Институт теоретической и экспериментальной физики
Московский физико-технический институт (Государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Сечин Иван Андреевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера и его применение в интегрируемых системах

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Зотов Андрей Владимирович

Москва, 2016 год

Содержание

1 Введение

1.1 Краткий обзор

Данная работа посвящена изучению ассоциативного уравнения Янга-Бакстера [1, 18]— квадратичного алгебраического уравнения на квантовые R-матрицы вида

$$R_{12}(\hbar, z_1 - z_2)R_{23}(\eta, z_2 - z_3) = R_{13}(\eta, z_1 - z_3)R_{12}(\hbar - \eta, z_1 - z_2) + R_{23}(\eta - \hbar, z_2 - z_3)R_{13}(\hbar, z_1 - z_3)$$

и его связи с классическими и квантовыми интегрируемыми системами.

Участвующие в этом уравнении квантовые R-матрицы — ключевой элемент квантового метода обратной задачи [8, 13, 20], который обеспечивает интегрируемость широкого класса систем: спиновых цепочек, квантовых многочастичных систем и двумерных статистических моделей. Определяются квантовые R-матрицы как унитарные решения уравнения Янга-Бакстера [4, 22], которое обеспечивает интегрируемость всех этих систем:

$$R_{12}(\hbar, z_1 - z_2)R_{13}(\hbar, z_1 - z_3)R_{23}(\hbar, z_2 - z_3) = R_{23}(\hbar, z_2 - z_3)R_{13}(\hbar, z_1 - z_3)R_{12}(\hbar, z_1 - z_2).$$

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (вместе с дополнительными условиями унитарности и антисимметричности) является достаточным условием выполнения уравнения Янга-Бакстера, однако не является необходимым условием — таким образом, оно выделяет специальный класс квантовых R-матриц. В частности, известно, что квантовые нединамические R-матрицы Бакстера-Белавина [4, 5] (описывающие шести- и восьмивершинные модели и спиновые цепочки Гейзенберга) являются решениями ассоциативного уравнения Янга-Бакстера. Однако кроме нединамических R-матриц (тех, которые не являются функциями динамических переменных) в теории квантовых интегрируемых систем также рассматриваются и R-матрицы динамического типа [9] (содержащие явно динамические переменные соответственно), описывающие другой широкий класс интегрируемых систем, определение которых несколько отличается от нединамического случая. Для квантовых динамических R-матриц квадратичное алгебраическое уравнение явно выписано не было.

Кроме того, ассоциативное уравнение Янга-Бакстера связано и с классическими интегрируемыми системами. В случае, когда участвующие в уравнении матрицы имеют размер 1×1, то есть являются скалярными функциями, ассоциативное уравнение Янга-Бакстера переходит в известное функциональное уравнение Калоджеро: [6]

$$\phi(\hbar, z_1 - z_2)\phi(\eta, z_2 - z_3) = \phi(\eta, z_1 - z_3)\phi(\hbar - \eta, z_1 - z_2) + \phi(\eta - \hbar, z_2 - z_3)\phi(\hbar, z_1 - z_3),$$

которое непосредственно связано с классической интегрируемой системой типа Калоджеро-Мозера [6, 15, 17] оно выделяет случаи: эллиптический, рациональный и тригонометрический (последние два являются вырождениями первого), когда уравнения движения данной системы могут быть переписаны в форме уравнений Лакса со спектральным параметром:

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{L}(w) = [L(w), M(w)], \quad \forall w.$$

Такая запись уравнений движения является важным шагом в доказательстве того, что механическая система будет интегрируема по Лиувиллю, так как из этой записи следует, что величины $\operatorname{Tr} L^K(w), \forall K \in \mathbb{N}$ не изменяются со временем и могут рассматриваться в качестве производящих функций (по спектральному параметру w интегралов движения системы.

Тот факт, что при размере матрицы 1×1 ассоциативное уравнение Янга-Бакстера переходит в функциональное уравнение на специальные эллиптические (рациональные или тригонометрические) функции, позволяет рассматривать квантовые R-матрицы, которые являются его решениями при размере матрицы $N \times N$, как матричные и некоммутативные обобщения таких специальных функций и использовать эти матричные решения для интегрирования классической системы Калоджеро-Мозера [14]. Таким образом, квантовые и классические интегрируемые системы оказываются весьма нетривиально связаны.

Задачей этой работы является исследование динамических квантовых R-матриц и возможности написания квадратичного уравнения типа ассоциативного уравнения Янга-Бакстера, решениями которого они являются, а также расширения связи между эллиптическими специальными функциями и квантовыми R-матрицами на случай таких динамических R-матриц.

1.2 Основные результаты

Сформулируем здесь главные результаты, полученные в этой работе:

1. Утверждение (2.23) — получена явная связь нединамических R^{BB}-матриц Бакстера-Белавина (2.4) и полудинамических R^{ACF}-матриц Арутюнова-Чехова-Фролова (2.13) преобразованием, похожим на преобразование подобия:

$$R^{ACF}_{12}(\hbar, z_1, z_2 \mid u) = g_1^{-1}(z_1 + \hbar \mid u) g_2^{-1}(z_2 \mid u) R^{BB}_{12}(\hbar, z_{12}) g_1(z_1 \mid u) g_2(z_2 + \hbar \mid u).$$

2. Утверждение (2.33) — обобщение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера на R-матрицы Арутюнова-Чехова-Фролова — найдено квадратичное по вхождению R-матриц уравнение, которому удовлетворяют эти полудинамические R-матрицы:

$$\begin{gathered} R^{ACF}_{12}(\hbar, z_1 + \eta, z_2 + \eta \mid u) R^{ACF}_{23}(\eta, z_2 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u) = \\ = R^{ACF}_{13}(\eta, z_1 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u) R^{ACF}_{12}(\hbar - \eta, z_1 + \eta, z_2 + \eta \mid u) + \\ + R^{ACF}_{23}(\eta - \hbar, z_2 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u) R^{ACF}_{13}(\hbar, z_1 + \eta, z_3 + \eta \mid u). \end{gathered}$$

3. Утверждение (3.15) — построена пара Лакса для системы Калоджеро-Мозера, в которой эллиптические функции заменены квантовыми полудинамическими R-матрицами Арутюнова, Чехова и Фролова:

$$
\begin{aligned}
L(w) &= \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u), \\
M(w) &= \sum_i E_{ii} \otimes D_i + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes \Phi_{ij}(w, q_i, q_j \mid u).
\end{aligned}
$$

Определения всех входящих в данные формулировки объектов могут быть найдены в основной части работы в разделах, предшествующих этим утверждениям.

Структура работы.
Работа состоит из введения, двух глав и двух приложений. В первой главе излагается теория квантовых R-матриц различных типов, в том числе различные версии ассоциативного уравнения Янга-Бакстера и возможность рассмотрения R-матриц в качестве некоммутативных обобщений эллиптических функций. Во второй главе рассматривается классическая интегрируемая система Калоджеро-Мозера и строятся различные, в том числе и R-матричнозначные пары Лакса. В начале каждой главы приводятся определения рассматриваемых объектов. Первое приложение посвящено изложению определений и необходимых свойств используемых в работе эллиптических функций, а второе — непосредственной проверке того, что полудинамические R-матрицы Арутюнова-Чехова-Фролова являются решениями построенного в работе квадратичного ассоциативного уравнения Янга-Бакстера. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-04217.

2 Квантовые R-матрицы

2.1 Нединамические, динамические и полудинамические квантовые R-матрицы: основные определения

Нединамический случай.
Квантовые нединамические R-матрицы определяются как элементы $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})^{\otimes 2}$, являющиеся решениями уравнения Янга-Бакстера: [4, 22]

$$R_{23}(\hbar,z_{23})R_{13}(\hbar,z_{13})R_{12}(\hbar,z_{12})=R_{12}(\hbar,z_{12})R_{13}(\hbar,z_{13})R_{23}(\hbar,z_{23}), \tag{2.1}$$

и удовлетворяющие условию унитарности:

$$R_{12}(\hbar,z_{12})R_{21}(\hbar,z_{21})=1\otimes 1\cdot\big(\wp(\hbar)-\wp(z_{12})\big), \tag{2.2}$$

где $z_{ij}=z_i-z_j$ и $\hbar$ — некоторые спектральные параметры, а $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса (4.5). Здесь и всюду далее нижние индексы у R-матриц обозначают номера тех тензорных сомножителей, в которых они действуют.

Заметим, что обычно используется несколько другое определение квантовых R-матриц, которое отличается от приведенного выше изменением условия унитарности:

$$\tilde{R}_{12}(\hbar,z_{12})\tilde{R}_{21}(\hbar,z_{21})=1\otimes 1, \tag{2.3}$$

которое может быть сведено к используемому здесь путем умножения R-матриц на скалярный фактор: (в силу тождества (4.22))

$$\begin{gathered}
R_{12}(\hbar,z_{12})=\phi(\hbar,z_{12})\cdot\tilde{R}_{12}(\hbar,z_{12}),\\
R_{12}(\hbar,z_{12})R_{21}(\hbar,z_{21})=\phi(\hbar,z_{12})\phi(\hbar,z_{21})\cdot\tilde{R}_{12}(\hbar,z_{12})\tilde{R}_{21}(\hbar,z_{21}),\\
R_{12}(\hbar,z_{12})R_{21}(\hbar,z_{21})=1\otimes 1\cdot\big(\wp(\hbar)-\wp(z_{12})\big).
\end{gathered}$$

Ясно, что умноженные на такой скалярный фактор R-матрицы остаются решениями уравнения Янга-Бакстера (2.1) и поэтому два определения являются эквивалентными.

Наиболее известное эллиптическое решение (2.1) и (2.2) — R-матрица Бакстера-Белавина (R-матрица восьмивершинной модели или XYZ-цепочки) было найдено в работах [4, 5] и может быть представлено в виде:

$$R^{BB}_{12}(\hbar,z_{12})=\frac{1}{N}\sum_{a\in\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N}\varphi_a^{\hbar}(z_{12})\;T_a\otimes T_{-a}, \tag{2.4}$$

где T_a — базисные матрицы, а $\varphi_a^{\hbar}(z)$ — связанные с ними эллиптические функции специального вида, определенные в (4.8) и (4.7) соответственно.

Решения, отвечающие тригонометрическому и рациональному вырождениям эллиптических функций (4.25), известны как R-матрицы XXZ- и XXX-цепочек и шестивершинной модели:

$$\begin{gathered}
R^{XXZ}_{12}(\hbar,z_{12})=\frac{1\otimes 1}{\sinh\hbar}+\frac{P_{12}}{\sinh z_{12}}+\Big(\frac{\cosh\hbar-1}{\sinh\hbar}+\frac{\cosh z_{12}-1}{\sinh z_{12}}\Big)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii}\\
R^{XXX}_{12}(\hbar,z_{12})=\frac{1\otimes 1}{\hbar}+\frac{P_{12}}{z_{12}},
\end{gathered} \tag{2.5}$$

где P_{12} — оператор перестановки двух тензорных сомножителей, а E_{ij} — матрица с единицей на пересечении i-той строки и j-того столбца, и с нулями во всех остальных местах.

Заметим также, что R-матрица Бакстера-Белавина является антисимметричной в смысле:

$$R^{BB}_{12}(\hbar,z_{12})=-R^{BB}_{21}(-\hbar,z_{21}). \tag{2.6}$$

Динамический и полудинамический случаи.
Аналогично, динамические квантовые R-матрицы могут быть определены как унитарные решения уравнения Gervais-Neveu-Felder'a [9, 10], также иногда называемого динамическим уравнением Янга-Бакстера:

$$R_{23}(\hbar, z_{23} \mid u+\hbar^{(1)})R_{13}(\hbar, z_{13} \mid u)R_{12}(\hbar, z_{12} \mid u+\hbar^{(3)}) = \\ = R_{12}(\hbar, z_{12} \mid u)R_{13}(\hbar, z_{13} \mid u+\hbar^{(2)})R_{23}(\hbar, z_{23} \mid u), \tag{2.7}$$

при условии унитарности

$$R_{12}(\hbar, z_{12} \mid u)R_{12}(\hbar, z_{21} \mid u) = 1 \otimes 1 \cdot \big(\wp(\hbar) - \wp(z_{12})\big). \tag{2.8}$$

Здесь было использовано обозначение:

$$R_{ab}(z, w \mid u+\hbar^{(c)}) = P_c(\hbar)R_{ab}(z, w \mid u)P_c(-\hbar),$$
$$P(\hbar) = \sum_i E_{ii} \exp\left(\hbar \frac{\partial}{\partial u_i}\right).$$

Динамические R-матрицы, в отличие от нединамических, зависят от N дополнительных динамических параметров u_i, отвечающих координатам частиц в одномерных механических задачах или больцмановским весам в двумерных статистических моделях.

Эллиптическое решение (2.8) и (2.7) с нетривиальной зависимостью от динамических параметров — R-матрица Фельдера:

$$R^F_{12}(\hbar, z_{12} \mid u) = \phi(\hbar, z_{12}) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(\hbar, u_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(z_{12}, -u_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji}, \tag{2.9}$$

Как и R-матрица Бакстера-Белавина, данная динамическая R-матрица является антисимметричной, то есть:

$$R^F_{12}(\hbar, z_{12} \mid u) = -R^F_{21}(-\hbar, z_{21} \mid u). \tag{2.10}$$

Заметим также, что нединамическая R-матрица Бакстера-Белавина (2.4) также является решением уравнения (2.7), так как она не зависит от u_i и поэтому уравнение (2.7) сводится к обычному уравнению Янга-Бакстера (2.1).

Альтернативный подход к определению динамических R матриц был предложен в [2] Арутюновым, Чеховым и Фроловым. Полудинамическая R-матрица определяется как унитарное решение уравнения Янга-Бакстера со сдвинутыми спектральными параметрами:

$$R_{23}(\hbar, z_2-\hbar, z_3-\hbar \mid u)R_{13}(\hbar, z_1, z_3 \mid u)R_{12}(\hbar, z_1-\hbar, z_2-\hbar \mid u) = \\ = R_{12}(\hbar, z_1, z_2 \mid u)R_{13}(\hbar, z_1-\hbar, z_3-\hbar \mid u)R_{23}(\hbar, z_2, z_3 \mid u), \tag{2.11}$$

с условием унитарности

$$R_{12}(\hbar, z_1, z_2 \mid u)R_{21}(\hbar, z_2, z_1 \mid u) = 1 \otimes 1 \cdot \big(\wp(\hbar) - \wp(z_{12})\big). \tag{2.12}$$

Существенно отметить то, что полученное решение может уже не зависеть от разности спектральных параметров. Эллиптическое решение (2.12) и (2.11) — R-матрица Арутюнова-Чехова-Фролова имеет вид:

$$R^{ACF}_{12}(\hbar, z_1, z_2 \mid u) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(\hbar, -u_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(z_{12}, -u_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(z_2, -u_{ij}) E_{jj} \otimes E_{ij} - \\ - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(z_1+\hbar, -u_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj} + \big(E_1(\hbar) + E_1(z_{12}) + E_1(z_2) - E_1(z_1+\hbar)\big) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}. \tag{2.13}$$

Определенная полудинамическая R-матрица также является антисимметричной, однако антисимметричность имеет здесь несколько более сложный вид:

$$R_{12}^{ACF}(\hbar, z_1, z_2 \mid u) = -R_{21}^{ACF}(-\hbar, z_2 + \hbar, z_1 + \hbar \mid u). \tag{2.14}$$

Снова заметим, что нединамическая R-матрица (2.4) решает уравнение (2.11), так как зависит только от разности спектральных параметров и нечувствительна к их одновременным сдвигам.

Тригонометрическая и рациональная (полу-)динамические R-матрицы могут быть получены из (2.9) и (2.13) вырождением эллиптических ϕ- и E_1-функций по правилам (4.25). В дальнейшем в основном будут рассматриваться эллиптические квантовые R-матрицы как случай максимальной общности. Результаты для рационального и тригонометрического случаев могут быть получены соответствующими вырождениями.

Все три явно выписанных R-матриц могут быть разложены по степеням постоянной Планка $\hbar$, при этом их поведение при $\hbar \to 0$ будет полюсным:

$$R_{12}(\hbar, \ldots) = \frac{1 \otimes 1}{\hbar} + r_{12}(\ldots) + \mathcal{O}(\hbar), \quad \hbar \to 0, \tag{2.15}$$

что связано с выбором условия унитарности в виде (2.2) вместо (2.3) (т.е. с дополнительным множителем, содержащим $\wp(\hbar)$). Член при $\hbar^0$, обозначенный здесь как r_{12}, называется классической r-матрицей, отвечающей данной квантовой R-матрице.

2.2 Связи между различными типами квантовых R-матриц

Все три определенных выше типа R-матриц оказываются связанными между собой довольно простым образом, похожим на преобразование подобия. Связь между двумя типами динамических R-матриц была сформулирована непосредственно в [2] при определении R^{ACF} (2.13):

$$\begin{aligned} R_{12}^{ACF}(\hbar, z_1, z_2 \mid u) &= \overline{R}_{12}(\hbar, z_1 \mid u - \hbar^{(2)}) R_{12}^F(\hbar, z_{12} \mid u) \overline{R}_{21}^{-1}(\hbar, z_2 \mid u - \hbar^{(1)}), \\ R_{12}^F(\hbar, z_{12} \mid u) &= \overline{R}_{21}(\hbar, z_2 \mid u) R_{12}^{ACF}(\hbar, z_1, z_2 \mid u) \overline{R}_{12}^{-1}(\hbar, z_1 \mid u), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где использована $\overline{R}$-матрица:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\hbar)} \overline{R}_{12}(\hbar, z_1 \mid u) &= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(\hbar, -u_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \phi(\hbar + z_1, -u_{ij}) E_{ij} \otimes E_{ji} - \phi(-\hbar, z_1 + \hbar) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} \\ \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\hbar)} \overline{R}_{12}^{-1}(\hbar, z_1 \mid u) &= \sum_{i,j} \phi(\hbar, -\hbar + u_{ij}) E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{i,j} \phi(z_1, \hbar - u_{ij}) E_{ij} \otimes E_{jj}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

а соответствие между нединамической R-матрицей Бакстера-Белавина и динамической матрицей Фельдера формулируется в терминах IRF-Vertex соответствия [11]:

$$R_{12}^F(\hbar, z_{12} \mid u) = g_1^{-1}(z_1 \mid u - \hbar^{(2)}) g_2^{-1}(z_2 \mid u) R_{12}^{BB}(\hbar, z_{12}) g_1(z_1 \mid u) g_2(z_2 \mid u - \hbar^{(1)}), \tag{2.18}$$

где $g \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ определяется своими матричными элементами (через тэта-функции с характеристиками (4.1)):

$$g_{ij}(z \mid u) = \theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{N} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(z + \sum_k u_{jk} \mid N\tau \right) \frac{1}{\prod\limits_{m \neq j} \vartheta(u_{mj})}, \tag{2.19}$$

и, как показано в [11], удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\vartheta(\hbar)}{\vartheta'(0)}\sum_k g_{ik}(z\mid u)\phi(z,\hbar-u_{kj})=g_{ij}(z+N\hbar\mid u)\prod_{m\neq j}\frac{\vartheta(u_{mj})}{\vartheta(u_{mj}-\hbar)}. \tag{2.20}$$

Оказывается, что $\overline{R}$-матрицы (2.17), которые связывают динамические и полудинамические R-матрицы, также могут быть выражены через g-матрицы IRF-Vertex преобразования (2.19) в виде:

$$\overline{R}_{12}(\hbar,z_1\mid u)=g_1^{-1}(z_1+\hbar\mid u+\hbar^{(2)})g_1(z_1\mid u). \tag{2.21}$$

Докажем это утверждение:

$$\overline{R}_{12}^{-1}(\hbar,z_1\mid u)=g_1^{-1}(z_1\mid u)g_1(z_1+\hbar\mid u+\hbar^{(2)}),$$
$$g_1(z_1\mid u)\overline{R}_{12}^{-1}(\hbar,z_1\mid u)=g_1(z_1+\hbar\mid u+\hbar^{(2)}),$$
$$\sum_{i,j,k}g_{ij}(z_1\mid u)\phi(\hbar,-\hbar+u_{jk})E_{ij}\otimes E_{kk}+\sum_{i,j,k}g_{ik}(z_1\mid u)\phi(z_1,\hbar-u_{kj})E_{ij}\otimes E_{jj}=$$
$$=\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\hbar)}\sum_{i,j,k}\exp(\hbar\frac{\partial}{\partial u_k})g_{ij}(z_1+\hbar\mid u)\exp(-\hbar\frac{\partial}{\partial u_k})E_{ij}\otimes E_{kk},$$

Вычисляем выражение в правой части данного равенства при $j=k$ и $j\neq k$, используя явный вид g (2.19):

$$\exp(\hbar\frac{\partial}{\partial u_j})g_{ij}(z_1+\hbar\mid u)\exp(-\hbar\frac{\partial}{\partial u_j})=g_{ij}(z_1+N\hbar\mid u)\prod_{m\neq j}\frac{\vartheta(u_{mj})}{\vartheta(u_{mj}+\hbar)},$$
$$\exp(\hbar\frac{\partial}{\partial u_k})g_{ij}(z_1+\hbar\mid u)\exp(-\hbar\frac{\partial}{\partial u_k})=g_{ij}(z_1\mid u)\frac{\vartheta(u_{kj})}{\vartheta(u_{kj}+\hbar)},\quad k\neq j.$$

Члены при $E_{ij}\otimes E_{kk},\ k\neq j$ сокращаются непосредственно по определению ϕ-функции (4.3):

$$g_{ij}(z_1\mid u)\phi(\hbar,-\hbar+u_{jk})=\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\hbar)}g_{ij}(z_1\mid u)\frac{\vartheta(u_{kj})}{\vartheta(u_{kj}+\hbar)}.$$

Рассмотрим теперь члены при $E_{ij}\otimes E_{jj}$:

$$g_{ij}(z_1\mid u)\phi(-\hbar,\hbar)+\sum_k g_{ik}(z_1\mid u)\phi(z_1,\hbar-u_{kj})=\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\hbar)}g_{ij}(z_1+N\hbar\mid u)\prod_{m\neq j}\frac{\vartheta(u_{mj})}{\vartheta(u_{mj}-\hbar)}.$$

Откуда, в силу того, что $\phi(\hbar,-\hbar)=0$, получаем в точности (2.20).

Используя соотношение (2.21), можно записать связь динамической и полудинамической R-матриц в терминах g-матриц IRF-Vertex соответствия:

$$R_{12}^{ACF}(\hbar,z_1,z_2\mid u)=g_1^{-1}(z_1+\hbar\mid u)g_1(z_1\mid u+\hbar^{(2)})R_{12}^F(\hbar,z_{12}\mid u)g_2^{-1}(z_2\mid u-\hbar^{(1)})g_2(z_2+\hbar\mid u). \tag{2.22}$$

Следовательно, полудинамическая R-матрица (2.13) также должна быть связана с нединамической (2.4) связью подобного вида. Оказывается, что эта связь получается самой простой из рассматриваемых (так как g-матрицы в этом преобразовании действуют нетривиально только в одном тензорном сомножителе) и имеет вид:

$$R_{12}^{ACF}(\hbar,z_1,z_2\mid u)=g_1^{-1}(z_1+\hbar\mid u)g_2^{-1}(z_2\mid u)R_{12}^{BB}(\hbar,z_{12})g_1(z_1\mid u)g_2(z_2+\hbar\mid u). \tag{2.23}$$

Действительно, подставляя R^F из (2.18) в (2.22), имеем (2.23) после сокращения gg^{-1}-факторов:

$$R_{12}^{ACF}(\hbar,z_1,z_2\mid u)=g_1^{-1}(z_1+\hbar\mid u)g_1(z_1\mid u-\hbar^{(2)})g_1^{-1}(z_1\mid u-\hbar^{(2)})g_2^{-1}(z_2\mid u)\times$$
$$\times R_{12}^{BB}(\hbar,z_{12})g_1(z_1\mid u)g_2(z_2\mid u-\hbar^{(1)})g_2^{-1}(z_2\mid u-\hbar^{(1)})g_2(z_2+\hbar\mid u)=$$
$$=g_1^{-1}(z_1+\hbar\mid u)g_2^{-1}(z_2\mid u)R_{12}^{BB}(\hbar,z_{12})g_1(z_1\mid u)g_2(z_2+\hbar\mid u).$$

2.3 Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера, квантовые R-матрицы как некоммутативные обобщения эллиптических функций

Нединамический случай.
Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера для квантовых нединамических R-матриц было введено в работах [1, 18]:

$$R_{12}(\hbar, z_{12})R_{23}(\eta, z_{23}) = R_{13}(\eta, z_{13})R_{12}(\hbar - \eta, z_{12}) + R_{23}(\eta - \hbar, z_{23})R_{13}(\hbar, z_{13}). \tag{2.24}$$

Нединамические R-матрицы Бакстера-Белавина (2.4) и их тригонометрические и рациональные вырождения (2.5) являются решениями этого уравнения, что было проверено в [14]. Кроме того, несложно заметить, что у него есть и более простые решения. Так, при $N = 1$ это уравнение переходит в тождество Фея (4.20) для эллиптических ϕ-функций, и поэтому оно имеет простые решения вида:

$$R_{12}(\hbar, z_{12}) = \phi(\hbar, z_{12}) \cdot 1 \otimes 1. \tag{2.25}$$

Этот факт позволяет рассматривать R^{BB}-матрицы Бакстера-Белавина (2.4) как некоммутативные аналоги эллиптических функций Кронеккера (4.3) (тем более, что при $N = 1$ они совпадают). В частности, для них могут быть записаны свойства, аналогичные тождествам (4.21) — (4.24), которые являются следствиями тождества Фея (4.20).

Получим необходимые в дальнейшем тождества: определим вначале матрицу, скалярным аналогом которой является функция f (4.6):

$$F_{12}^{BB}(\hbar, z_{12}) = \frac{\partial}{\partial z_1} R^{BB}(\hbar, z_{12}). \tag{2.26}$$

Ее существенное свойство состоит в том, что она является регулярной при $\hbar \to 0$, так как полюсной член в R-матрице (2.15) не зависит от z_1 и потому зануляется при дифференцировании. Продифференцируем теперь обе части тождества (2.24) для R^{BB} по z_2:

$$\begin{gathered} R_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})F_{23}^{BB}(\eta, z_{23}) - F_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})R_{23}^{BB}(\eta, z_{23}) = \\ = -R_{13}^{BB}(\eta, z_{13})F_{12}^{BB}(\hbar - \eta, z_{12}) + F_{23}^{BB}(\eta - \hbar, z_{23})R_{13}^{BB}(\hbar, z_{13}). \end{gathered}$$

Заметим, что здесь члены в левой и правой части регулярны при $\hbar \to \eta$ и поэтому можно положить в нем $\hbar = \eta$:

$$\begin{gathered} R_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})F_{23}^{BB}(\hbar, z_{23}) - F_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})R_{23}^{BB}(\hbar, z_{23}) = \\ = F_{23}^{BB}(0, z_{23})R_{13}^{BB}(\hbar, z_{13}) - R_{13}^{BB}(\hbar, z_{13})F_{12}^{BB}(0, z_{12}). \end{gathered} \tag{2.27}$$

Полученное равенство является некоммутативным аналогом (4.23), причем $F_{12}^{BB}(0, z_{12})$ является обобщением $(-\wp(z_{12}))$ (а точнее отличающейся от нее на константу $E_1'(z_{12})$, что в дальнейшем будет неважно). Свойство антисимметричности R^{BB} (2.6) влечет симметричность этой матрицы в виде:

$$F_{12}^{BB}(0, z_{12}) = F_{21}^{BB}(0, z_{21}). \tag{2.28}$$

Кроме того, полезное тождество, обобщающее (4.24) получается при дифференцировании условия унитарности (2.2) по z_2:

$$R_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})F_{21}^{BB}(\hbar, z_{21}) - F_{12}^{BB}(\hbar, z_{12})R_{21}^{BB}(\hbar, z_{21}) = 1 \otimes 1 \cdot \wp'(z_{12}). \tag{2.29}$$

Кроме этого, ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (2.24) является квадратичным по вхождению R-матриц, в отличие от кубичного уравнения Янга-Бакстера (2.1), и поэтому оно может рассматриваться как в некотором смысле более фундаментальное: уравнение Янга-Бакстера и другие тождества старших порядков по вхождению R-матриц могут быть получены из него следствиями. Этот вопрос подробно разобран в работе [23].

В частности, любое решение (2.24), которое удовлетворяет свойствам унитарности (2.2) и антисимметричности (2.6), является решением уравнения Янга-Бакстера. Действительно, запишем (2.24) для $\hbar = 2a, \eta = a$:

$$R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}) = R_{13}(a, z_{13})R_{12}(a, z_{12}) + R_{23}(-a, z_{23})R_{13}(2a, z_{13}),$$

умножим обе части этого равенства на $R_{23}(a, z_{23})$ слева, а затем преобразуем правую часть, используя условия антисимметричности и унитарности:

$$\begin{aligned}
R_{23}(a, z_{23})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}) &= R_{23}(a, z_{23})R_{13}(a, z_{13})R_{12}(a, z_{12}) + R_{23}(a, z_{23})R_{23}(-a, z_{23})R_{13}(2a, z_{13}),\\
R_{23}(a, z_{23})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}) &= R_{23}(a, z_{23})R_{13}(a, z_{13})R_{12}(a, z_{12}) - R_{23}(a, z_{23})R_{32}(a, z_{32})R_{13}(2a, z_{13}),\\
R_{23}(a, z_{23})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}) &= R_{23}(a, z_{23})R_{13}(a, z_{13})R_{12}(a, z_{12}) - \big(\wp(a) - \wp(z_{23})\big)R_{13}(2a, z_{13}).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Запишем теперь (2.24) для $\hbar = 2a, \eta = a$, изменяя индексы $(1, 2, 3) \to (1, 3, 2)$:

$$R_{13}(2a, z_{13})R_{32}(a, z_{32}) = R_{12}(a, z_{12})R_{13}(a, z_{13}) + R_{32}(-a, z_{32})R_{12}(2a, z_{12}),$$

умножим обе части этого равенства на $R_{23}(a, z_{23})$ справа, и проведем аналогичные преобразования:

$$\begin{aligned}
R_{13}(2a, z_{13})R_{32}(a, z_{32})R_{23}(a, z_{23}) &= R_{12}(a, z_{12})R_{13}(a, z_{13})R_{23}(a, z_{23}) + R_{32}(-a, z_{32})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}),\\
R_{13}(2a, z_{13})\big(\wp(a) - \wp(z_{23})\big) &= R_{12}(a, z_{12})R_{13}(a, z_{13})R_{23}(a, z_{23}) - R_{23}(a, z_{23})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}),\\
R_{23}(a, z_{23})R_{12}(2a, z_{12})R_{23}(a, z_{23}) &= R_{12}(a, z_{12})R_{13}(a, z_{13})R_{23}(a, z_{23}) - \big(\wp(a) - \wp(z_{23})\big)R_{13}(2a, z_{13}).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Сравнивая выражения (2.30) и (2.31), получаем (2.1):

$$R_{23}(a, z_{23})R_{13}(a, z_{13})R_{12}(a, z_{12}) = R_{12}(a, z_{12})R_{13}(a, z_{13})R_{23}(a, z_{23}).$$

Другой важный класс тождеств на квантовые R-матрицы, получаемых из (2.24) — обобщения условия унитарности (2.2):

$$\sum_{\substack{a_1, a_2, \dots a_K \in \overline{2,(K+1)} \\ 1 \neq a_i \neq a_j \neq 1}} R_{1,a_1}(\hbar, z_{1,a_1})R_{a_1,a_2}(\hbar, z_{a_1,a_2}) \dots R_{a_K,1}(\hbar, z_{a_K,1}) = (-1)^{(K-1)}\wp^{(K-1)}(\hbar) \cdot 1 \otimes \dots \otimes 1. \tag{2.32}$$

Доказательства этих свойств также приведены в [23].

Полудинамический и динамический случаи.

Утверждения (2.18) и (2.23) из прошлого раздела позволяют записать квадратичные по вхождению R тождества на R-матрицы Фельдера (2.9) и R-матрицы Арутюнова-Чехова и Фролова (2.13), выражая в (2.24) нединамические R-матрицы через динамические и полудинамические.

В случае с динамическими R-матрицами получаемые соотношения имеют довольно громоздкий вид, так как помимо двух R-матриц в каждом сомножителе присутствуют и g-матрицы. В случае же с полудинамическими R-матрицами, g-матрицы IRF-Vertex соответствия могут быть сокращены и может быть получено простое квадратичное тождество на R^{ACF} (2.13), которое является обобщением ассоциативного уравнения Янга-Бакстера на случай полудинамических R-матриц:

$$\begin{aligned}
&R^{ACF}_{12}(\hbar, z_1 + \eta, z_2 + \eta \mid u)R^{ACF}_{23}(\eta, z_2 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u) =\\
&= R^{ACF}_{13}(\eta, z_1 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u)R^{ACF}_{12}(\hbar - \eta, z_1 + \eta, z_2 + \eta \mid u) +\\
&+ R^{ACF}_{23}(\eta - \hbar, z_2 + \hbar, z_3 + \hbar \mid u)R^{ACF}_{13}(\hbar, z_1 + \eta, z_3 + \eta \mid u).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Это равенство может быть проверено непосредственно из явного вида R-матриц Арутюнова-Чехова-Фролова, что сделано в приложении 2. Однако здесь получим это тождество несколько другим путем, исходя из (2.24) и (2.23). Заметим вначале, что R-матрицы Бакстера-Белавина зависят только от разности спектральных параметров, и поэтому (2.24) может быть переписано в виде:

$$\begin{gathered}R^{BB}_{12}(\hbar,(z_1+\eta)-(z_2-\eta))R^{BB}_{23}(\eta,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))=\\=R^{BB}_{13}(\eta,(z_1+\hbar)-(z_3+\hbar))R^{BB}_{12}(\hbar-\eta,(z_1+\eta)-(z_2+\eta))+\\+R^{BB}_{23}(\eta-\hbar,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))R^{BB}_{13}(\hbar,(z_1+\eta)-(z_3+\eta)),\end{gathered}\tag{2.34}$$

который удобен для сокращения g-вкладов после преобразования (2.23). Запишем вначале левую часть (2.34):

$$\begin{gathered}R^{BB}_{12}(\hbar,(z_1+\eta)-(z_2+\eta))R^{BB}_{23}(\eta,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))=\\=g_2(z_2+\eta\mid u)g_1(z_1+\hbar+\eta\mid u)R^{ACF}_{12}(\hbar,z_1+\eta,z_2+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar+\eta\mid u)g_1^{-1}(z_1+\eta\mid u)\times\\\times g_3(z_3+\hbar\mid u)g_2(z_2+\hbar+\eta\mid u)R^{ACF}_{23}(\eta,z_2+\hbar,z_3+\hbar\mid u)g_3^{-1}(z_3+\hbar+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar\mid u).\end{gathered}$$

Это выражение упрощается, так как все g_i здесь действуют нетривиально только в i-том тензорном сомножителе, и операторы, которые действуют нетривиально в разных тензорных сомножителях, коммутируют:

$$\begin{gathered}R^{BB}_{12}(\hbar,(z_1+\eta)-(z_2+\eta))R^{BB}_{23}(\eta,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))=g_1(z_1+\hbar+\eta\mid u)g_2(z_2+\eta\mid u)g_3(z_3+\hbar\mid u)\times\\\times R^{ACF}_{12}(\hbar,z_1+\eta,z_2+\eta\mid u)R^{ACF}_{23}(\eta,z_2+\hbar,z_3+\hbar\mid u)g_1^{-1}(z_1+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar\mid u)g_3^{-1}(z_3+\hbar+\eta\mid u).\end{gathered}$$

Аналогичные равенства могут быть записаны для первого слагаемого правой части (2.34):

$$\begin{gathered}R^{BB}_{13}(\eta,(z_1+\hbar)-(z_3+\hbar))R^{BB}_{12}(\hbar-\eta,(z_1+\eta)-(z_2+\eta))=g_1(z_1+\hbar+\eta\mid u)g_2(z_2+\eta\mid u)g_3(z_3+\hbar\mid u)\times\\\times R^{ACF}_{13}(\eta,z_1+\hbar,z_3+\hbar\mid u)R^{ACF}_{12}(\hbar-\eta,z_1+\eta,z_2+\eta\mid u)g_1^{-1}(z_1+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar\mid u)g_3^{-1}(z_3+\hbar+\eta\mid u)\end{gathered}$$

и для второго слагаемого правой части (2.34):

$$\begin{gathered}R^{BB}_{23}(\eta-\hbar,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))R^{BB}_{13}(\hbar,(z_1+\eta)-(z_3+\eta))=g_1(z_1+\hbar+\eta\mid u)g_2(z_2+\eta\mid u)g_3(z_3+\hbar\mid u)\times\\\times R^{ACF}_{23}(\eta-\hbar,z_2+\hbar,z_3+\hbar\mid u)R^{ACF}_{13}(\hbar,z_1+\eta,z_3+\eta\mid u)g_1^{-1}(z_1+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar\mid u)g_3^{-1}(z_3+\hbar+\eta\mid u)\end{gathered}$$

Заметим теперь, что g-множители совпадают во всех трех слагаемых, и поэтому уравнение (2.33) может быть получено из (2.24) умножением обеих частей последнего слева на $g_1^{-1}(z_1+\hbar+\eta\mid u)g_2^{-1}(z_2+\eta\mid u)g_3^{-1}(z_3+\hbar\mid u)$ и справа на $g_1(z_1+\eta\mid u)g_2(z_2+\hbar\mid u)g_3(z_3+\hbar+\eta\mid u)$.

Как и в нединамическом случае, уравнение (2.33) является квадратичным по R и уравнение Янга-Бакстера со сдвинутыми параметрами (2.11) и другие тождества старшего порядка на R^{ACF} могут быть выведены из него, условия унитарности (2.12) и условия антисимметричности (2.14). Ход доказательства при этом полностью совпадает с таковым для нединамического случая.

Альтернативный способ доказательства этих тождеств состоит в применении соответствия (2.23) для выражения R^{BB} через R^{ACF} в тождествах для нединамических R-матриц, и последующее сокращение g-матриц. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения Янга-Бакстера (2.1) и уравнения Янга-Бакстера со сдвигами (2.11), для чего запишем первое, используя то, что нединамическая R^{BB}-матрица зависит лишь от разности спектральных параметров:

$$\begin{gathered}R^{BB}_{23}(\hbar,z_{23})R^{BB}_{13}(\hbar,(z_1+\hbar)-(z_3+\hbar))R^{BB}_{12}(\hbar,z_{12})-\\-R^{BB}_{12}(\hbar,(z_1+\hbar)-(z_2+\hbar))R^{BB}_{13}(\hbar,z_{13})R^{BB}_{23}(\hbar,(z_2+\hbar)-(z_3+\hbar))=0.\end{gathered}$$

Выразим теперь R^{BB} через R^{ACF} в левой части:

$$
\begin{gathered}
g_1(z_1+2\hbar\mid u)g_2(z_2+\hbar\mid u)g_3(z_3\mid u)\times\\
\times\big(R^{ACF}_{23}(\hbar,z_2,z_3\mid u)R^{ACF}_{13}(\hbar,z_1+\hbar,z_3+\hbar\mid u)R^{ACF}_{12}(\hbar,z_1,z_2\mid u)-\\
-R^{ACF}_{12}(\hbar,z_1+\hbar,z_2+\hbar\mid u)\times R^{ACF}_{13}(\hbar,z_1,z_3\mid u)R^{ACF}_{23}(\hbar,z_2+\hbar,z_3+\hbar\mid u)\big)\times\\
\times g_1^{-1}(z_1\mid u)g_2^{-1}(z_2+\hbar\mid u)g_3^{-1}(z_3+2\hbar\mid u)=0.
\end{gathered}
$$

Сокращая g-матрицы и сдвигая все спектральные параметры на $-\hbar$, получаем в точности (2.11). Применяя такую технику, можно показать, что полудинамические R^{ACF}-матрицы (2.13) удовлетворяют тождествам старшего порядка (2.32). Доказательство этого факта может быть найдено в нашей работе [19].

Заметим также, что при $N=1$ полудинамическая R^{ACF}-матрица (2.13) переходит в эллиптическую функцию:

$$
\rho(\hbar,z_1,z_2)=E_1(\hbar)+E_1(z_{12})+E_1(z_2)-E_1(z_1+\hbar),
$$

которая, согласно (4.21) может быть преобразована к виду:

$$
\rho(\hbar,z_1,z_2)=\phi(\hbar,z_{12})\frac{\phi(\hbar,z_2)}{\phi(\hbar,z_1)}=\phi(\hbar,z_{12})\frac{\vartheta(z_2+\hbar)\vartheta(z_1)}{\vartheta(z_1+\hbar)\vartheta(z_2)}. \tag{2.35}
$$

Вспомним, что R^{BB}-матрица является некоммутативным обобщением ϕ-функции и связывается с R^{ACF} соотношением (2.23), которое по своему виду похоже на выражение, связывающее ϕ- и ρ-функции. Это соответствие позволяет считать (2.13) некоммутативным обобщением эллиптической функции ρ (2.35), а g-матрицу IRF-Vertex преобразования — некоммутативным обобщением ϑ-функции (4.2).

3 Классические интегрируемые системы

3.1 Классические интегрируемые системы: основные понятия

Приведем некоторые определения из теории классических интегрируемых систем, следуя [3].

Гамильтонова система с N степенями свободы называется интегрируемой по Лиувиллю, если существует N независимых первых интегралов в инволюции (т.е. скоб ки Пуассона для любой пары первых интегралов равны нулю).

Если уравнения движения некоторой механической системы могут быть представлены в виде:

$$\dot{L}(z) = [L(z), M(z)], \tag{3.1}$$

где z — спектральный параметр и $L(z)$, $M(z) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ — некоторые матричные функции на фазовом пространстве, то говорят, что она допускает представление Лакса со спектральным параметром. Такой вид уравнений движения гарантирует наличие большого числа интегралов движения, производящие функции которых могут быть выбраны в виде:

$$H_m(z) = \mathrm{Tr}(L^m(z)), \tag{3.2}$$

при этом, вообще говоря, не гарантируется, что все получаемые при разложении по z интегралы будут независимыми и находиться в инволюции.

Если попарные скобки Пуассона для матричных элементов $L(z)$ могут быть представлены в форме:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [r_{12}(z,w), L_1(z)] - [r_{21}(w,z), L_2(w)], \tag{3.3}$$

где $r_{12}(z,w) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$, то

$$\{\mathrm{Tr}(L^m(z)), \mathrm{Tr}(L^n(w))\} = 0. \tag{3.4}$$

и данная система — интегрируема по Лиувиллю. Определенная здесь $r_{12}(z,w)$ называется классической r-матрицей данной системы.

Заметим также, что пара Лакса $L(z), M(z)$ определена неоднозначно — возможно осуществить калибровочное преобразование, не меняющее вид уравнения (3.1):

$$\mathcal{L}(z) = G^{-1}(z)L(z)G(z), \qquad \mathcal{M}(z) = G^{-1}(z)M(z)G(z) - G^{-1}(z)\dot{G}(z), \tag{3.5}$$

где $G(z)$ — произвольная невырожденная матрица, которая может зависеть от координат, импульсов и спектрального параметра.

3.2 Система Калоджеро-Мозера: гамильтониан, уравнения движения и пары Лакса

Эллиптическая система Калоджеро-Мозера [6, 15, 17] — это классическая механическая система, описывающая взаимодействие N частиц с координатами q_i и импульсами p_i на прямой, которая определяется гамильтонианом:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} - \frac{\nu^2}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \wp(q_{ij}), \tag{3.6}$$

где $q_{ij} = q_i - q_j$, ν — константа взаимодействия, а $\wp(z)$ — эллиптическая пи-функция Вейерштрасса (4.5). Помимо эллиптической системы также рассматриваются тригонометрическая и рациональные, которые отличаются видом потенциала взаимодействия: вместо $\wp$-функции используются ее тригонометрическое и рациональное вырождения (4.25) соответственно.

Уравнения движения этой системы могут быть получены стандартным способом из гамильтониана с использованием четности $\wp$-функции (4.12):

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \nu^2 \sum_{j\neq i} \wp'(q_{ij}), \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i. \tag{3.7}$$

Данная система допускает представление Лакса со спектральным параметром w, найденное Кричевером в работе [12]:

$$L(w) = \sum_i p_i E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \phi(w, q_{ij}) E_{ij}, \quad M(w) = \nu \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} \wp(q_{ik}) E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} f(w, q_{ij}) E_{ij}, \tag{3.8}$$

где $f(z,q)$ — производная эллиптической ϕ-функции, определяемая как (4.6).

Эквивалентность уравнений Лакса и уравнений движения (3.7) следует из эллиптического тождества Фея (4.20), а точнее из его следствий (4.23), (4.24). Действительно, подставим явный вид L и M (3.8) в уравнения Лакса (3.1):

$$\dot{L}(w) = \sum_i \dot{p}_i E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} f(w, q_{ij}) \dot{q}_{ij} E_{ij},$$

$$[L(w), M(w)] = \nu^2 \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \big(\phi(w,q_{ij}) f(w,q_{ji}) - \phi(w,q_{ji}) f(w,q_{ij})\big) E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (p_i - p_j) f(w,q_{ij}) E_{ij} +$$

$$+\nu^2 \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j, i\neq k\\ k\neq j}} \Big(\big(-\wp(q_{ik}) + \wp(q_{jk})\big)\phi(w,q_{ij}) + \phi(w,q_{ik}) f(w,q_{kj}) - \phi(w,q_{kj}) f(w,q_{ik})\Big) E_{ij}.$$

Последняя сумма обращается в ноль в силу (4.23), а для оставшихся членов имеем по (4.24) следующее:

$$[L(w), M(w)] = \nu^2 \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \wp'(q_{ij}) E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (p_i - p_j) f(w, q_{ij}) E_{ij}.$$

Сравнивая явный вид левой и правой части уравнений Лакса (3.1), получаем уравнения движения (3.7) из покомпонентных равенств при E_{ii} и E_{ij}:

$$\sum_i \dot{p}_i E_{ii} = \nu^2 \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \wp'(q_{ij}) E_{ii} \Longrightarrow \dot{p}_i = \nu^2 \sum_{j\neq i} \wp'(q_{ij}),$$

$$\nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} f(w,q_{ij}) \dot{q}_{ij} E_{ij} = \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} (p_i - p_j) f(w,q_{ij}) E_{ij} \Longrightarrow \dot{q}_i = p_i.$$

Совершим также калибровочное преобразование пары Лакса (3.8), выбрав матрицу преобразования в виде:

$$G(w) = \sum_i \vartheta(q_i + w) \prod_{k\neq i} \vartheta(q_k) E_{ii}. \tag{3.9}$$

Тогда имеем:

$$G^{-1}(w)=\sum_i \frac{1}{\vartheta(q_i+w)}\prod_{k\neq i}\frac{1}{\vartheta(q_k)}E_{ii},$$

$$\dot G(w)=\sum_i\left(\vartheta'(q_i+w)\dot q_i\prod_{k\neq i}\vartheta(q_k)+\vartheta(q_i+w)\sum_{j\neq i}\vartheta'(q_j)\dot q_j\prod_{k\neq i,j}\vartheta(q_k)\right)E_{ii}.$$

Вычислим теперь отдельно все члены, участвующие в (3.5), используя определения E_1- и ϕ-функций (4.3), (4.4):

$$G^{-1}(w)\dot G(w)=\sum_i\left(\frac{\vartheta'(q_i+w)}{\vartheta(q_i+w)}\dot q_i+\sum_{j\neq i}\frac{\vartheta'(q_j)}{\vartheta(q_j)}\dot q_j\right)E_{ii}=\sum_i\left(E_1(q_i+w)\dot q_i+\sum_{j\neq i}E_1(q_j)\dot q_j\right)E_{ii},$$

$$G^{-1}(w)L(w)G(w)=\sum_i p_iE_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi(w,q_{ij})\frac{\vartheta(q_j+w)\vartheta(q_i)}{\vartheta(q_i+w)\vartheta(q_j)}E_{ij}=\sum_i p_iE_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi(w,q_{ij})\frac{\phi(w,q_j)}{\phi(w,q_i)}E_{ij},$$

$$G^{-1}(w)M(w)G(w)=\nu\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\wp(q_{ik})E_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}f(w,q_{ij})\frac{\vartheta(q_j+w)\vartheta(q_i)}{\vartheta(q_i+w)\vartheta(q_j)}E_{ij}=$$

$$=\nu\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\wp(q_{ik})E_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}f(w,q_{ij})\frac{\phi(w,q_j)}{\phi(w,q_i)}E_{ij},$$

Преобразованная пара Лакса принимает вид:

$$\mathcal{L}(w)=\sum_i p_iE_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\rho(w,q_i,q_j)E_{ij},$$

$$\mathcal{M}(w)=\sum_i D_iE_{ii}+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}f(w,q_{ij})\frac{\phi(w,q_j)}{\phi(w,q_i)}E_{ij},\tag{3.10}$$

где $D_i=\nu\sum\limits_{j\neq i}\wp(q_{ij})-E_1(q_i+w)\dot q_i-\sum\limits_{j\neq i}E_1(q_j)\dot q_j$, а ρ — эллиптическая функция, определенная в (2.35).

3.3 R-матричнозначные пары Лакса для системы Калоджеро-Мозера

В разделе 2.3 квантовые R-матрицы Бакстера-Белавина (2.4) и Арутюнова-Чехова-Фролова (2.13) были рассмотрены как некоммутативных обобщений эллиптических функций, которые участвуют в построении пар Лакса для системы Калоджеро-Мозера (3.8) и (3.10) и были получены свойства этих R-матриц, обобщающие ключевые для интегрируемости системы Калоджера свойства ϕ- и f-функций: (4.23) и (4.24). В этом разделе мы воспользуемся этими соответствиями для построения пар Лакса для системы Калоджеро-Мозера, в которых эллиптические функции заменяются квантовыми R-матрицами.

Нединамические R-матрицы.
Построим вначале пару Лакса с использованием R-матриц Бакстера-Белавина (2.4), следуя [14]:

$$\begin{gathered}
L(w)=\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),\\
M(w)=\nu\cdot 1\otimes\mathcal{F}^0+\nu\sum_i E_{ii}\otimes d_i+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),\\
\mathcal{F}^0=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} F^{BB}_{km}(0,q_{km}),\quad d_i=-\sum_{k\neq i} F^{BB}_{ik}(0,q_{ik}).
\end{gathered}\tag{3.11}$$

Заметим, что все члены в L- и M-операторах, кроме первого в M, могут быть получены прямым обобщением членов (3.8) на некоммутативный случай, а первый член в M при переходе от R-матриц к эллиптическим функциям становится пропорциональным единичной матрице и дает нулевой коммутатор с любым L и может быть опущен из M. Таким образом, член типа $1\otimes\mathcal{F}^0$ существенно проявляется только в некоммутативном случае.

Проверим теперь, что уравнения Лакса (3.1) для построенной пары (3.11) действительно воспроизводят уравнения движения системы Калоджеро-Мозера. Вначале вычислим левую часть (3.1):

$$\dot{L}(z)=\sum_i \dot{p}_i E_{ii}\otimes 1+\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\dot{q}_{ij}\cdot E_{ij}\otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),$$

Теперь вычислим правую часть (3.1), разбивая ее на коммутаторы отдельных слагаемых:

$$\Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1;\nu\cdot 1\otimes\mathcal{F}^0+\nu\sum_i E_{ii}\otimes d_i\Big]=0,$$

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_k p_k E_{kk}\otimes 1;\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij})\Big]&=\nu\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} p_k\big[E_{kk}\otimes 1;E_{ij}\otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij})\big]=\\
&=\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i-p_j)E_{ij}\otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R^{BB}_{ij}(w,q_{ij});\nu\sum_k E_{kk}\otimes d_k\Big]&=\nu^2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes\big(R^{BB}_{ij}(w,q_{ij})d_j-d_iR^{BB}_{ij}(w,q_{ij})\big)=\\
=\nu^2\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j, j\neq k\\ k\neq i}} E_{ij}\otimes\big(F^{BB}_{ik}(0,q_{ik})R^{BB}_{ij}(w,q_{ij})&-R^{BB}_{ij}(w,q_{ij})F^{BB}_{kj}(0,q_{kj})\big)+\\
&+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes\big[F^{BB}_{ij}(0,q_{ij});R^{BB}_{ij}(w,q_{ij})\big],
\end{aligned}$$

Для вычисления коммутатора с $\mathcal{F}^0$, заметим, что операторы, которые действуют нетривиально в разных тензорных сомножителях, коммутируют и симметричностью $F^{BB}_{ij}(0,q_{ik})$ (2.28):

$$\Big[\nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),\nu\cdot 1\otimes\mathcal{F}^0\Big]=\nu^2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes\big[R^{BB}_{ij}(w,q_{ij});\mathcal{F}^0\big]=$$

$$
= \frac{\nu^2}{2} \sum_{\substack{i,j,k,m \\ i\neq j, k\neq m}} E_{ij} \otimes \big[R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); F^{BB}_{km}(0,q_{km})\big] = \nu^2 \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \big[R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); F^{BB}_{ij}(0,q_{ij})\big] +
$$

$$
+\nu^2 \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j, j\neq k \\ k\neq i}} E_{ij} \otimes \Big(\big[R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); F^{BB}_{kj}(0,q_{kj})\big] + \big[R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); F^{BB}_{ik}(0,q_{ik})\big]\Big).
$$

Для вычисления последнего коммутатора воспользуемся тождествами (2.27) и (2.29)

$$
\Big[\nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); \nu \sum_{\substack{k,m \\ k\neq m}} E_{km} \otimes F^{BB}_{km}(w,q_{km})\Big] =
$$

$$
= \nu^2 \sum_{\substack{i,j,k,m \\ i\neq j, k\neq m}} \big[E_{ij} \otimes R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}); E_{km} \otimes F^{BB}_{km}(w,q_{km})\big] =
$$

$$
= \nu^2 \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} E_{ii} \otimes \big(R^{BB}_{ik}(w,q_{ik}) F^{BB}_{ki}(w,q_{ki}) - F^{BB}_{ik}(w,q_{ik}) R^{BB}_{ki}(w,q_{ki})\big) +
$$

$$
+\nu^2 \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j, k\neq i \\ k\neq j}} E_{ij} \otimes \big(R^{BB}_{ik}(w,q_{ik}) F^{BB}_{kj}(w,q_{kj}) - F^{BB}_{ik}(w,q_{ik}) R^{BB}_{kj}(w,q_{kj})\big) =
$$

$$
= \nu^2 \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} E_{ii} \otimes 1 \cdot \wp'(q_{ik}) + \nu^2 \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j, k\neq i \\ k\neq j}} E_{ij} \otimes \big(F^{BB}_{kj}(0,q_{kj}) R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}) - R^{BB}_{ij}(w,q_{ij}) F^{BB}_{ik}(0,q_{ik})\big).
$$

Складывая вклады от всех коммутаторов, получаем правую часть (3.1):

$$
[L(w), M(w)] = \nu^2 \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} E_{ii} \otimes 1 \cdot \wp'(q_{ik}) + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (p_i - p_j) E_{ij} \otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}),
$$

и значит, из уравнений Лакса имеем покомпонентные равенства:

$$
\sum_i \dot{p}_i E_{ii} \otimes 1 = \nu^2 \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} E_{ii} \otimes 1 \cdot \wp'(q_{ik}) \Longrightarrow \dot{p}_i = \nu^2 \sum_{k\neq i} \wp'(q_{ik}),
$$

$$
\nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \dot{q}_{ij} E_{ij} \otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}) = \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (p_i - p_j) E_{ij} \otimes F^{BB}_{ij}(w,q_{ij}) \Longrightarrow \dot{q}_i = p_i.
$$

которые воспроизводят уравнения движения системы Калоджеро-Мозера (3.7).

Полудинамический случай.
Для получения пар Лакса с полудинамическими квантовыми R-матрицами, выполним калибровочное преобразование типа (3.5) пары Лакса (3.11), выбрав матрицу преобразования в виде:

$$
G(w) = \sum_i E_{ii} \otimes \big(g_i(q_i + w \mid u) \prod_{k\neq i} g_k(q_k \mid u)\big). \tag{3.12}
$$

Это преобразование является некоммутативным обобщением преобразования скалярных пар Лакса с матрицей (3.9), которое было сделано в разделе 3.2, так как g-матрицы (2.19) могут рассматриваться как некоммутативные обобщения нечетных тэта-функций (4.2).

Вычислим явно преобразованную пару Лакса, пользуясь (2.23):

$$G^{-1}(w) = \sum_i E_{ii} \otimes \big(g_i^{-1}(q_i + w \mid u) \prod_{k\neq i} g_k^{-1}(q_k \mid u)\big),$$

$$\dot G(w) = \sum_i E_{ii} \otimes \Big(\dot q_i \partial_{q_i} g_i(q_i + w \mid u) \prod_{k\neq i} g_k(q_k \mid u) + \sum_{j\neq i} \dot q_j \partial_{q_j} g_j(q_j \mid u) g_i(q_i + w \mid u) \prod_{k\neq i,j} g_k(q_k \mid u)\Big),$$

$$G^{-1}(w)\dot G(w) = \sum_i E_{ii} \otimes \Big(\dot q_i \xi_i(q_i + w \mid u) + \sum_{k\neq i} \dot q_k \xi_k(q_k \mid u)\Big),$$

$$G^{-1}(w)L(w)G(w) = \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij} \otimes R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u),$$

$$G^{-1}(w)M(w)G(w) = \frac{\nu}{2} \sum_i E_{ii} \otimes \sum_{\substack{j,k\\ j\neq k, j\neq i\\ k\neq i}} \Phi_{jk}(0, q_j, q_k \mid u) + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \Phi_{ij}(w, q_i, q_j \mid u),$$

где введена новая матрица, которая является некоммутативным обобщением E_1-функции (4.4):

$$\xi_i(q \mid u) = g_i^{-1}(q \mid u)\partial_q g_i(q \mid u), \tag{3.13}$$

а также матрица:

$$\Phi_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) = g_i^{-1}(q_i + w \mid u) g_j^{-1}(q_j \mid u) F^{BB}_{ij}(w, q_{ij}) g_j(q_j + w \mid u) g_i(q_i \mid u). \tag{3.14}$$

Преобразованная пара Лакса имеет вид:

$$\mathcal{L}(w) = \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij} \otimes R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u),$$

$$\mathcal{M}(w) = \sum_i E_{ii} \otimes D_i + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \Phi_{ij}(w, q_i, q_j \mid u), \tag{3.15}$$

$$D_i = \Big(\frac{\nu}{2} \sum_{\substack{j,k\\ j\neq k, j\neq i\\ k\neq i}} \Phi_{jk}(0, q_j, q_k \mid u) - \dot q_i \xi_i(q_i + w \mid u) + \sum_{k\neq i} \dot q_k \xi_k(q_k \mid u)\Big).$$

Найдем теперь явный вид ξ- и Φ-матриц. Начнем с ξ-матрицы. Для этого запишем свойство g-матриц (2.20) и будем раскладывать его по степеням w:

$$\frac{\vartheta(w)}{\vartheta'(0)} \sum_k g_{ik}(q \mid u)\phi(q, w - u_{kj}) = g_{ij}(q + Nw \mid u) \prod_{m\neq j} \frac{\vartheta(u_{mj})}{\vartheta(u_{mj} - w)},$$

$$\sum_k g^{-1}_{ik}(q \mid u) g_{kj}(q + Nw \mid u) = \frac{\vartheta(w)}{\vartheta'(0)} \phi(q, w - u_{ij}) \prod_{m\neq j} \frac{\vartheta(u_{mj} - w)}{\vartheta(u_{mj})},$$

$$\sum_k g^{-1}_{ik}(q \mid u) g_{kj}(q \mid u) + Nw \sum_k g^{-1}_{ik}(q \mid u)\partial_q g_{kj}(q \mid u) + \mathcal{O}(w^2) = (w + \mathcal{O}(w^3)) \times$$

$$\times \Big(\delta_{ij}\big(\frac{1}{w} + E_1(q) + w(E_1^2(q) - \wp(q)) + \mathcal{O}(w^2)\big) + (1 - \delta_{ij})\big(\phi(q, -u_{ij}) + wf(q, -u_{ij}) + \mathcal{O}(w^2)\big)\Big) \times$$

$$\times \Big(1 - w \sum_{m\neq j} E_1(u_{mj}) + \mathcal{O}(w^2)\Big),$$

$$\delta_{ij} + Nw\xi_{ij}(q \mid u) + \mathcal{O}(w^2) = \delta_{ij}\big(1 + wE_1(q) - \sum_{m\neq j} E_1(u_{mj}) + \mathcal{O}(w^2)\big) +$$

$$+ (1 - \delta_{ij})\big(w\phi(q, -u_{ij}) + \mathcal{O}(w^2)\big).$$

Следовательно, получаем выражение для ξ-матрицы через ее матричные элементы:

$$\xi(q \mid u) = \sum_{i} \big(E_1(q) + \sum_{k\neq i} E_1(u_{ik})\big) E_{ii} + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \phi(q, -u_{ij}) E_{ij}. \tag{3.16}$$

Заметим теперь, что в силу (2.23):

$$\begin{gathered}
\partial_{q_i} R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) = \partial_{q_i}\big(g_i^{-1}(q_i + w \mid u) g_j^{-1}(q_j \mid u) R^{BB}_{ij}(w, q_{ij}) g_j(q_j + w \mid u) g_i(q_i \mid u)\big) = \\
= \Phi(w, q_i, q_j \mid u) - g_i^{-1}(q_i + w \mid u)\partial_{q_i} g_i(q_i + w \mid u) R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) + \\
+ R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) g_i^{-1}(q_i \mid u)\partial_{q_i} g_i(q_i \mid u) = \\
= \Phi(w, q_i, q_j \mid u) - \xi_i(q_i + w \mid u) R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) + R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u)\xi_i(q_i \mid u).
\end{gathered}$$

а значит,

$$\Phi_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) = \partial_{q_i} R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) + \xi_i(q_i + w \mid u) R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) - R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u)\xi_i(q_i \mid u)$$

Дифференцируя R^{ACF} в форме (2.13), имеем:

$$\begin{gathered}
\partial_{q_i} R^{ACF}_{ij}(w, q_i, q_j \mid u) = \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} f(-u_{km}, q_{ij}) E_{km} \otimes E_{mk} - \\
- \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} f(-u_{km}, q_i + w) E_{km} \otimes E_{mm} + \big(\wp(q_i + w) - \wp(q_{ij})\big) \sum_{k} E_{kk} \otimes E_{kk},
\end{gathered}$$

Таким образом, M-оператор выражен через известные матрицы из эллиптических функций.

4 Приложения

4.1 Эллиптические функции

В этом приложении собраны все необходимые определения и свойства используемых эллиптических функций, причем практически все свойства строго доказываются. Более подробное изложение может быть найдено в [7, 16, 21]

Определения эллиптических функций.
Тэта-функция Римана с характеристиками на эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ определяется как

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z \mid \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau (k+a)^2 + 2\pi i (k+a)(z+b)\right), \quad (Na), (Nb) \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

при этом ряд сходится и функция определена, если $\operatorname{Im} \tau > 0$.
Важный частный случай — нечетная тэта-функция:

$$\vartheta(z \mid \tau) = \vartheta(z) = \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z \mid \tau), \tag{4.2}$$

которая используется в определении ϕ-функции Кронеккера и первой функции Эйзенштейна $E_1(z)$:

$$\phi(z, w) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)\vartheta(w)}, \tag{4.3}$$

$$E_1(z) = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, \tag{4.4}$$

используя которую, можно получить четную $\wp$-функцию Вейерштрасса:

$$\wp(z) = -E_1'(z) + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}. \tag{4.5}$$

Для построения пар Лакса нам понадобятся производные $\phi(z, w)$:

$$f(z, w) = \partial_w \phi(z, w), \tag{4.6}$$

а для построения R-матрицы Бакстера-Белавина необходимы следующие функции:

$$\varphi_a^\hbar(z) = \exp\left(\frac{2\pi i a_2 z}{N}\right) \phi\left(z, \frac{\hbar + a_1 + a_2\tau}{N}\right), \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

и связанные с ними базисные $N \times N$-матрицы:

$$T_a = \exp\left(\frac{\pi i a_1 a_2}{N}\right) Q^{a_1} \Lambda^{a_2}, \tag{4.8}$$

где матрицы Q и Λ определяются матричными элементами:

$$Q_{jk} = \delta_{jk} \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right),$$

$$\Lambda_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j+1 = k \mod N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Свойства эллиптических функций.
Непосредственно из определений (4.1) и (4.2) следуют свойства квазипериодичности для тэта-функций:

$$\begin{gathered}\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z+1\mid\tau)=\exp(2\pi i a)\cdot\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z\mid\tau),\\ \theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z+\tau\mid\tau)=\exp(-\pi i\tau-2\pi i(z+b))\cdot\theta\begin{bmatrix}a+1\\b\end{bmatrix}(z\mid\tau),\\ \vartheta(z+1\mid\tau)=\exp(\pi i)\cdot\vartheta(z\mid\tau)=-\vartheta(z\mid\tau),\\ \vartheta(z+\tau\mid\tau)=\exp(-\pi i\tau-\pi i-2\pi i z)\cdot\vartheta(z\mid\tau),\end{gathered}\tag{4.9}$$

откуда получаются аналогичные свойства для ϕ-функций Кронеккера (4.3) и первых функций Эйзенштейна E_1 (4.4):

$$\begin{gathered}\phi(z+1,w)=\frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+1+w)}{\vartheta(z+1)\vartheta(w)}=\frac{\exp(\pi i)}{\exp(\pi i)}\frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)\vartheta(w)}=\phi(z,w),\\ \phi(z+\tau,w)=\frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+\tau+w)}{\vartheta(z+\tau)\vartheta(w)}=\frac{\exp(-\pi i\tau-\pi i-2\pi i(z+w))}{\exp(-\pi i\tau-\pi i-2\pi i z)}\phi(z,w)=\exp(-2\pi i w)\phi(z,w),\\ E_1(z+1)=\frac{\vartheta'(z+1)}{\vartheta(z+1)}=\frac{\exp(\pi i)}{\exp(\pi i)}\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}=E_1(z),\\ E_1(z+\tau)=\frac{\vartheta'(z+\tau)}{\vartheta(z+\tau)}=\frac{\exp(-\pi i\tau-\pi i)}{\exp(-\pi i\tau-\pi i)}\frac{[\exp(-2\pi i z)\vartheta(z\mid\tau)]'}{\exp(-2\pi i z)\vartheta(z\mid\tau)}=-2\pi i+E_1(z).\end{gathered}$$

которые в окончательном виде записываются как:

$$\begin{gathered}\phi(z+1,w)=\phi(z,w),\\ \phi(z+\tau,w)=\exp(-2\pi i w)\cdot\phi(z,w),\\ E_1(z+1)=E_1(z),\\ E_1(z+\tau)=E_1(z)-2\pi i.\end{gathered}\tag{4.10}$$

Из последних двух свойств можно установить периодичность $\wp$-функции Вейерштрасса (4.5):

$$\begin{gathered}\wp(z+1)=-E_1'(z+1)+\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}=-E_1'(z)+\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}=\wp(z),\\ \wp(z+\tau)=-E_1'(z+\tau)+\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}=-[E_1(z)-2\pi i]'+\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}=\wp(z),\\ \wp(z+1)=\wp(z+\tau)=\wp(z).\end{gathered}\tag{4.11}$$

Отметим также нечетность ϑ-функции (4.2):

$$\begin{gathered}\vartheta(-z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2+2\pi i(k+\frac{1}{2})(-z+\frac{1}{2})\right)=\\ =\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2-2\pi i(k+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2}-1)\right)=\left[\text{замена}\quad k+\frac{1}{2}=-l-\frac{1}{2}\right]=\\ =\sum_{l\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i\tau(l+\frac{1}{2})^2+2\pi i(l+\frac{1}{2})((z-1)+\frac{1}{2})\right)=\vartheta(z-1)=-\vartheta(z),\end{gathered}$$

и следующие из нее свойства четности и нечетности других эллиптических функций:

$$\begin{gathered}
\vartheta'(-z) = \vartheta'(z), \\
\phi(-z,-w) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(-z-w)}{\vartheta(-z)\vartheta(-w)} = -\frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)\vartheta(w)} = -\phi(z,w), \\
E_1(-z) = \frac{\vartheta'(-z)}{\vartheta(-z)} = -\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} = -E_1(z), \\
E_1'(-z) = E_1'(z), \\
\wp(-z) = -E_1'(-z) + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} = -E_1'(z) + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} = \wp(z).
\end{gathered}$$

Окончательно получаем следующие свойства четности и нечетности:

$$\begin{gathered}
\vartheta(z) = -\vartheta(-z), \\
\phi(z,w) = -\phi(-z,-w), \\
E_1(z) = -E_1(-z), \\
\wp(z) = \wp(-z).
\end{gathered} \tag{4.12}$$

Определим теперь поведение эллиптических функций при $z \to 0$. Из нечетности ϑ получаем вид ее разложения в ряд Маклорена:

$$\vartheta(z) = \vartheta'(0)z + \frac{1}{6}\vartheta'''(0)z^3 + \mathcal{O}(z^5), \quad z \to 0. \tag{4.13}$$

Воспользуемся теперь этим выражением для исследования поведения других функций:

$$\begin{gathered}
\phi(z,w) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)}\frac{\vartheta(z+w)}{\vartheta(w)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\vartheta'''(0)}{6\vartheta'(0)}z^2 + \mathcal{O}(z^4)} \cdot \big(1 + E_1(w)z + \frac{\vartheta''(w)}{\vartheta(w)} + \mathcal{O}(z^3)\big) = \\
= \frac{1}{z} \cdot \big(1 - \frac{\vartheta'''(0)}{6\vartheta'(0)}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\big) \cdot \big(1 + E_1(w)z + \frac{1}{2}(E_1'(w) + E_1^2(w))z^2 + \mathcal{O}(z^3)\big) = \\
= \frac{1}{z} + E_1(w) + \frac{z}{2} \cdot \big(-\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + E_1'(w) + E_1^2(w)\big) + \mathcal{O}(z^2)
\end{gathered}$$

Следовательно, для функции Кронеккера имеем разложение:

$$\phi(z,w) = \frac{1}{z} + E_1(w) + \frac{z}{2}\big(E_1^2(w) - \wp(w)\big) + \mathcal{O}(z^2), \quad z \to 0. \tag{4.14}$$

Дифференцируя его, получаем разложение функции f (4.6):

$$f(z,w) = \partial_w \phi(z,w) = E_1'(w) + \frac{z}{2}\big(2E_1(w)E_1'(w) - \wp'(w)\big) + \mathcal{O}(z^2), \quad z \to 0. \tag{4.15}$$

Заметим, что $\phi(z,w)$ имеет полюс первого порядка при $z \to 0$, в то время как $f(z,w)$ не имеет полюса.

$$\begin{gathered}
E_1(z) = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} = \frac{\vartheta'(0) + \frac{1}{2}\vartheta'''(0)z^2 + \mathcal{O}(z^4)}{\vartheta'(0)z + \frac{1}{6}\vartheta'''(0)z^3 + \mathcal{O}(z^5)} = \frac{1}{z} \cdot \big(1 + \frac{\vartheta'''(0)}{2\vartheta'(0)}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\big)\big(1 - \frac{\vartheta'''(0)}{6\vartheta'(0)}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\big) = \\
= \frac{1}{z} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}z + \mathcal{O}(z^3), \\
\wp(z) = -E_1'(z) + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} = \frac{1}{z^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \mathcal{O}(z^2) = \frac{1}{z^2} + \mathcal{O}(z^2).
\end{gathered}$$

Следовательно, имеем разложения для E_1- и $\wp$-функций:

$$E_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} z + \mathcal{O}(z^3), \quad z \to 0, \tag{4.16}$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \mathcal{O}(z^2), \quad z \to 0. \tag{4.17}$$

Рассмотрим теперь более подробно свойства ϕ-функции Кронеккера (4.3). Непосредственно из определения следует ее симметричность по перестановке аргументов:

$$\phi(z,w) = \phi(w,z). \tag{4.18}$$

Производные функции Кронеккера по ее аргументам могут быть выражены через нее саму и через E_1-функции:

$$\partial_z \phi(z,w) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(w)} \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)}\Big) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(w)}\Big(\frac{\vartheta'(z+w)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta(z+w)\cdot\vartheta'(z)}{\vartheta^2(z)}\Big) =$$
$$= \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)\vartheta(w)}\Big(\frac{\vartheta'(z+w)}{\vartheta(z+w)} - \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\Big) = \phi(z,w)\big(E_1(z+w) - E_1(z)\big).$$

С учетом симметричности по аргументам получаем:

$$\partial_z \phi(z,w) = \phi(z,w)\big(E_1(z+w) - E_1(z)\big),$$
$$f(z,w) = \partial_w \phi(z,w) = \phi(z,w)\big(E_1(z+w) - E_1(w)\big). \tag{4.19}$$

Одно из ключевых для теории интегрируемых систем свойств ϕ-функции — тождество тройной секущей Фея:

$$\phi(z,a)\phi(w,b) = \phi(w,a+b)\phi(z-w,a) + \phi(w-z,b)\phi(z,a+b), \tag{4.20}$$

и его вырожденные случаи:

$$\phi(z,a)\phi(z,b) = \phi(z,a+b)(E_1(z) + E_1(a) + E_1(b) - E_1(z+a+b)), \tag{4.21}$$

$$\phi(z,a)\phi(z,-a) = \wp(z) - \wp(a). \tag{4.22}$$

Последнее свойство (4.22) также называется свойством унитарности для функций Кронеккера.

Тождество Фея (4.20) может быть доказано путем сравнения поведения полюсных структур левой и правой частей, а также поведения обеих частей при сдвиге на 1 и на τ.

Установим теперь справедливость вырожденных тождеств, исходя из тождества Фея:

$$w = z + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0,$$
$$\phi(z,a)\phi(z+\varepsilon,b) = \phi(z+\varepsilon,a+b)\phi(-\varepsilon,a) + \phi(\varepsilon,b)\phi(z,a+b),$$
$$\phi(z,a)\phi(z,b) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \big(\phi(z,a+b) + \varepsilon\partial_z\phi(z,a+b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big)\Big(-\frac{1}{\varepsilon} + E_1(a) + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big)+$$
$$+\Big(\frac{1}{\varepsilon} + E_1(b) + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big)\phi(z,a+b) = \phi(z,a+b)\big(E_1(a) + E_1(b) - E_1(z+a+b) + E_1(z)\big) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Выделяя в разложении члены ε^0-порядка, получаем (4.21) из (4.20). Теперь получим условие унитарности:

$$a + b = \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0,$$
$$\phi(z,a)\phi(z,\varepsilon-a) = \phi(z,\varepsilon)\big(E_1(z) + E_1(a) + E_1(\varepsilon-a) - E_1(z+\varepsilon)\big),$$
$$\phi(z,a)\phi(z,-a) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \Big(\frac{1}{\varepsilon} + E_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big)\big(E_1'(-a)\varepsilon - E_1'(z)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big) =$$
$$= E_1'(a) - E_1'(z) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \wp(z) - \wp(a) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Сравнивая члены при ε^0, получаем (4.22).

Запишем (4.21) в частном случае для $a = q_{ik},\ b = q_{kj}$ и продифференцируем его по q_k:

$$\begin{gathered}\phi(z, q_{ik})\phi(z, q_{kj}) = \phi(z, q_{ij})(E_1(z) + E_1(q_{ik}) + E_1(q_{kj}) - E_1(q_{ij} + z)),\\ \phi(z, q_{ik})f(z, q_{kj}) - f(z, q_{ik})\phi(z, q_{kj}) = \phi(z, q_{ij})(\wp(q_{ik}) - \wp(q_{kj})),\end{gathered} \tag{4.23}$$

полученное тождество является ключевым для интегрируемости системы Калоджеро. Другое полезное тождество получится, если записать условие унитарности для $a = q_{ij}$ и продифференцировать его по q_j:

$$\begin{gathered}\phi(z, q_{ij})\phi(z, q_{ji}) = \wp(z) - \wp(q_{ij}),\\ \phi(z, q_{ij})f(z, q_{ji}) - f(z, q_{ij})\phi(z, q_{ji}) = \wp'(q_{ij}).\end{gathered} \tag{4.24}$$

Тригонометрическое и рациональное вырождения.
Заметим, что все выписанные выше свойства эллиптических функций остаются справедливыми при одновременной замене:

$$\begin{gathered}\vartheta(z \mid \tau) \to \sinh z \to z,\\ \phi(z, w) \to \coth z + \coth w \to \frac{1}{z} + \frac{1}{w},\\ E_1(z) \to \coth z \to \frac{1}{z},\\ \wp(z) \to \frac{1}{\sinh^2 z} \to \frac{1}{z^2},\end{gathered} \tag{4.25}$$

которая отвечает тригонометрическому и рациональному вырождениям эллиптических функций. Переход к тригонометрическим функциям может рассматриваться как переход от тора $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ к цилиндру при стремлении одного из периодов тора к бесконечности, а переход к рациональным функциям — как переход от этого цилиндра к комплексной плоскости при стремлении к бесконечности и второго периода.

4.2 Явная проверка утверждения (2.33)

В этом приложении приводится прямая проверка того, что полудинамическая R^{ACF}-матрица Арутюнова-Чехова-Фролова удовлетворяет квадратичному по R уравнению (2.33). Для этого левая и правая части (2.33) выписываются явно при помощи определения (2.13). В этом разделе далее всегда предполагается, что $i \neq j, i \neq k, j \neq k$ и сравниваются покомпонентно слагаемые в левой и правой части (2.33).

В некоторых компонентах сокращение происходит непосредственно:

$$\begin{aligned}
&E_{ij} \otimes E_{ii} \otimes E_{ji}: && 0 = -\phi(z_{13}, -u_{ij})\phi(\eta - \hbar, -u_{ij}) + \phi(\eta - \hbar, -u_{ij})\phi(z_{13}, -u_{ij}),\\
&E_{ij} \otimes E_{ii} \otimes E_{jj}: && 0 = \phi(z_1 + \hbar + \eta, -u_{ij})\phi(\eta - \hbar, -u_{ij}) - \phi(\eta - \hbar, -u_{ij})\phi(z_1 + \hbar + \eta, -u_{ij}),\\
&E_{ii} \otimes E_{jj} \otimes E_{ij}: && \phi(\hbar, -u_{ij})\phi(z_3 + \hbar, -u_{ij}) = \phi(z_3 + \hbar, -u_{ij})\phi(\hbar, -u_{ij}),\\
&E_{ij} \otimes E_{ji} \otimes E_{ji}: && -\phi(z_{12}, -u_{ij})\phi(-z_3 - \hbar, -u_{ij}) = -\phi(-z_3 - \hbar, -u_{ij})\phi(z_{12}, -u_{ij}),\\
&E_{ii} \otimes E_{ji} \otimes E_{ij}: && -\phi(\hbar, -u_{ij})\phi(z_{32}, -u_{ij}) = -\phi(\hbar, -u_{ij})\phi(z_{32}, -u_{ij}),\\
&E_{ij} \otimes E_{jj} \otimes E_{ij}: && -\phi(z_1 + \hbar + \eta, -u_{ij})\phi(z_3 + \hbar, -u_{ij}) = -\phi(z_3 + \hbar, -u_{ij})\phi(z_1 + \hbar + \eta, -u_{ij}),\\
&E_{jj} \otimes E_{ij} \otimes E_{ji}: && \phi(z_2 + \eta, -u_{ij})\phi(z_3 + \hbar, -u_{ij}) = \phi(z_3 + \hbar, -u_{ij})\phi(z_2 + \eta, -u_{ij}),\\
&E_{ii} \otimes E_{ji} \otimes E_{jj}: && -\phi(\eta, -u_{ij})\phi(-z_2 - \eta, -u_{ij}) = -\phi(\eta, -u_{ij})\phi(-z_2 - \eta, -u_{ij}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E_{ij}\otimes E_{ij}\otimes E_{ji}: && 0=\phi(z_{13},-u_{ij})\phi(z_2+\eta,-u_{ij})-\phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(z_{13},-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{ij}\otimes E_{jj}: && 0=-\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_2+\eta,-u_{ij})+\phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{jj}: && \phi(z_{12},-u_{ij})\phi(\eta,-u_{ij})=\phi(\eta,-u_{ij})\phi(z_{12},-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{kk}: && \phi(z_{12},-u_{ij})\phi(\eta,-u_{ik})=\phi(\eta,-u_{ik})\phi(z_{12},-u_{ij}),\\
&E_{jj}\otimes E_{ij}\otimes E_{kk}: && \phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(\eta,-u_{jk})=\phi(\eta,-u_{jk})\phi(z_2+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}: && -\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_{23},-u_{jk})=-\phi(z_{23},-u_{jk})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ii}\otimes E_{jk}\otimes E_{kj}: && \phi(\hbar,-u_{ij})\phi(z_{23},-u_{jk})=\phi(z_{23},-u_{jk})\phi(\hbar,-u_{ij}),\\
&E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{kj}: && \phi(\hbar,-u_{ij})\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})=\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})\phi(\hbar,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{ki}: && \phi(z_{12},-u_{ij})\phi(z_3+\hbar,-u_{ki})=\phi(z_3+\hbar,-u_{ki})\phi(z_{12},-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{jj}\otimes E_{kj}: && -\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})=-\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{jj}\otimes E_{ij}\otimes E_{kj}: && \phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})=\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})\phi(z_2+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{kk}\otimes E_{ji}: && 0=\phi(z_{13},-u_{ij})\phi(\hbar-\eta,-u_{jk})+\phi(\eta-\hbar,-u_{kj})\phi(z_{13},-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{kk}\otimes E_{jj}: && 0=-\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(\hbar-\eta,-u_{jk})-\phi(\eta-\hbar,-u_{kj})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{kj}\otimes E_{jj}: && 0=-\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_2+\eta,-u_{kj})+\phi(z_2+\eta,-u_{kj})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ij}\otimes E_{kj}\otimes E_{jj}: && 0=\phi(z_{13},-u_{ij})\phi(z_2+\eta,-u_{kj})-\phi(z_2+\eta,-u_{kj})\phi(z_{13},-u_{ij}),
\end{aligned}
$$

В других компонентах равенство левой и правой частей обеспечивается тождеством Фея (4.20):

$$
\begin{aligned}
&E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{kk}: && \phi(\hbar,-u_{ij})\phi(\eta,-u_{jk})=\\
& && =\phi(\eta,-u_{ik})\phi(\hbar-\eta,-u_{ij})+\phi(\eta-\hbar,-u_{jk})\phi(\hbar,-u_{ik}),\\
&E_{ij}\otimes E_{jj}\otimes E_{kk}: && -\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(\eta,-u_{jk})=\\
& && =-\phi(\eta,-u_{ik})\phi(z_1+\hbar,-u_{ij})+\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ik})\phi(z_1+\hbar,-u_{kj}),\\
&E_{ik}\otimes E_{kk}\otimes E_{ji}: && 0=\phi(z_{13},-u_{13})\phi(z_1+\hbar,-u_{jk})-\\
& && -\phi(z_3+\hbar,-u_{ji})\phi(z_1+\hbar,-u_{ik})+\phi(z_3+\hbar,-u_{kj})\phi(z_{13},-u_{ik}),\\
&E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}: && \phi(z_{12},-u_{ij})\phi(z_{23},-u_{ik})=\\
& && =\phi(z_{13},-u_{ik})\phi(z_{12},-u_{kj})+\phi(z_{23},-u_{jk})\phi(z_{13},-u_{ij}),\\
&E_{jj}\otimes E_{ik}\otimes E_{kj}: && \phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(z_{23},-u_{jk})=\\
& && =-\phi(z_2+\eta,-u_{ik})\phi(z_3+\eta,-u_{kj})+\phi(z_{23},-u_{ik})\phi(z_3+\eta,-u_{ij}),\\
&E_{ii}\otimes E_{jk}\otimes E_{kk}: && -\phi(\hbar,-u_{ij})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{jk})-\phi(z_2+\eta,-u_{ji})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{ik})=\\
& && =-\phi(z_2+\eta,-u_{jk})\phi(\hbar,-u_{ik}),\\
&E_{kk}\otimes E_{ii}\otimes E_{jk}: && 0=\phi(\eta-\hbar,-u_{ij})\phi(z_3+\eta,-u_{jk})+\\
& && +\phi(z_3+\hbar,-u_{ji})\phi(z_3+\eta,-u_{ik})+\phi(z_3+\hbar,-u_{jk})\phi(\hbar-\eta,-u_{ki}),\\
&E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{kk}: && -\phi(z_{12},-u_{ij})\phi(z_2+\hbar-\eta,-u_{ik})+\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{jk})=\\
& && =-\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ik})\phi(z_{12},-u_{kj}),
\end{aligned}
$$

Оставшиеся слагаемые могут быть сокращены по тождеству (4.21):

$$
\begin{aligned}
E_{ii}\otimes E_{ij}\otimes E_{ji}:\quad & \frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\hbar)}\phi(\hbar,z_{12})\phi(z_{23},-u_{ij})=\frac{\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{13})\phi(z_{23},-u_{ij})-\\
& -\phi(z_{13},-u_{ij})\phi(z_{21},-u_{ij})+\phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(-z_3-\eta,-u_{ij}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{ii}: \quad & -\phi(\hbar,-u_{ij})\phi(-\eta,-u_{ij}) = -\phi(z_3+\hbar,-u_{ij})\phi(-z_3-\eta,-u_{ij})+ \\
& + \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_1+\hbar)}\phi(\eta,z_{13})\phi(\hbar-\eta,-u_{ij}) - \frac{\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{13})\phi(\hbar-\eta,-u_{ij}), \\
E_{ij}\otimes E_{jj}\otimes E_{ii}: \quad & \phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(-\eta,-u_{ij}) = \phi(z_3+\hbar,-u_{ij})\phi(z_{13},-u_{ij})- \\
& - \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_1+\hbar)}\phi(\eta,z_{13})\phi(z_1+\hbar,-u_{ij}), \\
E_{jj}\otimes E_{ij}\otimes E_{jj}: \quad & \phi(-\hbar,-u_{ij})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{ij}) + \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_2+\hbar)}\phi(\eta,z_{23})\phi(z_2+\eta,-u_{ij}) = \\
& = \phi(z_{23},-u_{ij})\phi(z_3+\eta,-u_{ij}) - \frac{\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{13})\phi(z_2+\eta,-u_{ij})+ \\
& + \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_1+\hbar)}\phi(\eta,z_{13})\phi(z_2+\eta,-u_{ij}), \\
E_{ij}\otimes E_{jj}\otimes E_{ji}: \quad & \phi(z_{12},-u_{ij})\phi(z_{23},-u_{ij}) = \frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)}\phi(\hbar-\eta,z_{12})\phi(z_{13},-u_{ij})+ \\
& + \phi(z_3+\hbar,-u_{ij})\phi(-z_1-\hbar,-u_{ij}) + \frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)}\phi(\eta-\hbar,z_{23})\phi(z_{13},-u_{ij}), \\
E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{ij}: \quad & \phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_{32},-u_{ij}) = \phi(z_{32},-u_{ij})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}), \\
E_{jj}\otimes E_{ii}\otimes E_{ij}: \quad & -\phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(z_{32},-u_{ij}) = -\phi(z_3+\hbar,-u_{ij})\phi(\eta-\hbar,-u_{ij})+ \\
& + \frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)}\phi(\eta-\hbar,z_{23})\phi(z_3+\hbar,-u_{ij}), \\
E_{ij}\otimes E_{jj}\otimes E_{jj}: \quad & -\phi(z_{12},-u_{ij})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{ij}) - \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_2+\hbar)}\phi(\eta,z_{23})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}) = \\
& = -\phi(\eta,-u_{ij})\phi(z_1+\hbar,-u_{ij}) - \frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)}\phi(\hbar-\eta,z_{12})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})- \\
& - \frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)}\phi(\eta-\hbar,z_{23})\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij}), \\
E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{ii}: \quad & -\phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(-z_2-\hbar-\eta,-u_{ij}) + \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_2+\hbar)}\phi(\eta,z_{23})\phi(z_{12},-u_{ij}) = \\
& = -\phi(z_{32},-u_{ij})\phi(z_{13},-u_{ij}) + \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_1+\hbar)}\phi(\eta,z_{13})\phi(z_{12},-u_{ij}), \\
E_{jj}\otimes E_{ii}\otimes E_{ii}: \quad & \phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(-z_2-\hbar-\eta,-u_{ij}) - \frac{\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\eta,z_2+\hbar)}\phi(\eta,z_{23})\phi(-\hbar,-u_{ij}) = \\
& = -\frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)}\phi(\eta-\hbar,z_{23})\phi(-\hbar,-u_{ij}) + \phi(-\eta,-u_{ij})\phi(\eta-\hbar,-u_{ij}), \\
E_{ii}\otimes E_{ii}\otimes E_{jj}: \quad & \frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{12})\phi(\eta,-u_{ij}) = \phi(\eta-\hbar,-u_{ij})\phi(\hbar,-u_{ij})+ \\
& + \frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)}\phi(\hbar-\eta,z_{12})\phi(\eta,-u_{ij}) - \phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(-z_1-\hbar,-u_{ij}), \\
E_{ii}\otimes E_{ij}\otimes E_{jj}: \quad & -\frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{12})\phi(z_2+\hbar+\eta,-u_{ij}) = \\
& = \phi(z_1+\hbar+\eta,-u_{ij})\phi(z_{21},-u_{ij}) - \phi(z_2+\eta,-u_{ij})\phi(\hbar,-u_{ij}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{jj}\otimes E_{jj}\otimes E_{ij}:\quad & \frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{12})\phi(z_3+\hbar,-u_{ij}) = \phi(z_{31},-u_{ij})\phi(z_1+\hbar,-u_{ij})+\\
&+\frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)}\phi(\hbar-\eta,z_{12})\phi(z_3+\hbar,-u_{ij})-\phi(\hbar-\eta,-u_{ij})\phi(z_3+\eta,-u_{ij})+\\
&+\frac{\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\hbar,z_{13})\phi(z_3+\hbar,-u_{ij}),
\end{aligned}
$$

Последнее равенство — в компонентах вида $E_{ii}\otimes E_{ii}\otimes E_{ii}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)\phi(\eta,z_2+\hbar)}\phi(\hbar,z_{12})\phi(\eta,z_{23}) =\\
=&\frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)\phi(\eta,z_1+\hbar)}\phi(\eta,z_{13})\phi(\hbar-\eta,z_{12})+\\
+&\frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)\phi(\hbar,z_1+\eta)}\phi(\eta-\hbar,z_{23})\phi(\hbar,z_{13}),
\end{aligned}
$$

также получается из тождества Фея (4.20) и равенства:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\phi(\hbar,z_2+\eta)\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\hbar,z_1+\eta)\phi(\eta,z_2+\hbar)} = \frac{\phi(\hbar-\eta,z_2+\eta)\phi(\eta,z_3+\hbar)}{\phi(\hbar-\eta,z_1+\eta)\phi(\eta,z_1+\hbar)} =\\
=&\frac{\phi(\eta-\hbar,z_3+\hbar)\phi(\hbar,z_3+\eta)}{\phi(\eta-\hbar,z_2+\hbar)\phi(\hbar,z_1+\eta)} = \frac{\vartheta(z_1+\eta)\vartheta(z_2+\hbar)\vartheta(z_3+\eta+\hbar)}{\vartheta(z_1+\hbar+\eta)\vartheta(z_2+\eta)\vartheta(z_3+\hbar)}.
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] M.Aguiar. *Infinitesimal Hopf algebras.* Contemp.Math. 267 (2000) 1–29. M.Aguiar page

[2] G.E. Arutyunov, L.O. Chekhov, S.A. Frolov. *R-matrix quantization of the elliptic Ruijsenaars-Schneder model.* Commun. Math. Phys. 192:2 (1998) 405–432. arXiv:q-alg/9612032

[3] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon. *Introduction to classical integrable systems.* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics) (2003)

[4] R.J. Baxter. *Partition function of the Eight-Vertex lattice model.* Ann.Phys. 70 (1972) 193–228.
R.J. Baxter. *Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. II. Equivalence to a generalized ice-type lattice model*, Ann. Phys. 76 (1973) 25–47.

[5] A.A. Belavin. *Dynamical symmetry of Integrable Quantum Models.* Nucl. Phys. B 180 (1981) 189.

[6] F. Calogero. *Exactly solvable one-dimensional many-body problems.* Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411–416.
F.Calogero. *On a functional equation connected with integrable many-body problems.* Lett. Nuovo Cim. 16 (1976) 77–80.

[7] J.D. Fay. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 352, Springer (1973)

[8] LD Faddeev, EK Sklyanin, LA Takhtajan. *The quantum inverse problem method. 1.* Theoretical and Mathematical Physics 40, (1980) 688

[9] G. Felder. *Conformal field theory and integrable systems accociated to elliptic curves.* Proc. of the ICM 94 (1994) 1247–1255. arXiv:hep-th/9407154

[10] J. Gervais, A. Neveu. *Novel Triangle Relation and Absence of Tachyons in Liouville String Field Theory.* Nucl.Phys.B238 125.

[11] K. Hasegawa. *Crossing symmetry in elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and a new L-operator for Belavin's solution.* J.Phys. A: Math.Gen. 26 (1993) 3211-3228.
K. Hasegawa. *Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices.* Commun. Math. Phys. 187 (1997) 289–325. arXiv:q-alg/9512029

[12] I.M. Krichever. *Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles.* Funct.Anal.Appl. 14:4 (1980) 282–290 mathnet
И.М. Кричевер. *Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц.* Функц. анализ и его прил. 14:4 (1980) 45–54 mathnet

[13] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin, E.K. Sklyanin *Yang-Baxter equation and representation theory: I.* Letters in Mathematical Physics 5, (1981) 393-403

[14] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov. *Planck constant as a spectral parameter in integrable systems and KZB equations.* JHEP 10 (2014) 109. arXiv:1408.6246 [hep-th]
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov. *Quantum Baxter-Belavin R-matrices and multidimensional Lax pairs for Painlevé VI.* Theoret. and Math. Phys. 184:1 (2015) 924–939. arXiv:1501.07351 [math-ph]

[15] J.Moser. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations.* Adv. Math. 16 (1975) 197–220.

[16] Д. Мамфорд. *Лекции о тэта-функциях.* Мир, (1988)

[17] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras.* Phys. Rep. 71 (1981) 313–400.

[18] A. Polishchuk. *Classical Yang–Baxter Equation and the A_∞-Constraint.* Adv. in Math. 168:1 (2002) 56-95 open archive
A. Polishchuk. *A_∞-structures on an elliptic curve.* Commun.Math.Phys. 247 (2004) 527–551. arXiv:math/0001048 [math.AG]

[19] I. Sechin, A. Zotov. *Associative Yang-Baxter equation for quantum (semi-)dynamical R-matrices.* J. Math. Phys. 57 (2016) 053505 arXiv:1511.08761 [math.QA]

[20] E.K. Sklyanin *Method of the inverse scattering problem and the nonlinear quantum Schrödinger equation.* Soviet Physics Doklady 24 (1979), 107

[21] A.Weil. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker.* Springer-Verlag (1976)

[22] C.N. Yang. *Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction.* Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315.

[23] A. Zotov. *Higher order analogues of unitarity condition for quantum R-matrices* arXiv:1511.02468 [math-ph]