ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Квантовая теория массивного скалярного поля в двумерном пространстве Минковского с нетривиальными граничными условиями

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:
студент 321 группы
Астраханцев Лев Николаевич
Научный руководитель
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный
2017

Содержание

1 Введение

Здесь мы сформулируем задачу, частные случаи которой будут решены в данной работе.
Мы работаем в двумерном пространстве Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1)$. Мы рассматриваем в данном пространстве теорию реального скалярного поля ϕ с действием $S = \int dtdx[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2]$, где m – масса скалярного поля. Отсюда, варьируя лагранжиан данной теории по полю, получаем уравнение Клейна-Гордона на поле

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\phi(t, x) = 0 \tag{1}$$

Кроме данного уравнения на скалярное поле, у которого мы будем в дальнейшем искать решения, дополнительно введем в нашу теорию граничное условие в следующем виде. Пусть $z(t)$ – какая-либо времениподобная кривая в нашем двумерном пространстве-времени Минковского, потребуем, чтобы поле занулялось на этой кривой

$$\phi(t, z(t)) = 0 \tag{2}$$

Так как поле равно нулю на данной кривой, мы можем рассматривать данную кривую как зеркало или стенку для скалярного поля, при этом рассматривая скалярное поле как совокупность пространственно-временных гармоник, т.е. рассматривая скалярное поле как совокупность падающей и отраженной от стенки(зеркала) волн.
Таким образом, кратко говоря, наша задача состоит в нахождении решения уравнения Клейна-Гордона для поля с заданными граничными условиями. Нас интересует, что происходит, когда мы добавляем стенку(зеркало) в обычную скалярную теорию поля, поэтому мы также будем искать Гамильтониан системы и будем смотреть на вакуумные средние компонент тензора энергии импульса системы

$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta \eta} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + m^2\phi^2)$

Мы будем развивать теорию скалярной квантовой теории поля в двумерном пространстве Минковского при добавлении туда какой-либо стенки(зеркала).

Сформулируем основные этапы, которые нужно пройти для понимания нашей теории:

- Разложить поле $\phi(t, x)$ по пространственно-временным гармоникам в зависимости от траектории зеркала $z(t)$
- Проквантовать поле, удовлетворив канонические коммутационные соотношения
- Исследовать вакуумное среднее tx-компоненты тензора энергии-импульса $\langle T_{tx}\rangle$, отвечающей за плотность потока энергии, или плотность импульса
- Получить Гамильтониан системы, то есть оператор, являющийся оператором эволюции системы

Теперь, зная, что нужно делать, начнем разбирать различные примеры нашей теории. В разделе 1 будут разобраны случаи безмассового скалярного поля для стоячей стенки и стенки, движущейся с постоянной скоростью. В разделе 2 и 3 будут разобраны случаи уже массивного скалярного поля для стоячей и движущейся с постоянной скоростью стенок соответственно.

2 Безмассовый случай

2.1 Случай стоячей стенки

Рассмотрим случай безмассового скалярного поля с тривиальным граничным условием $\phi(t, x) = 0$. Уравнение Клейна-Гордона для такого поля

$$\partial_t^2\phi(t, x) - \partial_x^2\phi(t, x) = 0 \tag{3}$$

В пространстве без стенки мы можем представить поле $\phi(t, x)$ в виде пространственно-временных гармоник следующим образом: $\phi_k(t, x) = A(a_k \exp(ikx - ikt) + a_k^\dagger \exp(-ikx + ikt))$, где a_k и $a_k^\dagger$ пока какие-либо комплексные числа для каждого k и A – просто константа нормировки.
При добавлении в пространство стоячей стенки мы раскрываем комплексную экспоненту по формуле Эйлера и отбрасываем часть с косинусом, чтобы удовлетворить граничному условию.
Теперь проводим вторичное квантование в виде $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 2\pi\delta(k - k^{'})$, где a_k и $a_k^\dagger$ уже операторы, и сразу запишем наше уже квантовое поле

$$\phi(t, x) = iA\int_0^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}}(\hat{a}_k sin(kx)e^{-ikt} - \hat{a}_k^\dagger sin(kx)e^{ikt}) \tag{4}$$

Если мы посмотрим на коммутационное соотношение $\phi(t,x)$ и $\pi(t,y) = \partial_t\phi(t,y)$ при $A = \frac{1}{\pi}$ мы увидим, что оно имеет следующий вид

$$[\phi(x), \pi(y)] = i(\delta(x-y) - \delta(x+y)) \tag{5}$$

Где помимо обычной дельта-функции присутствует граничная дельта-функция, аргумент которой обращается в нуль только на стенке($x = y = 0$). В принципе, т.к. данная дельта-функция имеет значение только в одной точке, мы можем ее не писать. При других более сложных граничных условиях мы будем ожидать появления граничной-дельта функции или функции, имеющей ненулевое значение только на границе. Получим Гамильтониан системы как

$H = \int_0^{+\infty} T_{tt}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\pi^2 + (\partial_x\phi)^2)dx$

После простого вычисления

$$H = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{k}{2}(\hat{a_k}\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger\hat{a_k}) \tag{6}$$

Этот Гамильтониан имеет обычный диагональный вид, он отличается от Гамильтониана для поля без стенки тем, что в нем происходит интегрирование по импульсу только для $k > 0$, что как раз отражает наличие стенки.
Мы будем использовать следующее симметризованное выражение для импульса системы, который является tx компонентой тензора энергии импульса системы

$$P(t,x) = \frac{1}{2}\big(\partial_t\phi\ \partial_x\phi + \partial_x\phi\ \partial_t\phi\big) \tag{7}$$

Тогда вакуумное среднее импульса мы можем записать как

$$\langle T_{tx}\rangle = \langle P(t,x)\rangle = \frac{1}{2}(\langle\partial_x\phi(x,t), \pi(x,t)\rangle + \langle\pi(x,t), \partial_x\phi(x,t)\rangle) \tag{8}$$

Вакуумное среднее симметризованного импульса имеет значение

$$\langle T_{tx}\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\frac{(\sin k'x\cos kx - \sin kx\cos k'x)}{2\sqrt{kk'}}\delta(k-k') = 0 \tag{9}$$

Таким образом мы получили нулевое вакуумное значение импульса, как мы и ожидали, т.к. из физических соображений следует, что в случае покоящейся стенки не должно быть какого-либо потока энергии. Если взять обычный, несимметризованный импульс, то мы не получим нулевого вакуумного среднего, что не удовлетворяет нашим ожиданиям. Таким образом, мы убеждаемся, что, беря симметризованный тензор энергии-импульса, мы все делаем правильно.
Итак, мы рассмотрели простейший случай покоящейся стенки. Наиболее важный вывод этого примера — потребность использовать симметризованный ТЭИ для системы.

2.2 Случай стенки, движущейся с постоянной скоростью

Из граничного условия $\phi(t, -\beta t) = 0$ и уравнения Клейна-Гордона $\partial_t^2\phi(t,x) - \partial_x^2\phi(t,x) = 0$ найдем наше поле, причем запишем его в следующих координатах светового конуса: $u = t - x$ и $v = t + x$

$$\phi(t,x) = i\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2k}}[\hat{a}_k(e^{-ikv} - e^{-ik\Omega u}) - \hat{a}_k^\dagger(e^{ikv} - e^{ik\Omega u})] \tag{10}$$

Здесь мы ввели обозначение $\Omega = \frac{1-\beta}{1+\beta}$
Посмотрим на коммутационное соотношение $\phi(t,x)$ и $\pi(t,y)$ и увидим, что оно имеет следующий вид

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\{\delta(x-y) - \frac{\Omega}{2}\delta(x + \Omega y + t(1-\Omega)) - \frac{1}{2}\delta(t(\Omega-1) - \Omega x - y)\} \tag{11}$$

Мы видим,что последние две дельта-функции являются граничными, то есть имеют ненулевое значение только при $x = y = -\beta t$
Теперь запишем Гамильтониан как

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\beta t}^{+\infty} dx(\pi^2 + (\partial_x\phi)^2) \tag{12}$$

Теперь, если мы начнем считать Гамильтониан, то обнаружим, что у него присутствуют внедиагональные части, и более того, они зависят от времени, их вид следующий:

$H_{bad} = \frac{i\beta}{1+\beta}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}\frac{\sqrt{kk'}(k+k')e^{-i(k+k')(1-\beta)t}}{(k+k')^2+\epsilon^2}\hat{a}_k\hat{a}_{k'} + h.c.$

Где мы ввели регуляризацию ϵ для интегрирования экспонент по координате.
Так как внедиагональная часть зависит от времени, то мы не сможем подобрать преобразование Боголюбова, которое диагонализировало бы нам Гамильтониан. То же самое происходит и с полным импульсом системы $P = \int_{\beta t}^{+\infty} dx T_{tx}$, который также имеет внедиагональные зависящие от времени члены. Это становится проблемой в понимании ситуации, т.к. внедиагональные зависящие от времени члены в Гамильтониане означают, что в системе происходит рождение частиц, чего мы не ожидаем, т.к. по физическим соображениям движущаяся с постоянной скоростью стенка не должна рождать какие-либо частицы. Разрешение данной проблемы заключается в определении Гамильтониана системы как оператора трансляций вдоль стенки, т.е. $H_{new} = H - \beta P$. То, что данный Гамильтониан является оператором трансляций вдоль стенки видно из $e^{iH_{new}t} = e^{iHt - i\beta Pt} = e^{iHt - iPx}$, где x – координата на стенке.
Если мы посчитаем новый Гамильтониан, то получим

$$H = (1-\beta)\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{k}{2}(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) \tag{13}$$

Мы видим, что наш переопределенный Гамильтониан как оператор эволюции вдоль стенки имеет диагональный вид. То, что нам пришлось переопределить Гамильтониан связано с тем, что движущаяся стенка нарушает однородность ситуации по времени. Поэтому Гамильтониан и полный импульс, как интегрирования потока вдоль осей времени и координаты соответственно, имеют зависящие от времени части. Теперь мы будем называть Гамильтонианом оператор эволюции вдоль стенки.
Чтобы подсчитать вакуумное среднее tx компоненты ТЭИ и получить правильный ответ, мы будем использовать «pointsplitting» регуляризацию, то есть будем считать вакуумное среднее импульса следующим образом

$$\langle T_{tx}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\langle\partial_t\phi(t,x)\partial_x\phi(t+i\epsilon,x) + \partial_x\phi(t,x)\partial_t\phi(t+i\epsilon,x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{k}{2}(e^{-k\epsilon} - \Omega^2 e^{-k\Omega\epsilon}) = 0 \tag{14}$$

Мы видим, что при правильном способе регуляризации, вакуумное среднее равно нулю, что соответствует ожиданию, согласно которому в системе не может происходить рождение частиц.
Итак, за данный раздел мы получили много информации о системе и развили необходимый физический и вычислительный аппараты, необходимые для развития случаев при более сложных граничных условиях. Мы поняли, что нужно использовать симметризованный ТЭИ, что при подсчете вакуумных средних нужно использовать «pointsplitting» регуляризацию, и что нужно использовать новый Гамильтониан как оператор эволюции вдоль стенки.
Теперь мы наконец можем перейти к массивному случаю.

3 Массивный случай

3.1 Массивный случай стоячей стенки

Сначала мы рассмотрим простейший случай граничного условия, то есть случай покоящейся стенки. В этом примере мы не будем разбивать описание на несколько логических частей, т.к. все вычисления очень простые. В следующем примере, мы будем приводить все необходимые промежуточные вычисления.
Итак, мы начинаем рассмотрение простейшего случая покоящейся стенки. В данном случае имеем очень простое граничное условие

$$\phi(t,0) = 0 \tag{15}$$

Уравнение Клейна-Гордона для массивного скалярного поля

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\phi(t,x) = 0 \tag{16}$$

Отсюда мы можем легко найти гармоники, удовлетворяющие этому уравнению и граничному условию. Далее записываем поле в терминах этих гармоник в уже проквантованном виде

$$\phi(t,x) = i\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\omega}}(\hat{a}_k sin(kx)e^{-i\omega t} - \hat{a}_k^\dagger sin(kx)e^{i\omega t}) \tag{17}$$

Сразу запишем канонический импульс для поля

$$\pi(t,x) = \partial_t\phi(t,x) = \int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\sqrt{2\omega}(\hat{a}_k sin(kx)e^{-i\omega t} + \hat{a}_k^\dagger sin(kx)e^{i\omega t}) \tag{18}$$

Где мы имеем дисперсионное соотношение для массивного поля $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$
Если мы посмотрим на коммутационное соотношение $\phi(t, x)$ и $\pi(t, y)$ мы увидим, что оно имеет следующий вид

$$[\phi(x), \pi(y)] = i(\delta(x - y) - \delta(x + y)) \tag{19}$$

Где аналогично безмассовому случаю помимо обычной дельта-функции присутствует граничная дельта-функция, аргумент которой обращается в нуль только на стенке($x = y = 0$).
Как мы видим, внедиагональные члены в Гамильтониане имеют следующее значение

$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}[\hat{a_k}\hat{a}_k e^{-2i\omega t}(\omega - \frac{k^2}{\omega} - \frac{m^2}{\omega}) + \hat{a_k}\hat{a}_{-k}(-\omega + \frac{k^2}{\omega} + \frac{m^2}{\omega})|_{k=0}] = 0$

Мы получаем, что Гамильтониан системы имеет стандартный диагональный вид

$$H = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\pi^2 + (\partial_x\phi)^2 + m^2\phi^2)dx = \int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{\omega}{2}(\hat{a_k}\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger\hat{a_k}) \tag{20}$$

Видно, что данный Гамильтониан отличается от Гамильтониана в случае отсутствия стенки интегрированием по импульсу от нуля. Вакуумное среднее симметризованного импульса имеет значение

$$\langle T_{tx}\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\frac{(\sin k'x\cos kx - \sin kx\cos k'x)}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k - k') = 0 \tag{21}$$

Таким образом мы получили нулевое вакуумное значение импульса, как мы и ожидали, т.к. из физических соображений следует, что и в случае массивной покоящейся стенки не должно быть какого-либо потока энергии.

3.2 Случай стенки, движущейся с постоянной скоростью

3.2.1 Гармоники

В данном случае стенка имеет скорость β.
Чтобы получить гармоники для данного случая, мы сделаем лоренцевский буст $(x, t) \to (x', t')$ прямо в гармониках для стоячей стенки. Как мы можем видеть, после буста гармоники примут вид

$$h(t, x) = iAe^{-i\omega_+ t' - ik_+ x'} - e^{-i\omega_- t' + ik_- x'}) \tag{22}$$

Где $\omega_+ = \omega\gamma + \beta\gamma k$, $\omega_- = \omega\gamma - \beta\gamma k$, $k_+ = \gamma k + \beta\gamma\omega$ и $k_- = \gamma k - \beta\gamma\omega$. Мы видим что минимальное значение для ω_+ и k_+ есть γm и $\beta\gamma m$ соответственно. Далее мы будем рассматривать (ω_+, k_+) и (ω_-, k_-) как энергию и импульс падающей и отраженной волн соответственно. Мы просто переобозначим данные величины как $(\omega_+, k_+) \to (\omega, k)$, $(\omega_-, k_-) \to (\omega_r, k_r)$. В новых терминах падающая и отраженная волна связаны соотношениями

$$\omega_r = (1 + \beta^2)\gamma^2\omega - 2\beta\gamma^2 k \tag{23}$$

$$k_r = -2\beta\gamma^2\omega + (1 + \beta^2)\gamma^2 k \tag{24}$$

Для отраженной волны очевидно мы имеем то же самое дисперсионное соотношение $k_r^2 + m^2 = \omega_r^2$
После квантования мы имеем следующее выражение для поля

$$\phi(t, x) = iA\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\hat{a}_k(e^{-i\omega t - ikx} - e^{-i\omega_r t + ik_r x}) - \hat{a}_k^\dagger(e^{i\omega t + ikx} - e^{i\omega_r t - ik_r x})] \tag{25}$$

Где мы ввели гаммма-фактор $\gamma = \frac{1}{1-\beta^2}$
A это нормализационная константа, которую мы определим далее из коммутационных соотношений .
Из буста мы получаем естественным образом, что наши гармоники обрезаны снизу значением $\gamma\beta m$, что по физике соответствует тому, что гармоники с $k < \gamma\beta m$ просто не могут догнать стенку, то есть для меньших импульсов просто не существует отраженной волны.
Также мы видим , что граничное условие в данном случае $\phi(t, -\beta t) = 0$ тождественно выполняется.

3.2.2 Коммутационное соотношение

В данном разделе мы получим коммутационное соотношение для поля и канонического импульса в данном случае.
Запишем канонический импульс

$$\pi(t, x) = A\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\hat{a}_k[\omega e^{-i\omega t - ikx} - \omega_r e^{-i\omega_r t + ik_r x}] + h.c. \tag{26}$$

Теперь получим коммутационное соотношение, берем поле и импульс в один и тот же момент времени

$[\phi(x),\pi(y)] = iA^2\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\omega}(e^{-i\omega t-ikx}-e^{-i\omega_r t+ik_r x})[\omega e^{i\omega t+iky}-\omega_r e^{i\omega_r t-ik_r y}] + iA^2\cdot h.c. =$

$\frac{iA^2}{2}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{ik(y-x)}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{ik_r(x-y)}) -$

$-\frac{iA^2}{2}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{-i(\omega_r-\omega)t+ik_r x+iky}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{i(\omega_r-\omega)t-ikx-ik_r y}) + \frac{iA^2}{2}\cdot h.c.$

Можно проверить, что $\frac{dk}{\omega}=\frac{dk_r}{\omega_r}$, получим первое слагаемое

$\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{ik(y-x)}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{ik_r(x-y)}) = \int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik(y-x)}+\int_{-\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk_r}{2\pi}e^{ik_r(x-y)} =$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)$

Когда $A=1$, коммутационное соотношение принимает вид

$[\phi(x),\pi(y)] = i\delta(x-y) -$

$-\frac{i}{2}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{-i(\omega_r-\omega)t+ik_r x+iky}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{i(\omega_r-\omega)t-ikx-ik_r y}) -$

$-\frac{i}{2}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{i(\omega_r-\omega)t-ik_r x-iky}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{-i(\omega_r-\omega)t+ikx+ik_r y})$

Посмотрим теперь на последние два слагаемых

$\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(e^{-i(\omega_r-\omega)t+ik_r x+iky}+\frac{\omega_r}{\omega}e^{i(\omega_r-\omega)t-ikx-ik_r y}) =$

$\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-i(\omega_r-\omega)t+ik_r x+iky}+\int_{-\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk_r}{2\pi}e^{i(\omega_r-\omega)t-ikx-ik_r y} =$

$\{k_r\to -k_r, k\to -k\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-i(\omega_r-\omega)t+ik_r x+iky}$

В последнем равенстве мы использовали, что k_r является однозначной функцией k, также это утверждение справедливо в обратную сторону.

Итого

$$[\phi(x),\pi(y)] = i\delta(x-y) - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-i(\omega_r t-k_r x)+i(\omega t+ky)} - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{i(\omega_r t-k_r x)-i(\omega t+ky)} \tag{27}$$

Вычислим первый интеграл в сумме

$\int_{-\infty}^{+\infty}dke^{-i(\omega_r t-k_r x)+i(\omega t+ky)} = \int_{-\infty}^{+\infty}dke^{iAk-iB\omega}dk$

Где мы ввели обозначения $A=2\gamma^2\beta t+(1+\beta^2)\gamma^2 x+y, B=2\gamma^2\beta^2 t+2\beta\gamma^2 x$.

Введем регуляризацию следующим образом $B\to B-i\epsilon, \epsilon\to 0$, тогда получим

$\int_{-\infty}^{+\infty}dke^{iAk-iB\omega}dk \to \int_{-\infty}^{+\infty}dke^{iAk-(iB+\epsilon)\omega}dk = 2\int_0^{+\infty}dk\cos(Ak)e^{-(iB+\epsilon)\sqrt{k^2+m^2}}$

Аналогичным образом запишем второй интеграл в сумме

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{i(\omega_r t-k_r x)-i(\omega t+ky)} = 2\int_0^{+\infty}dk\cos(Ak)e^{-(-iB+\epsilon)\sqrt{k^2+m^2}}$

Мы знаем следующий табличный интеграл

$$\int_0^{+\infty}dk\cos(Ak)e^{-C\sqrt{k^2+m^2}} = \frac{Cm}{\sqrt{A^2+C^2}}K_1(m\sqrt{A^2+C^2}); Re(C), Re(m) > 0 \tag{28}$$

Где K_1 есть модифицированная функция Бесселя второго рода, т.н. функция Макдональда

$Re(C)=\epsilon>0$, и $m>0$ отсюда после вычисления получаем вместо двух интегралов

$2m\epsilon[\frac{K_1(m\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2})}{\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2}}+\frac{K_1(m\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2})}{\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2}}] + 2iBm[\frac{K_1(m\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2})}{\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2}}-\frac{K_1(m\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2})}{\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2}}]$

Теперь найдем, как ведет себя данное выражение в различных точках пространства-времени.
Сначала рассмотрим случай $x, y \neq -\beta t$, $A, B \neq 0$.
Мы видим,что первый член в сумме просто нуль, так как он является произведением $\epsilon \to 0$ и какого-то числа.
Более пристально посмотрим на второй член

$$2iBm[\frac{K_1(m\sqrt{|A^2-B^2+\epsilon^2+2iB\epsilon|}e^{i\frac{1}{2}(\phi+2\pi n)})}{\sqrt{|A^2-B^2+\epsilon^2+2iB\epsilon|}e^{i\frac{1}{2}(\phi+2\pi n)}} - \frac{K_1(m\sqrt{|A^2-B^2+\epsilon^2-2iB\epsilon|}e^{i\frac{1}{2}(-\phi+2\pi n)})}{\sqrt{|A^2-B^2+\epsilon^2-2iB\epsilon|}e^{i\frac{1}{2}(-\phi+2\pi n)}}]$$

Мы представили здесь квадратный корень как многозначную функцию аргумента. Мы ввели обозначение $\phi = \arctan \frac{2\epsilon B}{A^2-B^2+\epsilon^2}$, также здесь $n = 0$ или $n = 1$.
Мы видим, что в пределе $\epsilon \to 0$ мы имеем $\phi \to 0$ и второй член также обращается в нуль. Более того, мы видим, что он нуль даже при $A = B = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда обе точки лежат на стенке $x = y = -\beta t$, $A, B = 0$.
Мы имеем, что не равен нулю только первый член. Воспользуемся пределом $K_1(z) \to \frac{\Gamma(1)}{2}\frac{2}{z} = \frac{1}{z}$ при $z \to 0$
Тогда

$$2m\epsilon[\frac{K_1(m\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2})}{\sqrt{A^2+(iB+\epsilon)^2}} + \frac{K_1(m\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2})}{\sqrt{A^2+(\epsilon-iB)^2}}] = 2m\epsilon[\frac{1}{m(A^2+(iB+\epsilon)^2)} + \frac{1}{m(A^2+(\epsilon-iB)^2)}] =$$

$$4\epsilon\frac{A^2-B^2+\epsilon^2}{(A^2+(iB+\epsilon)^2)(A^2+(\epsilon-iB)^2)} = 4\frac{\epsilon}{A^2+\epsilon^2} = 4\pi\delta(A) = 4\pi\delta(2\beta\gamma^2 t + (1+\beta^2)\gamma^2 x + y)$$

Мы видим, что в данном коммутационном соотношении мы также получаем функцию, которая имеет ненулевое значение только на границе и ведет себя как дельта-функция. Поэтому мы просто можем заменить ее на дельта-функцию.
Итак, запишем коммутационное соотношение в конечном виде

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta(x-y) - i\delta(2\beta\gamma^2 t + (1+\beta^2)\gamma^2 x + y) \tag{29}$$

3.2.3 Вронскиан

Здесь мы хотим найти такую комбинацию гармоник, которая бы не зависела от времени, мы будем называть такую комбинацию Вронскианом.
Запишем гармоники $g(k,t,x)$ и $h^*(k',t,x)$ при фиксированных импульсах k и k' в фиксированной точке (t,x)

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}}(e^{-i\omega t - ikx} - e^{-i\omega_r t + ik_r x}), h^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}}(e^{i\omega' t + ik' x} - e^{i\omega'_r t - ik'_r x}) \tag{30}$$

Где энергия и импульс отраженной волны $\omega_r = (1+\beta^2)\gamma^2\omega - 2\beta\gamma^2 k$ и $k_r = -2\beta\gamma^2\omega + (1+\beta^2)\gamma^2 k$ соответственно.
Используя уравнения движения, $(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)g(t,x) = 0$ и $(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)h^*(t,x) = 0$ мы можем записать

$$\frac{d}{dt}\int_{-\beta t}^{+\infty} dx(h^*\partial_t g - g\partial_t h^*) = h^*\partial_x h|_{-\beta t}^{\infty} - g\partial_x h^*|_{-\beta t}^{\infty} = \frac{dW[g(t,x), h(t,x)]}{dt} = 0 \tag{31}$$

Где мы вводим Вронскиан следующим образом

$$W(g,h) = \int_{-\beta t}^{+\infty} dx(h^*\partial_t g - g\partial_t h^*) = const \tag{32}$$

После прямого вычисления

$$W = i[\delta(k-k') + \frac{\omega_r+\omega'_r}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k_r-k'_r) - \frac{\omega_r+\omega'}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k_r+k') - \frac{\omega+\omega'_r}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k+k'_r) + F(t)]$$

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}[(\omega+\omega')v.p.(\frac{1}{k-k'})e^{i(\omega-\omega')t - i\beta(k-k')t} - (\omega+\omega'_r)v.p.(\frac{1}{k+k'_r})e^{i(\omega-\omega'_r)t - i\beta(k+k'_r)t} -$$

$$-(\omega'+\omega_r)v.p.(\frac{1}{k'+k_r})e^{i(\omega_r-\omega')t - i\beta(k'+k_r)t} + (\omega'_r+\omega_r)v.p.(\frac{1}{k_r-k'_r})e^{i(\omega_r-\omega'_r)t - i\beta(k_r-k'_r)t}]$$

На первый взгляд мы имеем функцию F, зависящую от времени, попробуем показать,что $F(t) = 0$

Сперва, из равенства $\omega - \beta k = \omega_r + \beta k_r$ мы заключаем, что все экспоненты являются одной и той же экспонентой

$e^{i(\omega-\omega')t-i\beta(k-k')t}=e^{i(\omega-\omega'_r)t-i\beta(k+k'_r)t}=e^{i(\omega_r-\omega')t-i\beta(k'+k_r)t}=e^{i(\omega_r-\omega'_r)t-i\beta(k_r-k'_r)t}$

Теперь посмотрим на производную данной функции $\frac{dF}{dt}$

$\frac{dF(t)}{dt}=i\frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}[(\omega+\omega')v.p.(\frac{1}{k-k'})((\omega-\omega')-\beta(k-k'))-$

$-(\omega+\omega'_r)v.p.(\frac{1}{k+k'_r})((\omega-\omega'_r)-\beta(k+k'_r))-$

$-(\omega'+\omega_r)v.p.(\frac{1}{k'+k_r})((\omega_r-\omega')-\beta(k'+k_r))+$

$+(\omega'_r+\omega_r)v.p.(\frac{1}{k_r-k'_r})((\omega_r-\omega'_r)-\beta(k'_r-k_r))]e^{i(\omega-\omega')t-i\beta(k-k')t}$

Используя $x\cdot v.p.(\frac{1}{x})=1$, легко увидеть, что

$\frac{dF(t)}{dt}=i\frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}[(\omega^2-\omega'^2)v.p.(\frac{1}{k-k'})-(\omega^2-\omega'^2_r)v.p.(\frac{1}{k+k'_r})-(\omega_r^2-\omega'^2)v.p.(\frac{1}{k_r-k'})+(\omega_r^2-\omega'^2_r)v.p.(\frac{1}{k_r+k'_r})-\beta(v.p.(\frac{1}{k-k'})(k-k')(\omega-\omega')-v.p.(\frac{1}{k+k'_r})(k+k'_r)(\omega-\omega'_r)-v.p.(\frac{1}{k'+k_r})(k-k')(\omega_r-\omega')+v.p.(\frac{1}{k_r-k'_r})(k_r-k'_r)(\omega_r-\omega'_r))]e^{i(\omega-\omega')t-i\beta(k-k')t}$

Используя $x\cdot v.p.(\frac{1}{x})=1$ и $\omega^2-\omega'^2=k^2-k'^2$, мы видим

$\frac{dF(t)}{dt}=i\frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}[(k+k'-k-k'_r-k_r-k'+k'_r+k_r)-\beta(\omega-\omega'-\omega+\omega'_r-\omega_r+\omega'+\omega_r-\omega'_r)]e^{i(\omega-\omega')t-i\beta(k-k')t}=0$

Т.к. мы получили, что $F(t)=f(k,k')e^{i(\omega-\omega')t-i\beta(k-k')t}$ и $\frac{dF(t)}{dt}=0$, где $f(k,k')$ является стоящей перед экспонентой обобщенной функцией от k и k', мы имеем $f(k,k')=0$ и поэтому $F(t)=0$
В конце концов, Вронскиан имеет следующий вид

$$W=i[\delta(k-k')+\frac{\omega_r+\omega'_r}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k_r-k'_r)-\frac{\omega_r+\omega'}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k_r+k')-\frac{\omega+\omega'_r}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta(k+k'_r)] \tag{33}$$

Теперь найдем как связаны Вронскиан и коммутатор поля и канонического импульса ϕ и π соответственно.

Коммутатор есть $[\phi(t,x),\pi(t,y)]=\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}(h^*(t,x)\partial_t g(t,y)-g(t,y)\partial_t h^*(t,x))$ Вронскиан есть $W=\int_{-\beta t}^{+\infty}dx(h^*\partial_t g-g\partial_t h^*)$. Мы можем увидеть их связь

$$\int_{-\beta t}^{+\infty}dx[\phi(t,x),\pi(t,y)]=\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}W[g(t,x),h(t,y)] \tag{34}$$

Мы видим, что если одна сторона данного равенства является независимой от времени, то тогда другая сторона также не должна зависеть от времени. Но, как мы можем видеть, в коммутационном соотношении поля и канонического импульса присутствует граничная дельта-функция, в которой вообще говоря присутствует зависимость от времени. Мы можем заключить, что зависимость от времени в граничной дельта-функции не нарушает данного равенства. Действительно, после взятия интеграла от коммутационного соотношения, зависимость от времени пропадает.

3.2.4 Прямое вычисление вакуумного среднего импульса

Запишем вакуумное среднее импульса, т.е. tx компоненты ТЭИ, используя «pointsplitting» регуляризацию

$$\langle 0|T_{tx}|0\rangle=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\langle 0|\partial_t\phi(t,x)\partial_x\phi(t+i\epsilon,x)+\partial_x\phi(t,x)\partial_t\phi(t+i\epsilon,x)|0\rangle \tag{35}$$

Далее подставим в данное выражение поля в явном виде

$\langle 0|T_{tx}|0\rangle=\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}ke^{-\omega\epsilon}-\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{k_r\omega_r}{\omega}e^{-\omega_r\epsilon}-$

$-\gamma^2\beta m^2\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{i(\omega_r-\omega)t-i(k_r+k)x-\omega_r\epsilon}}{\omega}-\gamma^2\beta m^2\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega_r-\omega)t+i(k_r+k)x-\omega\epsilon}}{\omega}$

Используем, что $\frac{dk}{\omega}=\frac{dk_r}{\omega_r}$

Тогда

$\langle 0|T_{tx}|0\rangle = -\gamma^2\beta m^2(\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{i(\omega_r-\omega)t-i(k_r+k)x-\omega_r\epsilon}}{\omega} + \int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega_r-\omega)t+i(k_r+k)x-\omega\epsilon}}{\omega})$

Рассмотрим интеграл $\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{i(\omega_r-\omega)t-i(k_r+k)x-\omega_r\epsilon}}{\omega}$. Make a change $\omega_r = \omega', k_r = k'$,

then $k = \gamma^2[(1+\beta^2)k' + 2\beta\omega'], \omega = \gamma^2[(1+\beta^2)\omega' + 2\beta k']$.

Перепишем этот интеграл как ($\frac{dk}{\omega} = \frac{dk'}{\omega'}$)

$\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{i(\omega_r-\omega)t-i(k_r+k)x-\omega_r\epsilon}}{\omega} = \int_{-\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk'}{2\pi}\frac{e^{i(\omega'-\gamma^2[(1+\beta^2)\omega'+2\beta k'])t-i(k'+\gamma^2[(1+\beta^2)k'+2\beta\omega'])x-\omega'\epsilon}}{\omega'} =$

$\{k' \to -k'\} = \int_{-\infty}^{\gamma\beta m}\frac{dk'}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega'_r-\omega')t+i(k'_r+k')x-\omega'\epsilon}}{\omega'} = \int_{-\infty}^{\gamma\beta m}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{-i(\omega_r-\omega)t+i(k_r+k)x-\omega\epsilon}}{\omega}$

В итоге имеем следующий интеграл

$$\langle 0|T_{tx}|0\rangle = -\gamma^2\beta m^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{i2\gamma^2(k-\beta\omega)(\beta t+x)-\omega\epsilon}}{\omega} \tag{36}$$

Вычисляя этот интеграл, переписываем его как

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{\pi}\frac{e^{iAk-iB\sqrt{k^2+1}}}{2\sqrt{k^2+1}} = \int_0^{+\infty}\frac{dk}{\pi}\frac{\cos(Ak)}{\sqrt{k^2+1}}e^{-iB\sqrt{k^2+1}} =$

$\int_0^{+\infty}\frac{dk}{\pi}\frac{\cos(Ak)}{\sqrt{k^2+1}}\cos(B\sqrt{k^2+1}) + \int_0^{+\infty}\frac{dk}{\pi}\frac{\cos(Ak)}{\sqrt{k^2+1}}\sin(B\sqrt{k^2+1})$

Где мы заменили $k \to mk$ и ввели следующие обозначения: $A = 2m\gamma^2(x+\beta t), B = 2m\gamma^2\beta(x+\beta t - i\epsilon)$
Используем следующие два табличных интеграла

$$\int_0^{+\infty} dk\frac{\cos(Ak)}{\sqrt{k^2+1}}\cos(B\sqrt{k^2+1}) = K_0(\sqrt{A^2-B^2}), A > |B| > 0 \tag{37}$$

$$\int_0^{+\infty} dk\frac{\cos(Ak)}{\sqrt{k^2+1}}\sin(B\sqrt{k^2+1}) = 0, A > |B| > 0 \tag{38}$$

Где K_0 есть модифицированная функция Бесселя второго рода, т.н. функция Макдональда

В итоге приходим к следующему выражению

$\langle 0|T_{tx}|0\rangle = -\frac{1}{2\pi}\gamma^2\beta m^2 K_0(2m\gamma^2\sqrt{(\beta t+x)^2 - \beta^2(\beta t + x - i\epsilon)^2})$

Если мы разложим данное выражение в первом порядке по $\epsilon \to 0$ и используем, что $K_0'(z) = -K_1(z)$, мы получим $\langle 0|T_{tx}|0\rangle = -\frac{1}{2\pi}\gamma^2\beta m^2[K_0(2m\gamma(x+\beta t)) - i\epsilon\beta^2\gamma K_1(2m\gamma(x+\beta t))]$

Как мы можем видеть, регуляризация не играет роде в конечном ответе, поэтому мы просто полагаем $\epsilon = 0$.

Итак, конечное выражение для вакуумного среднего ТЭИ

$$\langle 0|T_{tx}|0\rangle = -\frac{1}{2\pi}\gamma^2\beta m^2 K_0(2m\gamma(x+\beta t)) \tag{39}$$

Мы видим, что, когда $x = -\beta t$, мы имеем бесконечный вклад в вакуумное среднее ТЭИ. Объясним полученный прямым вычислением результат в следующем разделе.

3.2.5 Лоренц-инвариантность

В этом разделе мы покажем, что ответ для $\langle 0|T_{tx}|0\rangle$ может быть получен прямым бустом покоящейся стенки.
Сначала рассмотрим пространство вообще без стенки, другими словами рассмотрим энергию нулевых колебаний вакуума. Поле для случая вообще без стенки

$$\phi(t,x)_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}_k e^{-i\omega t-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega t+ikx}) \tag{40}$$

Здесь индекс "0" обозначает отсутствие стенки. Вычислим вакуумные средние компонент ТЭИ для случая отсутствия стенки.
Запишем компоненты ТЭИ через поле в явном виде

$T_{tt} = \frac{1}{2}((\partial_x\phi)^2 + (\partial_t\phi)^2 + m^2\phi^2)$ and $T_{xx} = \frac{1}{2}((\partial_x\phi)^2 + (\partial_t\phi)^2 - m^2\phi^2)$

$T_{tx} = T_{xt} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi\partial_x\phi + \partial_x\phi\partial_t\phi)$

Посчитаем tx компоненту ТЭИ.

$< T_{tx} >_0 = < T_{xt} >_0 = \frac{1}{2}(< \partial_t\phi\partial_x\phi > + < \partial_x\phi\partial_t\phi >) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{dk}{2\pi} = 0$

Чтобы посчитать следующие вакуумные средние компонент ТЭИ будет использовать «pointsplitting» регуляризацию для последующего удобства.

$< T_{tt} >_0 = \frac{1}{2}(< \partial_x\phi(t,x)\partial_x\phi(t+i\epsilon,x) > + < \partial_t\phi(t,x)\partial_t\phi(t+i\epsilon,x) > +$

$+ m^2 < \phi(t,x)\phi(t+i\epsilon,x) >) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2+k^2+m^2}{2\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} =$

$= \int_0^{+\infty} \omega e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi}$

$< T_{xx} >_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2+k^2-m^2}{2\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} = \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi}$

Теперь посчитаем те же самые величины для пространства со стоячей стенкой

$< T_{tx} > = \frac{1}{2}(< \partial_x\phi(x,t), \pi(x,t) > + < \pi(x,t), \partial_x\phi(x,t) >) =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}(\sin kx \cos kx - \cos kx \sin kx) = 0$

$< T_{tt} > = \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2\sin^2(kx)+k^2\cos^2(kx)+m^2 sin^2(kx)}{\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} =$

$= \int_0^{+\infty} \omega e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} + \int_0^{+\infty} \frac{m^2(1-2\cos^2(kx))}{2\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{m^2\cos(2kx)}{2\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} =$

$= < T_{tt} >_0 - \int_0^{+\infty} \frac{m^2\cos(2kx)}{\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi}$

$< T_{xx} > = \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2\sin^2(kx)+k^2\cos^2(kx)-m^2 sin^2(kx)}{\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} =$

$= < T_{xx} >_0$

Если мы сделаем буст со стоячей стенкой строго после того, как вычтем нулевые колебания, мы получим

$< T_{t'x'} > =$

$= \beta\gamma^2(< T_{tt} > + < T_{xx} > - < T_{tt} >_0 - < T_{xx} >_0) +$

$+ \gamma^2(< T_{tx} > + < T_{xt} > - < T_{tx} >_0 - < T_{xt} >_0) = -\beta\gamma^2\int_0^{+\infty} \frac{m^2\cos(2kx)}{\omega}e^{-\omega\epsilon}\frac{dk}{2\pi} =$

$= -\frac{1}{2\pi}m^2\beta\gamma^2 K_0(2mx) = -\frac{1}{2\pi}m^2\beta\gamma^2 K_0(2m\gamma(x'+\beta t'))$

Ответ находится в полном согласии с прямым вычислением с помощью «pointsplitting» регуляризации. Если мы вычтем нулевые колебания уже после буста, мы не получим наш ответ. Мы видим, что $< T_{t'x'} >$ за вычетом нулевых колебаний преобразуется как тензор при преобразованиях Лоренца. Также мы видим природу ненулевого вакуумного среднего $< T_{t'x'} >$ как граничной энергии $< T_{tt} >$ стоячей стенки.

3.2.6 Гамильтониан

Теперь пришло время рассмотреть Гамильтониан для массивного поля

$H = \frac{1}{2}\int_{-\beta t}^{+\infty}(\pi^2 + (\partial_x\phi)^2 + m^2\phi^2)dx - \frac{\beta}{2}(\int_{-\beta t}^{+\infty}\pi(x)\partial_x\phi(x)dx + \int_{-\beta t}^{+\infty}\partial_x\phi(x)\pi(x)dx)$

Перепишем Гамильтониан, используя уравнения движения

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\beta t}^{+\infty}[(\partial_t\phi)^2 - \phi\partial_t^2\phi]dx + \frac{1}{2}\phi\partial_x\phi|_{-\beta t}^{\infty} - \beta P = \frac{1}{2}\int_{-\beta t}^{+\infty}[(\partial_t\phi)^2 - \phi\partial_t^2\phi]dx - \beta P \tag{41}$$

Работать с записанном в таком виде Гамильтонианом немного проще, чем с предыдущим.
Также выпишем все величины, которые понадобятся нам, чтобы посчитать Гамильтониан

$$\phi(t,x) = i\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\hat{a}_k(e^{-i\omega t-ikx} - e^{-i\omega_r t+ik_r x}) - \hat{a}_k^\dagger(e^{i\omega t+ikx} - e^{i\omega_r t-ik_r x})] \tag{42}$$

$$\partial_x(t,x) = \int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\hat{a}_k(ke^{-i\omega t-ikx} + k_r e^{-i\omega_r t+ik_r x}) + \hat{a}_k^\dagger(ke^{i\omega t+ikx} + k_r e^{i\omega_r t-ik_r x})] \tag{43}$$

$$\partial_t(t,x) = \int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\hat{a}_k(\omega e^{-i\omega t-ikx} - \omega_r e^{-i\omega_r t+ik_r x}) + \hat{a}_k^\dagger(\omega e^{i\omega t+ikx} - \omega_r e^{i\omega_r t-ik_r x})] \tag{44}$$

$$\partial_t^2(t,x) = -i\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\hat{a}_k(\omega^2 e^{-i\omega t-ikx} - \omega_r^2 e^{-i\omega_r t+ik_r x}) - \hat{a}_k^\dagger(\omega^2 e^{i\omega t+ikx} - \omega_r^2 e^{i\omega_r t-ik_r x})] \tag{45}$$

Итак, приступим к подсчету Гамильтониана.

3.2.7 Внедиагональные члены в Гамильтониане

Сначала подсчитаем внедиагональные члены Гамильтониана. Так как стенка движется с постоянной скоростью, мы ожидаем, что она не может рождать какие-либо частицы, соответственно, что внедиагональные члены будут отсутствовать.
Попробуем показать, что $a_k a_{k'}$ член в Гамильтониане нулевой.

$$\tfrac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\tfrac{dk}{2\pi}\tfrac{dk'}{2\pi}a_k a_{k'}\tfrac{\omega\omega' - \omega'^2 - \beta(\omega k' + k\omega')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{-i(\omega+\omega')t - i(k+k')x} +$$

$$+\tfrac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\tfrac{dk}{2\pi}\tfrac{dk'}{2\pi}a_k a_{k'}\tfrac{-\omega\omega_r' + \omega_r'^2 - \beta(\omega k_r' - k\omega_r')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{-i(\omega+\omega_r')t + i(k_r'-k)x} +$$

$$+\tfrac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\tfrac{dk}{2\pi}\tfrac{dk'}{2\pi}a_k a_{k'}\tfrac{-\omega_r\omega' + \omega'^2 - \beta(k_r\omega' - \omega_r k')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{-i(\omega'+\omega_r)t + i(k_r-k')x} +$$

$$+\tfrac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\tfrac{dk}{2\pi}\tfrac{dk'}{2\pi}a_k a_{k'}\tfrac{\omega_r\omega_r' - \omega_r'^2 + \beta(\omega_r k_r' + k_r\omega_r')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{-i(\omega_r+\omega_r')t + i(k_r+k_r')x}$$

В начале, после интегрирования по x, т.к. $\omega - \beta k = \omega_r + \beta k_r$ мы имеем одну и ту же экспоненту $e^{-i(\omega+\omega')t + i\beta(k+k')t}$. После интегрирования по x и введения регуляризации мы получаем следующую сумму перед экспонентой

$$Sum = \tfrac{\omega\omega' - \omega'^2 - \beta(\omega k' + k\omega')}{k+k'-i\epsilon} - \tfrac{-\omega\omega_r' + \omega_r'^2 - \beta(\omega k_r' - k\omega_r')}{k_r'-k+i\epsilon} - \tfrac{-\omega_r\omega' + \omega'^2 - \beta(k_r\omega' - \omega_r k')}{k_r-k'+i\epsilon} - -\tfrac{\omega_r\omega_r' - \omega_r'^2 + \beta(\omega_r k_r' + k_r\omega_r')}{k_r+k_r'+i\epsilon}$$

Здесь мы ввели регуляризацию $e^{i(\omega'-\omega)t + i(k'-k)x} \to e^{i(\omega'-\omega)t + i(k'-k+i\epsilon)x}$ Попробуем показать, что $Sum = 0$
Чтобы это сделать, мы будем использовать следующие соотношения

$$\omega - \omega_r = 2\beta\gamma^2(k - \beta\omega) \tag{46}$$

$$\omega + \omega_r = 2\gamma^2(\omega - \beta k) \tag{47}$$

$$k\omega_r - \omega k_r = 2\gamma^2\beta m^2 \tag{48}$$

$$k\omega_r + \omega k_r = 2\gamma^2(\omega - \beta k)(k - \beta\omega) \tag{49}$$

$$k - k_r = 2\beta\gamma^2(\omega - \beta k) \tag{50}$$

$$k + k_r = 2\gamma^2(k - \beta\omega) \tag{51}$$

Начнем вычисление

$$Sum_1 = \tfrac{\omega\omega' - \omega'^2}{k+k'-i\epsilon} - \tfrac{-\omega\omega_r' + \omega_r'^2}{k_r'-k+i\epsilon} = \tfrac{2\gamma^2\omega(\omega'-\beta k')(k'-\beta\omega') - 2\beta\gamma^2\omega k(k'-\beta\omega') + 4\beta\gamma^4 k(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k+k'-i\epsilon)(k_r'-k+i\epsilon)} -$$

$$-\tfrac{\omega'^2 k_r' + \omega_r'^2 k'}{(k+k'-i\epsilon)(k_r'-k+i\epsilon)} + \tfrac{i\epsilon[2\beta\gamma^2(k'-\beta\omega') - 4\beta\gamma^4(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')]}{(k+k'-i\epsilon)(k_r'-k+i\epsilon)}$$

Используя определение дельта-функции $\delta(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)}$ и то, что $x\delta(x) = 0$ мы заключаем, что

$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\epsilon[2\beta\gamma^2(k'-\beta\omega')-4\beta\gamma^4(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')]}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)}=$

$=\frac{i[2\beta\gamma^2(k'-\beta\omega')-4\beta\gamma^4(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')](k+k')(k'_r-k)\delta(k+k')}{(k'_r-k)^2}=0$

Далее, здесь все слагаемые с $i\epsilon$ в числителе будут давать нуль, аналогично предыдущему вычислению, мы не будем их записывать.

$Sum_2=-\frac{-\omega_r\omega'+\omega'^2}{k_r-k'+i\epsilon}-\frac{\omega_r\omega'_r-\omega'^2_r}{k_r+k'_r+i\epsilon}=\frac{2\gamma^2\omega_r(\omega'-\beta k')(k'-\beta\omega')+2\beta\gamma^2\omega_r k_r(k'-\beta\omega')-4\beta\gamma^4 k_r(k'-\beta\omega)(\omega'-\beta k')}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}-$

$-\frac{\omega'^2k'_r+\omega'^2_r k'}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}$

$Sum_3=\beta[\frac{\omega k'_r-k\omega'_r}{k'_r-k+i\epsilon}-\frac{\omega k'+k\omega'}{k+k'-i\epsilon}]=\beta\frac{2\gamma^2\omega k(k'-\beta\omega')+2\beta\gamma^2k^2(k'-\beta\omega')-2\gamma^2k(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k+k'-i\epsilon)(k+k'-i\epsilon)}$

$Sum_4=\beta[\frac{\omega'k_r-k'\omega_r}{k_r-k'+i\epsilon}-\frac{\omega_r k'_r+k_r\omega'_r}{k_r+k'_r+i\epsilon}]=\beta\frac{-2\gamma^2\omega_r k_r(k'-\beta\omega')+2\beta\gamma^2k_r^2(k'-\beta\omega')+2\gamma^2k_r(k'-\beta\omega)(\omega'-\beta k')}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}$

$Sum_1+Sum_3=\frac{2\beta^2\gamma^2k^2(k'-\beta\omega')+(\omega-\beta k+2\beta\gamma^2k)2\gamma^2(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)}-\frac{\omega'^2k'_r+\omega'^2_r k'}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)}$

$Sum_2+Sum_4=\frac{2\beta^2\gamma^2k_r^2(k'-\beta\omega')+(\omega_r+\beta k_r-2\beta\gamma^2k_r)2\gamma^2(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}-\frac{\omega'^2k'_r+\omega'^2_r k'}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}$

Перепишем следующее выражение как

$\omega'^2k'_r+\omega'^2_r k'=2\gamma^2(k'-\beta\omega')(\omega'^2-\beta k'\omega'-\beta k'\omega'_r)=$

$=2\gamma^2(k'-\beta\omega')[\omega'^2-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')]$

Продолжим вычисление

$Sum_2+Sum_4=2\gamma^2(k'-\beta\omega')\frac{\beta^2k_r^2+(\omega_r+\beta k_r-2\beta\gamma^2k_r)(\omega'-\beta k')-[\omega'^2-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')]}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}$

$Sum_1+Sum_3=2\gamma^2(k'-\beta\omega')\frac{\beta^2k^2+(\omega-\beta k+2\beta\gamma^2k)(\omega'-\beta k')-[\omega'^2-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')]}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)}$

$Sum_1+Sum_2+Sum_3+Sum_4=2\gamma^2(k'-\beta\omega')[\frac{\beta^2k_r^2}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}+\frac{\beta^2k^2}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)}+$

$+((\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-\omega'^2+2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k'))(\frac{1}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}+\frac{1}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)})+$

$+2\beta\gamma^2(\omega'-\beta k')(\frac{k}{(k_r-k'+i\epsilon)(k_r+k'_r+i\epsilon)}-\frac{k_r}{(k+k'-i\epsilon)(k'_r-k+i\epsilon)})]$

Запишем числитель получившейся большой дроби, мы хотим показать, что он нуль.

$Nominator=8\beta\gamma^6(k'-\beta\omega')*[-\beta^2(k-\beta\omega)[kk_r(\omega'-\beta k')+k'k'_r(\omega-\beta k)]-$

$-(k-\beta\omega)(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')[(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-\omega'^2+2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')]+$

$+(\omega'-\beta k')[(k-\beta\omega)(kk_r-k'k'_r)]]$

Перепишем следующие два выражения как

$kk_r-k'k'_r=\gamma^2(\omega-\beta k)^2-\gamma^2(\omega'-\beta k')^2=\gamma^2(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')(\omega-\beta k-\omega'+\beta k')$

$kk_r(\omega'-\beta k')+k'k'_r(\omega-\beta k)=\gamma^2(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')[(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-m^2]$

Где использовано, что $kk_r=\gamma^2((\omega-\beta k)^2-m^2)$

Тогда, упростим числитель

$Nominator=8\beta\gamma^6(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')\cdot$

$\cdot[-\beta^2\gamma^2[(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-m^2]-(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')+\omega'^2-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')+$

$+\gamma^2(\omega'-\beta k')(\omega-\beta k-\omega'+\beta k')]$

В конце

$$Nominator = 8\beta\gamma^6(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')\cdot$$

$$\cdot\,(\beta^2\gamma^2 m^2+\omega'^2-2\beta\gamma^2 k'(\omega'-\beta k')-\gamma^2(\omega'-\beta k')^2)$$

Если записать m^2 как $\omega'^2-k'^2$ тогда

$$Nominator = 8\beta\gamma^8(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')(\omega'-\beta k')\cdot$$

$$\cdot\,[\omega'+\beta k'-2\beta k'-(\omega'-\beta k')]=0$$

Итак, выражение перед экспонентой получилось в точности равно нулю. Мы показали, что $a_k a_{k'}$ и $a^\dagger_k a^\dagger_{k'}$ члены в Гамильтониане равны нулю, и Гамильтониан будет иметь диагональный вид.

3.2.8 Диагональные члены в Гамильтониане

Теперь найдем вид диагонального члена $a_k a^\dagger_{k'}$
Запишем этот член в Гамильтониане

$$\frac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}a_k a^\dagger_{k'}\frac{\omega\omega'+\omega'^2-\beta(\omega k'+k\omega')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{i(\omega'-\omega)t+i(k'-k)x}+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}a_k a^\dagger_{k'}\frac{-\omega\omega'_r-\omega'^2_r-\beta(\omega k'_r-k\omega'_r)}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{i(\omega'_r-\omega_r)t-i(k'_r+k)x}+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}a_k a^\dagger_{k'}\frac{-\omega_r\omega'-\omega'^2-\beta(k_r\omega'-\omega_r k')}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{i(\omega'-\omega_r)t+i(k_r+k')x}+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\beta t}^{+\infty}dx\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}a_k a^\dagger_{k'}\frac{\omega_r\omega'_r+\omega'^2_r+\beta(\omega_r k'_r+k_r\omega'_r)}{\sqrt{\omega\omega'}}e^{i(\omega'_r-\omega_r)t-i(k'_r-k_r)x}$$

На данном шаге нам нужно аккуратно ввести регуляризацию, потому что мы хотим от конечного ответа для Гамильтониана для массивного поля его правильный переход в Гамильтониан для безмассового поля. Важный момент в правильной регуляризации в том, что вид последней экспоненты в диагональным члене следующий: $e^{i(\omega'_r-\omega_r)t-i(k'_r-k_r)x}$. В безмассовом случае мы делали регуляризацию во второй(последней) экспоненте следующим образом: $e^{i\Omega(t-x)(k'-k)}\to e^{i\Omega(t-x)(k'-k+i\epsilon)}$, где в регуляризацию добавился фактор $\Omega=\frac{1-\beta}{1+\beta}$. Поэтому в массивном случае мы введем немного другую регуляризацию в последней экспоненте $e^{i(\omega'_r-\omega_r)t-i(k'_r-k_r)x}\to e^{i(\omega'_r-\omega_r)t-i(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)x}$. Если мы сделаем такую особенность в регуляризации, мы увидим, что полученный нами Гамильтониан перейдет в Гамильтониан для безмассового случая.

Для $a_k a_{k'}$ члена в Гамильтониане такая особенность в регуляризации была не важна, т.к. слагаемые с $i\epsilon$ в числителе просто занулялись.

Вначале, после интегрирования по x, т.к. $\omega-\beta k=\omega_r+\beta k_r$ мы получаем одну и ту же экспоненту $e^{i(\omega'-\omega)t-i\beta(k'-k)t}$. Также после интегрирования по x мы имеем следующую сумму перед экспонентой

$$Sum=-i[-\frac{\omega\omega'+\omega'^2-\beta(\omega k'+k\omega')}{k'-k+i\epsilon}+\frac{-\omega\omega'_r-\omega'^2_r-\beta(\omega k'_r-k\omega'_r)}{k'_r+k-i\epsilon}-\frac{-\omega_r\omega'-\omega'^2-\beta(k_r\omega'-\omega_r k')}{k_r+k'+i\epsilon}++\frac{\omega_r\omega'_r+\omega'^2_r+\beta(\omega_r k'_r+k_r\omega'_r)}{k'_r-k'_r-i\Omega\epsilon}e^{(\Omega-1)\epsilon\beta t}]$$

В последнем слагаемом при разложении экспоненты в ряд Тейлора получаем, что слагаемое не зануляется только если учесть нулевой член разложения, поэтому заменяем эту экспоненту единицей. В дальнейшем будем держать $-i$ в уме и также рассматривать только сумму под интегрированием.

Начинаем вычисления

$$Sum_1=-\frac{\omega\omega'+\omega'^2}{k'-k+i\epsilon}+\frac{-\omega\omega'_r-\omega'^2_r}{k'_r+k-i\epsilon}=-\frac{2\gamma^2\omega(\omega'-\beta k')(k'-\beta\omega')+2\beta\gamma^2\omega k(k'-\beta\omega')+4\beta\gamma^4 k(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)}-$$

$$-\frac{2\gamma^2(k'-\beta\omega')(\omega'^2-2\beta\gamma^2 k'(\omega'-\beta k'))}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)}+\frac{i\epsilon[\omega(\omega'-\omega'_r)+\omega'^2-\omega'^2_r]}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)}$$

Здесь мы должны внимательно следить за слагаемыми с $i\epsilon$, потому что, как мы увидим далее, именно эти слагаемые дадут нам диагональный член в Гамильтониане.

$$Sum_2=\frac{\omega_r\omega'+\omega'^2}{k_r+k'+i\epsilon}+\frac{\omega_r\omega'_r+\omega'^2_r}{k'_r-k_r-i\Omega\epsilon}=\frac{2\gamma^2\omega_r(\omega'-\beta k')(k'-\beta\omega')-2\beta\gamma^2\omega_r k_r(k'-\beta\omega')-4\beta\gamma^4 k_r(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k_r+k'+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}+$$

$+\frac{2\gamma^2(k'-\beta\omega')(\omega'^2-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k'))}{(k_r+k'+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}-\frac{i\epsilon[\omega_r(\omega'_r-\Omega\omega')+\omega'^2_r-\Omega\omega'^2]}{(k_r+k'+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}$

$Sum_3=\beta[-\frac{\omega k'_r-k\omega'_r}{k'_r+k-i\epsilon}+\frac{\omega k'+k\omega'}{k'-k+i\epsilon}]=\beta\frac{2\gamma^2\omega k(k'-\beta\omega')+2\beta\gamma^2k^2(k'-\beta\omega')+2\gamma^2k(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k'_r+k-i\epsilon)(k'-k+i\epsilon)}-$

$-\frac{i\epsilon\beta[k(\omega'-\omega'_r)+\omega(k'+k'_r)]}{(k'_r+k-i\epsilon)(k'-k+i\epsilon)}$

$Sum_4=\beta[\frac{\omega'k_r-k'\omega_r}{k_r+k'+i\epsilon}+\frac{\omega_rk'_r+k_r\omega'_r}{k'_r-k_r-i\epsilon}]=\beta\frac{2\gamma^2\omega_rk_r(k'-\beta\omega')-2\beta\gamma^2k_r^2(k'-\beta\omega')+2\gamma^2k_r(k'-\beta\omega')(\omega'-\beta k')}{(k_r+k'+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\epsilon)}+$

$+\frac{i\epsilon2\beta[k_r(\omega'_r-\Omega\omega')+\omega_r(k'_r+\Omega k)]}{(k_r+k'+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}$

Можно увидеть, что когда мы суммируем слагаемые из $Sum_1+Sum_2+Sum_3+Sum_4$ с $i\epsilon$ в числителе и умножаем их на комплексно сопряженные величины из знаменателя мы получаем дельта функцию, которая нам все зануляет, поэтому эти слагаемые дают нуль, их можно выкинуть из суммы.
Далее, приводим к более удобному виду оставшиеся слагаемые

$Sum_1+Sum_3=2\gamma^2(k'-\beta\omega')\frac{(\omega'-\beta k')(\beta k'-\omega-2\beta\gamma^2k+2\beta\gamma^2k')+\beta^2k^2-\omega'^2}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)}$

$Sum_2+Sum_4=2\gamma^2(k'-\beta\omega')\frac{(\omega'-\beta k')(\beta k_r+\omega_r-2\beta\gamma^2k_r-2\beta\gamma^2k'_r)-\beta^2k_r^2+\omega'^2}{(k'+k_r+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}$

Несмотря на то, что в текущей сумме нет явных слагаемых с членами $i\epsilon$ в числителе, мы их получим после суммирования слагаемых без $i\epsilon$ в числителе из $Sum_1+Sum_2+Sum_3+Sum_4$.

Далее, после переписывания суммы, мы получаем

$Sum_1+Sum_2+Sum_3+Sum_4=8\beta\gamma^6(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)(\omega-\beta k-\omega'+\beta k')\cdot$

$\cdot\frac{-\beta^2\gamma^2((\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')+m^2)+\gamma(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')(\omega'-\beta k')-(\omega'-\beta k')(\omega-\beta k-2\beta\gamma^2k')-\omega'^2}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)(k'+k_r+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}+$

$+8\gamma^4(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)i\epsilon\cdot$

$\cdot\frac{(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')+\omega'^2-\beta^2[2\beta^2\gamma^4(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')+(\omega-\beta k)^2-m^2\gamma^2]+2\beta^2\gamma^4(\omega'-\beta k')^2}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)(k'+k_r+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}+$

$+2\gamma^2(k'-\beta\omega')i\epsilon\cdot$

$\cdot\frac{[(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')+\omega'^2](\Omega-1)(k'+k_r)+\beta^2(k'k^2+k_rk^2)(1-\Omega)-2\beta\gamma^2(\omega'-\beta k')(kk_r+kk')(1-\Omega)}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)(k'+k_r+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}$

Посмотрим на первое слагаемое, оно почти такое же как и $a_ka_{k'}$ член в Гамильтониане

$-\beta^2\gamma^2((\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')+m^2)+\gamma(\omega-\beta k+\omega'-\beta k')(\omega'-\beta k')-$

$-(\omega'-\beta k')(\omega-\beta k-2\beta\gamma^2k')-\omega'^2=$

$-\beta^2\gamma^2m^2+\gamma(\omega'-\beta k')^2+2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')-\omega'^2=\gamma^2(\omega'-\beta k')(\omega'+\beta k'-\omega'+\beta k'-2\beta k')=0$

Отсюда мы получили как раз то, что только член с $i\epsilon$ дает ненулевой вклад

Посчитаем второе слагаемое

$8\gamma^4(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)i\epsilon\cdot$

$\cdot\frac{(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')-2\beta\gamma^2k'(\omega'-\beta k')+\omega'^2-\beta^2[2\beta^2\gamma^4(\omega-\beta k)(\omega'-\beta k')+(\omega-\beta k)^2-m^2\gamma^2]+2\beta^2\gamma^4(\omega'-\beta k')^2}{(k'-k+i\epsilon)(k'_r+k-i\epsilon)(k'+k_r+i\epsilon)(k'_r-k_r-i\Omega\epsilon)}=$

$8\gamma^4(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)i\pi\delta(k'-k)\cdot$

$\cdot\frac{[(\omega-\beta k)^2(1-2\beta^4\gamma^4-\beta^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^4)-2\beta\gamma^2k(\omega-\beta k)+\omega^2+m^2\gamma^2\beta^2](k'_r+k)(k'+k_r)(k'_r-k_r)(k'-k)}{(k'_r+k)^2(k'+k_r)^2(k'_r-k_r)^2}=$

$8\gamma^6(k'-\beta\omega')(k-\beta\omega)\frac{[(\omega-\beta k)^2-2\beta k(\omega-\beta k)+(\omega-\beta k)(\omega+\beta k)](k'-k)}{(k'_r+k)(k'+k_r)(k'_r-k_r)}i\pi\delta(k'-k)=$

$4\gamma^2(\omega-\beta k)^2\frac{k'-k}{k'_r-k_r}i\pi\delta(k'-k)$

Здесь было использовано, что $\delta(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)}$. В последнем выражении мы имеем расходимость вида $\frac{0}{0}$. Мы можем избавиться от нее следующим образом

$\frac{k'-k}{k'_r-k_r}\delta(k'-k) = \frac{k'-k}{(k'-k)\gamma^2(1+\beta^2)-2\beta\gamma^2(\omega'-\omega)}\frac{\omega'+\omega}{\omega'+\omega}\delta(k'-k) =$

$\frac{(k'-k)(\omega'+\omega)}{\gamma^2(k'-k)((1+\beta^2)(\omega'+\omega)-2\beta(k'+k))}\delta(k'-k) = \frac{\omega}{\omega_r}\delta(k'-k)$

В итоге, второе слагаемое есть $4\gamma^2(\omega-\beta k)^2\frac{\omega}{\omega_r}i\pi\delta(k'-k)$

Теперь посчитаем последнее слагаемое

$2\gamma^2(k-\beta\omega)(\Omega-1)(k+k_r)\frac{[(\omega-\beta k)^2+\omega^2-\beta^2k^2](k'_r+k)(k'+k_r)(k'_r-k_r)(k'-k)}{(k'_r+k)^2(k'+k_r)^2(k'_r-k_r)^2}i\pi\delta(k'-k) =$

$-\frac{2\beta}{1+\beta}(\omega-\beta k)2\omega\frac{\omega}{\omega_r}i\pi\delta(k'-k)$

Диагональная часть Гамильтониана получается следующая

$4\gamma^2(\omega-\beta k)(\omega-\beta k-\beta(1-\beta)\omega)\frac{\omega}{\omega_r}i\pi\delta(k'-k)$

В конце концов мы можем записать полученный Гамильтониан

$$H = \int_{\gamma\beta m}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{\gamma^2(\omega-\beta k)(\omega-\beta k-\beta(1-\beta)\omega)}{2\omega_r}(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) \tag{52}$$

Здесь $\omega_r = (1+\beta^2)\gamma^2\omega - 2\beta\gamma^2 k$.

Мы видим, что когда $k=\omega, m=0$ Гамильтониан переходит в

$H = (1-\beta)\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{k}{2}(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k)$

То есть переходит в Гамильтониан для безмассового поля.

Также Гамильтониан обрезан снизу следующим значением $\frac{\gamma^2(\omega-\beta k)(\omega-\beta k-\beta(1-\beta)\omega)}{2\omega_r}|_{k=\gamma\beta m} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, где Допплеровский корень свидетельствует о том, что стенка находится в движении.

Итак, мы лишний раз убедились, что нужно использовать симметризованный ТЭИ, что при подсчете вакуумных средних нужно использовать «pointsplitting» регуляризацию, и что нужно использовать новый Гамильтониан как оператор эволюции вдоль стенки.

4 Заключение

В качестве заключения еще раз перечислим основные выводы, полученные из рассмотрения данных примеров, а также наметим основные направления дальнейшей работы.
Итак, основные выводы данной работы:

- Движущееся зеркало нарушает однородность вдоль оси времени, вследствие чего гамильтониан имеет недиагональные члены
- Выбранный способ регуляризации(«pointsplitting») приводит к физически осмысленному результату
- Новый Гамильтониан – оператор эволюции вдоль стенки
- При лоренц-преобразованиях компонент ТЭИ нужно предварительно вычитать энергию нулевых колебаний вакуума
- В коммутационном соотношении поля и канонического импульса возникают граничные дельта-функции

Дальнейшие планы заключаются в том, чтобы разобрать случай массивного поля с граничным условием $z(t) = 0$ при $t < 0$ и $z(t) = -\beta t$ при $t > 0$, т.е. рассмотреть случай для стенки с изломом. Далее мы хотим посчитать для этого случая поправки к пропагатору Келдыша-Швингера, т.к. мы ожидаем, что в момент времени $t = 0$ будет излучение частиц. Мы будем считать поправки имеено к пропагатору Келдыша-Швингера из-за того, что из-за стенки мы имеем нестационарную ситуацию. В зависимости от поведения поправок к пропагатору от времени, мы будем делать дальнейшие выводы.

Список литературы

[1] Fulling,S. and Davies, P.,"Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time.Conformal anomaly".Proc.R.Soc.London.A348,393,1976.

[2] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. Tables of integrals, series, and products, Academic Press,Boston,Mass,USA,1994.

[3] Birrell, N.D.; Davies, P.C.W. Quantum fields in curved space. CUP (1982)

[4] E. T. Akhmedov, JHEP **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].

[5] E. T. Akhmedov, Phys. Rev. D **87**, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].

[6] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, JHEP **1409**, 071 (2014) doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].

[7] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93**, no. 2, 024029 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].