

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Секулярно растущие петлевые поправки  
к динамическому эффекту Казимира**

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

**Выполнил:**

студент 321 группы  
Алексеев Сергей Олегович

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный  
2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Гармоники</b>	<b>3</b>
2.1	Гармоники для покоящегося зеркала . . . . .	4
2.2	Гармоники для зеркала, движущегося с постоянной скоростью . . . . .	5
2.3	Гармоники для ломаной мировой линии . . . . .	6
2.4	Гармоники для произвольной мировой линии . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Каноническое коммутационное соотношение</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Среднее значение тензора энергии-импульса (в древесном приближении)</b>	<b>8</b>
4.1	Произвольная мировая линия . . . . .	9
4.2	Примеры . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Функция Уайтмана (в древесном приближении)</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Гамильтониан в свободной теории</b>	<b>12</b>
6.1	Покоящееся зеркало . . . . .	12
6.2	Зеркало, движущееся с постоянной скоростью . . . . .	12
6.3	Ломаная мировая линия . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Общие формулы для петлевых поправок</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Вычисление двухпетлевых поправок к <math>n_{kk'}</math></b>	<b>17</b>
8.1	Ситуация в пустом пространстве (без зеркала) . . . . .	17
8.2	Покоящееся зеркало . . . . .	18
8.3	Ломаная мировая линия . . . . .	19
8.4	Зеркало, приближающееся к скорости света . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Вычисление двухпетлевых поправок к <math>K_{kk'}</math></b>	<b>24</b>
9.1	Покоящееся зеркало . . . . .	24
9.2	Ломаная мировая линия . . . . .	25
9.3	Зеркало, приближающееся к скорости света . . . . .	28
<b>10</b>	<b>Однопетлевые поправки к пропагатору Келдыша</b>	<b>29</b>
<b>11</b>	<b>Поправки к четырехточечной корреляционной функции</b>	<b>30</b>
<b>12</b>	<b>Заключение</b>	<b>31</b>
<b>13</b>	<b>Список литературы</b>	<b>32</b>

# 1 Введение

В научном сообществе общепринятой является точка зрения, согласно которой излучение неинерциально движущегося зеркала всеобъемлюще описывается в квазиклассическом приближении [1],[2]. Цель данной работы заключается в том, чтобы показать, что во взаимодействующей теории это не так – учет петлевых поправок к корреляционным функциям приводит к возникновению в них (и, как следствие, в плотности потока энергии) секулярно растущих вкладов, что связано с нестационарностью гамильтониана. В действительности, в теории конденсированного состояния такое явление представляет собой ситуацию общего положения [3],[4]. Оно также наблюдается в квантовой теории поля в пространстве де Ситтера [5]-[8], в скалярной электродинамике на фоне сильных электрических полей [10],[11] и в квантовых поправках к излучению Хокинга [12].

Системы с нестационарными гамильтонианами мало изучены в контексте квантовой теории поля. В то же время физика таких систем может кардинально отличаться от того, что мы привыкли видеть. Нестационарность влечет за собой отсутствие однородности по времени, что приводит, в частности, к нарушению закона сохранения энергии. В результате могут происходить такие процессы, которые иначе были бы запрещены, например, рождение частиц. Во взаимодействующих теориях нестационарность приводит к возникновению секулярно растущих петлевых поправок к пропагаторам. Это означает, что даже если константа взаимодействия мала, то петлевые поправки к физическим величинам становятся сравнимыми с древесным результатом по прошествии достаточного большого времени. Чтобы понять физику секулярно растущих вкладов, необходимо просуммировать лидирующие поправки, идущие из всех петель. Для рассматриваемой в данной работе системы вопрос пересуммирования остается открытым: нам известно, как оно производится, только в массивном случае, когда растут со временем только поправки к двухточечным корреляционным функциям, причём двухпетлевая поправка растёт по времени линейно. В данной же задаче ситуация сильно усложняется: как будет показано ниже, помимо того, что двухпетлевые поправки к пропагаторам растут не как первая степень времени, секулярно растут также поправки и к высшим корреляторам.

Основной текст работы состоит из 10 частей. В части 2 содержатся постановка задачи и нахождение гармоник, решающих волновое уравнение с нулевым граничным условием на некоторой времениподобной кривой. В части 3 мы проверяем выполнение канонического коммутационного соотношения для операторов  $\phi$  и  $\pi$ , разложенных по найденным гармоникам. В части 4 воспроизводится известная формула для плотности потока энергии в древесном приближении. В части 5 вычисляется древесная функция Уайтмана в совпадающих точках. Часть 6 содержит вычисление гамильтониана и оператора полного импульса для различных траекторий зеркала. Части 7-10 посвящены подробному вычислению петлевых поправок к пропагатору Келдыша. Часть 11 содержит частичное вычисление петлевых поправок к четырехточечному коррелятору.

## 2 Гармоники

Мы рассматриваем двумерную безмассовую скалярную теорию поля с действительным полем  $\phi$ :

$$S = \int d^2x \left[ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right],$$

причём поле  $\phi(t, x)$  равно 0 на произвольной времениподобной кривой  $(t, z(t))$  – мировой линии

некоторого массивного тела, называемого зеркалом:

$$\phi(t, z(t)) = 0.$$

Предполагается, что граничные члены в действии тривиальны.

Рассмотрим сначала древесное приближение  $\lambda = 0$ . Для любой траектории  $z(t)$  полевой оператор  $\phi(t, x)$  может быть представлен в следующем виде:

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} [a_\omega h_k(t, x) + \text{h. c.}],$$

где  $a_k, a_k^\dagger$  – это операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям  $[a_k, a_{k'}^\dagger] = 2\pi\delta(k - k')$ . Гармоники  $h_k(t, x)$  решают уравнение Клейна-Гордона и удовлетворяют тому же граничному условию, что и поле  $\phi$ :

$$h_k(t, z(t)) = 0.$$

В этой части мы найдём гармоники  $h_k(t, x)$  для произвольной траектории  $z(t)$ .

## 2.1 Гармоники для покоящегося зеркала

Начнём со случая, когда зеркало вечно покоится, то есть с траектории  $z(t) \equiv 0$ . Чтобы проквантовать теорию, мы решаем свободное волновое уравнение ( $\lambda = 0$ ) со следующим граничным условием (смотри рисунок 1):

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \equiv \partial^2 \phi(t, x) = 0, \text{ и } \phi(t, 0) = 0. \quad (1)$$

Любое решение этого уравнения может быть представлено в следующем виде:

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \sin(kx) [A_k e^{-ikt} + A_k^* e^{ikt}],$$

где  $A_k$  – это некоторая функция  $k$ . Таким образом, квантованное поле  $\phi(t, x)$  принимает следующую форму:

$$\hat{\phi}(t, x) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \sin(kx) [A_k e^{-ikt} \hat{a}_k + \text{h. c.}],$$

где операторы рождения и уничтожения  $a_k, a_k^\dagger$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[a_{k'}, a_k^\dagger] = 2\pi\delta(k - k'). \quad (2)$$

Требую, чтобы полевой оператор  $\phi$  и сопряженный ему импульс  $\pi = \partial_t \phi$  удовлетворяли каноническому коммутационному соотношению, мы можем найти коэффициент  $A_k$ : с одной стороны,

$$[\phi(x, t), \partial_t \phi(y, t)] = i\delta(x - y),$$

с другой стороны,

$$[\phi(x, t), \partial_t \phi(y, t)] = 2 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (ik) |A_k|^2 \sin(kx) \sin(ky).$$

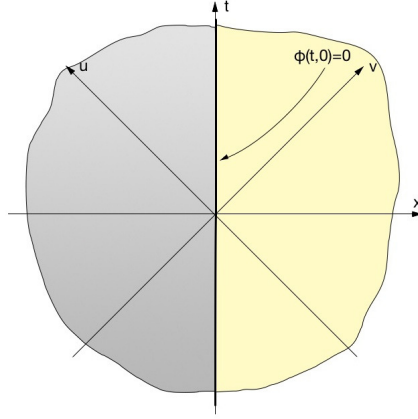


Рис. 1: Поле  $\phi(t, x)$  равно 0 на мировой линии покоящегося зеркала. Квантовая теория поля рассматривается в области справа от зеркала.

Определяя  $A_k = \sqrt{2/k}$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} [\phi(x, t), \partial_t \phi(y, t)] &= -i \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} [e^{ik(x+y)} - e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)} + e^{-ik(x+y)}] = \\ &= -i \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [e^{ik(x+y)} - e^{ik(x-y)}] = i\delta(x-y) - i\delta(x+y). \end{aligned} \quad (3)$$

В дополнение к ожидаемому слагаемому  $i\delta(x-y)$ , мы получаем также слагаемое  $i\delta(x+y)$ . Однако, оно не равно 0 только тогда, когда  $x = y = 0$  (то есть когда обе точки  $x$  и  $y$  лежат на границе), вследствие чего оно может быть откинуто.

Таким образом, гармоники  $h_k$  имеют следующую форму:

$$h_k(t, x) = \sqrt{\frac{2}{k}} \sin(kx) e^{-ikt},$$

или в light-cone координатах  $v = t + x$ ,  $u = t - x$ :

$$h_k(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-iku}]. \quad (4)$$

Первая экспонента  $e^{-ikv}$  описывает плоскую волну, движущуюся по направлению к зеркалу, в то время как вторая экспонента  $e^{-iku}$  отвечает за волну, отраженную от зеркала таким образом, чтобы обеспечить необходимое граничное условие.

## 2.2 Гармоники для зеркала, движущегося с постоянной скоростью

Чтобы найти гармоники в этом случае

$$\partial^2 \phi(t, x) = 0, \text{ и } \phi(t, -\beta t) = 0 \quad (5)$$

нужно найти отраженную волну, которая обеспечила бы выполнение нужного граничного условия. Очевидно, что следующие гармоники

$$h_k(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-ik\alpha u}] \quad (6)$$

решают волновое уравнение и равны 0 на мировой линии  $(t, -\beta t)$ , если  $\alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ .

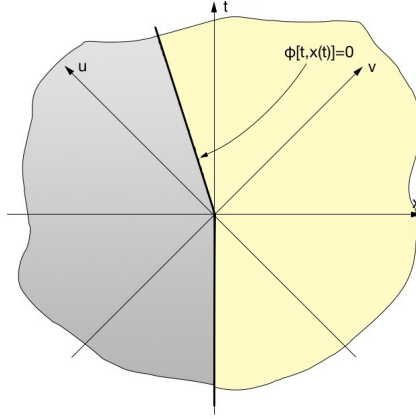


Рис. 2: Ломаная мировая линия. Отраженные волны в областях  $u > 0$  и  $u < 0$  различны.

### 2.3 Гармоники для ломаной мировой линии

Далее рассмотрим случай, когда зеркало находится в покое до момента времени  $t = 0$  и затем мгновенно начинает двигаться с постоянной скоростью (смотри рисунок 2):

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\beta t & t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

В этом случае отраженные волны в областях  $u > 0$  и  $u < 0$  различны:

$$h_k(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - \theta(-u)e^{-iku} - \theta(u)e^{-ik\alpha u}]. \quad (8)$$

Несложно проверить, что эти гармоники решают волновое уравнение и удовлетворяют нулевому граничному условию на кривой  $(t, z(t))$ .

### 2.4 Гармоники для произвольной мировой линии

Зная решение волнового уравнения с нулевым граничным условием на ломаной мировой линии (рисунок 2), можно получить из него решение, равное 0 на произвольной гладкой мировой линии (рисунок 3). Для этого мы можем аппроксимировать произвольную гладкую кривую ломаной линией, написать для неё гармоники и затем взять предел, в котором ломаная линия становится гладкой кривой.

Итак, рассмотрим следующую мировую линию:  $z(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ; при  $t \geq 0$  эта мировая линия состоит из прямых отрезков, соединяющих точки  $(t_i, z_i)$  и  $(t_{i-1}, z_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ , причём  $(t_0, z_0)$  равно  $(0, 0)$ . Мы также полагаем, что  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$  для всех допустимых значений  $i$  и что  $z_i < z_{i-1}$ . Тогда решение волнового уравнения, равное 0 на этой ломаной линии, имеет следующий вид:

$$e^{-ikv} - \theta(-u)e^{-iku} - \sum_{i=1}^{\infty} \theta[-(t-x) + t_i - z_i] \cdot \theta[t-x - (t_{i-1} - z_{i-1})] \cdot \exp \left[ -i\omega \left( \alpha_i u + \frac{z_{i-1}t_i - z_i t_{i-1}}{\Delta t} (1 + \alpha_i) \right) \right],$$

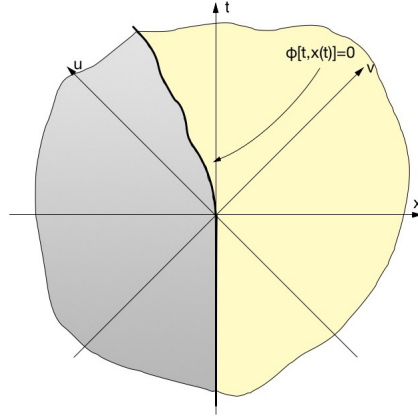


Рис. 3: Произвольная гладкая мировая линия.

где  $\alpha_i$  – это обозначение для

$$\frac{1 - \beta_i}{1 + \beta_i}, \text{ причем } \beta_i = -\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} \equiv -\frac{\Delta z_i}{\Delta t} \geq 0.$$

Ряд, написанный выше, состоит из слагаемых, которые решают волновое уравнение и обеспечивают необходимые граничные условия в различных областях пространства-времени, определяемых тета-функциями. Теперь мы раскладываем все функции от  $t_{i-1}$  около точки  $t_i$  до первого порядка по  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \theta[-(t-x) + t_i - z_i] \cdot \theta[t-x - (t_{i-1} - z_{i-1})] \cdot \exp \left\{ -i\omega \left( \alpha_i u + (1 + \alpha_i) \frac{z_{i-1} t_i - z_i t_{i-1}}{\Delta t} \right) \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \theta[-(t-x) + t_i - z_i] \cdot \left( \theta[t-x - (t_i - z_i)] + \delta[t-x - (t_i - z_i)] \left( 1 - \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \Delta t \right) \times \\ & \quad \times \exp \left\{ -i\omega \left[ \alpha_i u + (1 + \alpha_i) \left( z_i - \frac{\Delta z_i}{\Delta t} t_i \right) \right] \right\} + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Используя тот факт, что  $\theta(x)\theta(-x) = 0$ , сумма может быть упрощена:

$$\theta(0) \sum_{i=1}^{\infty} \Delta t \delta[t-x - (t_i - z_i)] \left( 1 - \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \cdot \exp \left\{ -i\omega \left[ \alpha_i u + (1 + \alpha_i) \left( z_i - \frac{\Delta z_i}{\Delta t} t_i \right) \right] \right\} + O(\Delta t^2).$$

Устремляя теперь  $\Delta t$  к 0, мы получаем результат с точностью до множителя:

$$\theta(0) \int_0^{\infty} d\tau \delta[u - (\tau - z(\tau))] \left( 1 - \frac{dz}{d\tau} \right) \cdot \exp \left\{ -i\omega \left[ \alpha(\tau) u + (1 + \alpha(\tau)) \left( z(\tau) - \frac{dz}{d\tau} \tau \right) \right] \right\} = \theta(0) \cdot e^{-i\omega(2t_u - u)},$$

где  $t_u$  – неявная функция  $u$ , определяемая уравнением:  $u = t_u - z(t_u)$ . Сравнивая этот результат с тем, что должно получиться в случае траектории  $z(t) \equiv 0$ , мы получаем, что необходимо положить в этой формуле  $\theta(0) = 1$ .

Таким образом, для произвольной времениподобной траектории  $z(t)$  мы имеем следующие гармоники (см. также [1],[2]):

$$h_k(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-ik(2t_u - u)}], \quad (9)$$

где  $t_u$  – это решение уравнения:  $t_u - z(t_u) = u$ .

### 3 Каноническое коммутационное соотношение

В этой части мы проверим, что найденные выше гармоники (9) обеспечивают выполнение корректного коммутационного соотношения между полем  $\phi$  и сопряженным импульсом  $\pi = \partial_t \phi$ :

$$\phi(u, v) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} [a_k h_k(u, v) + \text{h. c.}],$$

$$\partial_t \phi = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2}} \left[ a_k \left[ e^{-ikv} - e^{-ik(2t_u - u)} \left( 2 \frac{dt_u}{du} - 1 \right) \right] + \text{h. c.} \right].$$

Подставляя эти выражения в коммутатор  $[\phi, \pi]$  и используя равенства (2), мы получаем:

$$[\phi(t, x), \partial_t \phi(t, y)] = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \left[ [e^{-ikv_x} - e^{-ik(2t(u_x) - u_x)}] [e^{ikv_y} - e^{ik(2t(u_y) - u_y)}] f(u_y) \right] + \text{h. c.},$$

где

$$f(u) = 2 \frac{dt_u}{du} - 1 = \frac{2}{1 - z'(t_u)} - 1 = \frac{2}{1 + \beta(t_u)} - 1 = \frac{1 - \beta(t_u)}{1 + \beta(t_u)}$$

(мы предполагаем, что  $z'(t) = -\beta(t)$  и  $\beta(t) \geq 0$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} [\phi(t, x), \partial_t \phi(t, y)] &= \frac{i}{2} \left\{ \delta[v_x - v_y] + f(u_y) \cdot \delta[2t(u_x) - u_x - 2t(u_y) + u_y] - \right. \\ &\quad \left. - f(u_y) \cdot \delta[v_x - 2t(u_y) + u_y] - \delta[2t(u_x) - u_x - v_y] \right\} = \\ &= \frac{i}{2} \left[ \delta(v_x - v_y) + \frac{f(u_y)}{|f(u_y)|} \delta(u_x - u_y) + \text{границные слагаемые} \right] = i\delta(x - y) + \text{гр. слагаемые.} \end{aligned}$$

"Границные слагаемые" – это вклад в коммутатор, пропорциональный  $f(u_y)\delta[v_x - 2t(u_y) + u_y] + \delta[2t(u_x) - u_x - v_y]$ . Эти  $\delta$ -функции не равны 0 только тогда, когда  $x = y = z(t)$ , то есть когда обе точки лежат на границе. Таким образом, в области справа от границы, мы имеем стандартное коммутационное соотношение:

$$[\phi(t, x), \pi(t, y)] = i\delta(x - y). \quad (10)$$

### 4 Среднее значение тензора энергии-импульса (в древесном приближении)

В этой части мы исследуем влияние зеркала на поток энергии в древесном приближении (описываемый  $tx$ -компонентой тензора энергии-импульса). Сначала мы воспроизведем хорошо известную формулу для плотности потока энергии для общего случая движения зеркала [1]. Затем мы получим ответы для некоторых конкретных случаев.



## 4.1 Произвольная мировая линия

Чтобы вычислить  $T_{tx}$ , мы используем следующую процедуру регуляризации расходящихся интегралов [2]:

$$\langle T_{tx} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \partial_t \phi(t, x) \partial_x \phi(t + i\varepsilon, x) + \partial_x \phi(t, x) \partial_t \phi(t + i\varepsilon, x) \rangle, \quad (11)$$

где среднее берется по основному состоянию  $|0\rangle$ , соответствующему рассматриваемым гармоникам  $h_k$  (такому, что  $a_k |0\rangle = 0$  для всех  $k$ ). Подставляя выражение  $\phi(t, x)$  через гармоники  $h_k(u, v)$  в эту формулу, мы получаем следующую формулу для плотности потока энергии:

$$\langle T_{tx} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk k [e^{-k\varepsilon} - p'(u)p'(u + i\varepsilon)e^{ik[p(u+i\varepsilon)-p(u)]}],$$

где  $p(u) = 2\tau_u - u$  и  $p'(u) = \frac{dp}{du}$ .

Производя интегрирование и устремляя  $\varepsilon$  к 0, мы получаем формулу, справедливую для произвольной мировой линии зеркала. Более того, результат может быть выражен в терминах скорости зеркала и её производных [2]:

$$\langle T_{tx} \rangle (u) = \frac{1}{24\pi} \left[ \frac{p'''}{p'} - \frac{3}{2} \left( \frac{p''}{p'} \right)^2 \right] = -\frac{1}{12\pi} \frac{(1+v)^{1/2}}{(1-v)^{3/2}} \frac{d}{dt} \frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}} \Big|_{t=\tau_u}. \quad (12)$$

Обратим внимание, что  $\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}}$  есть не что иное, как ускорение зеркала в его мгновенно сопутствующей системе отсчета.

## 4.2 Примеры

Рассмотрим теперь приложения формулы (12) для  $\langle T_{tx} \rangle$ , полученной в предыдущем разделе.

Если зеркало движется с нулевым собственным ускорением (в частности если его скорость постоянна), то полученная выше формула дает  $\langle T_{tx} \rangle = 0$ .

В случае ломаной мировой линии рассматриваемая формула не работает, поскольку производная  $p(u)$  не определена. Тем не менее, мы можем легко получить  $\langle T_{tx} \rangle$ , производя прямые вычисления. В этом случае мы должны взять гармоники (8), пространственные и временные производные которых имеют следующий вид:

$$\partial_t h_k(u, v) = (\partial_v + \partial_u) h_k(u, v) = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[ \theta(u) (e^{-ikv} - \alpha e^{-ik\alpha u}) + \theta(-u) (e^{-ikv} - e^{-iku}) \right],$$

$$\partial_x h_k(u, v) = (\partial_v - \partial_u) h_k(u, v) = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[ \theta(u) (e^{-ikv} + \alpha e^{-ik\alpha u}) + \theta(-u) (e^{-ikv} + e^{-iku}) \right].$$

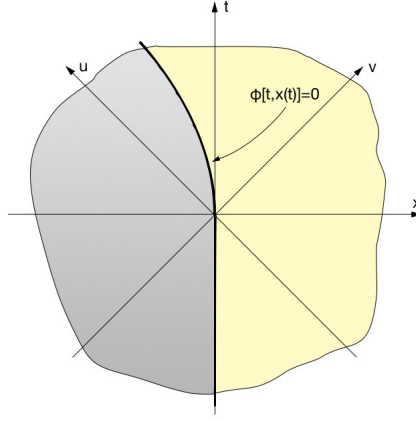


Рис. 4: Мировая линия зеркала, асимптотически приближающегося к скорости света.

Теперь мы подставляем эти производные в формулу (11) для  $\langle T_{tx} \rangle$  :

$$\begin{aligned}
\langle T_{tx} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\infty k dk \left[ \theta(u)\theta(u+i\varepsilon)(e^{-k\varepsilon} - \alpha^2 e^{-k\alpha\varepsilon}) + \theta(-u)\theta(-u-i\varepsilon)(e^{-k\varepsilon} - e^{-k\varepsilon}) \right] + \right. \\
&+ \left. \int_0^\infty k dk \left[ \theta(u)\theta(-u-i\varepsilon)(e^{-k\varepsilon} - \alpha e^{-ik\alpha u} e^{iku} e^{-k\varepsilon}) + \theta(-u)\theta(u+i\varepsilon)(e^{-k\varepsilon} - \alpha e^{-iku} e^{ik\alpha u} e^{-k\alpha\varepsilon}) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \theta(-u)\theta(u+i\varepsilon) \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{[u(\alpha-1) + i\alpha\varepsilon]^2} \right] + \theta(u)\theta(-u-i\varepsilon) \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{[u(1-\alpha) + i\varepsilon]^2} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \theta(-u) \left[ \theta(u) + \delta(u)i\varepsilon - \frac{1}{2}\delta'(u)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{u^2(\alpha-1)^2} + O(\varepsilon) \right] + \right. \\
&+ \left. \theta(u) \left[ \theta(-u) - \delta(u)i\varepsilon + \frac{1}{2}\delta'(u)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right] \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{u^2(\alpha-1)^2} + O(\varepsilon) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2}\delta'(u)[\theta(u) - \theta(-u)] + O(\varepsilon) \right\} = \frac{1}{8\pi} \delta'(u)[\theta(u) - \theta(-u)].
\end{aligned}$$

Несмотря на то что этот результат определен только как обобщенная функция, он удовлетворяет физическим требованиям, согласно которым плотность потока энергии не равна 0, только когда  $u = 0$ . Получим  $\langle T_{tx} \rangle$  также для мировой линии, асимптотически приближающейся к светоподобной кривой при  $t$ , стремящемся к  $\infty$  (см. рисунок 4):

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -t + a(1 - e^{-t/a}) & t \geq 0, \end{cases} \quad (13)$$

здесь  $a$  – произвольный параметр, имеющий размерность времени. Чтобы получить  $\langle T_{tx} \rangle$  в этом случае, можно использовать общую формулу (12). Производные  $p(u)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
p(u) &\equiv 2t_u - u \equiv t_u + z(t_u) = a(1 - e^{-t_u/a}), \\
p'(u) &\equiv \frac{dp}{du} = \frac{dp}{dt_u} \frac{dt_u}{du} = \left( 1 - \frac{dz}{dt_u} \right)^{-1} \frac{dp}{dt_u} = \frac{e^{-t_u/a}}{2 - e^{-t_u/a}} = \frac{1}{2e^{t_u/a} - 1}, \\
p''(u) &= -\frac{2}{a} \cdot \frac{e^{-t_u/a}}{(2 - e^{-t_u/a})^3}, \quad p'''(u) = \left( \frac{2}{a} \right)^2 \frac{e^{-t_u/a}(1 + e^{-t_u/a})}{(2 - e^{-t_u/a})^5}.
\end{aligned}$$

В результате, имеем

$$\langle T_{tx} \rangle = \frac{1}{12\pi a^2} \frac{2e^{-t_u/a} - 1}{(e^{-t_u/a} - 2)^4}.$$

Когда  $u$  стремится к  $\infty$ , поток энергии становится почти постоянным и равным  $-\frac{1}{2^4 \cdot 12\pi a^2}$ .

## 5 Функция Уайтмана (в древесном приближении)

В этом разделе мы рассмотрим поведение функции Уайтмана в древесном приближении в совпадающих точках для различных мировых линий зеркала:

$$\begin{aligned} D^W(x, y)|_{x \rightarrow y} &\equiv \langle \phi(t, x) \phi(t + i\epsilon, x) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2k} \left[ e^{-ikv} - e^{-ikp_u} \right] \left[ e^{ik(v+i\epsilon)} - e^{ikp(u+i\epsilon)} \right] = \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2k} \left[ e^{-k\epsilon} + e^{-k\epsilon p'(u)} - e^{-k(\epsilon+i(p_u-v))} - e^{-k(\epsilon p'(u)+i(v-p_u))} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \log \frac{[\epsilon + i(p_u - v)] [\epsilon p'(u) + i(v - p_u)]}{\epsilon^2 p'(u)} = \frac{1}{4\pi} \log \left[ 1 + \frac{i(v - p_u)}{\epsilon p'(u)} + \frac{i(p_u - v)}{\epsilon} + \frac{(p_u - v)^2}{\epsilon^2 p'(u)} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \log \frac{(p_u - v)^2}{\epsilon^2 p'(u)}, \text{ при } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Во-первых, рассмотрим случай зеркала, скорость которого стремится к скорости света, (13). В этом случае функция  $p(u)$  и её производные в пределе  $u \rightarrow \infty$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p(u) &= a(1 - e^{-t_u/a}) \approx a, \\ p'(u) &= \frac{1}{2e^{t_u/a} - 1} \approx \frac{e^{-u/2a}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, двухточечный коррелятор в совпадающих точках растёт линейно по  $u$  и логарифмически по  $v$ :

$$D^W(x, y)|_{x \rightarrow y} \approx \frac{1}{4\pi} \log \frac{2e^{u/2a}(a - v)^2}{\epsilon^2} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{u}{2a} + \log \frac{2(a - v)^2}{\epsilon^2} \right], \quad u \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Во-вторых, рассмотрим следующую мировую линию (при  $\beta < 1$ ):

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\beta t + a(1 - e^{-\beta t/a}) & t \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

когда скорость зеркала при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к скорости, меньшей скорости света  $\beta < 1$ . Тогда  $p(u)$  и  $p'(u)$  при  $u \rightarrow \infty$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p(u) &= t_u(1 - \beta) + a(1 - e^{-\beta t_u/a}) \approx t_u(1 - \beta) \approx \alpha u, \\ p'(u) &= \frac{1 - \beta(1 - e^{-\beta t_u/a})}{1 + \beta(1 - e^{-\beta t_u/a})} \approx \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \equiv \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, для этой мировой линии функция Уайтмана в совпадающих точках растёт логарифмически по  $(\alpha u - v)$ :

$$D^W(x, y)|_{x \rightarrow y} \approx \frac{1}{4\pi} \log \frac{(\alpha u - v)^2}{\alpha \epsilon^2}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Отметим, что такое поведение функции Уайтмана очень похоже на поведение функции Уайтмана для безмассового скалярного поля в пространстве де Ситтера в случае минимальной связи (см., например, [14],[15]).

## 6 Гамильтониан в свободной теории

В этой части мы найдём гамильтониан в свободной теории для различных мировых линий зеркала и покажем, что для нестационарных траекторий он не может быть диагонализирован раз и навсегда. Тем не менее, некоторая линейная комбинация гамильтониана  $H$  и оператора полного момента  $P$ , представляющая собой оператор эволюции вдоль направления мировой линии, может быть диагонализирована, когда движение зеркала стационаризуется.

### 6.1 Покоящееся зеркало

Найдём гамильтониан свободной теории, интегрируя плотность энергии по пространственной координате:

$$H^0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx [(\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2]. \quad (17)$$

Подставляя в эту формулу выражение (4) для поля  $\phi$  через гармоники, получаем:

$$H^0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk'}{2\pi} \sqrt{kk'} \int_0^\infty dx \left[ \left( a_k a_{k'} + a_k^\dagger a_{k'}^\dagger \right) \left( e^{-i(k+k')v} + e^{-i(k+k')u} \right) + \left( a_k a_{k'}^\dagger + a_k^\dagger a_{k'} \right) \left( e^{-i(k-k')v} + e^{-i(k-k')u} \right) \right].$$

Первое слагаемое даёт  $\delta(k+k')$  после интегрирования по  $x$ , второе —  $\delta(k-k')$ . Следовательно,

$$H^0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} k \left[ a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k \right]. \quad (18)$$

Мы видим, что найденные гармоники диагонализуют свободный гамильтониан.

### 6.2 Зеркало, движущееся с постоянной скоростью

Используя равенство (17) и гармоники (6), мы находим, что в данном случае гамильтониан зависит от времени:

$$H = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (1 + \alpha) \omega \left[ a_\omega a_\omega^\dagger + a_\omega^\dagger a_\omega \right] + \frac{i}{2} (\alpha - 1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}(\omega + \omega')}{(\omega + \omega')^2 + 0^2} \left[ a_\omega a_{\omega'} e^{-it(1-\beta)(\omega+\omega')} - a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger e^{it(1-\beta)(\omega+\omega')} \right] + \frac{i}{2} (\alpha - 1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}(\omega - \omega')}{(\omega - \omega')^2 + 0^2} \left[ a_\omega a_{\omega'}^\dagger e^{-it(1-\beta)(\omega-\omega')} - a_\omega^\dagger a_{\omega'} e^{it(1-\beta)(\omega-\omega')} \right]. \quad (19)$$

Это означает, что он не может быть диагонализирован раз и навсегда. Также, мы видим, что оператор полного момента имеет аналогичную структуру:

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\beta t}^\infty dx \left[ \partial_t \phi \partial_x \phi + \partial_x \phi \partial_t \phi \right] = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (1 - \alpha) \omega \left[ a_\omega a_\omega^\dagger + a_\omega^\dagger a_\omega \right] - \frac{i}{2} (\alpha + 1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}(\omega + \omega')}{(\omega + \omega')^2 + 0^2} \left[ a_\omega a_{\omega'} e^{-it(1-\beta)(\omega+\omega')} - a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger e^{it(1-\beta)(\omega+\omega')} \right] + \quad (20)$$

$$-\frac{i}{2}(\alpha + 1) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}(\omega - \omega')}{(\omega - \omega')^2 + 0^2} \left[ a_\omega a_{\omega'}^\dagger e^{-it(1-\beta)(\omega-\omega')} - a_\omega^\dagger a_{\omega'} e^{it(1-\beta)(\omega-\omega')} \right].$$

Поскольку

$$\alpha - 1 = -\frac{2\beta}{1+\beta} \quad \text{and} \quad \alpha + 1 = \frac{2}{1+\beta}, \quad (21)$$

мы замечаем, что следующая линейная комбинация  $H$  и  $P$  имеет очень простую форму и является диагональным оператором:

$$H - \beta P = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} (1 - \beta)\omega \left[ a_\omega a_\omega^\dagger + a_\omega^\dagger a_\omega \right]. \quad (22)$$

Этот результат вполне ожидаем, так как оператор  $H - \beta P$  определяет трансляции в пространстве-времени в направлении 2-вектора скорости зеркала. В самом деле,

$$\exp(-iP_\mu x^\mu) \Big|_{x=-\beta t} = \exp(-iHt - iPx) \Big|_{x=-\beta t} = \exp[-it(H - \beta P)].$$

В то же время, как можно видеть из уравнений (19) и (20), если скорость зеркала приближается к скорости света  $\beta \rightarrow 1$ , то  $H$  и  $P$  перестают зависеть от времени, вследствие чего могут быть диагонализированы по отдельности.

### 6.3 Ломаная мировая линия

В этом случае гармоники могут быть представлены в следующем виде (см. равенство (8)):

$$h_k(u, v) = \theta(u)h_k^\beta(u, v) + \theta(-u)h_k^0(u, v), \quad (23)$$

где

$$h_k^0(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-iku}], \quad \text{and} \quad h_k^\beta(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-ik\alpha u}].$$

В таком же виде могут быть записаны производные гармоник

$$\partial_t h_\omega(u, v) = \theta(u)\partial_t h_\omega^\beta + \theta(-u)\partial_t h_\omega^0,$$

$$\partial_x h_\omega(u, v) = \theta(u)\partial_x h_\omega^\beta + \theta(-u)\partial_x h_\omega^0,$$

а также поле  $\phi$  и его производные:

$$\phi = \theta(u)\phi^\beta + \theta(-u)\phi^0,$$

$$\partial_t \phi = \theta(u)\partial_t \phi^\beta + \theta(-u)\partial_t \phi^0,$$

$$\partial_x \phi = \theta(u)\partial_x \phi^\beta + \theta(-u)\partial_x \phi^0,$$

где  $\phi^\beta$  разложено по гармоникам  $h^\beta$ , а  $\phi^0$  – по гармоникам  $h^0$ . Тогда из вышенаписанных формул следует, что гамильтониан и оператор импульса имеют следующую структуру:

$$H = \theta(-t)H^0 + \theta(t) \left[ \int_{-\beta t}^t dx [(\partial_t \phi^\beta)^2 + (\partial_x \phi^\beta)^2] + \int_t^\infty dx [(\partial_t \phi^0)^2 + (\partial_x \phi^0)^2] \right],$$

$$P = \theta(-t)P^0 + \theta(t) \left[ \int_{-\beta t}^t dx [\partial_t \phi^\beta \partial_x \phi^\beta + \partial_x \phi^\beta \partial_t \phi^\beta] + \int_t^\infty dx [\partial_t \phi^0 \partial_x \phi^0 + \partial_x \phi^0 \partial_t \phi^0] \right],$$

где  $H^0$  и  $P^0$  – это те же гамильтониан и оператор момента, что и в случае покоящегося зеркала.

Подставим теперь выражение для поля  $\phi$  через операторы  $a_\omega$ ,  $a_\omega^\dagger$  в формулы выше:

$$H = \theta(-t)H^0 + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \left[ a_\omega a_{\omega'} \left( e^{-i(\omega+\omega')t} \frac{e^{-i(\omega+\omega')x}}{-i(\omega+\omega')} \right) \Big|_{-\beta t}^t + \alpha^2 e^{-i(\omega+\omega')\alpha t} \frac{e^{i(\omega+\omega')\alpha x}}{i(\omega+\omega')\alpha} \Big|_{-\beta t}^t \right) + \dots \Big] + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \left[ a_\omega a_{\omega'} \left( \frac{e^{-2i(\omega+\omega')t}}{i(\omega+\omega')} - \frac{1}{i(\omega+\omega')} \right) + \dots \right].$$

Многоточия обозначают аналогичные слагаемые, содержащие  $a_\omega a_{\omega'}^\dagger$ ,  $a_\omega^\dagger a_{\omega'}$  and  $a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger$ .

Точное выражение для гамильтониана имеет следующий вид:

$$H = \theta(-t)H^0 + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} [a_\omega a_{\omega'} \xi(\omega, \omega') + a_\omega a_{\omega'}^\dagger \xi(\omega, -\omega') + a_\omega^\dagger a_{\omega'} \xi(-\omega, \omega') + a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger \xi(-\omega, -\omega')],$$

где

$$\begin{aligned} \xi(\omega, \omega') &= e^{-i(\omega+\omega'-i\varepsilon)t} \frac{e^{-i(\omega+\omega'-i\varepsilon)x}}{-i(\omega+\omega'-i\varepsilon)} \Big|_{-\beta t}^t + \alpha^2 e^{-i(\omega+\omega'+i\varepsilon)\alpha t} \frac{e^{i(\omega+\omega'+i\varepsilon)\alpha x}}{i(\omega+\omega'+i\varepsilon)\alpha} \Big|_{-\beta t}^t + \\ &+ \frac{e^{-2i(\omega+\omega'-i\varepsilon)t}}{i(\omega+\omega'-i\varepsilon)} - \frac{1}{i(\omega+\omega'+i\varepsilon)} = \frac{e^{-i(\omega+\omega'-i\varepsilon)(1-\beta)t}}{i(\omega+\omega'-i\varepsilon)} + \frac{\alpha-1}{i(\omega+\omega'+i\varepsilon)} - \alpha \frac{e^{-i(\omega+\omega'+i\varepsilon)(1-\beta)t}}{i(\omega+\omega'+i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, после упрощения гамильтониана, имеем:

$$\begin{aligned} H &= \theta(-t)H^0 + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \text{v. p.} \frac{1}{\omega+\omega'} \frac{1}{i} [(1-\alpha)e^{-i(\omega+\omega')(1-\beta)t} + (\alpha-1)] a_\omega a_{\omega'} + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \{\omega \rightarrow -\omega, \omega' \rightarrow -\omega'\} a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \text{v. p.} \frac{1}{\omega-\omega'} \frac{1}{i} [(1-\alpha)e^{-i(\omega-\omega')(1-\beta)t} + (\alpha-1)] a_\omega a_{\omega'}^\dagger + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \{\omega \rightarrow -\omega, \omega' \rightarrow -\omega'\} a_\omega^\dagger a_{\omega'} + \theta(t) \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega [a_\omega^\dagger a_\omega + a_\omega a_\omega^\dagger]. \end{aligned} \quad (25)$$

Производя аналогичные вычисления, получаем также оператор импульса:

$$\begin{aligned} P &= \theta(-t)P^0 + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \text{v. p.} \frac{1}{\omega+\omega'} \frac{1}{i} [e^{-i(\omega+\omega')(1-\beta)t}(1+\alpha) + (1-\alpha)] a_\omega a_{\omega'} + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \{\omega \rightarrow -\omega, \omega' \rightarrow -\omega'\} a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \text{v. p.} \frac{1}{\omega-\omega'} \frac{1}{i} [e^{-i(\omega-\omega')(1-\beta)t}(1+\alpha) + (1-\alpha)] a_\omega a_{\omega'}^\dagger + \\ &+ \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2} \{\omega \rightarrow -\omega, \omega' \rightarrow -\omega'\} a_\omega^\dagger a_{\omega'}. \end{aligned} \quad (26)$$

Мы видим, что коэффициенты разложения гамильтониана и оператора импульса по операторам рождения и уничтожения зависят от времени. Однако, если вычислить линейную комбинацию  $H - \beta P$ , зависимость от времени исчезнет. Действительно,

$$H - \beta(t)P = \theta(-t)H^0 + \theta(t) \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2i} (\alpha - 1)(1 + \beta) \left[ \text{v. p.} \frac{1}{\omega + \omega'} a_\omega a_{\omega'} + \text{v. p.} \frac{1}{-\omega - \omega'} a_\omega^\dagger a_{\omega'}^\dagger + \text{v. p.} \frac{1}{\omega - \omega'} a_\omega a_{\omega'}^\dagger + \text{v. p.} \frac{1}{-\omega + \omega'} a_\omega^\dagger a_{\omega'} \right] + \theta(t) \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega [a_\omega^\dagger a_\omega + a_\omega a_\omega^\dagger], \quad (27)$$

где мы использовали то, что в рассматриваемом случае  $\beta = 0$  при  $t < 0$  and  $\beta = \text{const} \neq 0$  при  $t > 0$ .

Таким образом, после момента времени  $t = 0$  линейная комбинация  $H - \beta(t)P$  может быть диагонализирована. Более того, мы уже знаем гармоники и операторы рождения-уничтожения, диагонализующие ее в будущем, – это гармоники, найденные в предыдущем разделе.

## 7 Общие формулы для петлевых поправок

Перейдём теперь к вычислению петлевых поправок в теории с взаимодействием  $\lambda\phi^4$  с использованием диаграммной техники Швингера-Келдыша (вывод которой можно найти, например, в [3],[4]). Двухпетлевые поправки ко всем пропагаторам  $G_{xy}^{\pm\pm}$ ,  $G_{xy}^{\pm\mp}$  имеют следующий вид (с точностью до числового множителя) (см. также [12],[3]):

$$\Delta G_{xy} = \lambda^2 \int dz dw G_{xz} \Sigma_{zw} G_{wy}, \quad (28)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} G^{--} & G^{-+} \\ G^{+-} & G^{++} \end{bmatrix} \text{ и } \Sigma = \begin{bmatrix} -G^{--3} & G^{-+3} \\ G^{+-3} & -G^{++3} \end{bmatrix}.$$

В частности,

$$\Delta G_{xy}^{--} = \lambda^2 \int d^2z d^2w \left[ -G_{xz}^{--} G_{zw}^{--3} G_{wy}^{--} + G_{xz}^{--} G_{zw}^{-+3} G_{wy}^{+-} + G_{xz}^{-+} G_{zw}^{+-3} G_{wy}^{--} - G_{xz}^{-+} G_{zw}^{++3} G_{wy}^{+-} \right],$$

$$\Delta G_{xy}^{++} = \lambda^2 \int d^2z d^2w \left[ -G_{xz}^{+-} G_{zw}^{--3} G_{wy}^{+-} + G_{xz}^{+-} G_{zw}^{-+3} G_{wy}^{++} + G_{xz}^{++} G_{zw}^{+-3} G_{wy}^{-+} - G_{xz}^{++} G_{zw}^{++3} G_{wy}^{++} \right],$$

и

$$\Delta G_{xy}^K = \frac{1}{2} [\Delta G_{xy}^{--} + \Delta G_{xy}^{++}]. \quad (29)$$

Эта поправка к пропагатору Келдыша является суммой следующих диаграмм:

$$\Delta G_{xy}^K = \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} x, \sigma \quad z, \sigma_1 \quad w, \sigma_2 \quad y, \sigma \quad (30)$$

Выпишем выражения всех пропагаторов  $G_{xy}^{\sigma_1\sigma_2}$  ( $\sigma_i$  может быть "+" или "-") через гармоники  $h_k$ :

$$\begin{aligned} G_{xy}^{--} &= \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{dk}{2\pi} h_k(x)\bar{h}_k(y) + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{dk}{2\pi} h_k(y)\bar{h}_k(x); \\ G_{xy}^{++} &= \langle \tilde{T}\phi(x)\phi(y) \rangle = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{dk}{2\pi} h_k(y)\bar{h}_k(x) + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{dk}{2\pi} h_k(x)\bar{h}_k(y); \\ G_{xy}^{+-} &= \langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int \frac{dk}{2\pi} h_k(x)\bar{h}_k(y); \quad G_{xy}^{-+} = \langle \phi(y)\phi(x) \rangle = G_{yx}^{+-}. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что так как  $G_{x_1x_2}^{--} = (G_{x_1x_2}^{++})^*$  и  $G_{x_1x_2}^{-+} = (G_{x_1x_2}^{+-})^*$ , справедливо также равенство  $\Delta G_{xy}^{--} = (\Delta G_{xy}^{++})^*$ . Подставляя выражения пропагаторов через гармоники в уравнение (29), мы получаем, что поправка к пропагатору Келдыша может быть переписана следующим образом:

$$\Delta G_{xy}^K = \iint \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} [n_{kk'}\bar{h}_k(x)h_{k'}(y) + \kappa_{kk'}h_k(x)h_{k'}(y) + \text{h. c.}], \quad (32)$$

где:

$$\begin{aligned} n_{kk'} &= \lambda^2 \int d^2z d^2w h_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z)\bar{h}_p(w) \right]^3 [-\theta(z^0 - x^0)\theta(z^0 - w^0)\theta(y^0 - w^0) + \theta(y^0 - w^0) + \\ &\quad + \theta(x^0 - z^0) - \theta(x^0 - z^0)\theta(w^0 - z^0)\theta(w^0 - y^0)] + \\ &\quad + \lambda^2 \int d^2z d^2w h_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(w)\bar{h}_p(z) \right]^3 [-\theta(z^0 - x^0)\theta(w^0 - z^0)\theta(y^0 - w^0) - \\ &\quad - \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - w^0)\theta(w^0 - y^0)]. \end{aligned} \quad (33)$$

В интересующем нас пределе (когда  $(x^0 + y^0)/2 \rightarrow \infty$ , в то время как  $|x^0 - y^0| = \text{const}$ ) можно считать, что  $x^0 \approx y^0 \approx T \rightarrow \infty$  в лидирующем приближении. Подставляя  $x^0 \approx y^0 \approx T$  в формулу для  $n_{kk'}$  и упрощая множители, содержащие тета-функции, мы получаем следующее выражение:

$$n_{kk'}(T) \approx 2\lambda^2 \int d^2z d^2w \theta(T - w^0)\theta(T - z^0) h_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z)\bar{h}_p(w) \right]^3. \quad (34)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \kappa_{kk'} &= \lambda^2 \int d^2z d^2w \bar{h}_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z)\bar{h}_p(w) \right]^3 [-\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - w^0)\theta(y^0 - w^0) - \theta(z^0 - w^0) + \\ &\quad + \theta(z^0 - x^0) - \theta(z^0 - x^0)\theta(w^0 - z^0)\theta(w^0 - y^0)] + \\ &\quad + \lambda^2 \int d^2z d^2w \bar{h}_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(w)\bar{h}_p(z) \right]^3 [-\theta(x^0 - z^0)\theta(w^0 - z^0)\theta(y^0 - w^0) - \theta(w^0 - z^0) + \\ &\quad + \theta(w^0 - y^0) - \theta(z^0 - x^0)\theta(z^0 - w^0)\theta(w^0 - y^0)]. \end{aligned} \quad (35)$$

После подстановки  $x^0 \approx y^0 \approx T$ , мы получаем следующую формулу в лидирующем приближении при  $T \rightarrow +\infty$ :

$$\kappa_{kk'}(T) \approx \lambda^2 \int d^2z d^2w \bar{h}_k(z)\bar{h}_{k'}(w) \left\{ -2\theta(T - z^0)\theta(z^0 - w^0) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z)\bar{h}_p(w) \right]^3 - \right.$$



$$-2\theta(T - w^0)\theta(w^0 - z^0) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(w)\bar{h}_p(z) \right]^3 \Big\}.$$

Дальнейшее упрощение приводит к окончательному выражению:

$$\kappa_{kk'}(T) \approx -2\lambda^2 \int d^2z d^2w \theta(T - z^0)\theta(z^0 - w^0) \left[ \bar{h}_k(z)\bar{h}_{k'}(w) + \bar{h}_k(w)\bar{h}_{k'}(z) \right] \left[ \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z)\bar{h}_p(w) \right]^3. \quad (36)$$

Ниже мы явно вычисляем  $n_{kk'}(T)$  и  $\kappa_{kk'}(T)$  в пределе  $T \rightarrow \infty$ , явно подставляя в написанные выше формулы гармоники  $h_k$  для различных типов движения зеркала.

## 8 Вычисление двухпетлевых поправок к $n_{kk'}$

В данном разделе мы вычисляем  $n_{kk'}$  (34) для различных типов траекторий зеркала.

### 8.1 Ситуация в пустом пространстве (без зеркала)

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда зеркала нет и мы имеем дело со скалярной теорией поля (с произвольной массой  $m$ ) во всём  $(1+1)$ -мерном пространстве Минковского. Тогда гармоники представляют собой плоские волны:

$$h_k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} e^{-i(\varepsilon_k t - kx)}, \quad \text{где } \varepsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2} \text{ и } -\infty < k < \infty.$$

В этом случае интегралы по координатам  $z = (z^0, z^1)$  и  $w = (w^0, w^1)$  в уравнении (34) могут быть преобразованы следующим образом:

$$\int_{t_0}^T dz^0 e^{-i(\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i})z^0} \int_{t_0}^T dw^0 e^{i(\varepsilon_{k'} + \sum_i \varepsilon_{p_i})w^0} \int_{-\infty}^{\infty} dz^1 e^{i(k + \sum_i p_i)z^1} \int_{-\infty}^{\infty} dw^1 e^{-i(k' + \sum_i p_i)w^1}. \quad (37)$$

Очевидно, в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$  это выражение равно

$$\begin{aligned} & \delta\left(\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \delta\left(\varepsilon_{k'} + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \delta\left(k + \sum_i p_i\right) \delta\left(k' + \sum_i p_i\right) = \\ & = \delta(0) \delta\left(\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \delta\left(k + \sum_i p_i\right) \delta(k - k') \propto \\ & \propto (T - t_0) \delta(k - k') \delta\left(\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \delta\left(k + \sum_i p_i\right), \end{aligned} \quad (38)$$

где мы использовали то, что  $\delta(0) \propto T - t_0$ .

Таким образом, результат пропорционален  $T - t_0$ , но аргумент второй  $\delta$ -функции  $\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}$  никогда не равен 0, поэтому поправка к  $n_{kk'}$  не растет со временем. Фактически, она равна 0. Отметим также, что в безмассовом случае за счёт нормировочных множителей, содержащихся в гармониках, мы можем встретить стандартные инфракрасные расходимости в интегралах, определяющих  $n_{kk'}$ . Поэтому, для того чтобы справиться с ними, мы будем предполагать, что имеем дело с массивным скалярным полем, масса которого  $m$  стремится к 0.

## 8.2 Покоящееся зеркало

Теперь рассмотрим случай, когда есть зеркало и оно находится в состоянии покоя. Вычисляя  $n_{kk'}$ , возьмем сначала интеграл по  $z$  (мы используем гармоники (3)):

$$\begin{aligned}
& \int d^2z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \int_{t_0}^T dz^0 \int_0^\infty dz^1 h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot k p_1 p_2 p_3}} \int_{t_0}^T dz^0 \int_0^\infty dz^1 (e^{-ikv} - e^{-iku})(e^{-ip_1v} - e^{-ip_1u})(e^{-ip_2v} - e^{-ip_2u})(e^{-ip_3v} - e^{-ip_3u}) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot k p_1 p_2 p_3}} \int_{t_0}^T dz^0 e^{-i(k+p_1+p_2+p_3)z^0} \int_0^\infty dz^1 \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 e^{-i(\sigma k + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)z^1}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Всего в этой сумме 16 слагаемых, отличающихся знаками перед  $k, p_1, p_2, p_3$  в аргументе экспоненты. Если число знаков "-" в аргументе экспоненты является четным (нечетным), тогда слагаемое идет со знаком + (-). Продолжая вычисление, получаем для выражения выше:

$$\frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot k p_1 p_2 p_3}} \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{1}{i(\sigma k + \sum_i \sigma_i p_i - i\epsilon)} \right) \int_{t_0}^T dz^0 e^{-i(k+p_1+p_2+p_3)z^0}.$$

Когда  $T \rightarrow \infty$  и  $t_0 \rightarrow -\infty$ , последний интеграл стремится к  $\delta$ -функции:

$$\int_{t_0}^T dz^0 e^{-i(k+p_1+p_2+p_3)z^0} \approx 2\pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \int d^2z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot k p_1 p_2 p_3}} \cdot 2\pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \times \\
& \times \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{1}{i(\sigma k + \sum_i \sigma_i p_i - i\epsilon)} \right).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
n_{kk'}(T) = & \lambda^2 \frac{1}{2^4 \cdot \sqrt{kk'}} \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \frac{1}{p_1 p_2 p_3} 2\pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \cdot 2\pi \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \times \\
& \times \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{1}{i(\sigma k + \sum_i \sigma_i p_i - i\epsilon)} \right) \cdot \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{-1}{i(\sigma k' + \sum_i \sigma_i p_i + i\epsilon)} \right).
\end{aligned} \tag{40}$$

Так как  $k, p_1, p_2, p_3 \geq 0$ , равенство  $k + p_1 + p_2 + p_3 = 0$  может быть выполнено, только если  $k = p_1 = p_2 = p_3 = 0$ . Однако, в таком случае множители в круглых скобках равны 0, и  $n_{kk'} = 0$ .

Выше мы вновь столкнулись с усложнением, связанным с инфракрасными расходимостями в безмассовом случае, причиной которых является поведение нормировочных множителей в гармониках при нулевом импульсе. Чтобы понять происхождение всех множителей в формуле

выше, рассмотрим массивный случай. В этом случае мы имели бы следующее подынтегральное выражение (ср. с (40)):

$$\begin{aligned} & \delta\left(\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \delta\left(\varepsilon_{k'} + \sum_i \varepsilon_{p_i}\right) \cdot \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{1}{i(\sigma k + \sum_i \sigma_i p_i - i\epsilon)} \right) \times \\ & \times \left( \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \frac{-1}{i(\sigma k' + \sum_i \sigma_i p_i + i\epsilon)} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Как и в разделе 8.1, аргументы двух первых  $\delta$ -функций  $\varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_{p_i}$  никогда не равны 0, поэтому поправка, на самом деле, равна 0. Также в массивном случае нет инфракрасных расходимостей.

### 8.3 Ломаная мировая линия

В этом случае мы используем гармоники (23). Тогда интеграл по  $z$  может быть разбит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \int_{t_0}^0 dz^0 \int_0^\infty dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z) + \\ & + \int_0^T dz^0 \int_{-\beta z^0}^{z^0} dz^1 h_k^\beta(z) h_{p_1}^\beta(z) h_{p_2}^\beta(z) h_{p_3}^\beta(z) + \int_0^T dz^0 \int_{z^0}^\infty dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z). \end{aligned}$$

Добавляя слагаемое

$$\int_0^T dz^0 \int_0^{z^0} dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z)$$

к правой стороне вышенаписанного равенства и вычитая его, мы получаем вклад в  $n_{kk'}$  из предыдущего раздела:

$$\int_{t_0}^T dz^0 \int_0^\infty dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z),$$

который стремится к 0 при  $T \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Следовательно, в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$ , интеграл по  $z$  может быть упрощен:

$$\begin{aligned} & \int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \int_0^T dz^0 \int_{-\beta z^0}^{z^0} dz^1 h_k^\beta(z) h_{p_1}^\beta(z) h_{p_2}^\beta(z) h_{p_3}^\beta(z) - \\ & - \int_0^T dz^0 \int_0^{z^0} dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z) = \\ & = \int_0^{T(1+\beta)} du \int_{\alpha u}^{2T-u} dv h_k^\beta h_{p_1}^\beta h_{p_2}^\beta h_{p_3}^\beta - \int_0^T du \int_u^{2T-u} dv h_k^0 h_{p_1}^0 h_{p_2}^0 h_{p_3}^0. \end{aligned} \quad (42)$$

Вычислим первый интеграл, пренебрегая экспоненциально малыми вкладами. Мы также опустим в дальнейших вычислениях множитель  $1/\sqrt{2^4 k p_1 p_2 p_3}$ , не играющий роли в вычислении интегралов по  $u$  и  $v$  (мы вернем этот множитель в конечном ответе):

$$\begin{aligned} & \int_0^{T(1+\beta)} du \int_{\alpha u}^{2T-u} dv h_k^\beta h_{p_1}^\beta h_{p_2}^\beta h_{p_3}^\beta = \int_0^{T(1+\beta)} du e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)\alpha u} \left[ \frac{1}{i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)} + \right. \\ & \left. + 2T - u(1+\alpha) - \frac{1}{i(k+p_1+p_2-i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3-i\epsilon)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Всего в написанной сумме 15 слагаемых следующего вида:

$$(-1)^{\sigma+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} \frac{1}{i(\sigma k + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 - i\epsilon)}; \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0, 1$$

(кроме случая, когда  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) и слагаемое  $2T - u(1 + \alpha)$ , появляющееся из-за интегрирования выражения  $e^{-i(k+\sum_i p_i)\alpha u}$  по  $v$ . Производя теперь интегрирование по  $u$ , мы получаем:

$$\frac{1}{i\alpha(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} \left[ \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} + 2T + \dots \right] + \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \frac{1}{(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)^2}.$$

Последнее слагаемое появилось из-за интегрирования выражения  $u(1 + \alpha)e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)\alpha u}$ . Аналогично, второй интеграл в уравнении (42) равен

$$\frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} \left[ \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} + 2T + \dots \right] + \frac{2}{(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)^2}$$

(сумма в квадратных скобках та же, что и выше; заметим также, что второй интеграл в уравнении (42) равен первому, вычисленному при  $\beta = 0$ ). Следовательно, собирая все эти выражения вместе, мы получаем, что

$$\begin{aligned} & \int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \\ &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} \left[ \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} + 2T - \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 - i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3 - i\epsilon)} + \dots \right] + \\ &+ \left[ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} - 2 \right] \frac{1}{(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь мы собираемся оставить только лидирующие слагаемые, растущие при  $T \rightarrow +\infty$ . Помимо уже написанных выше слагаемых, растущих со временем, такие слагаемые появляются также за счет  $\delta$ -функций, таких как  $\delta(k + p_1 + p_2 + p_3)\delta(\sigma k + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)$  (где  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0, 1$ ), поскольку они равны  $\delta(k + p_1 + p_2 + p_3)\delta(0) = \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \cdot (2T/\pi)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \\ &= -\frac{2T(1 - \alpha)}{\alpha} \left[ \text{v. p.} \frac{i}{k + p_1 + p_2 + p_3} + \frac{1 + 2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \right] + O(1). \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, окончательный результат для  $n_{kk'}$  в лидирующем порядке по степеням  $T$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n_{kk'} &\approx 2\lambda^2 (2T)^2 \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \frac{1}{2^4 \sqrt{k k'}} \left[ \text{v. p.} \frac{i}{k + p_1 + p_2 + p_3} + \frac{1 + 2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \right] \times \\ &\times \left[ -\text{v. p.} \frac{i}{k' + p_1 + p_2 + p_3} + \frac{1 + 2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Аналогично случаю покоящегося зеркала, слагаемые, содержащие  $\delta$ -функции дают нулевой вклад, поэтому результат может быть упрощен:

$$n_{kk'} \approx 2\lambda^2(2T)^2 \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \frac{1}{2^4 \sqrt{k k'}} \left[ \text{v. p.} \frac{1}{k + p_1 + p_2 + p_3} \right] \cdot \left[ \text{v. p.} \frac{1}{k' + p_1 + p_2 + p_3} \right]. \quad (47)$$

Также стоит отметить, что при  $T \rightarrow \infty$  петлевые поправки в случае ломаной мировой линии хорошо аппроксимируют поправки для траектории (15) (см. рисунок 5):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\beta t + a(1 - e^{-\beta t/a}) & t \geq 0, \end{cases} \quad (48)$$

описывающей движение зеркала, при котором оно асимптотически приближается к скорости, меньшей скорости света  $\beta < 1$ . В этом случае нужно интегрировать по гармоникам  $e^{-ikv} - e^{-ikp(u)}$  вместо гармоник (23), но они совпадают в области  $u < 0$  и почти равны в области  $u \gg a$ . Также в этом случае интегрирование по  $z^1$  нужно производить от  $x(z^0)$ , а не от  $-\beta z^0$ , но  $x(t) \approx -\beta t$  при  $t \gg u$ . Поэтому, в пределе  $T \rightarrow \infty$  петлевые поправки в случае ломаной мировой линии и мировой линии (15) примерно равны.

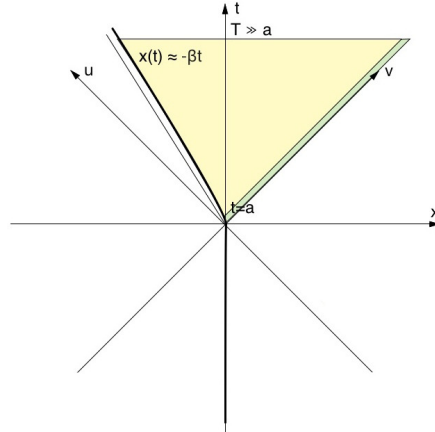


Рис. 5: Мировая линия (15). В области, обозначенной желтым цветом, гармоники для этой мировой линии приблизительно совпадают с гармониками для случая ломаной траектории.

#### 8.4 Зеркало, приближающееся к скорости света

Вычислим  $n_{kk'}(T)$  для мировой линии (13). В этом случае гармоники могут быть представлены следующим образом:

$$h_k(u, v) = \theta(-u)h_k^0(u, v) + \theta(u)h_k^\beta(u, v), \quad (49)$$

где

$$h_k^0(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-iku}], \quad \text{и} \quad h_k^\beta(u, v) = \frac{i}{\sqrt{2k}} [e^{-ikv} - e^{-ik(2t_u - u)}].$$

Здесь  $t_u$  определяется из уравнения:

$$t_u - x(t_u) = u.$$

Следовательно, для рассматриваемой мировой линии имеем

$$2t_u - u = a(1 - e^{-t_u/a}).$$

Заметим, что любая траектория  $x(t)$ , будучи переписанной в координатах  $(u, v)$ , принимает следующий вид:

$$v(u) = 2t_u - u = t_u + x(t_u). \quad (50)$$

Применяя те же аргументы, что и в предыдущем разделе, в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$  мы получаем следующее выражение для интеграла по  $z$  (являющегося частью  $n_{kk'}$  (34)):

$$\begin{aligned} & \int d^2z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = \int_0^T dz^0 \int_{x(z^0)}^{z^0} dz^1 h_k^\beta(z) h_{p_1}^\beta(z) h_{p_2}^\beta(z) h_{p_3}^\beta(z) - \\ & - \int_0^T dz^0 \int_0^{z^0} dz^1 h_k^0(z) h_{p_1}^0(z) h_{p_2}^0(z) h_{p_3}^0(z) = \\ & = \int_0^{T-x(T)} du \int_{2t_u-u}^{2T-u} dv h_k^\beta h_{p_1}^\beta h_{p_2}^\beta h_{p_3}^\beta - \int_0^T du \int_u^{2T-u} dv h_k^0 h_{p_1}^0 h_{p_2}^0 h_{p_3}^0. \end{aligned} \quad (51)$$

Второй интеграл был вычислен в предыдущем разделе. Вычислим первый:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-x(T)} du \int_{2t_u-u}^{2T-u} dv h_k^\beta h_{p_1}^\beta h_{p_2}^\beta h_{p_3}^\beta = \int_0^{T-x(T)} du e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)(2t_u-u)} \left[ \frac{1}{i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)} + \right. \\ & \left. + 2T - u - (2t_u - u) - \frac{1}{i(k+p_1+p_2-i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3-i\epsilon)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

В последней сумме содержится 15 слагаемых следующего типа:

$$(-1)^{\sigma+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} \frac{1}{i(\sigma k + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 - i\epsilon)}; \quad \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0, 1$$

(кроме  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) и слагаемое  $2T - u - (2t_u - u) = 2(T - t_u)$ . В последнем интеграле удобнее перейти от интегрирования по  $u$  к интегрированию по  $t_u$ , используя тот факт, что

$$dt_u \left[ 1 - \frac{dx(t_u)}{dt_u} \right] = du.$$

Тогда предыдущий интеграл преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt_u \left[ 1 - \frac{dx(t_u)}{dt_u} \right] e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)(t_u+x(t_u))} \left[ \frac{1}{i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)} + \right. \\ & \left. + 2T - 2t_u - \frac{1}{i(k+p_1+p_2-i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3-i\epsilon)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Заметим, что эта формула справедлива для произвольной мировой линии зеркала  $x(t)$ . Подставляя в формулу интересующую нас траекторию, мы получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt_u \left[ 2 - e^{-t_u/a} \right] e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)a(1-e^{-t_u/a})} \left[ \frac{1}{i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)} + \right. \\ & \left. + 2T - 2t_u - \frac{1}{i(k+p_1+p_2-i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3-i\epsilon)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что если бы мировая линия имела вид  $x(t) = -\beta t + a(1 - e^{-\beta t/a})$  с асимптотической скоростью  $\beta < 1$ , тогда в результате интегрирования мы получили бы  $\delta$ -функции из-за того, что аргумент экспоненты содержал бы  $t_u$ . Действительно, в этом случае в аргументе экспоненты стояло бы выражение  $t_u + x(t_u) = t_u(1 - \beta) + a(1 - e^{-\beta t/a})$ . Однако, когда  $\beta = 1$ , линейное по  $t_u$  слагаемое исчезает, и ситуация сильно меняется.

Продолжая вычисление  $n_{kk'}$ , выпишем все интегралы из предыдущей формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt_u e^{-t_u/a} e^{-i(k-i\epsilon)ae^{-t_u/a}} &= \frac{e^{i(k-i\epsilon)a} - e^{i(k-i\epsilon)ae^{-T/a}}}{i(k-i\epsilon)} \rightarrow \frac{e^{i(k-i\epsilon)a} - 1}{i(k-i\epsilon)}, \quad T \rightarrow \infty \\ \int_0^T dt_u e^{-i(k-i\epsilon)ae^{-t_u/a}} &= T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1} i^n (k-i\epsilon)^n}{n \cdot n!}, \quad T \rightarrow \infty \\ \int_0^T dt_u t_u e^{-t_u/a} \cdot e^{-i(k-i\epsilon)ae^{-t_u/a}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (ia)^{n+1} (k-i\epsilon)^{n-1}}{n \cdot n!}, \quad T \rightarrow \infty \\ \int_0^T dt_u t_u e^{-i(k-i\epsilon)ae^{-t_u/a}} &= \frac{T^2}{2} + ia \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{k-i\epsilon} dp \frac{(-1)^n (ia)^{n+1} p^{n-1}}{n \cdot n!}, \quad T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

В формулах выше мы пренебрегли экспоненциально малыми слагаемыми ( $e^{-T/a} \rightarrow 0$ ). Мы хотим удержать только лидирующие слагаемые при  $T \rightarrow \infty$ . Важно, что некоторые из этих интегралов дают степени  $T$  и что все степени  $(k - i\epsilon)$  неотрицательные. Следовательно, из-за поведения траектории зеркала  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , интегрирование по  $u$  не дает  $\delta$ -функций, зато дает степени  $T$ . Теперь мы готовы выписать полное выражение для интеграла по  $z$ :

$$\begin{aligned} \int d^2z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) &= \left[ \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} + \right. \\ + 2T \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 - i\epsilon)} - \frac{1}{i(p_3 - i\epsilon)} + \dots \left. \right] &\left[ e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)a} \left( 2T + \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right) - \frac{1}{i(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} \right] - \\ - 2e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)a} &\left[ -\frac{T^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right] - \frac{2}{(k + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)^2}, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены слагаемые следующего порядка по  $T$ . Мы видим, что в случае зеркала, приближающегося к скорости света, лидирующий вклад – порядка  $T^2$ :

$$\int d^2z \theta(T - z^0) h_k(z) h_{p_1}(z) h_{p_2}(z) h_{p_3}(z) = 5T^2 e^{-i(k+p_1+p_2+p_3-i\epsilon)a} + O(T). \quad (54)$$

Наконец, выражение для  $n_{kk'}$  в лидирующем порядке по  $T$  (с точностью до числового коэффициента) имеет следующую форму:

$$n_{kk'} \propto \lambda^2 T^4 \frac{e^{-i(k-k'-i\epsilon)a}}{\sqrt{kk'}} \cdot \int \prod_{j=1}^3 \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{p_1 p_2 p_3}. \quad (55)$$

Этот результат можно просто понять. Для вычисления  $n_{kk'}$  необходимо вычислить следующий интеграл по  $z$ :

$$\int_0^T dz^0 \int_{x(z^0)}^{z^0} dz h_k^\beta(z) h_{p_1}^\beta(z) h_{p_2}^\beta(z) h_{p_3}^\beta(z), \quad (56)$$

где  $h_p^\beta(z) \propto e^{-ipv} - e^{-ipa(1-e^{-tu/a})}$ . Приблизительно, отраженная волна ведет себя как константа в области  $u \gg a$  и как плоская волна в области  $u \ll a$ :

$$e^{-ipa(1-e^{-tu/a})} \propto \begin{cases} e^{-ipa} & u \gg a \\ e^{-iptu} & u \ll a. \end{cases}$$

В результате, в пределе  $T \gg a$ , из-за асимптотического поведения отраженных волн, после интегрирования по  $z^0, z$  получается ответ, пропорциональный области интегрирования  $\propto T^2$  (см. рисунок 6). Следовательно,  $n_{kk'}$  получается пропорциональным  $T^2 \cdot T^2 = T^4$ .

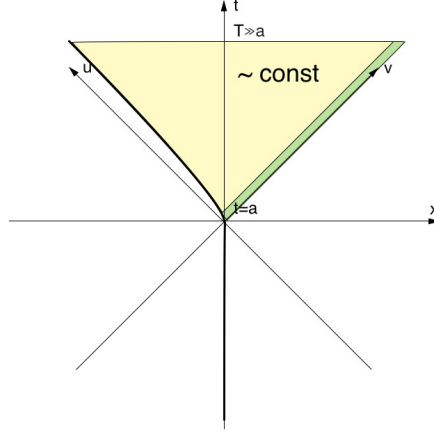


Рис. 6: Область интегрирования в интеграле (56). В желтой области отраженная волна приблизительно равна константе. В зеленой области она ведет себя, как плоская волна.

Необходимо отметить, что интеграл по импульсам  $p_i$  в формуле (55) содержит ультрафиолетовую расходимость, которая не возникала в случае траектории зеркала, рассматриваемой в предыдущем разделе 8.3. Мы предполагаем, что эта проблема возникает из-за предположения о том, что зеркало идеальное, и что она может быть устранена введением зависящего от импульса  $k$  коэффициента отражения, который был бы равен 0 при всех значениях  $k$ , больших некоторого  $\Lambda$ , – в таком случае интегралы (55) были бы обрезаны значением  $\Lambda$ . Возможно также, что петлевые поправки в случае зеркала, приближающегося к скорости света, необходимо рассматривать, как предел выражения (47) при  $\beta \rightarrow 1$ , – в таком случае ультрафиолетовая расходимость исчезает.

## 9 Вычисление двухпетлевых поправок к $\kappa_{kk'}$

В этом разделе мы вычисляем  $\kappa_{kk'}$  (36) для тех же траекторий зеркала, что были рассмотрены выше.

### 9.1 Покоящееся зеркало

Вычислим следующий интеграл, являющийся частью  $\kappa_{kk'}$  (см. формулу (36)):

$$\int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \int_{t_0}^T dz^0 \int_0^\infty dz^1 \bar{h}_k(z^0, z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}(z^0, z) \int_{t_0}^{z^0} dw^0 \int_0^\infty dw^1 \bar{h}_{k'}(w^0, w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}(w^0, w). \quad (57)$$



Производя интегрирование по  $z$  и  $w$ , мы получаем:

$$\begin{aligned}
& - \frac{\pi^2}{\sqrt{kk'}} \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \frac{1}{2^4 p_1 p_2 p_3} \int_{t_0}^T dz^0 e^{-i(-k+p_1+p_2+p_3)z^0} \int_{t_0}^{z^0} dw^0 e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)w^0} \times \\
& \times \left[ \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \delta(-\sigma k + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \right] \cdot \left[ \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \delta(\sigma k' + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \right].
\end{aligned} \tag{58}$$

В пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$  интегрирование по  $z^0$  и  $w^0$  дает:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dz^0 e^{-i(-k+p_1+p_2+p_3)z^0} \int_{-\infty}^{z^0} dw^0 e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)w^0} = \left| w^0 + z^0 = x_+; w^0 - z^0 = x_- \right| = \\
& = \int_{-\infty}^0 dx_- e^{i(p_1+p_2+p_3+k'/2-k/2)x_-} \int_{-\infty}^{\infty} dx_+ e^{i(k+k')x_+/2} = 4\pi\delta(k+k') \cdot \frac{1}{i(p_1+p_2+p_3+(k'-k)/2-i\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Последнее выражение отличается от 0 только тогда, когда  $k = k' = 0$ , вследствие чего поправка к  $\kappa_{kk'}$  может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned}
\kappa_{kk'} &= - \frac{\pi^2}{\sqrt{kk'}} \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \frac{1}{2^4 p_1 p_2 p_3} \cdot \frac{1}{i(p_1+p_2+p_3+(k'-k)/2-i\epsilon)} \cdot 4\pi\delta(k+k') \times \\
& \times \left[ \sum_{\sigma, \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \delta(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \right]^2.
\end{aligned} \tag{60}$$

Очевидно, сумма в квадратных скобках равна 0. Как и ожидалось, случае покоящегося зеркала  $\kappa_{kk'} = 0$ .

## 9.2 Ломаная мировая линия

Интеграл по  $(z^0, z^1)$  и  $(w^0, w^1)$  в формуле (57) может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_0^{T-x(T)} du_z \int_{2t_{u_z}-u_z}^{2T-u_z} dv_z \bar{h}_k^\beta(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^\beta(z) + \int_{-\infty}^0 du_z \int_{u_z}^{2T-u_z} dv_z \bar{h}_k^0(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^0(z) \right] \times \\
& \times \left[ \int_0^{z^0-x(z^0)} du_w \int_{2t_{u_w}-u_w}^{2z^0-u_w} dv_w \bar{h}_{k'}^\beta(w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}^\beta(w) + \int_{-\infty}^0 du_w \int_{u_w}^{2z^0-u_w} dv_w \bar{h}_{k'}^0(w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}^0(w) \right],
\end{aligned} \tag{61}$$

где  $z^0 = \frac{u_z + v_z}{2}$ . Эта формула справедлива для любой траектории  $x(t)$ . В случае ломаной траектории первый интеграл по  $u_w$  и  $v_w$  в выражении (61) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{z^0(1+\beta)} du_w \int_{\alpha u_w}^{2z^0-u_w} dv_w \bar{h}_{k'}^\beta(w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}^\beta(w) = \int_0^{z^0(1+\beta)} du_w \left\{ e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)\alpha u_w} (2z^0 - u_w - \alpha u_w) + \right. \\
& \left. + \frac{e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2z^0-u_w)}}{i(k'+p_1+p_2+p_3)} - \frac{e^{ip_3(2z^0-u_w)} e^{i(k'+p_1+p_2)\alpha u_w}}{ip_3} + \frac{e^{i(k'+p_3)(2z^0-u_w)} e^{i(p_1+p_2)\alpha u_w}}{i(k'+p_3)} + \dots \right\}
\end{aligned}$$

$$- e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)\alpha u_w} \left[ \frac{1}{i(k'+p_1+p_2+p_3)} - \frac{1}{ip_3} + \frac{1}{i(k'+p_3)} + \dots \right] \}. \quad (62)$$

Многоточия обозначают остальные слагаемые, появляющиеся за счет интегрирования по  $v_w$  следующих функций (при  $\sigma, \sigma_i = 0, 1$ ):

$$e^{i(\sigma k' + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)v_w} e^{i[(1-\sigma)k' + (1-\sigma_1)p_1 + (1-\sigma_2)p_2 + (1-\sigma_3)p_3]\alpha u_w}.$$

Интеграл аналитической функции по конечной области есть снова аналитическая функция. Поэтому выражение выше не нуждается в регуляризации. Можно напрямую проверить, что при  $k', p_i \rightarrow 0$  все сингулярности в нем сокращаются. Первое слагаемое в (62) даст лидирующий вклад в  $\kappa_{kk'}$  при  $T \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^{z^0(1+\beta)} du_w e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)\alpha u_w} (2z^0 - u_w - \alpha u_w) = \frac{-2z^0}{i(k' + \sum_i p_i)\alpha} - (1 + \alpha) \frac{e^{i(k' + \sum_i p_i)z^0(1-\beta)}}{(k' + \sum_i p_i)^2 \alpha^2}.$$

Вычислим теперь второй интеграл по  $u_w$  и  $v_w$  в выражении (61):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 du_w \int_{u_w}^{2z^0 - u_w} dv_w \bar{h}_{k'}^0(w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}^0(w) = \int_{-\infty}^0 du_w \left\{ e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)u_w} (2z^0 - 2u_w) + \right. \\ & + \frac{e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2z^0 - u_w)}}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} - \frac{e^{ip_3(2z^0 - u_w)} e^{i(k'+p_1+p_2)u_w}}{ip_3} + \frac{e^{i(k'+p_3)(2z^0 - u_w)} e^{i(p_1+p_2)u_w}}{i(k' + p_3)} + \dots - \\ & \left. - e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)u_w} \left[ \frac{1}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} - \frac{1}{ip_3} + \frac{1}{i(k' + p_3)} + \dots \right] \right\}. \quad (63) \end{aligned}$$

Многоточия обозначают остальные слагаемые, появляющиеся после интегрирования по  $v_w$  следующих функций (при  $\sigma, \sigma_i = 0, 1$ ):

$$e^{i(\sigma k' + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)v_w} e^{i[(1-\sigma)k' + (1-\sigma_1)p_1 + (1-\sigma_2)p_2 + (1-\sigma_3)p_3]u_w}.$$

Первое слагаемое в (63) даёт лидирующий вклад в  $\kappa_{kk'}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 du_w e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)u_w} (2z^0 - 2u_w) = \frac{2z^0}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} - \frac{2}{(k' + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)^2} \sim \\ & \sim \frac{2z^0}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3 - i\epsilon)} + 2\pi^2 [\delta(k' + p_1 + p_2 + p_3)]^2, \quad (64) \end{aligned}$$

причем последний член даёт  $\delta(0)\delta(k'+p_1+p_2+p_3) \propto T \cdot \delta(k'+p_1+p_2+p_3)$ . Здесь и далее знак " $\sim$ " означает, что мы пренебрегаем слагаемыми, дающими меньший порядок по  $T$  по сравнению с теми слагаемыми, которые мы оставляем. Таким образом, поправка к  $\kappa_{kk'}$  в лидирующем приближении имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^{T(1+\beta)} du_z \int_{\alpha u_z}^{2T - u_z} dv_z \bar{h}_k^\beta(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^\beta(z) + \int_{-\infty}^0 du_z \int_{u_z}^{2T - u_z} dv_z \bar{h}_k^0(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^0(z) \right] \times \\ & \times \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{2z^0}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} + 2\pi^2 \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \delta(0) \right]. \quad (65) \end{aligned}$$

Интеграл, содержащий  $z^0/(k' + p_1 + p_2 + p_3)$ , может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_0^{T(1+\beta)} du \int_{\alpha u}^{2T-u} dv (u+v) [e^{ikv} - e^{ik\alpha u}] \prod_{i=1}^3 [e^{-ip_i v} - e^{-ip_i \alpha u}] + \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^0 du \int_u^{2T-u} dv (u+v) [e^{ikv} - e^{iku}] \prod_{i=1}^3 [e^{-ip_i v} - e^{-ip_i u}] \right\} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} \sim \\
& \sim \left\{ \int_0^\infty du e^{-i(-k+p_1+p_2+p_3)\alpha u} \left[ \frac{(2T-u)^2}{2} - \frac{(\alpha u)^2}{2} + (2T-u-\alpha u) \cdot u \right] + \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^0 du e^{-i(-k+p_1+p_2+p_3)u} \left[ \frac{(2T-u)^2}{2} - \frac{u^2}{2} + 2T-2u \right] \right\} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} \sim \\
& = \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{T^2}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} \left\{ b_\alpha \cdot \text{v. p.} \frac{1}{-k + p_1 + p_2 + p_3} + c_\alpha \cdot \delta(-k + p_1 + p_2 + p_3) \right\}, \tag{66}
\end{aligned}$$

где  $b_\alpha$  и  $c_\alpha$  – это постоянные коэффициенты, зависящие только от  $\alpha$ . Интеграл же, пропорциональный  $\delta(0)$ , равен

$$2\pi^2 \delta(0) \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \left[ \int_0^{T(1+\beta)} du_z \int_{\alpha u_z}^{2T-u_z} dv_z \bar{h}_k^\beta(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^\beta(z) + \int_{-\infty}^0 du_z \int_{u_z}^{2T-u_z} dv_z \bar{h}_k^0(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^0(z) \right].$$

Выражение в квадратных скобках уже было вычислено нами в разделе 8.3. Поэтому, используя результат (45), мы получаем следующий приближенный ответ для интеграла (57):

$$-2\pi^2 \delta(0) \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \cdot \frac{2T(1-\alpha)}{\alpha} \left[ \text{v. p.} \frac{i}{k + p_1 + p_2 + p_3} + \frac{1+2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \right].$$

Таким образом, двухпетлевая поправка к  $\kappa_{kk'}$  для ломаной траектории также пропорциональна  $\lambda^2 T^2$ :

$$\begin{aligned}
\kappa_{kk'} \approx & \lambda^2 T^2 \frac{1}{\sqrt{kk'}} \frac{\alpha-1}{\alpha} \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \left\{ \frac{1}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} \left[ b_\alpha \cdot \text{v. p.} \frac{1}{-k + p_1 + p_2 + p_3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + c_\alpha \cdot \delta(-k + p_1 + p_2 + p_3) \right] - d_\alpha \cdot \delta(k' + p_1 + p_2 + p_3) \left[ \text{v. p.} \frac{i}{k + p_1 + p_2 + p_3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1+2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k + p_1 + p_2 + p_3) \right] \right\} + \{k \leftrightarrow k'\}, \tag{67}
\end{aligned}$$

где  $d_\alpha$  – это константа, точная форма которой не важна для производимого здесь вычисления. После избавления от последнего слагаемого, пропорционального  $\delta(k' + \sum p_i)$ , получаем:

$$\begin{aligned}
\kappa_{kk'} \approx & \lambda^2 T^2 \frac{1}{\sqrt{kk'}} \frac{\alpha-1}{\alpha} \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \cdot \frac{1}{i(k' + p_1 + p_2 + p_3)} \left[ b_\alpha \cdot \text{v. p.} \frac{1}{-k + p_1 + p_2 + p_3} + \right. \\
& \left. + c_\alpha \cdot \delta(-k + p_1 + p_2 + p_3) \right] + \{k \leftrightarrow k'\}. \tag{68}
\end{aligned}$$

### 9.3 Зеркало, приближающееся к скорости света

В случае траектории (13), первый интеграл по  $u_w$  и  $v_w$  в формуле (61) переходит в

$$\begin{aligned} & \int_0^{z^0-x(z^0)} du_w \int_{2t_{u_w}-u_w}^{2z^0-u_w} dv_w \left( e^{ik'v_w} - e^{ik'(2t_{u_w}-u_w)} \right) \prod_{i=1}^3 \left( e^{ip_i v_w} - e^{ip_i(2t_{u_w}-u_w)} \right) = \\ & = \int_0^{z^0-x(z^0)} du_w \left[ \frac{e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2z^0-u_w)} - e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2t_{u_w}-u_w)}}{i(k'+p_1+p_2+p_3)} + (2z^0-2t_{u_w})e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2t_{u_w}-u_w)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^{i(k'+p_1)(2z^0-u_w)} - e^{i(k'+p_1)(2t_{u_w}-u_w)}}{i(k'+p_1)} e^{i(p_2+p_3)(2t_{u_w}-u_w)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Многоточие обозначает оставшиеся члены, полученные после интегрирования по  $v_w$  следующих выражений (при  $\sigma, \sigma_i = 0, 1$ ):

$$e^{i(\sigma k' + \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)v_w} e^{i[(1-\sigma)k' + (1-\sigma_1)p_1 + (1-\sigma_2)p_2 + (1-\sigma_3)p_3](2t_{u_w}-u_w)}.$$

В пределе  $T \rightarrow +\infty$  второе слагаемое в (69) дает лидирующий вклад в  $\kappa_{kk'}$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{z^0-x(z^0)} du_w (2z^0 - 2t_{u_w}) e^{i(k'+p_1+p_2+p_3)(2t_{u_w}-u_w)} = \\ & = \int_0^{z^0} dt_{u_w} \left[ 2 - e^{-t_{u_w}/a} \right] (2z^0 - 2t_{u_w}) e^{i(k'+\sum_i p_i)a(1-e^{-t_{u_w}/a})}. \end{aligned} \quad (70)$$

В разных областях подынтегральная функция ведет себя следующим образом:

$$\text{integrand} \approx \begin{cases} 4(z^0 - t_{u_w}) e^{i(k'+\sum_i p_i)a}, & t_{u_w} \gg a, \\ 2\left(1 + \frac{t_{u_w}}{a}\right) (z^0 - t_{u_w}) e^{i(k'+\sum_i p_i)t_{u_w}}, & t_{u_w} \ll a. \end{cases}$$

Следовательно, для тех  $z^0$ , которые намного больше  $a$ , интеграл (70) примерно равен  $2(z^0)^2 e^{i(k'+\sum_i p_i)a}$ . Таким образом, поправка к  $\kappa_{kk'}$  приблизительно равна

$$\begin{aligned} & \int_0^T dz^0 \int_{x(z^0)}^{z^0} dz \bar{h}_k^\beta(z^0, z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}^\beta(z^0, z) \cdot 2(z^0)^2 \cdot e^{i(k'+\sum_i p_i)a} = \\ & = 2e^{i(k'+\sum_i p_i)a} \int_0^{T-x(T)} du \int_{2t_u-u}^{2T-u} dv (u+v)^2 \left( e^{ikv} - e^{ik(2t_u-u)} \right) \prod_{i=1}^3 \left( e^{-ip_i v} - e^{-ip_i(2t_u-u)} \right). \end{aligned}$$

Этот интеграл пропорционален  $T^4$  в лидирующем приближении. Действительно, покажем, как вычислить одну из его частей:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-x(T)} du u \int_{2t_u-u}^{2T-u} dv v \left( e^{ikv} - e^{ik(2t_u-u)} \right) \prod_{i=1}^3 \left( e^{-ip_i v} - e^{-ip_i(2t_u-u)} \right) \sim \\ & \sim \frac{1}{2} \int_0^{T-x(T)} du u \left[ (2T-u)^2 - (2t_u-u)^2 \right] e^{-i(-k+\sum_i p_i)(2t_u-u)} = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^T dt_u \left[ 2 - e^{-t_u/a} \right] \left[ 2t_u - a(1 - e^{-t_u/a}) \right] \left[ [2(T-t_u) + a(1 - e^{-t_u/a})]^2 - a^2(1 - e^{-t_u/a}) \right] \times \\ & \times e^{-i(-k+\sum_i p_i)a(1-e^{-t_u/a})} \sim \text{const} \cdot e^{-i(-k+\sum_i p_i)a} \cdot T^4. \end{aligned} \quad (71)$$

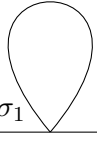
Следовательно, поправка к  $\kappa_{kk'}$  в лидирующем приближении при  $T \rightarrow \infty$  пропорциональна  $\lambda^2 T^4$  и имеет следующий вид:

$$\kappa_{kk'} \propto \lambda^2 T^4 \frac{e^{i(k+k')a}}{\sqrt{kk'}} \cdot \int \prod_{j=1}^3 \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{p_1 p_2 p_3}. \quad (72)$$

(комментарий по поводу ультрафиолетовой расходимости, содержащейся в этом выражении, см. в части 8.4).

## 10 Однопетлевые поправки к пропагатору Келдыша

Вычислим также однопетлевую поправку к пропагатору Келдыша:

$$\Delta G_{xy}^K = \sum_{\sigma, \sigma_1 = \pm 1} \overbrace{x, \sigma} \quad \overbrace{z, \sigma_1} \quad \overbrace{y, \sigma} \quad (73)$$


Используя выражения (31) пропагаторов через гармоники, можно получить следующие поправки к  $n_{kk'}$  и  $\kappa_{kk'}$  за счет этой петли в пределе  $\frac{x^0 + y^0}{2} = T \rightarrow +\infty$ ,  $|x^0 - y^0| = \text{const}$ :

$$n_{kk'} \propto \lambda \int d^2 z \left[ \theta(x^0 - z^0) \theta(z^0 - y^0) - \theta(z^0 - x^0) \theta(y^0 - z^0) \right] h_k(z) \bar{h}_{k'}(z) \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z) \bar{h}_p(z) \Big|_{x^0 \approx y^0 \approx T} \approx 0.$$

Следовательно, для любого типа движения зеркала однопетлевая поправка к  $n_{kk'}$  равна 0. Однако, это неверно для  $\kappa_{kk'}$ :

$$\kappa_{kk'} \propto \lambda \int d^2 z \theta(T - z^0) \bar{h}_k(z) \bar{h}_{k'}(z) \int \frac{dp}{2\pi} h_p(z) \bar{h}_p(z) = \lambda \int \frac{dp}{2\pi} \int d^2 z \theta(T - z^0) \bar{h}_k(z) \bar{h}_{k'}(z) h_p(z) \bar{h}_p(z). \quad (74)$$

Напомним, что поправка к  $n_{kk'}$  за счет двухпетлевой sunset-диаграммы имеет следующую форму (см. формулу (34)):

$$n_{kk'} \propto \lambda^2 \int \left( \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{2\pi} \right) \int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}(z) \int d^2 w \theta(T - w^0) \bar{h}_{k'}(w) \prod_{i=1}^3 \bar{h}_{p_i}(w),$$

и мы уже вычислили её в разделе 8. Следовательно, выполняя в интеграле

$$\int d^2 z \theta(T - z^0) h_k(z) \prod_{i=1}^3 h_{p_i}(z)$$

следующую замену переменных

$$k \rightarrow -k, \quad p_1 \rightarrow -k', \quad p_2 \rightarrow p, \quad p_3 \rightarrow -p,$$

из результатов вычисления двухпетлевой поправки можно получить значения однопетлевой поправки (74):

$$\kappa_{kk'} \propto \lambda \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot kk' p^2}} \cdot 2\pi \delta(k+k') \cdot \left( \sum_{\sigma, \sigma', \sigma_i = \pm 1} \sigma \sigma' \sigma_1 \sigma_2 \frac{1}{i(-\sigma k - \sigma' k' + \sigma_1 p - \sigma_2 p - i\epsilon)} \right) \approx 0 \quad (75)$$

для покоящегося зеркала;

$$\kappa_{kk'} \approx -\lambda \frac{2T(1-\alpha)}{\alpha} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot kk' p^2}} \cdot \left[ -\text{v. p.} \frac{i}{k+k'} + \frac{1+2\alpha}{\alpha} \pi \delta(k+k') \right] + O(1) \quad (76)$$

для ломаной траектории;

$$\kappa_{kk'} \propto \lambda T^2 \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot kk' p^2}} \cdot e^{-i(-k-k'-i\epsilon)a} + O(T) \quad (77)$$

для зеркала, скорость которого асимптотически приближается к скорости света.

## 11 Поправки к четырехточечной корреляционной функции

Рассмотрим также следующую поправку к четырехточечной корреляционной функции в пределе, когда  $x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4 \sim T \rightarrow +\infty$ , в то время как величины  $|x_0^i - x_0^j|$  для всех  $i < j$  удерживаются постоянными:

$$\Delta G_{x_1 x_2 x_3 x_4}^{++--} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \begin{array}{c} x_{1,+} \\ \diagdown \quad \diagup \\ z, \sigma_1 \quad w, \sigma_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_{2,+} \quad x_{4,-} \\ x_{3,-} \end{array} \quad (78)$$

Сумма этих диаграмм пропорциональна

$$\lambda^2 \int d^2 z \int d^2 w \left\{ G_{x_{1z}}^{+-} G_{x_{2z}}^{+-} [G_{zw}^{--}]^2 G_{wx_3}^{+-} G_{wx_4}^{+-} - G_{x_{1z}}^{+-} G_{x_{2z}}^{+-} [G_{zw}^{--}]^2 G_{wx_3}^{--} G_{wx_4}^{--} + \right. \\ \left. + G_{x_{1z}}^{++} G_{x_{2z}}^{++} [G_{zw}^{+-}]^2 G_{wx_3}^{--} G_{wx_4}^{--} - G_{x_{1z}}^{++} G_{x_{2z}}^{++} [G_{zw}^{++}]^2 G_{wx_3}^{+-} G_{wx_4}^{+-} \right\}.$$

По аналогии с формулой (32), представим эту поправку в виде:

$$\int \left( \prod_{i=1}^4 \frac{dk_i}{2\pi} \right) \left[ n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)} \cdot h_{k_1}(x_1) h_{k_2}(x_2) \bar{h}_{k_3}(x_3) \bar{h}_{k_4}(x_4) + n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(2)} \cdot h_{k_1}(x_1) \bar{h}_{k_2}(x_2) \bar{h}_{k_3}(x_3) \bar{h}_{k_4}(x_4) + \dots \right]$$

В последнюю сумму входят все возможные слагаемые с четверными произведениями  $h_{k_i}(x_i)$

и  $\bar{h}_{k_j}(x_j)$ . Вычислим функцию  $n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)}$  в рассматриваемом пределе:

$$\begin{aligned}
n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)} &\approx \int \frac{dp}{2\pi} \int \frac{dp'}{2\pi} \int d^2 z \bar{h}_{k_1}(z) \bar{h}_{k_2}(z) h_p(z) h_{p'}(z) \int d^2 w \bar{h}_p(w) \bar{h}_{p'}(w) h_{k_3}(w) h_{k_4}(w) \times \\
&\times \left[ \theta(z^0 - T) \theta(w^0 - T) - \theta(z^0 - w^0) \theta(w^0 - T) - \theta(w^0 - z^0) \theta(z^0 - T) \right] + \\
&+ \int \frac{dp}{2\pi} \int \frac{dp'}{2\pi} \int d^2 z \bar{h}_{k_1}(z) \bar{h}_{k_2}(z) \bar{h}_p(z) \bar{h}_{p'}(z) \int d^2 w h_p(w) h_{p'}(w) h_{k_3}(w) h_{k_4}(w) \times \\
&\times \left[ 1 - \theta(w^0 - z^0) \theta(w^0 - T) - \theta(z^0 - w^0) \theta(z^0 - T) \right]
\end{aligned} \tag{79}$$

Преобразуем в первом слагаемом множитель, содержащий тета-функции:

$$\begin{aligned}
&\theta(w^0 - T) [\theta(z^0 - T) - \theta(z^0 - w^0)] - \theta(w^0 - z^0) \theta(z^0 - T) = \\
&= \theta(w^0 - T) \theta(z^0 - T) \theta(w^0 - z^0) - \theta(w^0 - z^0) \theta(z^0 - T) = \\
&= -\theta(T - w^0) \theta(w^0 - z^0) \theta(z^0 - T) = 0.
\end{aligned} \tag{80}$$

Следовательно, только второе слагаемое в формуле (79) даёт вклад в  $n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)}$ , который после упрощения оказывается равным:

$$\begin{aligned}
n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)} &\approx \int \frac{dp}{2\pi} \int \frac{dp'}{2\pi} \int d^2 z \bar{h}_{k_1}(z) \bar{h}_{k_2}(z) \bar{h}_p(z) \bar{h}_{p'}(z) \int d^2 w h_p(w) h_{p'}(w) h_{k_3}(w) h_{k_4}(w) \times \\
&\times \left[ \theta(T - w^0) \theta(w^0 - z^0) + \theta(T - z^0) \theta(z^0 - w^0) \right]
\end{aligned} \tag{81}$$

Заметим, что почти такие же интегралы уже были вычислены нами в разделе 9 (см. формулы (36), (57), (61)-(67)), и оказалось, что они растут как некоторая степень  $T$ . Аналогично, каждое слагаемое в предыдущей формуле растёт со временем как  $T^2$  в случае ломаной мировой линии с  $\beta < 1$  или как  $T^4$  в случае зеркала, приближающегося к скорости света. Таким образом, вклад в  $\Delta G_{x_1 x_2 x_3 x_4}^{++--}$  за счёт  $n_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(1)}$  растёт как  $T^2$  или как  $T^4$  в зависимости от траектории зеркала.

## 12 Заключение

Прежде всего, отметим в заключении, что точный пропагатор Келдыша во взаимодействующей теории имеет следующую форму, когда  $x^0 = y^0$ :

$$\begin{aligned}
G_{xy}^K |_{x^0=y^0} &= G_{xy}^{K(0)} |_{x^0=y^0} + \\
&+ \iint \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \left[ \langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle \bar{h}_k(x) h_{k'}(y) + \langle a_k a_{k'} \rangle h_k(x) h_{k'}(y) + \text{с. с.} \right],
\end{aligned}$$

где  $G^{K(0)}$  – это пропагатор Келдыша в древесном приближении, а операторы  $a_k^\dagger$ ,  $a_k$  – операторы рождения и уничтожения в представлении взаимодействия (следовательно, они зависят от времени). Сравнивая эту формулу с формулой (32) для поправок к пропагатору Келдыша, мы видим, что вычисленные нами величины  $n_{kk'}$  – не что иное, как числа заполнения:  $n_{kk'} = \langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle$ , а  $\kappa_{kk'}$  – аномальные квантовые средние:  $\kappa_{kk'} = \langle a_k a_{k'} \rangle$ . Тот факт, что эти величины приобретают ненулевые значения, свидетельствует о том, что основное состояние

системы меняется в ходе её эволюции.

Итак, в бакалаврской работе было показано, что в двумерной безмассовой скалярной теории поля с нулевым граничным условием на некоторой времениподобной кривой и с взаимодействием  $\lambda\phi^4$  петлевые поправки к пропагатору Келдыша (и, как следствие, к плотности потока энергии) растут со временем, что может привести к существенному изменению результата для потока, полученного в древесном приближении. Чтобы до конца понять влияние этого эффекта, необходимо просуммировать лидирующие поправки, идущие из всех петель, как это было сделано в уже упомянутых выше случаях скалярной теории поля в пространстве де Ситтера и скалярной электродинамики на фоне внешнего электрического поля [5]-[8], [10],[11].

### 13 Список литературы

- [1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, doi:10.1017/CBO9780511622632
- [2] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. Roy. Soc. Lond. A **348**, 393 (1976);  
P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. Roy. Soc. Lond. A **356**, 237 (1977).  
doi:10.1098/rspa.1977.0130
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [4] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, arXiv:cond-mat/0412296;  
Bibliographic Code: 2004cond.mat.12296K.
- [5] E. T. Akhmedov, JHEP **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [6] E. T. Akhmedov and P. .Burda, Phys. Rev. D **86**, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [7] E. T. Akhmedov, Phys. Rev. D **87**, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].
- [8] E. T. Akhmedov, F. K. Popov and V. M. Slepukhin, Phys. Rev. D **88**, 024021 (2013)  
[arXiv:1303.1068 [hep-th]].
- [9] E. T. Akhmedov, International Journal of Modern Physics D, Vol. 23, No. **1**, 1430001 (2014)  
[arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [10] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, JHEP **1409**, 071 (2014)  
doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [11] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, JHEP **1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085  
[arXiv:1412.1554 [hep-th]].
- [12] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93**, no. 2, 024029 (2016)  
doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].
- [13] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko and F. K. Popov, arXiv:1701.07226 [hep-th].
- [14] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50**, 6357 (1994)  
doi:10.1103/PhysRevD.50.6357 [astro-ph/9407016].
- [15] N. C. Tsamis and R. P. Woodard, Nucl. Phys. B **724**, 295 (2005)  
doi:10.1016/j.nuclphysb.2005.06.031 [gr-qc/0505115].