

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

**Изучение транспортных коэффициентов
кварк-глюонной плазмы
методами решёточного моделирования**

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:
студент 121 группы
Никита Юрьевич Астраханцев

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Брагута В.В.

Долгопрудный
2017

Содержание

1	Введение	3
2	Детали вычислений	4
3	Спектральная функция из фитирования	7
4	Метод Бакуса-Гильберта для нахождения спектральной функции	11
5	Объёмная вязкость: введение	19
6	Объёмная вязкость: вычисление	19
7	Обсуждение и выводы	21

1 Введение

Современные эксперименты по столкновению тяжёлых ионов такие как RHIC и LHC направлены на изучение кварк-глюонной плазмы (КГП). Гидродинамическое описание эволюции КГП хорошо показало себя в описании результатов эксперимента [1, 2]. Несмотря на это, гидродинамика является лишь эффективной теорией, которая правильным образом учитывает только динамику инфракрасных степеней свободы. Параметры этой эффективной теории, такие как сдвиговая вязкость, объёмная вязкость, проводимость и т.д. не могут быть вычислены в рамках гидродинамики и должны быть определены либо из эксперимента, либо вычислены из первых принципов.

Измерение эллиптического потока [3, 4] позволяет оценить значение вязкости КГП. В частности, гидродинамика описывает экспериментальные данные, если отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии лежит в диапазоне $\eta/s = (1 - 2.5) \times 1/4\pi$ [5]. Эти значения близки к результату $N = 4$ Суперсимметричной теории Янга-Миллса в области сильной связи $\eta/s = 1/4\pi$ [Policastro et al.(2001)Policastro, Son, and Starinets] и отклоняется от результата, вычисленного в режиме $\eta/s \sim \text{const}/(g^4 \log(1/g)) \sim 1$ [6, 7].

Это позволяет сделать вывод, что малое отношение η/s определяется непертурбативной динамикой. Попытки непертурбативных вычислений сдвиговой вязкости были предприняты в работах [8, 9, 10, 11]. К сожалению, непросто оценить систематические ошибки этих подходов, и сегодня отсутствует аналитический подход, основанный на первых принципах и полностью учитывающий непертурбативную динамику КГП. Поэтому решёточное моделирование КХД является единственным способом вычислить сдвиговую вязкость КГП.

Несмотря на существенный прогресс в решёточном изучении свойств КХД, сегодня невозможно вычислить сдвиговую вязкость КГП с динамическими кварками. Даже в чистой гидродинамике вычисление сдвиговой вязкости является невероятно сложной задачей. Было предпринято лишь немного попыток вычислить сдвиговую вязкость $SU(3)$ -глюодинамики в работах [Karsch and Wyld(1987), Nakamura and Sakai(2005), Meyer(2007), Meyer(2009 12)] и $SU(2)$ -гидродинамики в работах [Braguta and Kotov(2013), 13]. В этой работе мы планируем изучить температурную зависимость сдвиговой вязкости $SU(3)$ -глюодинамики в окрестности фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент $T/T_c \in [0.9, 1.5]$.

В первой части работы обсуждается измерение и определение сдвиговой вязкости кварк-глюонной плазмы. Предпоследняя глава будет посвящена объёмной вязкости, которая определяется близкими методами с поправками на другой коррелятор.

2 Детали вычислений

Сдвиговая вязкость связана с Евклидовой корреляционной функцией тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a - F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\alpha}^a$ (для простоты мы опустили аномалию следа):

$$C(x_0) = T^{-5} \int d^3\mathbf{x} \langle T_{12}(0)T_{12}(x_0, \mathbf{x}) \rangle, \quad (2.1)$$

где T — температура системы. Корреляционная функция (6.1) может быть записана в терминах спектральной функции $\rho(\omega)$

$$C(x_0) = T^{-5} \int_0^\infty \rho(\omega) \frac{\cosh \omega(\frac{1}{2T} - x_0)}{\sinh \frac{\omega}{2T}} d\omega. \quad (2.2)$$

Спектральная функция содержит ценную информацию о свойствах среды. Для того, чтобы найти сдвиговую вязкость, используется формула Кубо [Kubo(1957)]

$$\eta = \pi \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho(\omega)}{\omega}, \quad (2.3)$$

Решёточные вычисления сдвиговой вязкости можно разделить на две части. Первая часть — измерение корреляционной функции $C(x_0)$ с достаточной точностью. Эта часть требует существенных вычислительных ресурсов, но в случае чистой глюодинамики точность может быть сильно улучшена с помощью двухуровневого алгоритма [Meyer(2003)]. Вторая часть — определение спектральной функции $\rho(\omega)$ из корреляционной функции $C(x_0)$. Эта часть, возможно, наиболее сложна, так как требуется определить непрерывную спектральную функцию $\rho(\omega)$ из интегрального уравнения (6.2) для набора из $\mathcal{O}(10)$ значений функции $C(x_0)$, измеренных в решёточном моделировании.

Ниже нам потребуются свойства спектральной функции. Сперва нужно вспомнить самые общие свойства: положительность спектральной функции $\rho(\omega)/\omega \geq 0$ и нечётность: $\rho(-\omega) = -\rho(\omega)$. На больших частотах ожидается, что асимптотическая свобода проявит себя в приближении спектральной функции к посчитанной в режиме слабой связи. Для этого также важно записать выражение для спектральной функции в первом приближении по сильной константе связи [Meyer(2008a)]

$$\rho^{LO}(\omega) = \frac{1}{10} \frac{d_A}{(4\pi)^2} \frac{\omega^4}{\tanh(\frac{\omega}{4T})} + \left(\frac{2\pi}{15}\right)^2 d_A T^4 \omega \delta(\omega), \quad (2.4)$$

где $d_A = N_c^2 - 1 = 8$ для $SU(3)$ -глюодинамики.

Во втором приближении спектральная функция на больших ω также известна [Kataev et al.(1982)Kataev, Krasnikov, and Pivovarov]:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \rho^{NLO}(\omega) = \frac{1}{10} \frac{d_A}{(4\pi)^2} \omega^4 \left(1 - \frac{5\alpha_s N_c}{9\pi} \right) \quad (2.5)$$

Нужно отметить, что на больших ω спектральная функция растёт как $\rho(\omega) \sim \omega^4$, что приводит к большому пертурбативному вкладу в корреляционную функцию на всех значениях Евклидоваго времени x_0 . Вычисления показывают, что даже при $x_0 = 1/(2T)$ древесный вклад составляет $\sim 80 - 90\%$ полного значения корреляционной функции. Такое поведение при больших ω приводит к быстрому убыванию корреляционной функции $C(x_0) \sim 1/x_0^5$ на малых x_0 . По этой причине отношение шум/сигнал для $C(x_0)$ очень мало при $x_0 \gg a$, и решёточное вычисление корреляционной функции при $x_0 \sim 1/(2T)$ становится очень вычислительно сложным.

В численном моделировании используется Вильсоновское калибровочное действие для $SU(3)$ -глюодинамики

$$S_g = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{3} \text{ReTr} U_{\mu, \nu}(x) \right), \quad (2.6)$$

где $U_{\mu, \nu}(x)$ — произведение линковых переменных вдоль элементарного прямоугольника (μ, ν) , начинающегося в x .

Для тензора $F_{\mu\nu}$ используется клеверная схема дискретизации:

$$F_{\mu\nu}^{(clov)}(x) = \frac{1}{4iga^2} (V_{\mu, \nu}(x) + V_{\nu, -\mu}(x) + V_{-\mu, -\nu}(x) + V_{-\nu, \mu}(x)), \quad (2.7)$$

$$V_{\mu, \nu}(x) = \frac{1}{2} (U_{\mu, \nu}(x) - U_{\nu, \mu}(x)).$$

Можно легко определить тензор энергии-импульса на решётке, используя его непрерывное выражение и решёточную дискретизацию (2.7) тензора $F_{\mu\nu}$.

Также заметим, что вместо корреляционной функции $\langle T_{12}(x) T_{12}(y) \rangle$ в этой работе измерятся корреляционная функция $\frac{1}{2} (\langle T_{11}(x) T_{11}(y) \rangle - \langle T_{11}(x) T_{22}(y) \rangle)$. Обе функции совпадают в непрерывном пределе [Karsch and Wyld(1987)]. В то же время, перенормировочные свойства диагональных компонент тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ известны (см. ниже).

Стало общепринято представлять значение сдвиговой вязкости в виде отношения вязкости на плотность энтропии η/s . Для однородным систем плотность энтропии s может быть выражена, как $s = \frac{\epsilon+p}{T}$, где ϵ — плотность энергии и p — давление. Эти термодинамические величины были измерены с помощью метода, описанного в [Engels et al.(2000)Engels, Karsch, and Scheideler].

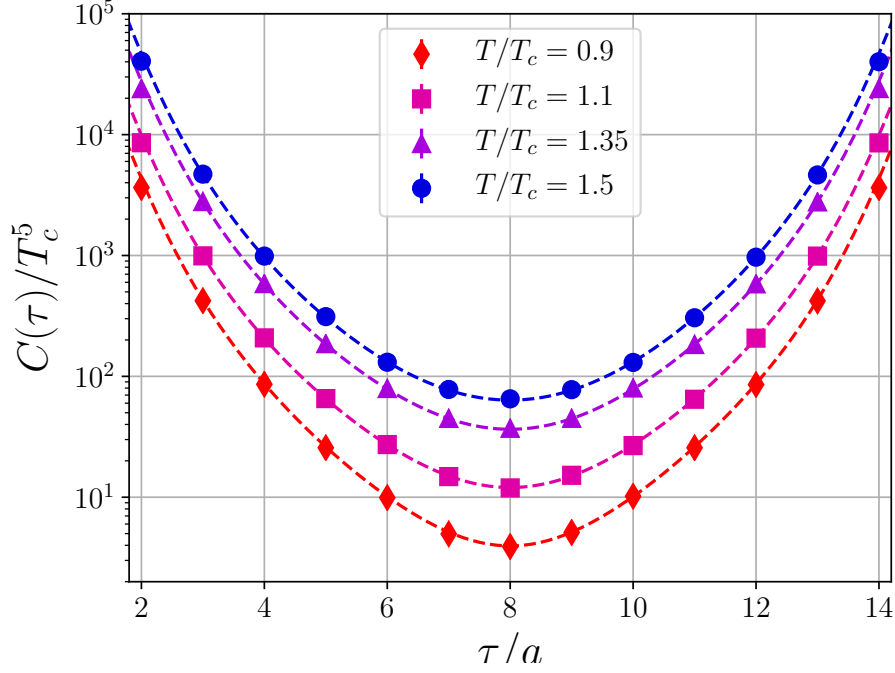


Рис. 1: Корреляционные функции $C(x_0)$ для температур $T/T_c = 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$.

Тензор энергии-импульса в непрерывной теории есть набор Нётеровских токов, связанных с трансляционной инвариантностью действия. В решёточной формулировке теории поля нет непрерывной вращательной инвариантности и требуется перенормировать тензор энергии-импульса. Для корреляционной функции, рассмотренной в данной работе, перенормировка мультипликативна [Meyer(2011)]. Перенормировочные факторы зависят от схемы дискретизации. К примеру, для диагональных компонент $T_{\mu\nu}$ (когда $\mu = \nu$) и плакетной дискретизации $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\mu} = \frac{2}{a^4 g^2} \left(- \sum_{\nu \neq \mu} \text{Tr} U_{\mu,\nu}(x) + \sum_{\nu, \sigma \neq \mu, \sigma > \nu} \text{Tr} U_{\sigma,\nu}(x) \right)$$

перенормировочные факторы связаны с анизотропийными коэффициентами [Engels et al.(2000)Engels, Karsch, and Scheideler, Meyer(2008b)]: $T_{\mu\nu}^{(ren)} = Z^{(plaq)} T_{\mu\nu}^{(plaq)}$, $Z^{(plaq)} = 1 - \frac{1}{2} g_0^2 (c_\sigma - c_\tau)$, где c_σ и c_τ определены в [Engels et al.(2000)Engels, Karsch, and Scheideler].

Используя перенормировочные факторы из плакетной схемы дискретизации T_{00} , можно определить перенормировочные факторы для клеверной дискретизации, просто фитируя вакуумные значения перенормированного T_{00} : $Z^{(plaq)} \langle T_{00}^{(plaq)} \rangle = Z^{(clov)} \langle T_{00}^{(clov)} \rangle$.

3 Спектральная функция из фитирования

Были измерены корреляционные функции $C(x_0)$ на решётке 16×32^3 при для следующего набора β : $\beta = 6.491, 6.512, 6.532, 6.575, 6.647, 6.712, 6.811, 6.897$, который соответствует температурам $T/T_c \simeq 0.9, 0.925, 0.95, 1.0, 1.1, 1.2, 1.35, 1.5$. Применение двухуровневого алгоритма позволила нам получить ошибки не более, чем $\sim 2 - 3\%$ на расстоянии $Tx_0 = 1/2$ для всех рассматриваемых температур. Для остальных точек точность ещё выше. На Рис. 6 построены корреляционные функции для нескольких температур.

Следующий шаг вычисления сдвиговой вязкости — нахождение спектральной функции из интегрального уравнения (6.2). В этом разделе мы используем физически мотивированные анзацы спектральной функции с неизвестными параметрами. Эти параметры будут определены из процедуры фитирования.

Первый анзац, используемый в вычислении, мотивирован правилом сумм КХД [Shifman et al.(1979)Shifman, Vainshtein, and Zakharov]. Для построения спектральной функции мы объединяем гидродинамическое поведение на малых частотах с асимптотической свободой на больших частотах ¹

$$\rho_1(\omega) = BT^3\omega\theta(\omega_0 - \omega) + A\rho_{lat}(\omega)\theta(\omega - \omega_0). \quad (3.1)$$

В последней формуле $\rho_{lat}(\omega)$ — древесное решёточное выражение для спектральной функции, вычисленное для корреляционной функции $\sim \frac{1}{2}(\langle T_{11}(x)T_{11}(y) \rangle - \langle T_{11}(x)T_{22}(y) \rangle)$ с клеверной дискретизацией тензора $F_{\mu\nu}$ на решётке с фиксированными L_t и $L_s \rightarrow \infty$. Функция $\rho_{lat}(\omega)$ была вычислена в работе [13].

Выше было отмечено, что корреляционная функция $C(x_0)$ очень чувствительна к ультрафиолетовым свойствам спектральной функции. Для получения точного описания решёточных данных, мы использовали на больших частотах спектральную функцию $\rho_{lat}(\omega)$ вместо непрерывного выражения (2.4). Использование функции $\rho_{lat}(\omega)$ принимает во внимание эффекты дискретизации во временном направлении и, как результат, существенно улучшает качество фита.

Очевидно, что взаимодействие модифицирует древесную формулу. Тем не менее, из-за асимптотической свободы становится ясно, что эта модификация не слишком велика. В частности, из (2.5) видно, что однопетлевые поправки модифицируют спектральную функцию на фактор, близкий к единице. Используя это наблюдение, в выражении (3.1) мы домножили $\rho_{lat}(\omega)$ на некий фактор A , который эффективно учитывает радиационные поправки на больших частотах. Наши результаты показывают, что введение фактора A критично для успешного описания решёточных данных.

Проблема анзаца (3.1) в том, что он имеет разрыв в точке $\omega = \omega_0$. Без особого труда можно построить спектральную функцию с похожими на

¹Заметим, что частота ω измеряется в физических единицах.

T/T_c	функция	A	ω_0/T	η/s	γ	C	χ^2/dof
0.90	ρ_1	1.108(5)	8.7(4)	0.64(16)	–	–	0.9
	ρ_2	1.108(3)	8.5(4)	0.59(13)	3.9(1.5)	–	1.2
	ρ_3	1.109(3)	8.5(6)	0.57(25)	–	0.002(53)	1.2
0.925	ρ_1	0.921(3)	8.7(3)	0.49(6)	–	–	1.9
	ρ_2	0.921(2)	8.7(3)	0.49(6)	4.7(1.1)	–	2.1
	ρ_3	0.921(2)	8.7(7)	0.55(17)	–	-0.003(19)	2.1
0.95	ρ_1	0.942(5)	7.7(5)	0.22(9)	–	–	1.0
	ρ_2	0.940(4)	7.6(5)	0.20(8)	2.5(1.3)	–	1.5
	ρ_3	0.940(8)	7.6(7)	0.24(15)	–	0.002(37)	1.5
1.0	ρ_1	0.998(13)	7.3(5)	0.23(3)	–	–	1.8
	ρ_2	0.998(13)	7.3(5)	0.21(5)	3.7(8)	–	2.1
	ρ_3	0.998(13)	7.3(1.1)	0.24(8)	–	-0.007(65)	2.1
1.1	ρ_1	0.927(8)	7.0(7)	0.18(5)	–	–	1.3
	ρ_2	0.927(8)	6.9(6)	0.17(4)	4.1(1.4)	–	1.4
	ρ_3	0.927(8)	7.2(1.0)	0.15(5)	–	0.02(3)	1.4
1.2	ρ_1	0.819(8)	7.6(4)	0.21(3)	–	–	1.6
	ρ_2	0.818(7)	7.6(5)	0.21(3)	5.4(8)	–	1.8
	ρ_3	0.818(9)	7.6(5)	0.22(6)	–	-0.004(28)	1.8
1.35	ρ_1	0.932(8)	7.7(5)	0.22(3)	–	–	0.9
	ρ_2	0.932(8)	7.7(5)	0.22(3)	2.3(1.0)	–	1.0
	ρ_3	0.932(8)	7.9(1.0)	0.20(7)	–	0.01(5)	1.0
1.5	ρ_1	0.932(9)	9.0(4)	0.28(2)	–	–	1.0
	ρ_2	0.932(9)	9.0(4)	0.27(2)	2.6(7)	–	1.1
	ρ_3	0.932(9)	9.1(4)	0.27(7)	–	0.002(31)	1.1

Таблица 1: Параметры функций $\rho_1(\omega)$, $\rho_2(\omega)$, $\rho_3(\omega)$, полученные из фита решёточных данных. Вместо параметра B во второй колонке показано отношение $\eta/s = \pi B/s$.

(3.1) свойствами, но без разрыва

$$\rho_2(\omega) = \frac{1}{2}BT^3\omega (1 + \tanh [\gamma(w_0 - w)]) + \frac{1}{2}A\rho_{lat}(\omega) (1 + \tanh [\gamma(w - w_0)]). \quad (3.2)$$

Заметим, что в данном анзаце был введён параметр γ , который определяет ширину области перехода между инфракрасным гидродинамическим режимом и ультрафиолетовым режимом с асимптотической свободой спектральной функции. Очевидно, ширина перехода равна $\sim 1/\gamma$.

В функциях (3.1), (3.2) гидродинамика сразу переходит в режим асимптотической свободы. Тем не менее, разумно предположить, что существует область частот, в которой спектральная функция отклоняется от гидродинамики. Для того, чтобы изучить это отклонение, в дополнение к функциям (3.1), (3.2) был использован анзац

$$\rho_3(\omega) = BT^3\omega (1 + C\omega^2) \theta(\omega_0 - \omega) + A\rho_{lat}(\omega)\theta(\omega - \omega_0). \quad (3.3)$$

В последней формуле мы ввели поправку к гидродинамическому приближению, которая определяется параметром C . Мы не вводили поправку порядка $\sim \omega^2$, так как это нарушило бы нечётность по частоте. Заметим, что в подходе жёстких термальных петель гидродинамическое поведение на малых частотах заменяется транспортным пиком конечной ширины $\omega \rightarrow \omega/(1 + \Gamma\omega^2)$ [14]. Поэтому, функция (3.3) может быть рассмотрена как первый член разложения транспортного пика с $\Gamma = -C$.

Мы фитируем данные ($14 \geq x_0/a \geq 2$) для каждой температуры по формуле 6.2) спектральными функциями (3.1), (3.2), (3.3). В Таблице 1 показаны параметры функций (3.1), (3.2), (3.3), полученные в результате фитирования. Вместо параметра B во второй колонке Таблицы 1 показано отношение η/s , связанное с B , как $\eta/s = \pi B/s$.

Несколько комментариев по порядку:

- Из Таблицы 1 видно, что функции (3.1), (3.2), (3.3) фитируют решёточные данные хорошо для всех температур. Также видно, что для всех анзацев отношение η/s быстро падает при приближении температуры к критической точке T_c , и далее либо медленно растёт выше T_c , либо остаётся константой. Такое поведение видно во множестве моделей, направленных на вычисление сдвиговой вязкости КХД.
- Величины η/s , A и ω_0 , полученные из фитирования различными анзацами при одной температуре совпадают в пределах ошибок вычислений. Тем не менее, погрешности определения параметров для различных анзацев отличаются.
- Значения порогового параметра ω_0 для всех анзацев хорошо мотивированы физически. Значение сильной константы связи на частоте,

соответствующей переходу, ω_0 ($\omega_0 \sim 2 - 3$ ГэВ в физических единицах) равно $\alpha_s(\omega_0) \sim 0.2 - 0.3$. Это позволяет ожидать, что пертурбативное выражение для спектральной функции применимо для $\omega > \omega_0$. Значения фактора A , который принимает во внимание радиационные поправки, для всех температур близки к единице, что подтверждает применимость асимптотической свободы на больших частотах.

- Заметим также, что, в отличие от инфракрасной части спектральной функции, параметры ультрафиолета определены с очень большой точностью для всех функций. Это свойство возникает из-за существенного вклада ультрафиолета в корреляционную функцию на больших частотах.
- Функция $\rho_3(\omega)$ позволяет изучать отклонения от гидродинамического приближения. Это отклонение определяется параметром C . Из Таблицы 1 видно, что в пределах ошибок значения C равны нулю для всех температур. Отсюда следует, что мы не наблюдаем отклонений от гидродинамического приближения.

Стоит упомянуть, что мы пытались фитировать данные спектральными функциями, похожими на $\rho_1(\omega)$, но с другой подстановкой $\omega \rightarrow \omega/(1+\Gamma\omega^2)$. Эти подстановки учитывают транспортный пик [14]. Результат этого фита очень близок к анзацу (3.3). Параметры Γ обнуляются в пределах ошибок вычислений.

Низкочастотные части спектральных функций (3.1) и (3.2) определяются гидродинамической формулой $\sim \omega$. Можно ожидать, что гидродинамическое приближение работает хорошо вплоть до $\omega \leq \pi T \simeq 1$ ГэВ [Meyer(2008c)]. С другой стороны, высокочастотное пертурбативное выражение для спектральной функции очень точно зафиксировано и работает хорошо вплоть до $\omega \geq \omega_0 \sim 3$ ГэВ. Форма спектральной функции в области $1 \text{ GeV} \leq \omega \leq 3 \text{ GeV}$ не ясна. Мы верим, что плохое знание спектральной функции в области $1 \text{ GeV} \leq \omega \leq 3 \text{ GeV}$ является основным источником ошибок вычислений, основанных на фитировании решёточных данных функциями $\rho_1(\omega)$ и $\rho_2(\omega)$. Заметим, что этот источник ошибок в значениях вязкости не учтён в Таблице 1.

Функция $\rho_3(\omega)$ модифицирует гидродинамическое приближение в промежуточной области с помощью члена $\sim C\omega^2$. Таким образом, функция $\rho_3(\omega)$, как минимум, частично учитывает неопределённость в сдвиговой вязкости, возникающую из-за плохого знания спектральной функции в промежуточной области. Поэтому мы принимаем результаты для η/s , полученные из анзаца $\rho_3(\omega)$, как результаты этой секции. В дополнение к статистическим неопределённостям в отношении η/s , показанных в Таблице 1, существуют неопределённости, связанные с плотностью энтропии s и перенормировочным коэффициентом кловерной дискретизации тензора

энергии-импульса (2.7). Первые ошибки порядка 4–6 % для всех рассматриваемых температур. Последние ошибки порядка ~ 3 % на всех температурах $T/T_c \geq 1.0$, ~ 6 % на температурах $T/T_c = 0.925, 0.95$ и ~ 12 % для температуры $T/T_c = 0.9$. Величины отношений η/s , полученные в рамках процедуры фитирования, с учётом всех ошибок, показаны во второй колонке Таблицы 2 и на Рисунке 5.

4 Метод Бакуса-Гильберта для нахождения спектральной функции

В этой секции мы собираемся определить отношение η/s , используя метод Бакуса-Гильберта (БГ) [15, 16]². Этот метод имеет существенное преимущество перед процедурой параметрического фитирования: нет необходимости знать форму спектральной функции для проведения вычислений.

Метод формулируется следующим образом.³ Необходимо решить уравнение (6.2). Для этого мы переписываем его в виде

$$C(x_i) = \frac{1}{T^5} \int_0^\infty d\omega \frac{\rho(\omega)}{f(\omega)} K(x_i, \omega), \quad (4.1)$$

где $f(\omega)$ — некоторая функция, обладающая свойством $f(t)|_{t \rightarrow 0} \sim t$, x_i — узлы решётки, в которых проводились вычисления $C(x_i)$ и $K(x, \omega)$ — перескалированное ядро интегрального уравнения

$$K(x, \omega) = f(\omega) \frac{\cosh \omega \left(\frac{1}{2T} - x \right)}{\sinh \frac{\omega}{2T}}, \quad (4.2)$$

Наша цель — определить $\rho(\omega)$. В рамках БГ метода вместо функции $\rho(\omega)$ рассматривается эстиматор $\bar{\rho}(\bar{\omega})$, который записывается как

$$\bar{\rho}(\bar{\omega}) = f(\bar{\omega}) \int_0^\infty d\omega \delta(\bar{\omega}, \omega) \frac{\rho(\omega)}{f(\omega)}, \quad (4.3)$$

где функция $\delta(\bar{\omega}, \omega)$ называется функцией разрешения. Эта функция имеет пик в районе точки $\bar{\omega}$ и нормирована $\int_0^\infty d\omega \delta(\bar{\omega}, \omega) = 1$. Она раскладывается по ядрам $K(x_i, \omega)$

$$\delta(\bar{\omega}, \omega) = \sum_i q_i(\bar{\omega}) K(x_i, \omega). \quad (4.4)$$

²В КХД этот метод был недавно использован в работах [17, 18]. Метод Бакуса-Гильберта был также применён в решёточных вычислениях проводимости графена [19].

³Мы используем обозначения из работы [17, 18]

Для функции разрешения такого вида, эстиматор — линейная комбинация значений корреляционной функции

$$\bar{\rho}(\bar{\omega}) = f(\bar{\omega}) \sum_i q_i(\bar{\omega}) C(x_i) \quad (4.5)$$

Очевидно, для лучшего приближения $\rho(\omega)$ эстиматором $\bar{\rho}(\bar{\omega})$ требуется минимизировать ширину $\delta(\bar{\omega}, \omega)$. Тем не менее, слишком узкий пик будет строить эстиматор, который будет настраиваться на точки, а не на физику, которую они олицетворяют. Это означает, что метод такого рода должен быть регуляризован.

Метод Бакуса-Гильберта нацелен на минимизацию функционала Бакуса-Гильберта $\mathcal{H}(\rho(\omega)) = \lambda \mathcal{A}(\rho(\omega)) + (1 - \lambda) \mathcal{B}(\rho(\omega))$. Слагаемое \mathcal{A} отвечает за ширину функции разрешения (второй момент распределения): $\mathcal{A} = \int_0^\infty d\omega \delta(\bar{\omega}, \omega) (\omega - \bar{\omega})^2$. В принципе, это могла бы быть любая другая функция с похожим физическим смыслом. Преимущество второго момента в том, что он квадратичен по ω и $\bar{\omega}$, что делает возможным аналитическое нахождение минимума функционала.

Слагаемое $\mathcal{B}(\rho(\omega)) = \text{Var}[\rho(\omega)]$ штрафует $\rho(\omega)$ за слишком большую зависимость от данных. В терминах матрицы ковариации S и q -функций, оно имеет вид $\mathcal{B}(\vec{q}) = \vec{q}^T \hat{S} \vec{q}$.

В конце концов, минимизация функционала \mathcal{H} даёт следующие значения коэффициентов:

$$q_i(\omega) = \frac{\sum_j W_{ij}^{-1}(\bar{\omega}) R(x_j)}{\sum_{kj} R(x_k) W_{kj}^{-1}(\bar{\omega}) R(x_j)}, \quad (4.6)$$

$$W_{ij}(\bar{\omega}) = \lambda \int_0^\infty d\omega K(x_i, \omega) (\omega - \bar{\omega})^2 K(x_j, \omega) + (1 - \lambda) S_{ij}, \quad (4.7)$$

$$R(x_i) = \int_0^\infty d\omega K(x_i, \omega). \quad (4.8)$$

Если λ близка к единице, функция разрешения имеет минимальную ширину, и эстиматор даёт лучшее приближение к спектральной функции. Тем не менее, применение метода Бакуса-Гильберта с $\lambda \sim 1$ к поиску сдвиговой вязкости даёт большие ошибки. Ответ становится очень зависимым от данных, спектральная функция оказывается шумной и нестабильной. Статистические ошибки могут быть уменьшены ценой уменьшения ширины функции разрешения за счёт уменьшения параметра λ .

Настало время обсудить выбор функции $f(x)$. Для того, чтобы определить спектральную функцию на малых частотах, разумно выбрать

$$f_1(x) = x \quad (4.9)$$

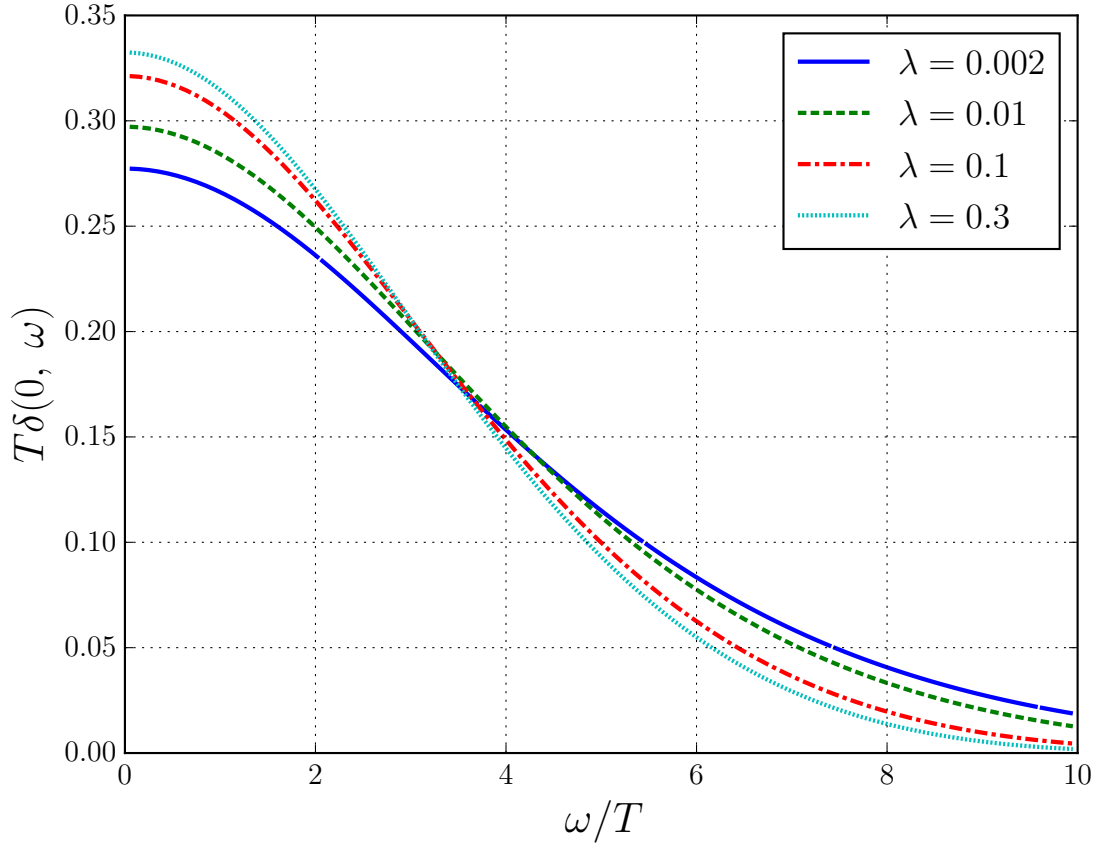


Рис. 2: Функция разрешения при температуре $T/T_c = 1.35$ и $\bar{\omega} = 0$ для различных значений λ .

В этом случае отношение $\rho(\omega)/f_1(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \eta/\pi$. Главная мотивация для выбора такой функции в том, что она даёт довольно небольшую ширину функции разрешения на малых частотах.

Для изучения спектральной функции на больших частотах мы выбираем

$$f_2(x) = \frac{\rho_{lat}(x)}{(\tanh(x/4T))^2} \quad (4.10)$$

Можно ожидать, что из-за асимптотической свободы на больших частотах $\omega \gg \Lambda_{QCD}$ отношение $\rho(\omega)/f_2(\omega)$ ведёт себя как константа. Ширина разрешающей функции для $f_2(x)$ больше, чем для $f_1(x)$.

Приступим теперь к вычислению сдвиговой вязкости. Для этого мы используем функцию $f_1(x)$. Параметра λ выбираем равным 0.002. Для такого значения λ ошибки восстановленной спектральной плотности на нулевой частоте меньше 1% для всех рассматриваемых температур. На Рисунке 2 построены функции разрешения на температуре $T/T_c = 1.35$ и $\bar{\omega} = 0$ для различных значений λ . Функции разрешения для других температур очень похожи на изображённые на Рисунке 2 и не показаны здесь.

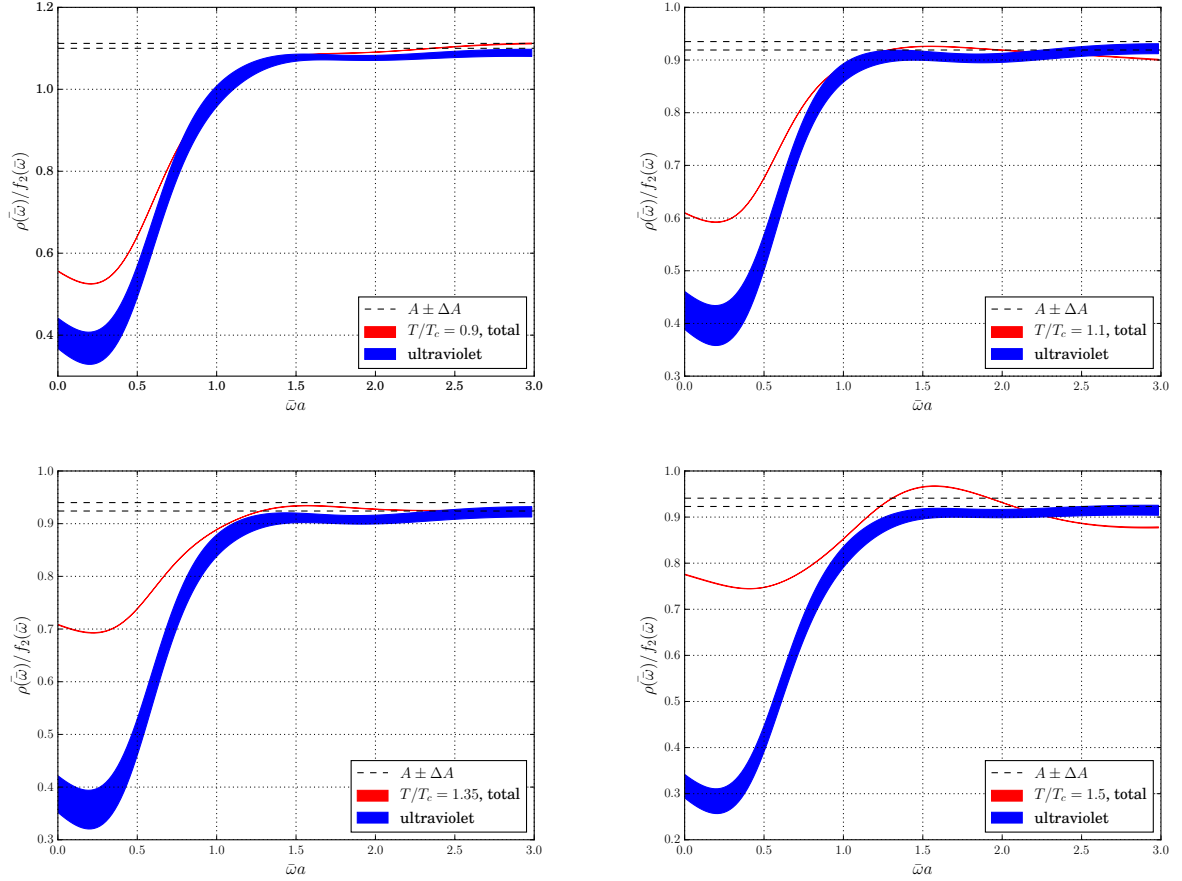


Рис. 3: Отношения $\bar{\rho}(\bar{\omega})/f_2(\bar{\omega})$ как функции $\bar{\omega}a$ для температур $T/T_c = 0.9, 1.1, 1.35, 1.5$. Красные кривые соответствуют спектральным функциям, восстановленным по методу Бакуса-Гильберта из данных. Синие кривые соответствуют ультрафиолетовому вкладу в виде (4.11), свёрнутому с функцией разрешения. Прерывистые линии — значения констант A с ошибками, полученными из процедуры фитирования.

Из Рисунка 2 видно, что ширина функции разрешения при $\lambda = 0.002$ равняется $\Delta\omega \sim 4T$. Если забыть об ультрафиолетовом вкладе, свёртка спектральной функции $\rho(\omega)$ с функцией разрешения (4.3) даёт среднее спектральной функции по интервалу ширины $\sim 4T$. Можно сказать, что гидродинамическое приближение работает точно вплоть до $\omega \leq \pi T \simeq 1$ ГэВ [Meyer(2008c)], что покрывает большую часть интервала $(0, 4T)$.

Обсудим ультрафиолетовый вклад в свёртку (4.3). Согласно результатам предыдущей секции, ультрафиолетовый вклад начинает играть большую роль, начиная с частот $\omega/T \sim 7-8$. Из Рисунка 2 видно, что функция разрешения подавлена в этой области. Однако нельзя упустить из внимания вклад ультрафиолета, так как спектральная функция на больших частотах растёт очень быстро $\rho(\omega) \sim \omega^4$. Вычисление показывает, что для всех рассматриваемых температур вклад, идущий от ультрафиолетовой части

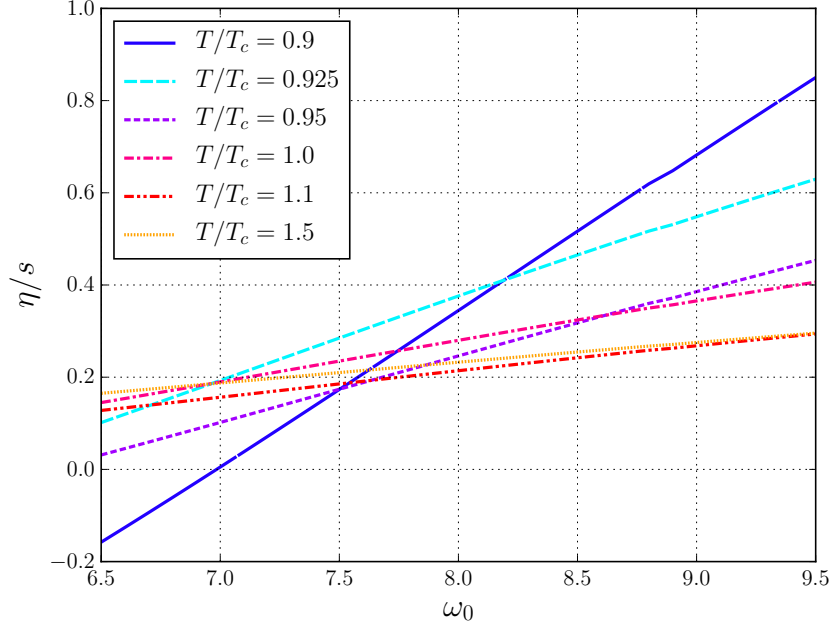


Рис. 4: Отношение η/s с вычтенным вкладом ультрафиолета как функция порога ω_0 для температур $T/T_c = 0.9, 0.925, 0.95, 1.0, 1.1, 1.5$. Параметр A взят равным центральному значению фита решёточных данных функцией $\rho_3(\omega)$.

спектральной функции, оказывается больше гидродинамического вклада. Таким образом, для получения разумного результата по сдвиговой вязкости, необходимо вычесть ультрафиолетовый вклад.

Для изучения спектральной функции на больших частотах, предлагается использовать метод БГ с функцией $f_2(\omega)$ и $\lambda = 0.002$. На Рисунке 3 построены отношения $\bar{\rho}(\bar{\omega})/f_2(\bar{\omega})$ как функции $\bar{\omega}a$ для температур $T/T_c = 0.9, 1.1, 1.35, 1.5$. Для других температур графики похожи и не показаны здесь. Красные кривые соответствуют спектральным функциям, восстановленным БГ методом из данных. Для сравнения этих результатов с полученными в прошлой секции, была взята спектральная функция на больших частотах

$$\rho_{ult}(\omega) = A\rho_{lat}(\omega)\theta(\omega - \omega_0), \quad (4.11)$$

и свёрнута с функцией разрешения. Значения A и ω с ошибками были взяты из процедуры фитирования (см. Таблицу 1). Результаты изображены синими кривыми. Наконец, мы построили штрихованные линии, соответствующие значениям констант A с ошибками, полученными из процедуры фитирования.

Теперь несколько комментариев по порядку:

- Из Рисунка 3 видно, что красные кривые можно разделить на две части. Первая часть — спектральная функция на малых частотах

$\bar{\omega}a \leq 0.5$ ($\bar{\omega}T \leq 8$). Можно сказать, что здесь спектральная функция находится в инфракрасной области. После $\bar{\omega}a \sim 0.5$ ($\bar{\omega}T \sim 8$) происходит переход во второй режим, где спектральная функция близка к ультрафиолетовой асимптотике, определяемой параметром A .

- Также ясно из Рисунка 3, что поведение синих кривых, представляющее ультрафиолетовый вклад в отношение $\bar{\rho}(\bar{\omega})/f_2(\bar{\omega})$, похоже на поведение красных кривых. В ультрафиолетовой области красные и синие кривые близки. Переход из ультрафиолетового в инфракрасный режим происходит вблизи той же области по $\bar{\omega}a$.
- В инфракрасной области красные кривые выше синих. Разница обусловлена вкладом в спектральную функцию на малых частотах. Видно, что разница уменьшается с температурой. Если вспомнить, что сдвиговая вязкость связана со спектральной функцией в области низких частот, можно утверждать, что вязкость спадает с температурой. Наши результаты предполагают, что плотность энтропии s падает с температурой быстрее, чем сдвиговая вязкость. Как результат, отношение η/s растёт ниже T_c .
- Из Рисунка 3 видно, что в ультрафиолетовой области восстановленная спектральная функция — медленно меняющаяся функция от $\bar{\omega}a$. Отклонение от асимптотического значения A , полученного в рамках процедуры фитирования, мало для всех температур. Для большинства температур отклонение составляет несколько процентов. Отклонение восстановленной спектральной функции от асимптотического значения A может быть обусловлено радиационными поправками к древесной спектральной функции, которые более сложны, чем просто константа.

Исследование, проведённое в этом разделе, позволяет утверждать, что формуле (4.11) описывает ультрафиолетовую часть спектральной функции с хорошей точностью. Поэтому ниже мы используем (4.11) как модель для ультрафиолетовой части спектральной функции. Значение константы A будет определено из вариации восстановленного отношения $\bar{\rho}(\bar{\omega})/f_2(\bar{\omega})$ в области $\bar{\omega}a \in (1.5, 3)$. Этот интервал выбран потому, что вклад инфракрасной части в спектральную функцию здесь мал, и отношения $\bar{\rho}(\bar{\omega})/f_2(\bar{\omega})$ для всех температур в ультрафиолетовом режиме. Значения констант A , определённых таким способом, находятся в согласии с полученными в результате фитирования.

В дополнение к константе A , ультрафиолетовая часть (4.11) зависит от порогового параметра ω_0 . Поэтому, если вычитать ультрафиолетовый вклад в виде (4.11), отношение η/s , полученное методом БГ, будет зависеть от значения ω_0 . Для изучения этой зависимости на Рисунке 4 построено отношение η/s как функция ω_0 для температур $T/T_c = 0.9, 0.925, 0.95, 1.0, 1.1, 1.5$.

Кривые для температур $T/T_c = 1.2, 1.35$ близки к кривой для $T/T_c = 1.5$, поэтому эти температуры не показаны на графике. Параметр A взят равным центральному значению фита решёточных данных функцией $\rho_3(\omega)$ (см. Таблицу 1). Из Рисунка 4 видно, что по мере роста температуры растёт наклон кривых и спадает зависимость η/s от порогового параметра ω_0 . Зависимость η/s от ω_0 мала для температур $T/T_c \geq 1.0$ и повышается на температурах $T/T_c < 1.0$. Самая большая зависимость η/s от ω_0 наблюдается при $T/T_c = 0.9$. Мы верим, что это свойства исходит из уже упомянутого факта: сдвиговая вязкость глюодинамики спадает с температурой и извлечение вязкости из наблюдаемых, содержащих ультрафиолетовый вклад, становится всё более и более сложной задачей по мере уменьшения температуры.

К сожалению, не до конца ясно, как определить значение порогового параметра ω_0 в рамках метода Бакуса-Гильберта. Заметим, однако, что положение перехода из инфракрасного в ультрафиолетовый режим (см. Рисунок 3) совпадает для восстановленной спектральной функции и для функции (4.11) с ω_0 , полученным в рамках фитирования. Также заметим, что значения параметра A , полученные в рамках метода БГ и процедуры фитирования находятся в согласии. Поэтому можно ожидать, что процедура фитирования даёт хорошее приближение ко значению ω_0 , и можно использовать его для модели ультрафиолетового вклада.

Вычитания ультрафиолетового вклада из отношения η/s в виде (4.11), мы получаем результаты этого раздела. Они показаны в третьей колонке Таблицы 2 и на Рисунке 5. Ошибки, показанные в Таблице 2 и на Рисунке 5, возникают из-за неопределённостей в A , ω_0 , плотности энтропии s и перенормировочной константы тензора энергии-импульса (см. предыдущий раздел). Из Таблицы 2 и Рисунка 5 можно видеть, что результаты, полученные в рамках двух подходов находятся в согласии.

В дополнение к результатам, полученным в этой работе, на Рисунке 5 построены результаты, полученные в работах [Nakamura and Sakai(2005), Meyer(2007), 12]. Видно, что наши результаты находятся в согласии с предыдущими исследованиями.

Также интересно изобразить результаты работы [11]. В этой работе авторы вычислили сдвиговую вязкость в теории Янга-Миллса, используя точное диаграммное представление в терминах полных пропагаторов и вершин, используя глюонные спектральные функции как внешний вход. Наши результаты также в согласии с этой работой.

На Рисунке 5 мы также строим значение отношения η/s для $N = 4$ СЯМ теории в режиме сильной связи $\eta/s = 1/4\pi$ [Policastro et al.(2001)Policastro, Son, and Starinets] и результаты пертурбативного вычисления η/s . Пертурбативные результаты были получены следующим способом: масштаб Λ в бегущей константе связи глюодинамики был взят [20]. Плотность энтропии s была взята в од-

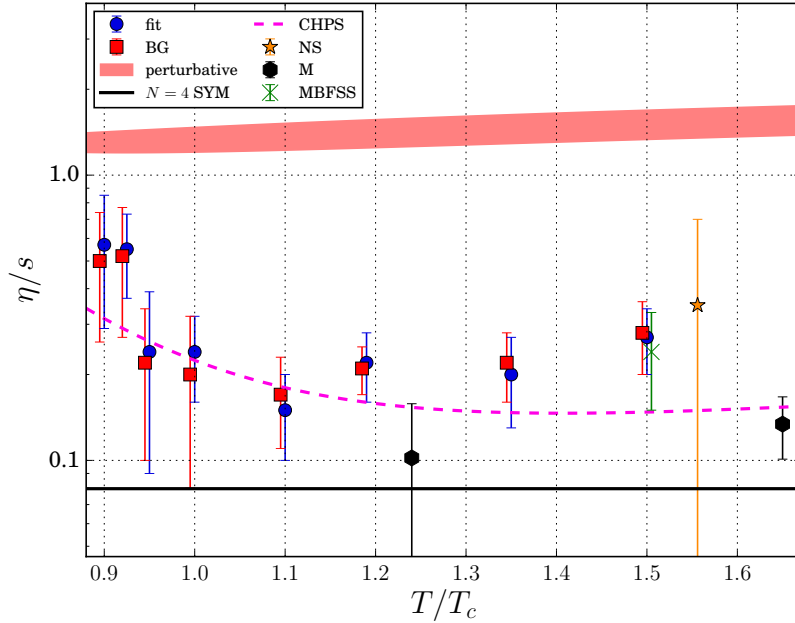


Рис. 5: Отношение η/s в глюодинамике для различных температур. Круглые точки соответствуют результатам, полученным в рамках фитирования, а красные квадраты — методу БГ. Также мы показываем предыдущие решёточные результаты, полученные А. Nakamura, S. Sakai в [Nakamura and Sakai(2005)] (жёлтые звёзды), Н. Meyer в [Meyer(2007)] (чёрные шестиугольники) и S. Mages, S. Borsnyi, Z. Fodor, A. Schfer, K. Szab в [12] (зелёные звёзды). В дополнение построен результат $N = 4$ СЯМ в режиме сильной связи $\eta/s = 1/4\pi$ [Policastro et al.(2001)Policastro, Son, and Starinets] (сплошная чёрная линия), результат пертурбативных вычислений η [7] (красная область) и результат, полученный N. Christiansen, M. Haas, J.M. Pawlowski, N. Strodthoff в работе [11] (фиолетовая кривая).

нопетлевом приближении [21]. Мы взяли пертурбативные результаты для сдвиговой вязкости во втором порядке из работы [7]. Для оценки неопределённости пертурбативных результатов мы меняли масштаб в области от первой до второй Мацубаровской частоты $\mu \in (2\pi T, 4\pi T)$. Сравнивая наши результаты с другими подходами, можно сделать вывод, что в рамках температурного региона $T/T_c \in [0.9, 1.5]$, $SU(3)$ -глюодинамика проявляет свойства сильновзаимодействующей системы, которая не может быть описана пертурбативно, и имеет отношение η/s , близкое к $1/4\pi$ в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса.

5 Объёмная вязкость: введение

Учитывая успех гидродинамического описания столкновений тяжёлых ионов, очень важно вычислить сдвиговую и объёмную вязкость кварк-глюонной плазмы в области $T_c \leq T \leq 3T_c$, важной для эксперимента RHIC и последующих экспериментов БАК. В этой главе проводится вычисление температурной зависимости объёмной вязкости ζ $SU(3)$ -глюодинамики. Вычисление опирается на формулу Кубо и на восстановление временной спектральной функции из евклидового коррелятора аномалии следа. Численно это сложная задача, и в этом случае объёмная вязкость более предпочтительна, чем сдвиговая на больших температурах, так как спектральная функция должна быть строго гладкой в пределе $T \rightarrow +\infty$. Это связано с фактом, что объёмная вязкость исчезает в конформной теории поля, а неабелевы калибровочные теории становятся конформными на больших энергиях, так как пропадает взаимодействие.

Недавно было предположено, что, в силу правила сумм, решёточных данных по $\epsilon - 3P$ и простой модели, объёмная вязкость резко возрастает при приближении к точке фазового перехода первого рода. Это следует отметить, так как газ безструктурных точечных частиц имеет пренебрежимо малую объёмную вязкость как в нерелятивистском, так и в ультрарелятивистском пределах, и объёмной вязкостью часто пренебрегают, так как во внимание принимается сдвиговая вязкость. Кроме того, результат КХД в лидирующем приближении численно очень мал: $\zeta/s = 0.02\alpha_s^2$ при $N_f = 0$. Это удовлетворяет соотношению $\zeta \approx 15\eta(1/3 - v_s^2)^2$, где v_s — скорость звука в среде. Напротив, AdS/CFT вычисления, учитывающие отклонения от конформности в сильной связи, говорят $\zeta = \eta(1/3 - v_s^2)$. Эти формулы указывают на то, что динамика, ответственная за объёмную вязкость вдали от конформности ($v_s^2 < 1/3$) отличается в режимах сильной и слабой связи.

Мы покажем, что ζ/s сильно зависит от температуры, мы также получим некоторые знания о спектральной функции из первых принципов, что поможет описать это неожиданное поведение.

6 Объёмная вязкость: вычисление

Объёмная вязкость связана с Евклидовой корреляционной функцией тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}^a - F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\alpha}^a + \delta_{\mu\nu}\theta$:

$$C_\theta(x_0) = T^{-5} \int d^3\mathbf{x} \langle \theta(0, 0) \theta(x_0, \mathbf{x}) \rangle, \quad (6.1)$$

где T — температура системы. Корреляционная функция (6.1) может быть записана в терминах спектральной функции $\rho(\omega)$

$$C_\theta(x_0) = T^{-5} \int_0^\infty \rho_\theta(\omega) \frac{\cosh \omega(\frac{1}{2T} - x_0)}{\sinh \frac{\omega}{2T}} d\omega. \quad (6.2)$$

Спектральная функция содержит ценную информацию о свойствах среды. Для того, чтобы найти объёмную вязкость, используется формула Кубо [Kubo(1957)]

$$\zeta = \frac{\pi}{9} \left(\frac{d\rho_\theta(\omega)}{d\omega} \right)_{\omega=0}. \quad (6.3)$$

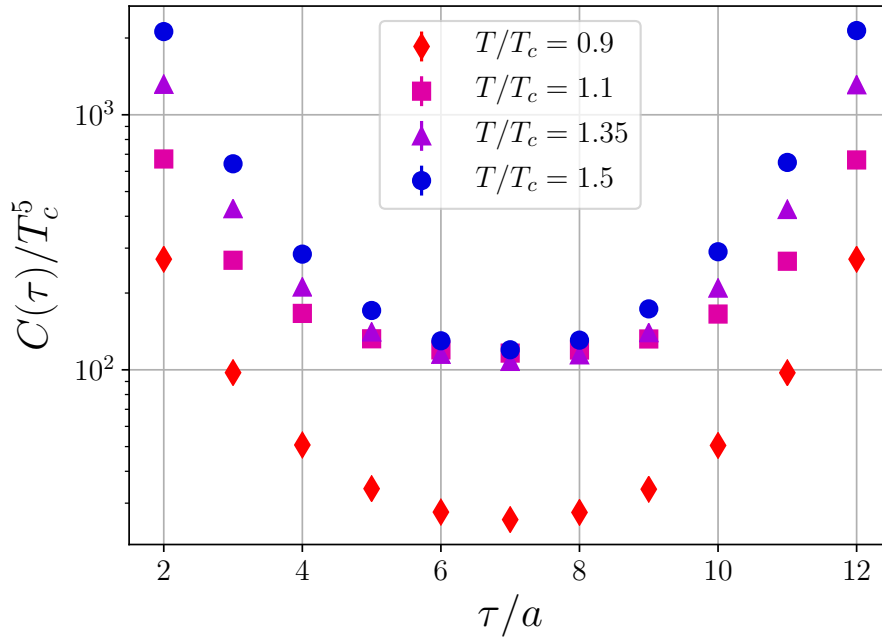


Рис. 6: Корреляционные функции $C_\theta(x_0)$ для температур $T/T_c = 0.9, 1.0, 1.35, 1.5$.

Были измерены корреляционные функции $C_\theta(x_0)$ на решётке 16×32^3 при температурах $T/T_c \simeq 0.9, 0.925, 0.95, 1.0, 1.1, 1.2, 1.35, 1.5$. Применение двухуровневого алгоритма позволила нам получить ошибки не более, чем $\sim 2 - 3\%$ на расстоянии $Tx_0 = 1/2$ для всех рассматриваемых температур. Для остальных точек точность ещё выше. На Рис. 6 построены корреляционные функции для нескольких температур.

Следующий шаг вычисления сдвиговой вязкости — нахождение спектральной функции из интегрального уравнения (6.2). В этом разделе мы используем фитирование по методу средней точки, в дальнейшем предполагается использование физически мотивированных анзацев и метода Бакуса-Гильберта.

Метод средней точки основан на предположении, что коррелятор определяется доминирующим вкладом гидродинамики, т.е. спектральной функции на малых частотах. Таким образом, если положить $\rho_\theta(\omega) = (9\zeta/\pi)\omega$, мы сразу получаем $C_\theta(1/2T) = 9\pi\zeta(T)$.

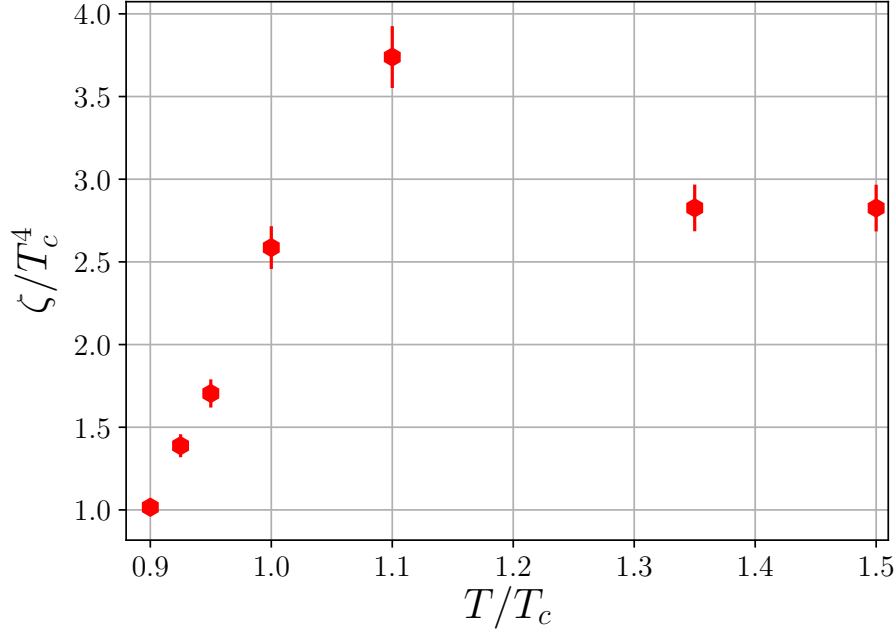


Рис. 7: Зависимость ζ/T_c^4 , полученная методом средней точки, от температуры.

На Рис. 7 показана зависимость объёмной вязкости от температуры. Хорошо виден пик в окрестности T_c , как и ожидалось. На Рис. 8 показано отношение ζ/s , а на рисунке Рис. 9 — сравнение с существующими результатами.

7 Обсуждение и выводы

Эта работа направлена на изучение температурной зависимости сдвиговой и объёмной вязкости $SU(3)$ -глюодинамики в рамках решёточного моделирования. Конкретно, мы измерили корреляционные функции тензора энергии-импульса на решётке 16×32^3 на температурах в диапазоне $T/T_c \in [0.9, 1.5]$. Для получения малых ошибок мы использовали двухуровневый алгоритм, позволивший нам добиться ошибок не более, чем $\sim 2-3\%$ на расстоянии $Tx_0 = 0.5$ для всех рассматриваемых температур. На остальных точках точность ещё выше.

Используя решёточные данные о корреляционных функциях, мы вычислили отношения η/s для всех рассматриваемых температур. Для этого

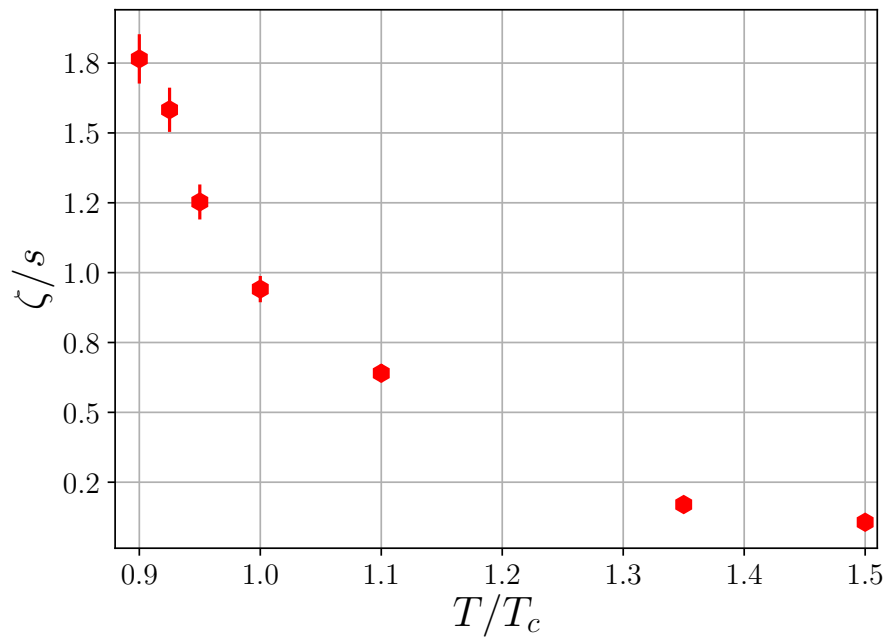


Рис. 8: Зависимость ζ/s , полученная методом средней точки, от температуры.

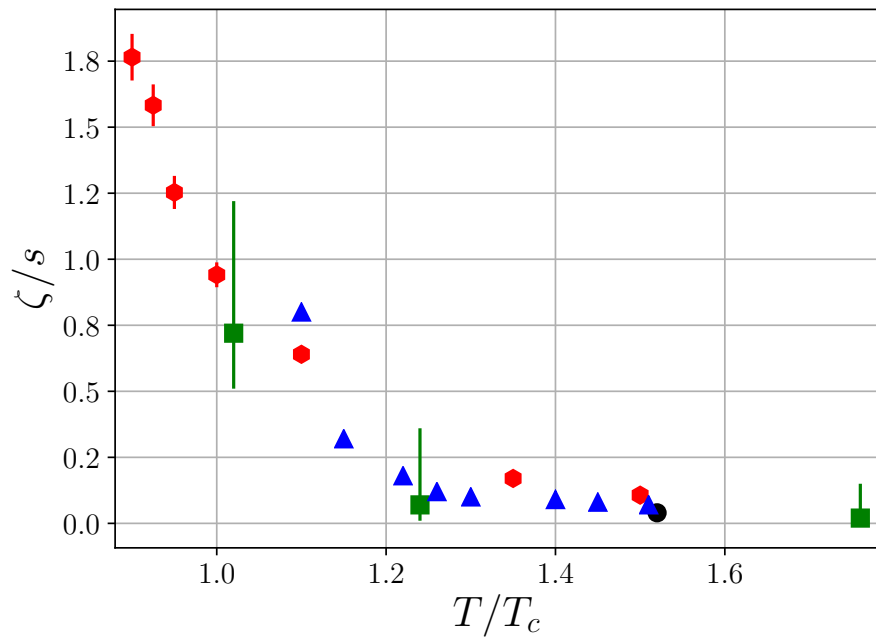


Рис. 9: Зависимость ζ/s , полученная методом средней точки, от температуры. Красными точками показаны наши данные, остальные точки — сравнение с существующими результатами.

был использован физически мотивированный анзац спектральной функции с неизвестными параметрами, которые были определены с помощью фитирования. Все анзацы имели различные проблемы с интерполяцией между гидродинамикой на малых частотах и асимптотической свободой на больших, хотя все они хорошо фитируют решёточные данные на всех температурах. Другой метод вычисления η/s — метод Бакуса-Гильберта.

T/T_c	η/s , глюодинамика фитирование	η/s , глюодинамика БГ метод	η/s , $QCD_{N_f=3}$
0.90	0.57(28)	0.50(24)	0.59(28)
0.925	0.55(18)	0.52(25)	0.61(30)
0.95	0.24(15)	0.22(12)	0.26(14)
1.0	0.24(8)	0.20(12)	0.24(14)
1.1	0.15(5)	0.17(6)	0.21(7)
1.2	0.22(6)	0.21(4)	0.26(5)
1.35	0.20(7)	0.22(6)	0.28(7)
1.5	0.27(7)	0.28(8)	0.36(10)

Таблица 2: Отношение η/s для различных температур, полученное различными методами. Результаты для глюодинамики, полученные с помощью фитирования, показаны во второй колонке. Результаты для глюодинамики, полученные в рамках метода БГ, изображены в третьей колонке. Оценка отношения η/s для КХД с $N_f = 3$ кварками представлена в четвёртой колонке.

В Таблице 2 и на Рисунке 5 показаны результаты этой работы. Из Таблицы 2 и Рисунка 5 видно, что результаты, полученные в рамках двух методов совпадают.

В дополнение к Рисунку 5 были построены решёточные результаты, полученные в работах [Nakamura and Sakai(2005), Meyer(2007), 12]. Видно, что наши результаты в согласии с предыдущими вычислениями. На Рисунке 5 также построено значение η/s в $N = 4$ СЯМ теории в режиме сильной связи $\eta/s = 1/4\pi$ и результаты пертурбативного вычисления η/s . Сравнивая наши результаты с другими подходами, можно сделать вывод, что отношение η/s в глюодинамике близко к $N = 4$ СЯМ и не может быть описано пертурбативно.

Также стоит отметить результаты работы [11], в которой авторы вычислили сдвиговую вязкость в теории Янга-Миллса, используя точное диаграммное представление в терминах полных пропагаторов и вершин, используя глюонные спектральные функции как внешний вход. Наши результаты в согласии с этой работой.

На данный момент невозможно провести решёточные измерения сдвиговой вязкости КХД с динамическими фермионами. Однако можно оце-

нить отношение η/s , используя формулу

$$(\eta/s)_{QCD} = \frac{(\eta/s)_{QCD}}{(\eta/s)_{YM}} \times (\eta/s)_{YM} \quad (7.1)$$

Отношение $(\eta/s)_{YM}$ вычислено в этой работе в то время, как отношение $\left(\frac{\eta}{s}\right)_{QCD} / \left(\frac{\eta}{s}\right)_{YM}$ для $N_f = 3$ кварков было оценено в работе [11]. Для $(\eta/s)_{YM}$ мы использовали результаты, полученные методом Бакуса-Гильберта. Наши результаты для отношения $(\eta/s)_{QCD}$ показаны в Таблице 2 и на Рисунке 10. В дополнение к Рисунку 10 были построены оценки η/s , полученные в рамках различных моделей: NJL [9], метод динамических квазичастиц [10], результат работы [11] и $N = 4$ СЯМ. Наконец, на Рисунке 10 изображены серые области, показывающие экспериментальное ограничение на отношение η/s , полученное из экспериментальных данных [5]. Видно, что результаты, полученные в нашей работе, согласуются с экспериментом.

Кроме данных по сдвиговой вязкости в работе представлены предварительные данные по объёмной вязкости. Её вычисления осложняются тем, что в корреляторе гидродинамический и ультрафиолетовый вклады обладают равной силой.

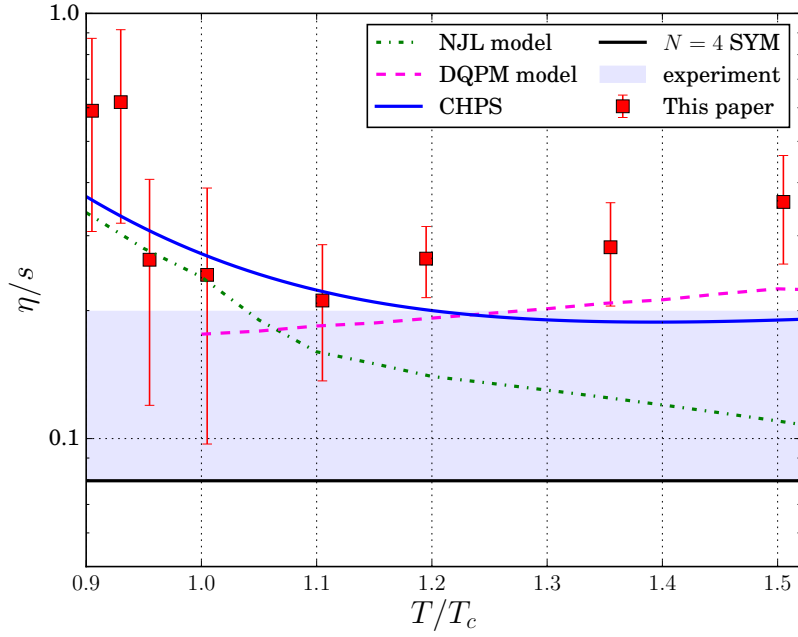


Рис. 10: Отношение η/s в КХД для различных температур. Красные квадраты — оценка η/s в КХД, полученная из данной работы. Зелёная кривая — результат NJL модели [9], фиолетовая кривая — результат подхода динамических квазичастиц [10], синяя кривая — результат работы [11] и чёрная кривая — результат $N = 4$ СЯМ. В дополнение изображена серая область, показывающая экспериментальное ограничение на отношение η/s , полученное в эксперименте [5].

Список литературы

- [1] P. F. Kolb and U. W. Heinz, In *Hwa, R.C. (ed.) et al.: Quark gluon plasma* 634-714 [nucl-th/0305084].
- [2] J. Y. Ollitrault, Eur. J. Phys. **29**, 275 (2008) doi:10.1088/0143-0807/29/2/010 [arXiv:0708.2433 [nucl-th]].
- [3] K. H. Ackermann *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.86.402 [nucl-ex/0009011].
- [4] C. Adler *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **66**, 034904 (2002) doi:10.1103/PhysRevC.66.034904 [nucl-ex/0206001].
- [5] H. Song, Nucl. Phys. A **904-905**, 114c (2013) doi:10.1016/j.nuclphysa.2013.01.052 [arXiv:1210.5778 [nucl-th]].
- [Policastro et al.(2001)Policastro, Son, and Starinets] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001), [hep-th/0104066](#).
- [6] P. B. Arnold, G. D. Moore and L. G. Yaffe, JHEP **0011**, 001 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/11/001 [hep-ph/0010177].
- [7] P. B. Arnold, G. D. Moore and L. G. Yaffe, JHEP **0305**, 051 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/05/051 [hep-ph/0302165].
- [8] V. Ozvenchuk, O. Linnyk, M. I. Gorenstein, E. L. Bratkovskaya and W. Cassing, Phys. Rev. C **87**, no. 6, 064903 (2013) doi:10.1103/PhysRevC.87.064903 [arXiv:1212.5393 [hep-ph]].
- [9] R. Marty, E. Bratkovskaya, W. Cassing, J. Aichelin and H. Berrehrah, Phys. Rev. C **88**, 045204 (2013) doi:10.1103/PhysRevC.88.045204 [arXiv:1305.7180 [hep-ph]].
- [10] H. Berrehrah, E. Bratkovskaya, T. Steinert and W. Cassing, Int. J. Mod. Phys. E **25**, no. 07, 1642003 (2016) doi:10.1142/S0218301316420039 [arXiv:1605.02371 [hep-ph]].
- [11] N. Christiansen, M. Haas, J. M. Pawlowski and N. Strodthoff, Phys. Rev. Lett. **115**, no. 11, 112002 (2015) doi:10.1103/PhysRevLett.115.112002 [arXiv:1411.7986 [hep-ph]].
- [Karsch and Wyld(1987)] F. Karsch and H. W. Wyld, Phys. Rev. **D35**, 2518 (1987).
- [Nakamura and Sakai(2005)] A. Nakamura and S. Sakai, Phys. Rev. Lett. **94**, 072305 (2005), [hep-lat/0406009](#).

- [Meyer(2007)] H. B. Meyer, Phys. Rev. **D76**, 101701 (2007), [0704.1801](#).
- [Meyer(2009a)] H. B. Meyer, Nucl. Phys. **A830**, 641C (2009a), [0907.4095](#).
- [12] S. W. Mages, S. Borsanyi, Z. Fodor, A. Schfer and K. Szabti, PoS LATTICE **2014**, 232 (2015).
- [Braguta and Kotov(2013)] V. V. Braguta and A. Yu. Kotov, JETP Lett. **98**, 127 (2013).
- [13] N. Y. Astrakhantsev, V. V. Braguta and A. Y. Kotov, JHEP **1509**, 082 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)082 [arXiv:1507.06225 [hep-lat]].
- [Kubo(1957)] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957).
- [Meyer(2003)] H. B. Meyer, JHEP **01**, 048 (2003), [hep-lat/0209145](#).
- [Meyer(2008a)] H. B. Meyer, JHEP **08**, 031 (2008a), [0806.3914](#).
- [Kataev et al.(1982)Kataev, Krasnikov, and Pivovarov] A. L. Kataev, N. V. Krasnikov, and A. A. Pivovarov, Nucl. Phys. **B198**, 508 (1982), [Erratum: Nucl. Phys.B490,505(1997)], [hep-ph/9612326](#).
- [Engels et al.(2000)Engels, Karsch, and Scheideler] J. Engels, F. Karsch, and T. Scheideler, Nucl. Phys. **B564**, 303 (2000), [hep-lat/9905002](#).
- [Meyer(2011)] H. B. Meyer, Eur. Phys. J. **A47**, 86 (2011), [1104.3708](#).
- [Meyer(2008b)] H. B. Meyer, Nucl. Phys. **B795**, 230 (2008b), [0711.0738](#).
- [Shifman et al.(1979)Shifman, Vainshtein, and Zakharov] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979).
- [14] G. Aarts and J. M. Martinez Resco, JHEP **0204**, 053 (2002) [hep-ph/0203177].
- [Meyer(2008c)] H. B. Meyer, PoS LATTICE2008, 017 (2008c), [0809.5202](#).
- [15] G. Backus and F. Gilbert, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society **16**, 169205.
- [16] G. Backus and F. Gilbert, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences **266**, 123-192.
- [17] B. B. Brandt, A. Francis, H. B. Meyer and D. Robaina, Phys. Rev. D **92**, no. 9, 094510 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.094510 [arXiv:1506.05732 [hep-lat]].

- [18] B. B. Brandt, A. Francis, B. JΓϷger and H. B. Meyer, Phys. Rev. D **93**, no. 5, 054510 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.054510 [arXiv:1512.07249 [hep-lat]].
- [19] D. L. Boyda, V. V. Braguta, M. I. Katsnelson and M. V. Ulybyshev, Phys. Rev. B **94**, 085421 (2016) doi:10.1103/PhysRevB.94.085421 [arXiv:1601.05315 [cond-mat.str-el]].
- [20] S. Capitani, M. LΓjscher, R. Sommer and H. Wittig, Nucl. Phys. B **544**, 669 (1999) Erratum: [Nucl. Phys. B **582**, 762 (2000)] doi:10.1016/S0550-3213(00)00163-2, 10.1016/S0550-3213(98)00857-8 [hep-lat/9810063].
- [21] J. I. Kapusta, C. Gale, Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications, (Cambridge university press, New York, 2006)