}_{\omega,l}(t, r) \partial_t \bar{h}_{\omega,l}^*(t, r') - \text{h.c.} \right] \\ = i\delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{x}'). \end{aligned} \quad (19)$$

Где мы определили  $\underline{x}$  как пространственную координату.

В стационарной ситуации мы можем сделать разделение переменных в уравнении (11). Это означает, что мы гармоники выбираем в следующей форме:

$$\bar{h}_{\omega,l}(t, r) = h_{\omega,l}(r) e^{-i\omega t} = h_{\omega,l}(r) e^{-i\omega_- t_-},$$

где из уравнения (2) следует что  $\omega_- = \omega/\sqrt{1 - r_g/R_0}$ . Используя данное разложение, мы можем идентифицировать индекс  $\omega$  в уравнении (16) с энергией гармоники  $\bar{h}_{\omega,t}(t, r)$  в бесконечном прошлом.

Внутри оболочки, путем решения первого уравнения в (11), мы находим что

$$\bar{h}_{\omega,l}(t, r) = \frac{A_\omega}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\omega_-^2 - m^2} r\right) e^{-i\omega_- t_-}, \quad \text{при } r \leq R_0 \text{ и } t \leq 0. \quad (20)$$

Заметим, что мы требуем регулярного поведения гармоники в начале координат  $r = 0$ , что ограничивает нас в использовании только функций Бесселя первого рода. Из уравнения (20), мы можем увидеть, что  $\omega$  ограничена снизу:  $\omega_- \geq m$  или  $\omega \geq m_- \equiv m\sqrt{1 - r_g/R_0}$ . Если масса поля равна нулю,  $A_\omega$  можем быть найдена равной  $\sqrt{\pi}$  (это получается явной подстановкой формулы (20) в условие для нормировки (19)). Однако, мы будем использовать соотношение  $A_\omega \approx \sqrt{\pi}$  для удобства.

Аналогично, из второго уравнения в (11), мы находим, что до начала коллапса  $t = 0$ , гармоники за пределами оболочки ведут следующим образом:

$$\bar{h}_{\omega,l}(t, r) = \frac{e^{-i\omega t}}{r} \begin{cases} A_\omega e^{-i\omega r_*} + B_\omega e^{i\omega r_*}, & |r - R_0| \ll r_g, \\ C_\omega e^{-ikr_*} + D_\omega e^{ikr_*}, & r \gg R_0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ .

Можно заметить, что когда  $\omega \geq m$ , гармоники осциллируют на пространственной бесконечности  $r_* \rightarrow \infty$ . Следовательно, в данной ситуации спектр частот будет непрерывным. Но когда  $m_- \leq \omega \leq m$  гармоники будут экспоненциально расти или падать при приближении к пространственной бесконечности  $r_* \rightarrow \infty$ . Оставляя только те, что экспоненциально падают, мы получим гармоники, которые соответствуют связанным состояниям, они осциллирует около начала координат  $r = 0$  и оболочки  $r = R_0$ , а при достижении точки поворота в потенциале (13) быстро уменьшают своё абсолютное значение. Спектр и количество этих уровней может быть найден [38].

Можно найти связь между коэффициентами в уравнении (21) используя условие нормировки (19). Однако, так как мы интересуемся поведением гармоник непосредственно вблизи оболочки, мы будем изучать только коэффициенты  $A_\omega$  и  $B_\omega$ . Излучение Хокинга, которое будет нас в дальнейшем интересовать, проявляются только непосредственно вблизи коллапсирующей оболочки. Если это излучение рассматривается наблюдателем находящемся на пространственной бесконечности, то оно модифицируется путем введения так называемых грей-боди факторов, которые являются просто коэффициентами прохождения через потенциал (13).

Мы вычислим коэффициенты  $A_\omega$  и  $B_\omega$ , используя граничные условия (12). До начала коллапса, когда  $R(t) = R_0$ , эти граничные условия устанавливают, что  $h_{\omega,l}[r]$  — непрерывно-дифференцируема:

$$h_{\omega,l}[R_0 - 0] = h_{\omega,l}[R_0 + 0], \quad [\partial_r h_{\omega,l}]_{r=R_0-0} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}} [\partial_r h_{\omega,l}]_{r=R_0+0}. \quad (22)$$

Эти уравнения устанавливают следующие значения коэффициентов в уравнении (21)

$$A_\omega = B_\omega^* = \frac{i^{l+1}}{\sqrt{2}\omega} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{1/4} e^{i\omega \left[ R_0^* - R_0 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]} + \mathcal{O} \left( \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{3/4} \right). \quad (23)$$

Рассмотрим свободный гамильтониан для этих гармоник. Путем явной подстановки разложения (16) в (14) мы получаем следующую формулу для гамильтониана:

$$H_0(t) = \sum_{l,n} \iint_m^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \left[ \mathcal{E}_{\omega,\omega',l}(t) a_{\omega,l,n}^\dagger a_{\omega',l,n} + \mathcal{J}_{\omega,\omega',l}(t) a_{\omega,l,n} a_{\omega',l,n} + \text{h.c.} \right], \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega,\omega',l}(t) = & \\ \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left\{ g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_t \left[ \sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) \right] \right\}, \\ \mathcal{J}_{\omega,\omega',l}(t) = & \\ \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin(\theta)} \left\{ g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega,l}(r,t) \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \bar{h}_{\omega,l}(r,t) \partial_t \left[ \sqrt{|g|} g^{tt} \partial_t \bar{h}_{\omega',l}(r,t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, гамильтониан может быть недиагональным из-за того, что есть члены неравные нулю при  $\omega \neq \omega'$  или из-за наличия  $\mathcal{J}_{\omega,\omega',l} \neq 0$ . В стационарной ситуации гармоник, которые диагонализуют гамильтониан, должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin \theta} g^{tt} h_{\omega,l}(r) h_{\omega',l}(r) &= 0, \\ \int_0^\infty dr \frac{\sqrt{|g|}}{\sin \theta} g^{tt} h_{\omega,l}(r) h_{\omega',l}^*(r) &= \frac{\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (25)$$

что ведет к исчезновению аномального члена  $\mathcal{J}$  и диагонализации  $\mathcal{E}$ . Заметим, что нормировка выбрана таким образом, чтобы выполнялись канонические коммутационные соотношения (19).

Выше мы обсуждали поведение гармоник  $h_{\omega,l}(r)$  в определенных областях изменения радиальной координаты  $r$ . Чтобы найти свободный гамильтониан в терминах рождающих-уничтожающих операторов, мы должны интегрировать по координате  $r$ . Таким образом, нам необходимо знать функциональную зависимость гармоник от координат. Однако, оказывается что достаточно использовать условие нормируемости гармоник (25). Используя это условие, мы получаем, что гамильтониан имеет следующий вид

$$H_0(t \leq 0) = \sum_{l,n} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left[ a_{\omega,l,n} a_{\omega,l,n}^\dagger + a_{\omega,l,n}^\dagger a_{\omega,l,n} \right] \quad (26)$$

И он действительно диагонален до начала коллапса. Но в процессе коллапса, ин-гармоники больше не диагонализуют гамильтониан, что обычно и идентифицирует с рождением частиц.

## 3.2 Ин-гармоники в течение последней стадии коллапса

В этом параграфе, мы найдем поведение ин-гармоник в бесконечном будущем относительно внешнего наблюдателя  $t \rightarrow \infty$ . Изменение по-

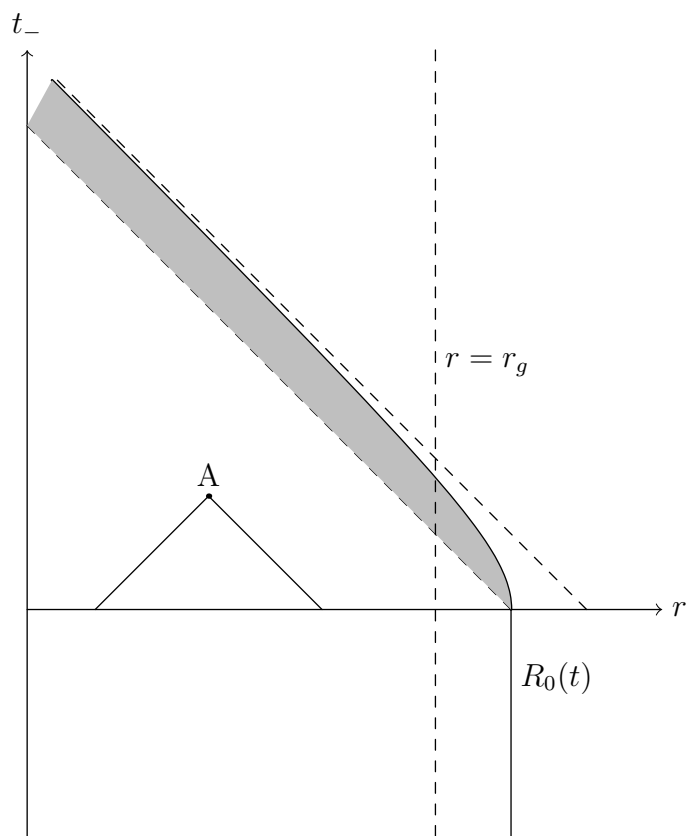


Рис. 2: Иллюстрация к задаче Коши для гармоник после начала коллапса.

ведения ин-гармоник в процессе коллапса является одной из причиной рождения частиц.

Мы пренебрежем разницей между  $\nu$  и 1. Причина для этого приближения следующая — задав значение гармоник под оболочкой (см. рис. 2), мы бы хотели продолжить гармоники за пределы оболочки используя условия сшивки (12). Чтобы найти поведение гармоники в будущем, мы должны решать задачу Коши для поля, задав начальные значения гармоник и её производной по времени при  $t = 0 = t_-$ . Если оболочка движется с конечной скоростью  $\nu < 1$ , то тогда останется область которая причинно связана с областью за пределами оболочки (серая область на рисунке 2). Тогда область под оболочкой, если последняя движется со световой областью, будет причинно несвязна с областью за её пределами. Отсюда следует, что значение гармоник полностью определяется только знанием начальных условий под оболочкой. Действительно, для демонстрации возьмем произвольную точку под оболочкой (на рисунке 2 это точка А) и если посмотреть, откуда, в принципе, может прийти информация в данную точку, то получим, что эта область лежит полностью под оболочкой. Тогда, гармоники под оболочкой в будущем определяются через тоже самое уравнение, как и до начала коллапса, но продолженное на более поздние времена  $t_- \geq 0$  (20). Зная значения гармоник на оболочке и условия сшивки, мы можем продолжить гармоники за пределы оболочки.

Гармоники под оболочкой описываются уравнением (20), где  $\omega_- = \omega / \sqrt{1 - r_g/R_0}$ . Так как за пределами оболочки мы интересуемся поведением гармоник только непосредственно вблизи оболочки  $|r - r_g| \ll r_g$ , мы пренебрежем потенциалом (13). Тогда уравнение превращается в волновое и можно выписать общее решение данного уравнение. Отсюда мы находим следующее поведение гармоник в пределе  $t \rightarrow +\infty$

$$\bar{h}_{\omega,l}(t, r) = \frac{1}{r} \begin{cases} \sqrt{\pi r} J_{l+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\omega_-^2 - m^2} r \right) e^{\pm i\omega_- t_-}, & r \leq R(t), \\ f_{\omega,l}(u) + g_{\omega,l}(v), & r \geq R(t), |r - R(t)| \ll r_g, \end{cases} \quad (27)$$

где  $u = t - r_*$  и  $v = t + r_*$  так называемые нуль-координаты. Так как мы считаем, что оболочка падает со скоростью света, то  $v$ -зависящая часть гармоники не модифицируются и может быть найдена из начальных условий. Эту функцию,  $g_{\omega,l}(v)$ , можно легко найти из уравнения (21)

$$g_{\omega,l} = A_\omega e^{-i\omega v}. \quad (28)$$

Для того, чтобы найти  $u$ -зависящую часть гармоники за пределами оболочки, мы воспользуемся условием непрерывности поля (12) на обо-

лочке:

$$\sqrt{\pi R} J_{l+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\omega_-^2 - m^2} R \right) e^{-i\omega_- t_-} = [f_{\omega,l}(u)]_{r=R}. \quad (29)$$

Где мы обозначили  $R(t)$  как  $R$ , но зависимость  $R$  от  $t$  все равно остается и мы будем её в дальнейшем использовать. Используя уравнение (8), в пределе  $t \rightarrow \infty$  мы получаем приближенную зависимость нуль координаты  $u$  на оболочке от времени:

$$[u]_{r=R} \approx 2t - (R_0^* + r_g - R_0). \quad (30)$$

Условие непрерывности на оболочке переписываются в следующей форме

$$f_{\omega,l}[2t - (R_0^* + r_g - R_0)] \approx \sqrt{\pi R} J_{l+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\omega_-^2 - m^2} R \right) e^{-i\omega_- t_-}. \quad (31)$$

И тогда поведение гармоник за пределами оболочки будет описываться следующим образом

$$r \bar{h}_{\omega,l}(r, t) \approx \sqrt{\pi R(u)} J_{l+\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\omega_-^2 - m^2} R(u) \right] e^{-i\omega_- \frac{(R_0 - r_g)}{\nu} \left( 1 - e^{-\frac{u+R_0^*+r_g-R_0}{2r_g}} \right)} + g_{\omega,l}(v), \quad (32)$$

где  $g_{\omega,l}(v)$  описывается уравнением (28) и

$$R(u) = r_g \left( 1 + \frac{R_0 - r_g}{r_g} e^{-\frac{u+R_0^*+r_g-R_0}{2r_g}} \right). \quad (33)$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$ , граничное условие для нормальной производной на оболочке, (12), будет иметь следующий вид

$$\left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) [\nu \partial_{t_-} h_{\omega,l} - \partial_r h_{\omega,l}]_{r=R(t)-0} = 2 [\partial_u h_{\omega,l}]_{r=R(t)+0}. \quad (34)$$

Так как в пределе  $t \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow r_g$ , мы пренебрегли разницей между  $R$  и  $r_g$  чтобы упростить правую часть написанного выше уравнения. Можно показать что наше решение (32) также будет удовлетворять и этому граничному условию, когда  $\nu \sim 1$ . В случае, когда оболочка не световая, а имеет конечную скорость, наше решение для  $v$  - зависящей части модифицируется и мы не сможем также легко найти поведение гармоник в бесконечном будущем.

## 4 Излучение Хокинга

В этом параграфе мы воспроизведем стандартную формулу для термального потока, используя гармоники, которые мы вывели в предыдущем параграфе. Мы будем вычислять поток опять в непосредственной близости к коллапсирующей оболочке, а затем, используя грей-боди факторы, получим значение для потока на пространственной бесконечности.

Поток можно считать, используя тензор энергии-импульса, следующим образом

$$\begin{aligned} J(r \approx r_g, t) &\equiv \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi r^2 \langle : T^r_t(r, t) : \rangle \approx \\ &\approx -r_g^2 \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi \langle : T_{tr^*}(r, t) : \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

Явно расписав это среднее, мы получаем формулу для потока

$$J(r \approx r_g, t) = \sum_l (2l + 1) \left( J_u^{(l)} - J_v^{(l)} \right), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} J_u^{(l)} &= r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \partial_u \bar{h}_{\omega, l}^*(r, t) \partial_u \bar{h}_{\omega, l}(r, t) + \text{c.c.} \right], \\ J_v^{(l)} &= r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \partial_v \bar{h}_{\omega, l}^*(r, t) \partial_v \bar{h}_{\omega, l}(r, t) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В уравнении (35), под нормальным упорядочиванием  $\langle : T_\nu^\mu : \rangle$  мы понимаем результат вычитания из  $\langle T_\nu^\mu \rangle$  того же самого выражение, но только вычисленного в бесконечном прошлом, когда оболочка покоилась. Тогда, в этом случае, можно использовать явно формулы для гармоник и потока, чтобы проверить что он равен нулю.

Для того, чтобы найти поток, вызванный из-за коллапса тонкой оболочки, мы используем гармоники найденные в предыдущем параграфе (32) на последних стадиях коллапса,

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\omega, l}(r, t) &\approx \frac{1}{r_g} \left( 1 - \frac{r_g}{R_0} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega r_g \right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} \\ &+ \frac{1}{r_g} \left( 1 - \frac{r_g}{R_0} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{i^{l+1}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega v + i\omega [R_0^* - R_0(1-r_g/R_0)^{-1/2}]}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $u_0 = r_g \log(R_0/r_g) - r_g$ . Что бы получить это выражение из формулы (32), мы использовали следующие приближения  $R(u) \approx r_g$ ,  $\nu \approx 1$ ; и



пренебрегли разностью между  $r$  и  $r_g$  в знаменателе и массой  $m^2$  по сравнению с частотой  $\omega_-^2 = \omega^2 / (1 - r_g/R_0)$ , так как  $R_0 \approx r_g$  и  $\omega \geq m$  для непрерывной части спектра. Мы также использовали асимптотику для функций Бесселя в пределе больших значений аргумента.

Для того что бы посчитать поток, нам надо просто подставить (38) в уравнение (36) и вычислить интегралы. Однако, для удобства мы переразложим (38) по плоским волнам (21). Так как  $v$ -зависящая часть уже представляет собой плоскую волну, мы должны переразложить только  $u$ -часть:

$$\left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} = \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi \sqrt{2|\omega'|}} \alpha(\omega, \omega') e^{-i\omega' u}, \quad (39)$$

где  $\alpha_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, |\omega'|)$  и  $\beta_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, -|\omega'|)$  пропорциональны Боголюбовским коэффициентам полученные в работах Хокинга.

Используя обратное преобразование Фурье мы находим явный вид для этих коэффициентов:

$$\alpha(\omega, \omega') \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \times \int_{u_*}^{\infty} du e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} e^{i\omega' u}, \quad (40)$$

где  $u_* = -R_0^*$ . Из-за быстрых осцилляций в нижнем пределе интегрирования по  $u$  мы можем пренебречь вкладом от этой части и провести интегрирование по всей числовой прямой:

$$\alpha(\omega, \omega') \approx -4 r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \times e^{i\omega' u_0} e^{\pi\omega' r_g} e^{2i\omega' r_g \log(\omega r_g)} \Gamma(-2i\omega' r_g). \quad (41)$$

Теперь можно перейти к явному вычислению потоков  $J_v^{(l)}$  и  $J_u^{(l)}$

$$J_v^{(l)} \approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \quad (42)$$

и

$$J_u^{(l)} \approx \int_m^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{|\omega''| > m} \frac{d\omega''}{2\pi} \frac{\omega' \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') e^{-i(\omega' - \omega'') u}. \quad (43)$$

В формуле (43) мы можем вычислить первый интеграл по  $\omega$ :

$$\int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx 8 r_g^2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\omega' \omega''|} e^{i(\omega' - \omega'')u_0} e^{\pi(\omega' + \omega'')r_g} \Gamma(-2i\omega' r_g) \Gamma(2i\omega'' r_g) \int_{\log(mr_g)}^\infty \frac{d(\log(\omega r_g))}{2\pi} e^{2i(\omega' - \omega'')r_g \log(\omega r_g)}, \quad (44)$$

где, так как  $\omega_- r_g \gg 1$ , мы заменили  $\cos^2 \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right]$  на  $1/2$  в интеграле — другие вклады будут спадать степенным образом  $1/u$  в уравнении (43). Стоит отметить, что интегрирование ведется по частотам идет без обрезания  $\Lambda$ . В противном случае, излучение осталось бы термальным, но за время порядка  $r_g \log(\Lambda r_g)$  оно спадет до нуля. Тогда последний интеграл можно вычислить и получить

$$\int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx 2 r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} |\omega'| e^{2\pi\omega' r_g} |\Gamma(2i\omega' r_g)|^2 \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярная часть} \\ = 2\pi \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} n(-\omega') \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярная часть}, \quad (45)$$

где

$$n(\omega) = \frac{\text{sign}(\omega)}{e^{4\pi r_g \omega} - 1}. \quad (46)$$

”Регулярная часть“ в правой части уравнения (45) имеет форму вида р.в.  $\left(\frac{i}{\omega' - \omega''}\right)$ , следовательно для больших  $u$  их вклады к  $J_u^{(l)}$ , (43), пренебрежимо малы.

Подставляя уравнение (45) в  $J_u^{(l)}$  и используя свойство  $n(-\omega) = n(\omega) + \text{sign}(\omega)$ , мы получаем следующую формулу для потока:

$$J_u^{(l)} \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega) + \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{2} \right). \quad (47)$$

И полный поток есть

$$J(r \approx r_g, t) = \sum_l (2l + 1) \left[ J_u^{(l)} - J_v^{(l)} \right] \approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l + 1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega). \quad (48)$$

Это есть формула для излучения черного тела в непосредственной близости к коллапсирующей оболочке. Для того, чтобы получить поток на

пространственной бесконечности, мы должны учесть, что поток может частично отразиться от потенциально барьера (13). Это можно учесть путем введения грей-боди факторов, уже обсуждавшихся в предыдущих параграфах,  $|T_{\omega,l}|^2$ ,

$$J(r \rightarrow \infty, t) \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l+1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{e^{4\pi r_g \omega} - 1} |T_{\omega,l}|^2, \quad (49)$$

При больших значениях  $l$  грей-боди фактор  $T_{\omega,l}$  может быть приближен как  $\frac{(i r_g \omega)^{l+1}}{(2l-1)!!}$  [39].

Если мы положим  $m = 0$  в уравнениях (39)–(45), то мы получим расходимости при  $\omega = 0$ . Однако, для безмассового случая мы должны использовать следующее приближение для гармоник

$$\bar{h}_{\omega,l}(r, t) \approx \sqrt{\pi r_g} J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r_g) e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} + \frac{A_\omega}{r_g} e^{-i\omega v} \quad (50)$$

вместо уравнений (38). Теперь легко увидеть, что в пределах маленьких  $\omega$ , гармоника ведет себя как  $J_{l+\frac{1}{2}}(x) \sim x^{l+\frac{1}{2}}$ , и все интегралы по  $\omega$  в уравнениях (39)–(49) сходятся на нижних пределах. Тогда мы получим ту же самую формулу для потока как и в формуле (49), но где  $m$  равна нулю.

## 5 Петлевые поправки и секулярный рост

В предыдущем параграфе мы использовали двухточечную функцию Вайтмана для вычисления потока. В этой главе мы будем изучать петлевые поправки к этой функции, и покажем что они в первом порядке теории возмущений растут со временем.

Запишем член взаимодействия  $\frac{\lambda \phi^4}{4!}$  в этой теории, подставив явно детерминант метрики

$$V(t) = \frac{\lambda}{4!} \int_{R(t)}^\infty \phi^4 r^2 dr d\Omega + \frac{\lambda}{4!} \left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \int_0^{R(t)} \phi^4 r^2 dr d\Omega. \quad (51)$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$ , второй член экспоненциально подавлен из-за наличия производной  $\frac{\partial t_-}{\partial t} \propto e^{-t/r_g}$ . Следовательно, мы можем пренебречь этим членом, а также разностью между положением оболочкой и радиусом Шварцшильда.

Тогда мы можем вычислить как будут выглядеть поправки к пропагатору Келдыша

$$D_{0+2}^K(1, 2) = \sum_{l_1, m_1, l_2, m_2} Y_{l_1, m_1}(\Omega_1) Y_{l_2, m_2}(\Omega_2) \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & [N_{\omega_1, l_1, n_1 | \omega_2, l_2, n_2}(t) + \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta(\omega_1 - \omega_2)] \bar{h}_{\omega_1, l_1}^*(t_1, r_1) \bar{h}_{\omega_2, l_2}(t_2, r_2) \\ & + K_{\omega_1, l_1, n_1 | \omega_2, l_2, n_2}(t) \bar{h}_{\omega_1, l_1}(t_1, r_1) \bar{h}_{\omega_2, l_2}(t_2, r_2) + \text{h.c.} \end{aligned} \right\}, \quad (52)$$

Где функции  $N_{\omega, l, n | \omega', l', n'}(t)$  и  $K_{\omega, l, n | \omega', l', n'}(t)$  выражаются следующим образом (мы уже будем рассматривать инфракрасный предел, т.е. считать времена большими и пренебрегать разностью между ними  $t_1, t_2 \rightarrow +\infty, |t_1 - t_2| \ll t$ ):

$$N_{\omega, l, n | \omega', l', n'}(t) = \frac{\lambda^2}{3} \iint_{t_0}^t dt_3 dt_4 \iint_{r_g}^{\infty} (r_3 r_4)^2 dr_3 dr_4 \bar{h}_{\omega, l}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega', l'}^*(r_4, t_4) Y(l, n, l', n') \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4) \quad (53)$$

и

$$K_{\omega, l, n | \omega', l', n'}(t) = -\frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \iint_{r_g}^{\infty} (r_3 r_4)^2 dr_3 dr_4 \bar{h}_{\omega, l}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega', l'}(r_4, t_4) Y(l, n, l', n') \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_4, t_4) + (\omega, l \leftrightarrow \omega', l'), \quad (54)$$

где мы ввели обозначение

$$Y(l, n, l', n') = \sum_{l_{1,2,3}; n_{1,2,3}} \langle l, n, l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle \langle l', n', l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle,$$

$$\langle l, n, l_1, n_1, l_2, n_2, l_3, n_3 \rangle = \int d\Omega Y_{l, n}(\theta, \varphi) Y_{l_1, n_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2, n_2}(\theta, \varphi) Y_{l_3, n_3}(\theta, \varphi).$$

Напомним, что мы используем действительные сферические функции.

Стоит отметить, что  $N$  и  $K$  (53) не содержат ультрафиолетовых расходимостей — это можно легко понять, считая степени расходимостей для них в плоском пространстве-времени. Тем не менее сам пропагатор Келдыша получает ультрафиолетовые расходимости из-за интегрирования по частотам  $\omega$ . Мы будем интересоваться только поведением этих

величин в инфракрасном пределе, считая что все константы взаимодействия уже ультрафиолетово перенормированы. Так же отметим, что они перенормируются в лидирующем порядке точно так же, как и в пространстве Минковского.

Давайте изучим поведение функции  $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$  на больших временах. Мы хотим выделить самые большие вклады к функциям  $N$  и  $K$  в бесконечном будущем. Отметим, что до начала коллапса, ввиду стационарности задачи, функции  $N$  и  $K$  остаются постоянными и равными нулю. Следовательно, мы можем считать, что момент включения самодействия  $t_0$  произошел до начала коллапса. Более того, можно заметить, что вдалеке от коллапсирующей оболочки гармоники не меняются (из-за причинности и локальности). Тогда в далеке от оболочки не будет никакого секулярного роста. Следовательно, гармоники в уравнении (53) можем аппроксимировать используя уравнение (38), т.е.  $\bar{h}_{\omega,l} \approx \bar{h}_{\omega,l}(u) + \bar{h}_{\omega,l}(v)$ , где  $\bar{h}_{\omega,l}(v)$  —  $v$ -зависящая часть гармоники  $\bar{h}_{\omega,l}(r, t)$  задается как в уравнении (38), тогда как  $\bar{h}_{\omega,l}(u)$  есть  $u$ -зависящая часть гармоники. Для удобства мы оставим верхний предел интегрирования по радиальным координатам равными  $\infty$ , так как из-за осцилляций при  $r_{3,4} \rightarrow +\infty$  интеграл будет быстро сходиться. Более того, наибольший вклад в  $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$  приходит от области интегрирования по временам  $t_3$  и  $t_4$  когда  $t_3 \gg r_g \log(r_g \omega)$  и  $t_4 \gg r_g \log(r_g \omega')$ . В этих областях мы можем пренебречь зависимостью функций  $\bar{h}_{\omega,l}(u_3)$  и  $\bar{h}_{\omega',l'}^*(u_4)$  от нулевых координат  $u_3$  и  $u_4$ , соответственно. Также отметим, что  $v$ -зависящие части гармоник  $\bar{h}_{\omega,l}(r_3, t_3)$  и  $\bar{h}_{\omega',l'}^*(r_4, t_4)$  ведут к более слабым поправкам.

Используя данные приближения, мы получаем

$$\begin{aligned}
N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) &\approx \\
&\frac{2\lambda^2}{3r_g^2\sqrt{\omega\omega'}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] \cos\left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g\right] \times \\
&\times Y(l, n, l', n') \int_{r_g \log(r_g \omega)}^t dt_3 \int_{r_g \log(r_g \omega')}^t dt_4 \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \times \\
&\times \prod_{j=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4). \tag{55}
\end{aligned}$$

Мы опять можем представить гармоники как суммы  $u$  и  $v$ -зависящих частей

$$\begin{aligned}
&\int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_4, t_4) \approx \int_m^{\infty} \frac{d\omega_j}{2\pi} \left[ \bar{h}_{\omega_j, l_j}(u_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(u_4) \right. \\
&\left. + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(v_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(v_4) + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(u_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(v_4) + \bar{h}_{\omega_j, l_j}(v_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(u_4) \right]. \tag{56}
\end{aligned}$$

Так как функции  $\bar{h}_{\omega,l}(u)$  содержат быстро осциллирующий косинус, мы можем пренебречь последними двумя членами в рассматриваемой формуле. Первый вклад мы опять раскладываем по плоским волнам как в предыдущем параграфе. Используя уравнения (39) и (45),

$$\begin{aligned} \int_m^\infty \frac{d\omega_j}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j,l_j}(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j,l_j}^*(r_4, t_4) &\approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r_g^2} \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} \\ &\left\{ \left[ n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(u_3-u_4)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(u_3-u_4)} \right] + e^{-i\omega_j(v_3-v_4)} \right\} + \\ &+ \text{подавленные члены,} \end{aligned} \quad (57)$$

где функция  $n(\omega)$  была определена в предыдущем параграфе (46).

Теперь подставим выражение (57) в формулу для  $N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t)$ , (5). Сделав замену переменных от  $t_3$  и  $t_4$  к  $T = (t_3 + t_4)/2$  и  $\tau = t_3 - t_4$ , мы получаем

$$\begin{aligned} N_{\omega,l,n|\omega',l',n'}(t) &\approx \quad (58) \\ \frac{\lambda^2}{12 r_g^8 \sqrt{\omega \omega'}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^2 &\cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \cos \left[ \frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g \right] \\ Y(l, n, l', n') &\int_0^t dT \int_{-\infty}^\infty d\tau \int_{r_g}^\infty r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^\infty r_4^2 dr_4 \\ \prod_{j=1}^3 \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} &\left\{ \left[ n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(\tau-\Delta r)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(\tau-\Delta r)} \right] + e^{-i\omega_j(\tau+\Delta r)} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Delta r = r_3 - r_4$ . Заметим, что нижний предел интегрирования по  $T$  irrelevantен для изучения лидирующих вкладов, которые растут со временем. Также, используя, то, что функции осциллируют при больших разнице времен  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , мы будем интегрировать  $\tau$  по всей числовой прямой.

Теперь легко увидеть, что интегрирование по  $dT$  факторизуется, так как подынтегральное выражение не зависит от  $T$ . Отсюда можно получить что лидирующие вклады к функции  $N$  линейно растут со временем  $N \sim \lambda^2 t$ .

Используя аналогичные вычисления можно получить, что такие же расходимости возникают и в функции  $K$ . К примеру, мы получаем сле-

дующее выражение:

$$K_{\omega,l,n|\omega',l',n'} \approx -\frac{4\lambda^2}{3\sqrt{\omega\omega'r_g^2}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] \cos\left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g\right] Y(l, n, l', n') \int_{r_g \log(\omega r_g)}^t dt_3 \int_{r_g \log(\omega' r_g)}^{t_3} dt_4 \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \prod_{i=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \bar{h}_{\omega_j, l_j}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega_j, l_j}(r_4, t_4)$$

Затем, используя (57) и произведя замену переменных от  $t_3, t_4$  к  $T$  и  $\tau$ , как было сделано выше, мы получаем

$$K_{\omega,l,n|\omega',l',n'} \approx -\frac{\lambda^2}{6\sqrt{\omega\omega'r_g^8}} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^2 \cos\left[\frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g\right] \cos\left[\frac{\pi(l'+1)}{2} - \omega'_- r_g\right] Y(l, n, l', n') \int_0^t dT \int_0^{\infty} d\tau \int_{r_g}^{\infty} r_3^2 dr_3 \int_{r_g}^{\infty} r_4^2 dr_4 \prod_{j=1}^3 \int_{\omega_j > m} \frac{d\omega_j}{4\pi\omega_j} \left\{ \left[ n(-\omega_j) e^{-i\omega_j(\tau-\Delta r)} + n(\omega_j) e^{i\omega_j(\tau-\Delta r)} \right] + e^{-i\omega_j(\tau+\Delta r)} \right\}.$$

И опять легко заметить, что интегрирование по  $dT$  отфакторизовывается, так как подынтегральное выражение не зависит от  $T$ . Следовательно, аномальное квантовое среднее также получает инфракрасный вклад линейно растущий со временем  $K \sim \lambda^2 t$ .

Для безмассового случая ситуация аналогична, но вместо гармоник (38) мы должны использовать гармоники  $\bar{h}$ , описанные в уравнении (50), для функции Вайтмана

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \bar{h}_{\omega, l}^*(r_3, t_3) \bar{h}_{\omega, l}(r_4, t_4). \quad (59)$$

Однако, опять функции Бесселя  $J_{l+\frac{1}{2}}(\omega)$  пренебрежимо малы, когда частоты  $\omega$  маленькие, так что они не получают опять никаких добавочных расходимостей и функции  $N$  и  $K$  получают аналогичные секулярные вклады.

## 6 Заключение

В магистерской диссертации было показано, что в случае скалярной квантовой теории с взаимодействием  $\lambda\phi^4$ , петлевые поправки к излуче-

нию Хокинга подавлены и даже растут со временем — другими словами, теория возмущений неприменима. Чтобы понять что происходит с излучением Хокинга и квантовыми черными дырами, мы должны просуммировать лидирующие петлевые вклады, идущие со всех порядков теории возмущений, как это было сделано для массивного скалярного поля в пространстве де-Ситтера и квантовой электродинамики на фоне внешнего электрического поля [3], [24], [25], [26], [27], [28].

Наличие неподавленных петлевых вкладов влечет за собой деформацию излучения Хокинга. Сами эти поправки зависят от начального состояния. И поэтому конечный поток будет зависеть тоже от начальных условий, что может указывать на разрешение информационного парадокса.

## Список литературы

- [1] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Commun. Math. Phys. **46**, 206 (1976)].
- [2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, “The Large Scale Structure of Space-Time,” Cambridge University Press, 1973.
- [3] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, "Hawking Radiation and Secularly Growing Loop Corrections" Phys. Rev. D **93**, 024029 (2016) [arXiv:1508.07500 [hep-th]]
- [4] G. 't Hooft, Salamfest 1993:0284-296 [gr-qc/9310026].
- [5] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **14**, 2460 (1976).
- [6] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [7] N. Birrell, P. Davies. “Quantum fields in curved space”, Cambridge University Press, 1984.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [9] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, arXiv:cond-mat/0412296; Bibliographic Code: 2004cond.mat.12296K.
- [10] A. Wipf, Lect. Notes Phys. **514**, 385 (1998) [hep-th/9801025].
- [11] E. Mottola, Acta Phys. Polon. B **41**, 2031 (2010) [arXiv:1008.5006 [gr-qc]].



- [12] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
- [13] R. H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972).
- [14] R. H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2439 (1972).
- [15] T. Vachaspati, D. Stojkovic and L. M. Krauss, Phys. Rev. D **76**, 024005 (2007) [gr-qc/0609024].
- [16] R. Brustein and A. J. M. Medved, Phys. Rev. D **90**, no. 2, 024040 (2014) [arXiv:1401.1401 [hep-th]].
- [17] R. Brustein and A. J. M. Medved, Phys. Rev. D **91**, no. 8, 084062 (2015) [arXiv:1407.4914 [hep-th]].
- [18] A. Saini and D. Stojkovic, Phys. Rev. Lett. **114**, no. 11, 111301 (2015) [arXiv:1503.01487 [gr-qc]].
- [19] G. L. Alberghi, R. Casadio, G. P. Vacca and G. Venturi, Phys. Rev. D **64**, 104012 (2001) [gr-qc/0102014].
- [20] T. Takahashi and J. Soda, Class. Quant. Grav. **27**, 175008 (2010) [arXiv:1005.0286 [gr-qc]].
- [21] I. Khavkine, Class. Quant. Grav. **28**, 038001 (2011) [arXiv:1008.5059 [gr-qc]].
- [22] H. Kawai and Y. Yokokura, arXiv:1509.08472 [hep-th].
- [23] H. Kawai, Y. Matsuo and Y. Yokokura, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350050 (2013) [arXiv:1302.4733 [hep-th]].
- [24] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, arXiv:1412.1554 [hep-th].
- [25] E. T. Akhmedov, JHEP **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [26] E. T. Akhmedov and P. Burda, Phys. Rev. D **86**, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [27] E. T. Akhmedov, Phys. Rev. D **87**, no. 4, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].
- [28] E. T. Akhmedov, “Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,” Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [29] D. Krotov, A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B849**, 410-432 (2011). [arXiv:1012.2107 [hep-th]].

- [30] J. Serreau and R. Parentani, Phys. Rev. D **87**, 085012 (2013) [arXiv:1302.3262 [hep-th]].
- [31] W. Israel, Nuovo Cim. B **44S10**, 1 (1966) [Nuovo Cim. B **48**, 463 (1967)] [Nuovo Cim. B **44**, 1 (1966)].
- [32] W. Israel, Phys. Rev. **153**, 1388 (1967).
- [33] E. Poisson, “A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics”, Cambridge University Press, 2004.
- [34] E. Leaver, J. Math. Phys. **27**, 1238 (1986)
- [35] P. P. Fiziev, Class. Quant. Grav. **23**, 2447 (2006) [gr-qc/0509123].
- [36] D. Philipp and V. Perlick, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1542006 (2015) [arXiv:1503.08361 [gr-qc]].
- [37] S. Slavyanov and W. Lay, “Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities”, Oxford University Press, 2000.
- [38] E. T. Akhmediv, D. Kalinov, F. K. Popov Phys. Rev. D **93**, 064006 (2016) [arXiv:1601.03894 [hep-th]]
- [39] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, “Gravitation”, Macmillan, San Francisco 1973.