

Московский физико-технический институт (Государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики

Институт теоретической и экспериментальной физики
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Инстантоны, вихри и узлы

Никита Александрович Сопенко

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Горский Александр Сергеевич

Москва, 2016 год

Содержание

1 Введение	2
2 Калибровочные теории и статсуммы Некрасова	3
3 Калибровочные теории и инварианты торических узлов	4
3.1 Торические узлы в торических пространствах Калаби-Яу	5
3.2 Вихревой счет	7
3.3 Инстантонный счет	8
4 Эллиптическая алгебра Холла и инстантоны	9
4.1 Торические узлы	10
4.2 Неторические узлы	10
5 Обсуждение	11
6 Приложения	11
6.1 Геометрический переход	11
6.2 Рафинированный топологический вертекс	12
6.3 Эллиптическая алгебра Холла	14
6.4 Схема Гильберта на \mathbb{C}^2	14

1 Введение

Вопрос о связи между инвариантами узлов и квантовой теорией поля имеет долгую историю, начиная с классической работы Виттена [23], где он показал, что вильсоновские петли вдоль зацеплений в трехмерной неабелевой теории Черна-Саймонса совпадают с их топологическими инвариантами, известными как полиномы Джонса, коэффициенты в которых являются целыми числами. Позже эта картина была вложена [16] в контекст топологической теории струн типа А на пространстве T^*S^3 с набором топологических бран на базе S^3 , в которой теория Черна-Саймонса возникает как эффективная теория поля открытых струн на бранах. Используя аналог голографической дуальности для топологических струн, известной как геометрический переход [12], полиномы обрели новую интерпретацию, как индексы, считающие БПС состояния, а сами пространства БПС состояний были отождествлены с когомологиями комплексов, полиномы Пуанкаре которых и являются индексами [13]. В последствии, мотивируясь связью топологических струн и эффективных калибровочных теорий, возникающих при компактификации М-теории на заданные многообразия Калаби-Яу, инварианты узлов были рафинированы в инварианты, известные как суперполиномы [14].

В данной работе мы продемонстрируем новую связь, между инвариантами некоторых узлов и калибровочными теориями, возникающими при компактификации М-теории на некомпактные пространства Калаби-Яу, найденную в работах [1], [2]. Мы покажем, что определенные конденсаты в теориях, которые целиком определяются топологически защищенным БПС спектром, выражаются через производящие функции полиномов всех торических узлов, причем квантовые числа БПС состояний определяются не только градуировкой мономов конкретного узла, но и типом узла, определяемым для торических узлов числом намоток (n, m) , которые отождествляются в пятимерных (трехмерных) теориях с инстантонным (вихревым) зарядом и

электрическим зарядом БПС состояний.

Данная работа организована следующим образом:

В **разделе 2** мы кратко опишем физические объекты, связь которых с инвариантами узлов будет устанавливаться.

В **разделе 3** мы сформулируем явные утверждения, связывающие конденсаты в некоторых пятимерных и трехмерных калибровочных теориях с ХОМФЛИ полиномами торических узлов. Мы реализуем данные теории с помощью геометрической инженерии в М-теории, компактифицированной на пространство Калаби-Яу, и, воспользовавшись связью с топологическими струнами, объясним с помощью геометрического перехода возникновение инвариантов узлов в калибровочных теориях.

В **разделе 4** мы обсудим связь наших результатов с эллиптической алгеброй Холла, а также обсудим предполагаемое обобщение наших результатов для неторических узлов.

В **разделе 5** мы обсудим некоторые из интересных возникающих вопросов, на которые мы надеемся найти ответ в ближайшем будущем.

В конце имеются **приложения**, для более удобного чтения работы.

2 Калибровочные теории и статсуммы Некрасова

В данной работе нас будут интересовать суперсимметричные калибровочные теории в 4 и 5 измерениях с 8 суперзарядами, и также в 2 и 3 измерениях с 4 суперзарядами. Теории в 4 измерениях интересны в физике высоких энергий по очевидным причинам. Однако иногда теории с расширенной суперсимметрией удобно рассматривать как редукцию из теории в большем количестве измерений, в которых суперсимметрия минимальна. В данном случае нас будут интересовать минимально суперсимметричные 5d теории редуцированные суперсимметричным образом на окружность S^1 с радиусом β . В пределе $\beta \rightarrow 0$ все ответы для корреляционных функций наблюдаемых поднятых их четырехмерия будут стремиться к своим исходным значениям. Иными словами поднятие в пятимерие можно рассматривать как деформацию четырехмерной теории (β -деформация). Теории в двух и трех измерениях интересны сами по себе во многих отношениях, однако в нашем контексте они будут рассматриваться как теории возникающие на 1/2-БПС дефектах коразмерности 2.

Напомним, что в $\mathcal{N} = 1$ 5d теориях имеется 8 суперзарядов Q_α^i , которые образуют следующую алгебру суперсимметрий

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^{i\dagger}\} = \gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad (2.1)$$

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} (Z + iP_5), \quad (2.2)$$

где $i, j = 1, 2$ и мы используем $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$. Векторный мультиплет содержит калибровочное поле A_μ , скалярное действительное поле ϕ и псевдо-майорановский фермион λ . При редукции в 4d действительный скаляр объединяется с вильсоновской петлей вдоль пятого измерения, и вместе они образуют комплексный скаляр, в то время как псевдо-майорановский фермион при редукции дает два вейлевских фермиона. Также имеется гипермультиплет, содержащий два комплексных скаляра и фермионы, соответствующие количеству измерений.

Нас будет интересовать следующая величина

$$Z = \text{Tr}(-1)^F e^{-\beta H} \exp(i\beta\Omega_{\mu\nu}J_{\mu\nu}) \exp(i\beta a_i J_i), \quad (2.3)$$

где $J_{\mu\nu}$ - генераторы вращения $SO(4)$, а J_i - генераторы картановской подгруппы соответствующей глобальным калибровочным преобразованиям. Иными словами при обходе вдоль окружности мы поворачиваем пространство, на котором живет теория, в соответствии с параметрами $\Omega_{\mu\nu}$, которые задаются двумя угловыми скоростями ϵ_1 и ϵ_2 в плоскостях 12 и 34, соответствующим действию двух тором для $SO(4)$, и включаем вильсоновские линии вдоль пятого измерения в соответствии с параметрами a_i . В дальнейшем удобно ввести $q_{1,2} = \exp(i\beta\epsilon_{1,2})$.¹ Примечательно, что благодаря суперсимметрии в данную величину дают вклад лишь 1/2-БПС состояния теории. Вклад от каждого из них соответствует вкладу суперсимметричной механики, возникающей как (в данном случае точная) аппроксимация Борна-Оппенгеймера, дающие вклад в индекс состояния которой являются голоморфными сечениями таргет-пространства

$$Z_{j_L, j_R, Q} = \prod_{k_L=-j_L}^{k_L=j_L} \prod_{k_R=-j_R}^{k_R=j_R} \prod_{m_1, m_2=1}^{\infty} (1 - Q q_1^{k_L+k_R+m_1-1/2} q_2^{k_L-k_R+m_2-1/2})^{\pm 1}, \quad (2.4)$$

где Q - соответствующий "химический потенциал" для частицы, а знак берется в согласии со статистикой. Таким образом вычисляя этот индекс, мы в принципе можем найти вырожденность пространства БПС состояний, градуированного квантовыми числами, которые помимо углового момента и заряда по глобальной симметрии имеют дополнительное топологическое число, которое определяется по инстантонному сектору, в который данное БПС состояние дает вклад.

Помимо того, что это пространство БПС состояний интересно само по себе, оно важно с четырехмерной точки зрения, т.к. оно определяет эффективный препотенциал \mathcal{F} теории при низких энергиях на кулоновской ветке, т.е. когда комплексный скаляр четырехмерной теории принимает вакуумное значение, на нем происходит механизм Хиггса, и калибровочная группа $SU(N)$ ломается до $U(1)^{N-1}$. При этом вышеописанный индекс совпадает с экспонентой от препотенциала $Z = \exp(-\mathcal{F}(a, \epsilon_{1,2}))$. Таким образом вычисление индекса дает микроскопический вывод неявного вычисления препотенциала Зайбергом и Виттенем [15].

Явное вычисление этого индекса впервые было проделано Некрасовым [22] используя локализацию. Для эквивариантного действия по отношению к максимальному набору квантовых чисел, пространство неподвижных точек пространства модулей $U(N)$ инстантонов является набором изолированных точек, параметризуемых набором из N диаграмм Юнга.

$$Z = \sum_{f.p.} \frac{\sum_j e^{i\beta w_j}}{\prod_i (1 - e^{i\beta p_i})}, \quad (2.5)$$

где знаменатель появляется из-за касательного расслоения, а числитель зависит от состава материи. Оба характера могут быть явно посчитаны [22].

Также нас будут интересовать простейшие 1/2-БПС поверхностные дефекты в этих теориях типа Гукова-Виттена. Они могут быть описаны, как некоторые $\mathcal{N} = 2$ трехмерные ($\mathcal{N} = (2, 2)$ двумерные) теории с глобальной симметрией, совпадающей с пятимерной (четырёхмерной) калибровочной группой, через которую она и взаимодействует с внешним пространством.

3 Калибровочные теории и инварианты торических узлов

Согласно гипотезе геометрического инжиниринга [20] статсумма топологической струны типа А на некомпактном торическом многообразии Калаби-Яу совпадает с индексом, описанным

¹В дальнейшем мы будем также использовать обозначения $q_1 = q$ и $q_2 = t$

в предыдущем разделе, для теории, получающейся при компактификации М-теории на это пространство. Эту статсумму можно вычислять с помощью мощной техники, известной как топологический вертекс, о которой вкратце написано в приложении.

В данном разделе используя это соответствие и геометрический переход в топологических струнах (который кратко описан в приложении) мы сформулируем явное утверждение, связывающее инварианты торических узлов и индексы в калибровочных теориях.

3.1 Торические узлы в торических пространствах Калаби-Яу

Рассмотрим разрешенный конифолд с двумя стопками бран, намотанных на простейшие лагранжевы подмногообразия на внешних ногах.

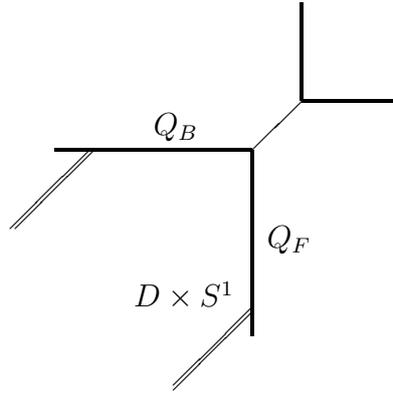


Рис. 1: Разрешенный конифолд с двумя стопками бран

Согласно [16] вклад в статсумму топологической струны от голоморфных инстантонов дается следующей формулой

$$Z_{inst.} = \left\langle \exp \left(\sum_{\beta, s, R_1, R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{s, R_1, R_2}^{\beta} \frac{q^{ns}}{n(1-q^n)} Q_{\beta}^n Tr_{R_1} U^n Tr_{R_2} V^n \right) \right\rangle_{CS_1, CS_2} \quad (3.1)$$

где U и V - голономии калибровочных полей в представлениях R_1 и R_2 на двух стопках бран вдоль границ голоморфных кривых, Q_{β} - кэлеров параметр для цикла β , $\mathcal{N}_{s, R_1, R_2}^{\beta}$ - целочисленные коэффициенты, определяющие вырожденности открытых БПС состояний с заданным спином s и заданными представлениями R_1 and R_2 для калибровочных симметрий на бранах. Рассмотрим голоморфную кривую, которая m раз наматывается на цикл Q_B и n раз на цикл Q_F . В каждом слое T^2 кривая замечает 1-цикл (m, n) . В результате границы кривой образуют торические узлы на лагранжевых подмногообразиях. Если взять производную по кэлеровому параметру в пределе $m \rightarrow 0$ и разложить результат по Q_B и Q_F , то коэффициент при $Q_B^m Q_F^n$ для взаимно простых (m, n) равен

$$\frac{1}{1-q} \sum_{k, s, R_1, R_2}^{\infty} k \mathcal{N}_{s, R_1, R_2}^{m, n, k} q^s \langle Tr_{R_1} U^n \rangle \langle Tr_{R_2} V^n \rangle \quad (3.2)$$

При этом экспонента, фигурирующая в статсумме исчезает, так как при $m \rightarrow 0$ статсумма тривиальна.

Мы можем компактифицировать лагранжевы подмногообразия до S^3 , если добавим дополнительные локусы вырождения в наше пространство Калаби-Яу ². Примечательно, что после компактификации мы можем сделать геометрический переход, заменив какую-нибудь или обе стопки из бран на геометрию. В результате мы остаемся либо с геометрией на рисунке (2), если мы делаем лишь один геометрический переход, либо с геометрией на рисунке (3), если мы делаем оба геометрических перехода.

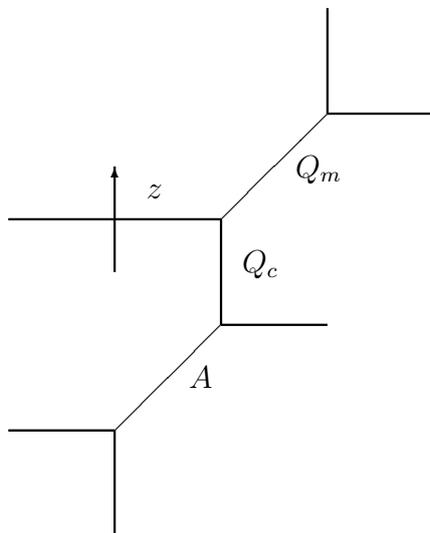


Рис. 2: Геометрия, после геометрического перехода на одной из стоек бран.

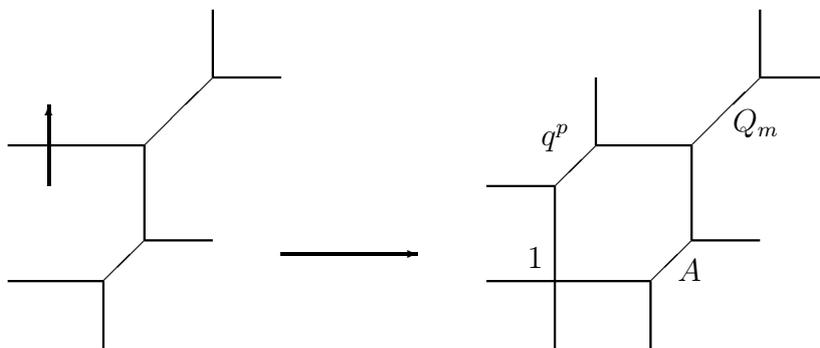


Рис. 3: Геометрия, после геометрического перехода на обеих стойках бран.

В последнем случае мы остаемся с чистой геометрией без каких-либо дополнительных бран.

²Вопрос о влиянии граничных условий на возникающие операторы заслуживает отдельного рассмотрения в более общих случаях

Свободная энергия для этой геометрии имеет вид

$$F = \sum_{m,n,p,l,r,s} \sum_{j_L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2j_L} \mathcal{N}_{m,n,p,l,r,s}^{j_L} (q^{-2kj_L} + \dots + q^{2kj_L})}{k(q^{k/2} - q^{-k/2})^2} Q_B^{km} Q_F^{kn} Q_{m1}^{kp} Q_{m2}^{kl} Q_{m3}^{kr} Q_{m4}^{ks} \quad (3.3)$$

Для кэлеровых параметров $1, q, A, Q_m$ ³ нас интересует производная по массе m в пределе $m \rightarrow 0$, так как статсумма стремится к 1. Если мы интересуемся коэффициентом при $Q_B^m Q_F^n$ в этой сумме для взаимно-простых (m, n) , то имеется лишь вклад от членов с $k = 1$ и мы получаем (с точностью до irrelevantных факторов)

$$H_{(m,n)} = \sum_{p,l,r,s} \sum_{j_L} \frac{(-1)^{2j_L} \mathcal{N}_{m,n,p,q,r,s}^{j_L} (q^{-2j_L} + \dots + q^{2j_L})}{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2} l(-A)^p q^r \quad (3.4)$$

Таким образом все коэффициенты в ХОМФЛИ полиномах торических узлов (m, n) могут быть выражены в терминах $\mathcal{N}_{m,n,p,l,r,s}^{j_L}$.

3.2 Вихревой счет

Как было показано в [19] единичная брана, заматающая лагранжево подпространство в торическом многообразии отвечает поверхностному оператору в калибровочной теории. В пертурбативном пределе пятимерные степени свободы отщепляются, и на этом дефекте имеется трехмерная теория, вихревой счет в которой совпадает со статсуммой топологической струны. Именно такую ситуацию мы имеем в геометрии из предыдущего раздела после одного геометрического перехода. Конкретно, геометрия (2) реализует $\mathcal{N} = 2$ теорию с одним $U(1)$ векторным мультиплетом, двумя фундаментальными и двумя анти-фундаментальными киральными мультиплетами. При этом рассматривается вихревая статсумма на $R^2 \times S^1$ в одном из вакуумов.⁴

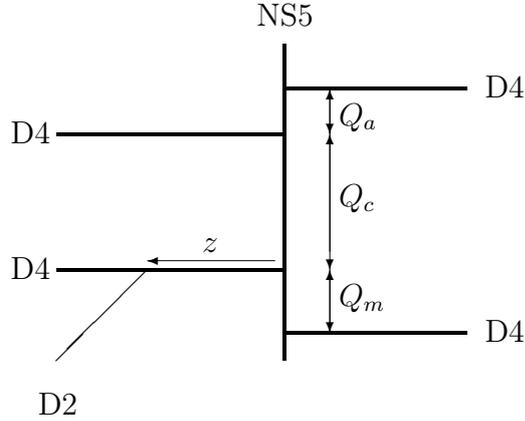


Рис. 4: Бранная конструкция для поверхностного оператора в IIA теории струн

Введя эквивариантный параметр $q = \exp(i\beta\epsilon)$ ⁵ вихревая статсумма для такой теории имеет вид

³В случае одной браны $p = 1$ на одной из стопок

⁴На данном рисунке лагранжева брана перемещена на нижнюю ногу

⁵Здесь мы рассматриваем нерафинированный случай $t = q^{-1}$, который точнее было бы отождествить не с обычным вихревым счетом при $t = 1$, как в [19], а с счетом учитывающим R-заряд. По крайней мере в простейших случаях, с которыми мы и имеем дело, этот факт сводится к простому переопределению параметров.

$$Z(z, q; Q_c, Q_m, Q_a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (1 - Q_m q^j) \prod_{j=0}^{m-1} (1 - Q_a Q_c q^j)}{\prod_{j=1}^m (1 - q^j) \prod_{j=0}^{m-1} (1 - Q_c q^j)} z^m \quad (3.5)$$

со сдвигом $Q_c \rightarrow q^{-1}Q_c$. Легко видеть, что эта статсумма совпадает с q -деформированной гипергеометрической функцией ${}_2\Phi_1^q(Q_m, Q_a Q_c; Q_c)$.

Беря производную по параметру m_f и предел $m_f \rightarrow 0$ мы получаем

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial m_f} \right|_{m_f=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (1 - Q_a Q_c q^j)}{(1 - q^m) \prod_{j=0}^{m-1} (1 - Q_c q^j)} z^m = \sum_{m,n} H_{(m,n)}(A = -Q_a, q) z^m Q_c^n \quad (3.6)$$

Коэффициенты $H_{(m,n)}$ могут быть легко найдены

$$H_{(m,n)} = \frac{1+A}{1-q} \sum_k q^{k(k+1)/2} \frac{[m+n-k-1]_q!}{[m]_q [n]_q [k]_q! [m-k-1]_q! [n-k-1]_q!} A^k, \quad (3.7)$$

где

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (3.8)$$

Это совпадает с результатом вычислений с помощью топологического вертекса и воспроизводит известные выражения для ХОМФЛИ полиномов торических узлов (m, n) . Также заметим, что если $A = 0$, то

$$(1-q)H_{(n,n+1)} = \frac{[2n]_q!}{[n]_q! [n+1]_q!} \quad (3.9)$$

что совпадает с q -деформированными числами Каталана.

Таким образом мы получаем, что полиномы узлов возникают в конденсатах трехмерных калибровочных теорий. Параметрами разложения являются вихревой параметр z и флейворный параметр Q . При этом симметрию между (m, n) и (n, m) можно также рассматривать, как зеркальную симметрию в $\mathcal{N} = 2$ трехмерных калибровочных теориях [21] (симметрию между частицами-квантами полей и вихрями).

3.3 Инстантонный счет

Геометрия после одного геометрического перехода имеет также другое представление с точки зрения пятимерной теории. А именно мы можем рассмотреть пертурбативный предел $\mathcal{N} = 1$ $SU(2)$ теории с четырьмя материальными гипермультиплетами и простейшим поверхностным дефектом типа ГВ. Помимо поверхностного дефекта мы можем изменить фрейминг k в центре торической диаграммы, который легко учесть в инстантонной статсумме, как степень детерминантного расслоения [24]. Интересующий нас конденсат имеет вид

$$\langle \tilde{\psi} \psi \rangle_{LB} = \left. \frac{\partial Z_{inst}}{\partial m_f} \right|_{m_f=0} = \sum_{n,m} Q_c^n z^m P_{n,nk+m}(A, q, t) \quad (3.10)$$

$$P(A, q, t)_{n,nk+m} = \sum_{\lambda: |\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum^l} q^{(k+1)\sum^a} \prod^{0,0} (1 - Aq^{-a'} t^{-l'}) \prod^{0,0} (1 - q^{a'} t^{l'})}{\prod (q^a - t^{l+1}) \prod (t^l - q^{a+1})} \text{Coef}_{z^m} M(z), \quad (3.11)$$

где $M(z)$ - вклад от поверхностного дефекта

$$M(z) = \prod_{j=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - zt^{j-1}q^{\lambda_j}}{1 - zt^{j-1}} \quad (3.12)$$

отнормированный на чисто трехмерные степени свободы. Легко проверить, что $P_{n,nk+m}(A, q, q^{-1})$ является ХОМФЛИ полиномом для торического узла $(n, nk+m)$. Более того при $m = 1$ и $t \neq q^{-1}$ этот полином совпадает с суперполиномом торического узла $(n, nk + 1)$, что однако не выполняется в общем случае.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда сделаны оба геометрических перехода (3). Данная геометрия реализует кулоновскую ветку пятимерной $\mathcal{N} = 1$ $SU(2)$ теории с четырьмя материальными гипермультиплетами. При этом выбирается весьма специальная точка кулоновской ветки, когда два мультиплет становятся безмассовыми⁶. Используя инстантонный счет Некрасова мы можем вычислить производную свободной энергии по Q_m в пределе $m \rightarrow 0$ для $t = q^{-1}$. В результате имеем

$$\left. \frac{\partial Z(1, A, q^p, Q_m; q)}{\partial m} \right|_{m=0} = \sum_{(m,n)} H_{(m,n)}(A, q) H_{(m,n)}(q^p, q) Q_B^m Q_F^n, \quad (3.13)$$

где как и выше $H_{(m,n)}$ - ХОМФЛИ полином для торического узла (m, n) , $Q_F = \exp(-\beta a)$ - кулоновский параметр, определяющий массу W-бозона, а $Q_B = Q_F \exp(-\beta/g^2)$ - параметр, определяющий эффективную константу связи и массу дионного инстантона. Таким образом информация о торическом узле (m, n) хранится в секторе БПС частиц с электрическим зарядом m и инстантонным зарядом n . Как и в трехмерном случае симметрия между (m, n) и (n, m) объясняется пятимерным аналогом зеркальной симметрии, известной также как дуальность "база-слой" или биспектральная дуальность, которая сводится просто к повороту торической диаграммы на $\pi/2$.

4 Эллиптическая алгебра Холла и инстантоны

Начиная с работ Накаджимы [3] стало ясно, что когомологии (К-теория) пространств модулей инстантонов несут представления бесконечномерных алгебр, что намекает на существование непертурбативных симметрий в калибровочных теориях. Эти наблюдения стали отправной точкой для многих находок в теоретической физике, которые можно объединить под условным названием BPS/CFT соответствие [9]. Тождества Уорда по отношению к этим симметриям дают нетривиальные непертурбативные тождества на различные локальные и нелокальные наблюдаемые, в частности уравнения типа KZ для наблюдаемых коразмерности 2 и уравнения типа qq -характеров для наблюдаемых коразмерности 4.

В данной работе нас будет интересовать алгебра, известная под многими названиями, такими как эллиптическая алгебра Холла, алгебра Динга-Иохара-Микки, квантовая тороидальная gl_1 алгебра и др. Эта алгебра возникает во многих контекстах математической физики. В частности эта алгебра действует на К-теории пространства модулей $U(N)$ инстантонов на \mathbb{C}^2 . Определение этой алгебры и ее представление на К-теории схемы Гильберта, которое нас и будет интересовать, смотрите в приложении.

⁶Для этого исходные массы этих двух мультиплетов должны совпадать

4.1 Торические узлы

В [4] было показано, что эллиптическая алгебра Холла изоморфна алгебре Аганаджич-Шакирова [5], которая является алгеброй торических зацеплений в рафинированной теории Черна-Саймонса. Суперполином торического узла (m, n) был отождествлен с $\langle 0|SP_{m,n}|0\rangle$, где S - элемент $SL_2(\mathbb{Z})$, который меняет циклы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ тора местами. Используя формулы для матричных элементов $P_{m,n}$ можно написать явную формулу для суперполинома торического узла

$$\mathcal{P}_{n,m}(a, q, t) = \sum_{|\mu|=n} \langle \mu|P_{n,m}|0\rangle \prod_{\square \in \mu} (1 - aq^{a'}t^{t'}) \quad (4.1)$$

Замечание. Здесь в $\langle 0|SP_{m,n}|0\rangle$ используется не стандартное скалярное произведение, естественное с точки зрения К-теории схемы Гильберта, а скалярное произведение Макдональда. Однако имеется простая связь между ними (see [4]).

Мы можем переинтерпретировать эту формулу с точки зрения топологического вертекса. Вектор $S|0\rangle$ отвечает разрешенному конифолду с кэлеровым параметром Q и тремя пустыми ногами. Не пустая нога задает состояние, которое можно записать как

$$S|0\rangle = \sum_{\mu} \prod_{\square \in \mu} (1 - Qq^{a'}t^{t'}) |\mu\rangle \quad (4.2)$$

Затем мы сворачиваем это состояние с оператором $P_{(m,n)}$, действовавшим на вакуум.

С точки зрения калибровочной теории такое сворачивание означает вычисление среднего некоторого оператора в $U(1)$ калибровочной теории с добавленной фундаментальной материей с массовым параметром Q . В пределе $Q \rightarrow 0$, т.е. при отщеплении материи, мы остаемся с состоянием Гайотто $\sum_{\mu} |\mu\rangle$.

Теперь посмотрим, как такое представление стыкуется с картиной из предыдущего раздела. Как было уже сказано совпадение коэффициентов в конденсате с суперполиномами торических узлов верно лишь в случае $(n, nk + 1)$, где k - уровень Черна-Саймонса. В нашем случае мы также имеем некоторое состояние, сворачиваемое с $S|0\rangle$. Для $(n, nk + 1)$ мы имеем следующее выражение

$$\langle n, nk + 1| = \sum_{\lambda: |\lambda|=n} \frac{t^{(k+1)\sum l} q^{(k+1)\sum a} \prod^{0,0} (1 - q^{a'}t^{t'}) \times \text{Coef}_z M(z)}{\prod (q^a - t^{l+1}) \prod (t^l - q^{a+1})} \langle \lambda| \quad (4.3)$$

Легко проверить, что данное состояние совпадает с состоянием $\langle 0|P_{(n,nk+1)}$. Таким образом мы заключаем, что пучок, эквивариантную эйлерову характеристику которого мы считаем в физической статсумме из предыдущего раздела, совпадает с пучком, ассоциированным с торическим узлом $(n, nk + 1)$ в [4]. Было бы интересно понять, как физически реализовывать пучки для произвольного торического узла.

4.2 Неторические узлы

Из описания представления действия алгебры Холла на К-теории схемы Гильберта ясно, что $P_{(n,m)}|0\rangle$ есть пуш-форвард $\pi^+ : \text{Hilb}^{n,0} \rightarrow \text{Hilb}^n$ линейного расслоения $\mathcal{L}_1^{S_{m/n}(1)} \dots \mathcal{L}_n^{S_{m/n}(n)}$ на флаговой схеме Гильберта $\text{Hilb}^{n,0}$, где \mathcal{L}_i - канонические расслоения $\mathcal{I}_{i+1}/\mathcal{I}_i$. Интересно задаться

вопросом, о том, чему с точки зрения узла отвечают степени расслоений.

Рассмотрим косу из n нитей, отвечающую узлу $(n, 1)$. Обернем i -ую нить вокруг первых $(i - 1)$ нитей a_i раз и склеим концы. Легко понять, что результирующее зацепление не зависит от порядка обрачивания. Мы утверждаем, что суперполином результирующего зацепления совпадает с эквивариантной эйлеровой характеристикой следующего пучка⁷

$$\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(a = 0, q, t) = \chi_{q,t}(\pi_*^+(\mathcal{L}_1^{a_1} \dots \mathcal{L}_n^{a_n} \pi^{-*}(\cdot))) \quad (4.4)$$

В частном случае $a_i = S_{m/n}(i)$ зацепление совпадает с торическим узлом (n, m) . Было бы интересно найти аналогичное представление для произвольной косы, а также физическую реализацию этой конструкции.

5 Обсуждение

В данной работе мы описали связь некоторых пятимерных и трехмерных суперсимметричных теорий с инвариантами простейших узлов. Естественно возникает вопрос о том насколько эта связь долгоидущая, как с одной, так и с другой стороны. Во-первых обобщается ли она на случай произвольного узла, произвольной группы и ее представления, отвечающей этому узлу? В разделе 4 мы привели аргументы, что она по крайней мере может быть расширена для неторических узлов, однако явная физическая реализация пока отсутствует. Мы надеемся, что в ближайшем будущем этот вопрос будет решен. Также остается не ясным вопрос о несовпадении рафинированной версии конденсата с суперполиномом произвольного торического узла.

Другим интересным вопросом является вопрос о возникновении инвариантов узлов в двумерных конформных теориях и интегрируемых системах. Как известно из АГТ соответствия пятимерная статсумма Некрасова совпадает с конформным блоком q -деформированной алгебры Вирасоро. В итоге мы приходим к утверждению, что этот конформный блок является производящей функцией для полиномов торических узлов. Интересно, имеется ли более прямая связь между этими предметами. То же относится и к интегрируемым системам, которые возникают в пределе $t \rightarrow 1$.

Особенно интересным является вопрос об интерпретации дифференциалов, возникающих в гомологических комплексах Хованова-Розанского и их связи с алгеброй БПС состояний [25]. Помимо БПС алгебры внутри гомологий одного узла, предположительно должны быть операторы, связывающие гомологии разных узлов, так как в нашей картине различные узлы появляются внутри одной теории. Такие операторы, насколько нам известно, в литературе не обсуждались. Было бы интересно их найти.

6 Приложения

6.1 Геометрический переход

В [12] аналог голографического соответствия в топологических струнах был предложен. Конкретно статсумма топологической струны на разрешенном конифолде $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ с комплексифицированным кэлеровым параметром $t = ig_s N$, где g_s - константа связи топологической струны, была отождествлена со статсуммой $U(N)$ теории Черна-Саймонса на S^3 с уровнем,

⁷Здесь для простоты $a = 0$.

определяемым из $g_s = 2\pi/(k + N)$, которая возникает, как эффективная теория на стопке из N бран на базе S^3 в топологической струне типа А на T^*S^3 . В последствии это утверждение было обобщено на случай более замысловатой торической геометрии, в которой разрешенный конифолд входит как поддиаграмма. В результате мы остаемся с некоторой новой геометрией, с набором бран на 3-циклах. При этом помимо вклада открытых струн с концами на одной и той же стопке, имеются голоморфные инстантоны, с границами на разных стопках, вклад от которых имеет вид [16]

$$(instantons\ with\ charge\ Q) \sim \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{R_1 \dots R_k}(q^n, Q^n)}{n(1 - q^n)} \text{Tr}_{R_1} V_1^n \dots \text{Tr}_{R_k} V_k^n\right) \quad (6.1)$$

Все эти вклады дают некоторый сложный оператор в колчанной теории Черна-Саймонса, живущей на бранах, вакуумное значение которого в итоге совпадает со статсуммой исходной геометрии.

6.2 Рафинированный топологический вертекс

Опишем кратко топологический вертекс [18, 17], с помощью которого, как с помощью диаграмм Фейнмана, мы можем вычислять статсумму топологической струны типа А на торических пространствах Калаби-Яу, что совпадает со статсуммой Некрасова пятимерной суперсимметричной теории, возникающей при компактификации М-теории на заданное пространство.

Основной строительный элемент - это тривалентная вершина - Рис. 5.

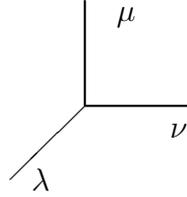


Рис. 5: Топологический вертекс.

Чтобы вычислить статсумму мы должны разделить торическую диаграмму на заданные тривалентные куски, вставить на каждую внутреннюю ногу диаграмму Юнга и пустую диаграмму Юнга на внешние ноги, а затем просуммировать по всем возможным диаграммам. Каждый тривалентный кусок дает следующий вклад ⁸

$$C_{\mu\nu\lambda}(q) = q^{-\frac{k(\nu)}{2}} s_{\lambda}(q^{\rho}) \sum_{\tau} s_{\mu^t/\tau}(q^{\rho+\lambda}) s_{\nu/\tau}(q^{\rho+\lambda^t}), \quad (6.2)$$

где s_{λ} - полином Шура и $\rho_i = i - \frac{1}{2}$. Мы использовали следующие функции от диаграммы Юнга λ :

$$\|\lambda\|^2 = \sum_i \lambda_i^2 \quad (6.3)$$

$$k(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2 - \lambda_i^t{}^2 \quad (6.4)$$

⁸Заметим, что мы используем $1/q$ по отношению к [17]

Также необходимо учесть фрейминговые факторы, соответствующие внутренним линиям [18], которые дают следующий вклад

$$f_\nu(q) = (-1)^{|\nu|} q^{\frac{k(\nu)}{2}} \quad (6.5)$$

в степени, соответствующей фреймингу.

Мы также можем добавить браны, живущие на простейшем лагранжевом подмногообразии на внешней ноге. Для этого мы должны расположить диаграмму μ на эту внешнюю ногу и добавить фактор

$$s_\mu(-z_1, -z_2, \dots) \quad (6.6)$$

В [17], Икбал, Козказ и Вафа обобщили эту технику на случай не самодуального Ω -фона:

$$C_{\mu\nu\lambda}(t, q) = (qt)^{-\frac{||\nu||^2 + ||\lambda||^2}{2}} t^{\frac{k(\nu)}{2}} P_\lambda(t^{-\rho}, 1/q, t) \sum_{\tau} (qt)^{\frac{||\nu|| - ||\tau|| - ||\mu||}{2}} s_{\mu^t/\tau}(t^{-\rho} q^\lambda) s_{\nu/\tau}(q^\rho t^{-\lambda^t}), \quad (6.7)$$

где P_λ - полином Макдональда и

$$\begin{aligned} q &= \exp(i\beta\epsilon_1) \\ t &= \exp(i\beta\epsilon_2) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Фрейминговый фактор равен

$$f_\nu(t, q) = (-1)^{|\nu|} (tq)^{\frac{||\nu|| - ||\nu||^2}{2}} q^{\frac{k(\nu)}{2}} \quad (6.9)$$

Новый вертекс не имеет циклической симметрии, и в нем необходимо выбрать выделенное направление на торической диаграмме (see Fig. 6). Итоговый результат однако от него не зависит.

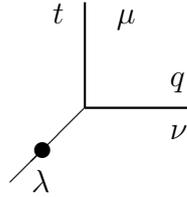


Рис. 6: Рафинированный топологический вертекс. Выделенное направление отмечено точкой. БПС

Для всех известных примеров этот вертекс воспроизводит Некрасовскую статсумму. Сложнее дело обстоит с поверхностными дефектами. В простейших случаях удается отождествить статсумму с поверхностным дефектом и статсумму, посчитанную с помощью рафинированного вертекса, модифицированного присутствием браны, однако полной ясности в этом вопросе нет [19].

6.3 Эллиптическая алгебра Холла

Определим

$$q_1 = e^{i\beta\epsilon_1}, \quad q_2 = e^{i\beta\epsilon_2}, \quad q_3 = e^{i\beta\epsilon_3}$$

$$\alpha_n = \frac{(q_1 - 1)(q_2 - 1)(q_3 - 1)}{n},$$

где $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$. Эллиптическая алгебра Холла задается центральными элементами $\kappa_{(m,n)}$ с соотношениями $\kappa_{(m,n)}\kappa_{(k,l)} = \kappa_{(m+k,n+l)}$ и операторами $p_{(m,n)}$, где $(m,n) \in \mathbb{Z} \setminus \{0,0\}$. Определим также операторы $\theta_{(kn,km)}$ для взаимно-простых (m,n)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \theta_{(kn,km)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k p_{(kn,km)}\right)$$

Имеются следующие коммутационные соотношения

- для сонаправленных (m,n) и (m',n')

$$[p_{(m,n)}, p_{(m',n')}] = \delta_{m+m',0} \cdot \frac{\kappa_{(m,n)}^{-1} - \kappa_{(m,n)}}{\alpha_g},$$

где $g = \gcd(m,n)$.

- если треугольник по часовой стрелке $(0,0)$, (m',n') и $(m+m',n+n')$ не содержит узлов решетки

$$[p_{(m,n)}, p_{(m',n')}] = \kappa^* \frac{\theta_{(m+m',n+n')}}{\alpha_1}$$

Как и в [4] в этой работе мы рассматриваем для простоты случай $\kappa_{(m,n)} = 1$.

6.4 Схема Гильберта на \mathbb{C}^2

Рассмотрим многообразие Hilb_d , которое параметризует идеалы $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x,y]$ коразмерности d . Введем также действие тора $T = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Фиксированные точки действия этого тора параметризуются диаграммами Юнга. Имеется тавтологическое расслоение ранга d над Hilb_d , слой которого $\text{Taut}_d|_{\mathcal{I}} = \mathbb{C}[x,y]/\mathcal{I}$. Также имеются простейшие Накаджимовские соответствия:

$$\text{Hilb}_d \xleftarrow{\pi^-} \text{Hilb}_{d,d+1} = \{(\mathcal{I} \supset \mathcal{I}')\} \xrightarrow{\pi^+} \text{Hilb}_{d+1}$$

и линейное расслоение \mathcal{L} над $\text{Hilb}_{d,d+1}$, чей слой над парой $(\mathcal{I}' \subset \mathcal{I})$ является одномерным фактором \mathcal{I}/\mathcal{I}' . Теперь рассмотрим операторы [8]

$$e_n^\pm : K \rightarrow K \quad e_n^\pm(\alpha) = \pi_*^\pm([\mathcal{L}]^n \cdot \pi^{\mp*}(\alpha)), \quad K = \bigotimes_{d=1}^{\infty} K_T^*(\text{Hilb}_d)$$

$$p_n(\alpha) = \alpha \cdot [\text{Taut}]^n \quad p_{-n}(\alpha) = \alpha \cdot [\text{Taut}^*]^n$$

действующие на K -теорных группах схем Гильберта, являющимися модулями над $K_T^*(pt) = \mathbb{K}_0 = \mathbb{C}[q,t]$. Эти операторы реализуют действие генераторов эллиптической алгебры Холла $p_{(\pm 1,n)}$ и $p_{(0,n)}$. Несложно также описать действие элементов $p_{(m,n)}$ на K для $\gcd(m,n) = 1$. Для этого нужно ввести флаговые схемы Гильберта

$$\text{Hilb}_d \xleftarrow{\pi^-} \text{Hilb}_{d,d+m} = \{(\mathcal{I}_d \supset \mathcal{I}_{d+1} \supset \dots \supset \mathcal{I}_{d+m})\} \xrightarrow{\pi^-} \text{Hilb}_{d+m}$$

где $\mathcal{I}_k \subset \text{Hilb}_k$, и определить линейные расслоения $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ слои которых $\mathcal{L}_i|_p = \mathcal{I}_{d+m-i}/\mathcal{I}_{d+m-i-1}$. Действие имеет следующий вид

$$p_{(m,n)}(\alpha) = \pi_*^+ \left(\prod_{i=1}^n [\mathcal{L}_i]^{\lfloor \frac{ni}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n(i-1)}{m} \rfloor} \cdot \pi^{-*}(\alpha) \right)$$

Для общего элемента $p_{km, kn}$ действие устроено немного сложнее. См. [6].

Для написания общей формулы мы введем базис $|\mu\rangle$, которые пропорционален пучкам-небоскрегам, соответствующим фиксированным точкам параметризуемыми диаграммами Юнга μ со следующим скалярным произведением

$$\langle \mu | \lambda \rangle = \frac{\delta_{\mu, \lambda}}{g_\lambda}$$

$$g_\lambda = \prod_{\square \in \lambda} (1 - q^a t^{-l-1})(1 - q^{-a-1} t^l),$$

где g_λ есть обратный вклад $U(1)$ векторного мультиплетта в Некрасовскую статсумму. Нормировка выбрана таким образом, что состояние Гайотто в этом базисе имеет вид

$$|v\rangle = \sum_{\mu} |\mu\rangle$$

Общая формула для действия $p_{(kn, km)}$ с $kn > 0$ имеет вид ([4], [6])

$$P_{(kn, km)}|\lambda\rangle = \frac{\gamma^{kn}}{[k]} \sum_{\mu=\lambda+\square_{kn}+\dots+\square_1}^{SYT} \left[\sum_{j=0}^{k-1} (qt)^j \frac{\chi_{n(k-1)+1} \chi_{n(k-2)+1} \dots \chi_{n(k-j)+1}}{\chi_{n(k-1)} \chi_{n(k-2)} \dots \chi_{n(k-j)}} \right] \frac{\prod_{i=1}^{kn} \chi_i^{S_{m/n}(i)} (qt \chi_i - 1)}{\left(1 - qt \frac{\chi_2}{\chi_1}\right) \dots \left(1 - qt \frac{\chi_{kn}}{\chi_{kn-1}}\right)} \prod_{1 \leq i < j \leq (kn)} \omega^{-1} \left(\frac{\chi_j}{\chi_i} \right) \prod_{i=1}^{kn} \prod_{\square \in \lambda} \omega^{-1} \left(\frac{\chi_{\square}}{\chi_i} \right), \quad (6.10)$$

где

$$S_{m/n}(i) = \left\lfloor \frac{mi}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m(i-1)}{n} \right\rfloor, \quad [k] = \frac{(q^k - 1)(t^k - 1)}{(q-1)(t-1)}, \quad \gamma = \frac{(q-1)(t-1)}{qt(1-qt)}, \quad \chi_i = \chi_{\square_i}$$

и

$$\chi_{\square} = q^{a'} t^{l'}, \quad \omega(x) = \frac{(x-1)(x-qt)}{(x-q)(x-t)}$$

Заметим, что $\omega(qt/x) = \omega(x)$. Для $P_{0,m}$ формула имеет следующий вид

$$P_{0,m}|\lambda\rangle = \left(\frac{q^k t^k}{(1-q^k)(1-t^k)} + \sum_{\square \in \lambda} \chi_{\square}^m \right) |\lambda\rangle \quad (6.11)$$

В (6.10) мы суммируем по всем способам добавить kn клеток к диаграмме λ , стандартные таблицы Юнга нумеруют порядок, в котором мы добавляем эти клетки.

Список литературы

- [1] A.Gorsky, A.Milkekhin, N.Sopenko, *The Condensate from Torus Knots*, arXiv:1506.06695, JHEP 1509 (2015) 102
- [2] A.Gorsky, A.Milkekhin, *Condensates and instanton – torus knot duality. Hidden Physics at UV scale*, arXiv:1412.8455, Nucl.Phys. B900 (2015) 366-399
- [3] H. Nakajima, *Gauge theory on resolutions of simple singularities and simple Lie algebras.*, Int Math Res Notices (1994) 1994 (2): 61-74.
- [4] E.Gorsky, A.Negut, *Refined knot invariants and Hilbert schemes*, <http://arxiv.org/pdf/1304.3328.pdf>, J.Math.Pure.Appl. 104 (2015) 403-435
- [5] M. Aganagic, S. Shakirov, *Knot Homology from Refined Chern-Simons Theory*, arXiv:1105.5117, Commun.Math.Phys. 333 (2015) no.1, 187-228
- [6] A. Negut, *Moduli of Flags of Sheaves on \mathbb{P}^2 and their K-theory*, arXiv:1209.4242
- [7] O. Schiffmann, E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra and the K-theory of the Hilbert scheme of \mathbb{A}^2* , Duke Math. J. 162 (2013), no. 2, 279366.
- [8] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra*, Kyoto J. Math. 51 (2011), no. 4, 831854.
- [9] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson-Schwinger equations and qq-characters*, arXiv:1512.05388, JHEP 1603 (2016) 181
- [10] Jean-Emile Bourguine, Yutaka Matsuo, Hong Zhang, *Holomorphic field realization of SH^c and quantum geometry of quiver gauge theories*, <http://arxiv.org/pdf/1512.02492.pdf>
- [11] Shoichi Kanno, Yutaka Matsuo, Hong Zhang, *Extended Conformal Symmetry and Recursion Formulae for Nekrasov Partition Function*, <http://arxiv.org/pdf/1306.1523.pdf>
- [12] R. Gopakumar, C. Vafa, *Topological gravity as large N topological gauge theory*, hep-th/9802016, *M theory and topological strings. 1.*, hep-th/9809187, *On the gauge theory / geometry correspondence*, hep-th/9811131, *M theory and topological strings. 2.*, hep-th/9812127
- [13] Gukov, Schwarz, Vafa, *Khovanov-Rozansky homology and topological strings*, hep-th/0412243, Lett.Math.Phys. 74 (2005) 53-74
- [14] Nathan M. Dunfield, Sergei Gukov, Jacob Rasmussen, *The Superpolynomial for Knot Homologies*, arXiv:math/0505662
- [15] N. Seiberg, E.Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys. B426 (1994) 19-52
- [16] Hiroshi Ooguri and Cumrun Vafa. *Knot invariants and topological strings*. Nucl.Phys. B577 (2000), p. 419 438. doi: 10.1016/S0550-3213(00)00118-8. arXiv: hep-th/9912123 [hep-th].
- [17] Amer Iqbal, Can Kozcaz, Cumrun Vafa, *The Refined topological vertex*, arXiv:hep-th/0701156
- [18] Mina Aganagic, Albrecht Klemm, Marcos Marino, Cumrun Vafa, *The Topological vertex*, arXiv:hep-th/0305132
- [19] Sergei Gukov, Tudor Dimofte and Hollands, *Vortex Counting and Lagrangian 3-manifolds*, arXiv:1006.0977

- [20] Sheldon Katz, Albrecht Klemm, Cumrun Vafa, *Geometric Engineering of Quantum Field Theories*, arXiv:hep-th/9609239
- [21] N. Seiberg, K. Intriligator, *Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories*, hep-th/9607207, Phys.Lett. B387 (1996) 513-519
- [22] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, hep-th/0206161, Adv.Theor.Math.Phys. 7 (2003) no.5, 831-864
- [23] E.Witten, *Quantum field theory and Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. Volume 121, Number 3 (1989), 351-399.
- [24] Y. Tachikawa, *Five-dimensional Chern-Simons terms and Nekrasov's instanton counting*, JHEP **0402** (2004) 050 doi:10.1088/1126-6708/2004/02/050 [hep-th/0401184]
- [25] J.Harvey, G. Moore, *On the algebras of BPS states*, hep-th/9609017
S. Gukov, M. Stosic, *Homological Algebra of Knots and BPS States*, arXiv:1112.0030