ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный
университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Вычисление вращательной восприимчивости кирального конденсата в КХД

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнила:
студентка 321 группы
Икаева Ксения Валерьевна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Горский А.С.

Долгопрудный
2017

Содержание

1 Введение

Хорошо известно, что кварковый конденсат, помещенный в магнитное поле, намагничивается. Магнитная восприимчивость вакуума была введена и оценена в работе [1]. Очевидно, причина этого явления состоит в том, что спины кварков выстраиваются вдоль направления магнитного поля. Таким образом, можно вычислить магнитную восприимчивость кирального конденсата, изучая линейный отклик системы на внешнее воздействие. Обычно этот коэффициент линейной реакции ищут, вычисляя вакуумные средние значения вида $\langle\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle$ и принимая во внимание, что $\langle\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle = \chi\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle F_{\mu\nu}$. Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ - тензор напряженности электромагнитного поля. Один из возможных путей вычисления упомянутых выше средних значений — это рассмотрение трехточечных корреляционных функций (трехточек) вида $\langle VAV\rangle$. Здесь A, V - аксиальный и векторный токи соответственно, и одна из векторных вершин V соответствует внешнему полю.

Такой подход был примене в работе [4], где выражение для восприимчивости было получено с использованием операторного разложения и пионной доминантности в продольной части трехточки. Есть также другой способ вычисления подобных корреляторов трех токов, а именно через AdS/CFT соответствие. Такие высичления были проделаны в статье [5], в которой результаты были сравнены с операторным разложением трехточки. Таким обрахом было получено выражение для самой восприимчивости. Еще один альтернативный вариант заключается в том, чтобы провести решеточное исследование [2].

Рассматривая вращение кваркового конденсата, можно обнаружить "гравинамагничивание". Оно сходно со случаем внешнего магнитного поля. Физически это означает, что спины кварков во вращающемся веществе выстраиваются вдоль оси вращения. При изучении вращения нужно рассматривать средние значения типа $\langle\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle = \chi_g\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle G^g_{\mu\nu}$, введенные в статье [6]. Здесь $G^g_{\mu\nu} = \partial_\mu A^g_\nu - \partial_\nu A^g_\mu$, а A^g - гравифотон, который является компонентой метрики искривленного пространства-времени.

Данная работа посвящена изучению восприимчивости кирального конденсата к вращению, которая аналогична его магнитной восприимчивости. Тем не менее, в случае рассмотрения задачи о вращательной восприимчивости важно принимать во внимание ненулевой химпотенциал $\mu \neq 0$. Восприимчивость показывает отклик не только на само вращение, но так же и на μ. В части 2 представлено вычисление вращательной восприимчивости с использованием собственных значений и собственных функций оператора Дирака. Оператор при этом рассматривается в специальной метрике, которая соответствует вращению. В части 3 показано голографическое вычисление определенной корреляционной функции. Как будет показано ниже, этот коррелятор помогает найти и саму восприимчивость. Естественно, вращение во втором случае тоже вводится как возмущение метрики плоского пространства-времени.

2 Вращательная восприимчивость через спектр оператора Дирака

2.1 Общие соображения

Нам нужно рассмотреть выражение $\langle\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle = \chi_g\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle G_{\mu\nu}$, которое фактически является определением вращательной восприимчивости. Главная задача состоит в том, чтобы получить вакуумное среднее значение $\langle\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle$. В этом разделе мы следуем стратегии, примененной в работе [3]. Вспомним кратко, что было сделано в этой статье. Обсуждался случай внешнего магнитного поля, и выражение для намагниченности было получено через пропагатор, собственные значения и собственные функции оператора Дирака. Таким образом была получена следующая формула для матричного элемента тензорного тока (2.1):

$$\langle\overline{\Psi}\Sigma_{\alpha\beta}\Psi\rangle = \langle\overline{\Psi}\Psi\rangle \lim_{\lambda\to 0}\langle\int d^4x\Psi^\dagger_\lambda(x)\Sigma_{\alpha\beta}\Psi_\lambda(x)\rangle, \tag{2.1}$$

где Ψ — кварковое поле, Ψ_λ — собственная функция оператора Дирака, соответствуящая собственному значению λ.

Вопрос состоит в том, останется ли аналогичное выражение справедливым в случае вращения. Прежде всего следует заметить, что основная идея в выводе формулы (2.1) для нас — это антикоммутация оператора Дирака с гамма-матрицей $\mathcal{D}\gamma_5 + \gamma_5\mathcal{D} = 0$. Это тождество приводит к особенному свойству спектра оператора: для любого ненулувого собственного значения λ_k, соответсвующего собственной функции ψ_k, есть также собственное значение $\lambda_{-k} = -\lambda_k$, соответствующее собственной функции $\psi_{-k} = \gamma_5\psi_k$. Итак, чтобы решить задачу, мы должны понять, как вращение и ненулевой химпотенциал $\mu \neq 0$ меняют оператор Дирака $\mathcal{D}$ и проверить, будет ли этот измененный за счет упомянутых факторов $\mathcal{D}$ антикоммутировать с γ_5.

Для изучения вращени мы вводим метрику искревленного пространства-времени следующим образом:

$$ds^2 = (1+2\phi_g)dt^2 - (1-2\phi_g)\overrightarrow{dx}^2 + 2\overrightarrow{A_g}\overrightarrow{dx}dt.$$

Не сложно найти,как компоненты этой метрики зависят от угловой скорости Ω при $\Omega \to 0$ (рассматриваем нерелятивистский случай). В линейном приближении по Ω нам нужна только $\overrightarrow{A_g}$ —гравифотонная часть. Таким образом, мы используем следующую форму (2.2) этой метрики.

$$ds^2 = dt^2 - \overrightarrow{dx}^2 + 2\overrightarrow{A_g}\overrightarrow{dx}dt. \tag{2.2}$$

По определению оператор Дирака есть $\mathcal{D} = \imath\gamma_\mu\partial_\mu$ и мы можем записать скалярное произведение в смысле введенной метрики искривленного пространства-времени. Так вводится вращение и в итоге мы получим следующее выражение:

$$\gamma_\mu\partial_\mu = \begin{pmatrix}\gamma_0 & \overrightarrow{\gamma}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{A_g} \\ \overrightarrow{A_g} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 + \mu \\ \overrightarrow{\partial} \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_0\partial_0 - \overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{\partial} + \gamma_0\mu + \gamma_0\overrightarrow{A_g}\overrightarrow{\partial} + \overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{A_g}\partial_0 + \overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{A_g}\mu \tag{2.3}$$

Мы можем разделить (2.3) на следующие члены:

$$\mathcal{D}_0 = \imath\gamma_0\partial_0 - \imath\overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{\partial} \tag{2.3a}$$

$$V_\mu = \imath\gamma_0\mu \tag{2.3b}$$

$$V_\Omega = \imath\gamma_0\overrightarrow{A_g}\overrightarrow{\partial} + \imath\overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{A_g}\partial_0 \tag{2.3c}$$

$$V_{\mu\Omega} = \imath\overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{A_g}\mu \tag{2.3d}$$

$$V = V_\mu + V_\Omega + V_{\mu\Omega} \tag{2.3e}$$

Итак, несложно видеть, что естественно записать целый оператор Дирака в форме $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + V$, где $\mathcal{D}_0$ соответствует "обычному"оператору Дирака в плоской метрике Минковского $\{1, -1, -1, -1\}$, а V обозначает возмущение, связанное с вращением (и химпотенциалом $\mu \to 0$). Из формул (2.3), (2.3a) - (2.3e) несложно понять, что антикоммутационное тождество $\mathcal{D}\gamma_5 + \gamma_5\mathcal{D} = 0$ остается справедливым, так как химпотенциал и гравифотонные компоненты метрики $A_{g,i}$ коммутируют с γ_5. Так, ответ на вопрос, поставленный в начале рассуждения, положительный. Мы действительно можем использовать выражение (2.1) для случая изучения вращающегося вещества, но, конечно, рассматривать λ и Ψ_λ как собственные значения и собственные функции оператора с возмущением.

Следующим шагом мы разложим (2.1) в ряд до второго порядка по малым параметрам Ω и μ, применяя теорию возмущений. Ниже представлено подробное вычисление.

2.2 Вычисление по теории возмущений

Примем обозначение Ψ_λ для собственной функции оператора Дирака в присутствии вращения. Наша цель — получить члены, линейно зависящие от Ω. Очевидно, что таким образом мы прийдем к самой восприимчивости χ_g, так как по своему определению она показывает линейный отклик системы на внешнее воздействие.

Приведем стандартные вычисления теории возмущений. Можно записать

$$\Psi_\lambda = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)},$$

и индекс (i), $i = \overline{0,2}$ относится к порядку поправки. Тогда, следуя нашим обозначениям:

$$\mathcal{D}\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda$$

и более подробно:

$$(\mathcal{D}_0 + V_\mu + V_\Omega + V_{\mu\Omega})(\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}) = \lambda(\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}).$$

Отсюда получаем выражения для поправок (2.4) - (2.6).

$$\mathcal{D}_0\Psi^{(0)} = \lambda\Psi^{(0)}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{D}_0\Psi^{(1)} + (V_\mu + V_\Omega)\Psi^{(0)} = \lambda\Psi^{(1)}, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{D}_0\Psi^{(2)} + (V_\mu + V_\Omega)\Psi^{(1)} + V_{\mu\Omega}\Psi^{(0)} = \lambda\Psi^{(2)}, \qquad (2.6).$$

Пусть ψ_k будет собственная функция $\mathcal{D}_0$, соответствующая собственному значению λ_k. Тогда очевидно, что поправки первого и второго порядка могут быть записаны как $\Psi^{(1)} = \sum\limits_k C_k\psi_k$, $\Psi^{(2)} = \sum\limits_k B_k\psi_k$. Нам необходимо найти коэффициенты C_k, B_k.

$$\mathcal{D}_0\Psi^{(1)} = \sum_k C_k\lambda_k\psi_k \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}_0\Psi^{(2)} = \sum_k B_k\lambda_k\psi_k \tag{2.8}$$

После подстановки (2.7) в (2.5) имеем

$$\sum_k C_k\lambda_k\psi_k + (V_\mu + V_\Omega)\Psi^{(0)} = \sum_k C_k\lambda\psi_k$$

$$C_l\lambda_l + \langle\psi_l|V_\mu + V_\Omega|\Psi^{(0)}\rangle = C_l\lambda$$

$$C_l = -\frac{\langle\psi_l|V_\mu + V_\Omega|\Psi^{(0)}\rangle}{\lambda_l - \lambda}, \lambda_l \neq \lambda$$

и таким образом получаем полное выражение для поправки первого порядка к функции:

$$\Psi^{(1)} = -\sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq \lambda}} \frac{\langle\psi_k|V_\mu + V_\Omega|\Psi^{(0)}\rangle}{\lambda_k - \lambda}\psi_k \tag{2.9}$$

Теперь несложно работать с формулой (2.8) и получить по правки второго порядка (2.10).

$$\sum_k B_k \lambda_k \psi_k + (V_\mu + V_\Omega) \sum_k C_k \psi_k + V_{\mu\Omega} \Psi^{(0)} = \sum_k B_k \lambda \psi_k$$

$$B_l \lambda_l + \sum_k C_k \langle \psi_l | V_\mu + V_\Omega | \psi_k \rangle + \langle \psi_l | V_{\mu\Omega} | \Psi^{(0)} \rangle = B_l \lambda$$

$$B_l = -\sum_r \frac{C_r \langle \psi_l | V_\mu + V_\Omega | \psi_r \rangle}{\lambda_l - \lambda} - \frac{\langle \psi_l | V_{\mu\Omega} | \Psi^{(0)} \rangle}{\lambda_l - \lambda}$$

$$B_l = \sum_r \frac{\langle \psi_r | V_\mu + V_\Omega | \Psi^{(0)} \rangle \langle \psi_l | V_\mu + V_\Omega | \psi_r \rangle}{(\lambda_l - \lambda)(\lambda_r - \lambda)} - \frac{\langle \psi_l | V_{\mu\Omega} | \Psi^{(0)} \rangle}{\lambda_l - \lambda}$$

$$\Psi^{(2)} = \sum_k B_k \psi_k \tag{2.10}$$

Теперь, имея все необходимые поправки к собственным функциям, изучим интеграл из выражения (2.1) секции 2.1 отдельно $M_{\alpha\beta} \equiv \lim_{\lambda \to 0} \langle \int d^4x \Psi_\lambda^\dagger(x) \Sigma_{\alpha\beta} \Psi_\lambda(x) \rangle$.

$$\int d^4x \Psi_\lambda^\dagger(x) \Sigma_{\alpha\beta} \Psi_\lambda(x) = \int d^4x (\Psi^{(0)\dagger} + \Psi^{(1)\dagger} + \Psi^{(2)\dagger}) \Sigma_{\alpha\beta} (\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)})$$

Здесь прежде всего пренебрегаем всеми членами выше второго порядка:

$$(\Psi^{(0)\dagger} + \Psi^{(1)\dagger} + \Psi^{(2)\dagger}) \Sigma_{\alpha\beta} (\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}) = \Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)} + \Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(1)} +$$

$$+ \Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(2)} + \Psi^{(1)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)}.$$

Предполагаем, что

$$\int d^4x \Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)} = \int d^4x \Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(1)} = \int d^4x \Psi^{(1)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)} = 0.$$

Это предположение имеет естественное физическое значение, означающее тот факт, что восприимчивость χ_g показывает линейный отклик на вращение и химпотенциал. Следовательно,

$$\int d^4x \Psi_\lambda^\dagger(x) \Sigma_{\alpha\beta} \Psi_\lambda(x) = \int d^4x (\Psi^{(0)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(2)} + \Psi^{(2)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)\dagger} \Sigma_{\alpha\beta} \Psi^{(1)}). \tag{2.11}$$

В рассматривоемой метрике искривленного пространства квадра интервала записывается как $ds^2 = dt^2 - \overrightarrow{dx}^2 + 2\overrightarrow{A_g}\overrightarrow{dx}dt$. В этом случае, полагая, что ось вращения параллельна геометрической оси z, очевидно возможно выбрать $\overrightarrow{A_g} = \begin{pmatrix} \Omega y \\ -\Omega x \\ 0 \end{pmatrix}$ и $2\Omega = \partial_y A_x - \partial_x A_y = G_{21} = -G_{12}$. Так мы получим следующую формулу для возмущения в рассматриваемой метрике:

$$V_{\mu\Omega} = \imath\mu(\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{A_g}) = \imath\mu(\gamma_1 y - \gamma_2 x)\Omega = \imath\mu(\overrightarrow{\Omega}, [\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x}]) = \imath\mu\Omega(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x}),$$

$$\begin{aligned} V_\Omega &= \imath\gamma_0(\Omega y\partial_x - \Omega x\partial_y) + \imath(\gamma_1\Omega y - \gamma_2\Omega x)\partial_0 = \\ &= \imath\Omega\gamma_0(y\partial_x - x\partial_y) + \imath\Omega(\gamma_1 y - \gamma_2 x)\partial_0 = \\ &= -\imath\Omega\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial}) + \imath\Omega(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Далее вычисляем матричные элементы.

$$\langle\psi_k|V_{\mu\Omega}|\Psi^{(0)}\rangle = \imath\mu\Omega\int d^4x\psi_k^\dagger(x)(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\Psi^{(0)}(x)$$

$$\alpha_{k0} \equiv \int d^4x\psi_k^\dagger(x)(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\Psi^{(0)}(x)$$

$$\langle\psi_k|V_{\mu\Omega}|\Psi^{(0)}\rangle = \imath\mu\Omega\alpha_{k0} \tag{2.12}$$

$$\langle\psi_k|V_\mu + V_\Omega|\Psi^{(0)}\rangle = \imath\mu\int d^4x\psi_k^\dagger\gamma_0\Psi^{(0)} - \imath\Omega\int d^4x\psi_k^\dagger\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial})\Psi^{(0)} +$$

$$+\imath\Omega\int d^4x\psi_k^\dagger(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0\Psi^{(0)}$$

$$\eta_{k0} \equiv \int d^4x\psi_k^\dagger\gamma_0\Psi^{(0)}$$

$$\theta_{k0} \equiv \int d^4x\psi_k^\dagger(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0\Psi^{(0)} - \int d^4x\psi_k^\dagger\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial})\Psi^{(0)}$$

В этих обозначениях:

$$\langle\psi_k|V_\mu + V_\Omega|\Psi^{(0)}\rangle = \imath\mu\eta_{k0} + \imath\Omega\theta_{k0}. \tag{2.13}$$

Из подстановки $\Psi^{(0)}$ можно получить другой матричный элемент:

$$\eta_{lr} \equiv \int d^4x\psi_l^\dagger\gamma_0\psi_r$$

$$\theta_{lr} \equiv \int d^4x\psi_l^\dagger(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0\psi_r - \int d^4x\psi_l^\dagger\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial})\psi_r$$

$$\langle\psi_l|V_\mu+V_\Omega|\psi_r\rangle=\imath\mu\eta_{lr}+\imath\Omega\theta_{lr}. \tag{2.14}$$

Очевидно, что нам нужен только элемент M_{21}. Согласно определению, данному в [3] $\Sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\imath}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$, получаем $\Sigma_{21}=\frac{1}{\imath}\gamma_2\gamma_1$. Для удобства перепишем члены как

$$\Psi^{(0)\dagger}\Sigma_{\alpha\beta}\Psi^{(2)}+\Psi^{(2)\dagger}\Sigma_{\alpha\beta}\Psi^{(0)}=(*)+(**). \tag{2.15}$$

Из первого члена имеем

$$(*)\equiv\mu\Omega\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\sum_{\substack{k\\ \lambda_k\neq\lambda}}\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\psi_k-\sum_{\substack{k\\ \lambda_k\neq\lambda}}\frac{\alpha_{k0}^*}{(\lambda-\lambda_k)^*}\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\Psi^{(0)},$$

$$(*)=\mu\Omega\sum_{\substack{k\\ \lambda_k\neq\lambda}}\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\psi_k-\frac{\alpha_{k0}^*}{(\lambda-\lambda_k)^*}\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\Psi^{(0)}.$$

Используя $B^\dagger\equiv B^{T*}$, можно получить

$$\{\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\psi_k\}^*=\{\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\psi_k\}^\dagger=\frac{\alpha_{k0}^*}{(\lambda-\lambda_k)^*}\psi_k^\dagger(\gamma_2\gamma_1)^\dagger\Psi^{(0)}.$$

Для дальнейшего вычисления необходимы некоторые известные свойства гамма-матриц, а именно:

$$(\gamma_2\gamma_1)^\dagger=\gamma_1^\dagger\gamma_2^\dagger=\gamma_1^\dagger(\gamma_0\gamma_0)(\gamma_0\gamma_0)\gamma_2^\dagger=(\gamma_0\gamma_1^\dagger\gamma_0)(\gamma_0\gamma_2^\dagger\gamma_0)=\gamma_1\gamma_2=-\gamma_2\gamma_1.$$

Таким образом, имеем

$$\{\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\psi_k\}^*=-\frac{\alpha_{k0}^*}{(\lambda-\lambda_k)^*}\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\Psi^{(0)}$$

и окончательно:

$$(*)=2\mu\Omega\sum_{\substack{k\\ \lambda_k\neq\lambda}}\mathrm{Re}\{\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\psi_k\}. \tag{2.16}$$

Теперь работаем со вторым членом.

$$(**)\equiv-\frac{1}{\imath}\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\sum_k\sum_r\frac{(\mu\eta_{r0}+\Omega\theta_{r0})(\mu\eta_{kr}+\Omega\theta_{kr})}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_r)}\psi_k-$$

$$-\frac{1}{\imath}\sum_k\sum_r\{\frac{(\mu\eta_{r0}+\Omega\theta_{r0})(\mu\eta_{kr}+\Omega\theta_{kr})}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_r)}\}^*\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\Psi^{(0)}$$

Аналогично выражению (*):

$$(**)=\imath\sum_k\sum_r 2\imath\,\mathrm{Im}\{\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\frac{(\mu\eta_{r0}+\Omega\theta_{r0})(\mu\eta_{kr}+\Omega\theta_{kr})}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_r)}\psi_k\}.$$

Рассмотрим только те члены, которые пропорциональны $\mu\Omega$.

$$(**) = -2\mu\Omega \sum_k \sum_r \mathrm{Im}\{\frac{\eta_{r0}\theta_{kr} + \eta_{kr}\theta_{r0}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_r)} \Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\psi_k\} \tag{2.17}$$

Третий член в интеграле есть

$$(***) \equiv \frac{1}{\imath}\Psi^{(1)\dagger}\gamma_2\gamma_1\Psi^{(1)} = -\imath \sum_{\substack{k \\ \lambda_k\neq\lambda}} \{-\imath(\frac{\mu\eta_{k0}+\Omega\theta_{k0}}{\lambda-\lambda_k})^*\psi_k^\dagger\}\gamma_2\gamma_1 \sum_{\substack{l \\ \lambda_l\neq\lambda}} \{\imath\frac{\mu\eta_{l0}+\Omega\theta_{l0}}{\lambda-\lambda_l}\psi_l\} =$$

$$= -\imath \sum_{\substack{k \\ \lambda_k\neq\lambda}} \sum_{\substack{l \\ \lambda_l\neq\lambda}} \frac{(\mu\eta_{k0}+\Omega\theta_{k0})^*(\mu\eta_{l0}+\Omega\theta_{l0})}{(\lambda-\lambda_k)^*(\lambda-\lambda_l)}\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\psi_l$$

Снова в интеграле сохраним только те члены, которые содержат первую степень $\mu\Omega$. Итак,

$$(***) = -\imath\mu\Omega \sum_{\substack{k \\ \lambda_k\neq\lambda}} \sum_{\substack{l \\ \lambda_l\neq\lambda}} \frac{(\eta_{k0}^*\theta_{l0}+\theta_{k0}^*\eta_{l0})}{(\lambda-\lambda_k)^*(\lambda-\lambda_l)}\psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\psi_l. \tag{2.18}$$

Окончательно, суммируя выражения (2.16), (2.17), (2.18) и деля каждый член на 2Ω, мы готовы записать полное выражение для восприимчивости через спектр оператора Диркака (2.19).

$$\chi_g = \mu\lim_{\lambda\to 0} \sum_{\substack{k \\ \lambda_k\neq\lambda}} \int d^4x \mathrm{Re}\{\frac{\alpha_{k0}}{\lambda-\lambda_k}\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\psi_k\} -$$

$$-\mu\lim_{\lambda\to 0} \sum_k \sum_r \int d^4x \mathrm{Im}\{\frac{\eta_{r0}\theta_{kr}+\eta_{kr}\theta_{r0}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_r)}\Psi^{(0)\dagger}\gamma_2\gamma_1\psi_k\} -$$

$$-\frac{\imath}{2}\mu\lim_{\lambda\to 0} \sum_{\substack{k \\ \lambda_k\neq\lambda}} \sum_{\substack{l \\ \lambda_l\neq\lambda}} \frac{(\eta_{k0}^*\theta_{l0}+\theta_{k0}^*\eta_{l0})}{(\lambda-\lambda_k)^*(\lambda-\lambda_l)} \int d^4x \psi_k^\dagger\gamma_2\gamma_1\psi_l. \tag{2.19}$$

Здесь ψ_k — собственная функция $\mathcal{D}_0$, соответствующая собственному значению λ_k, $\Psi^{(0)}$ — поправка нулевого порядка по теории возмущений к Ψ_λ (λ стремится к 0), $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e}$. Круглые скобки () означают смешанное произведение трех векторов.

$$\alpha_{k0} \equiv \int d^4x \psi_k^\dagger(x)(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\Psi^{(0)}(x),$$

$$\eta_{k0} \equiv \int d^4x \psi_k^\dagger\gamma_0\Psi^{(0)}, \eta_{lr} \equiv \int d^4x \psi_l^\dagger\gamma_0\psi_r,$$

$$\theta_{k0} \equiv \int d^4x \psi_k^\dagger(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0\Psi^{(0)} - \int d^4x \psi_k^\dagger\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial})\Psi^{(0)},$$

$$\theta_{lr} \equiv \int d^4x \psi_l^\dagger(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{x})\partial_0\psi_r - \int d^4x \psi_l^\dagger\gamma_0(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\partial})\psi_r.$$

3 Голографический подход: модель с жесткой стенкой

В этой части мы рассматриваем модель AdS/QCD с жесткой стенкой ("hard wall") [5, 7] и в основном используем обозначения, введенные в этих статьях. Наша цель здесь — вычислить корреляционную функцию определенного вида через голографию и затем сравнить результат с операторным разложением. В случае внешнего магнитного поля этот коррелятор был вида [5] $\langle VVA \rangle$, где V и A означают векторный и аксиальный токи соответственно. Вполне очевидно, что нужно рассматривать вариацию члена действия Черна-Саймонса, который бы содержал операторы V, A, а также гравифотон.

Мы используем голографическую модель КХД, описанную в [8]. Именно, имеется N_c D4-бран и N_f $D8 - \overline{D8}$ пар ($D4/D8/\overline{D8}$-система). Черн-Саймонсовский член действия, который подходит для нашего вычисления, имеет вид $S_{cs} = \alpha_8 \int C_1 \wedge dC_3 \wedge \ F \wedge F$, где α_8 — константа, присущая модели с $D8$-бранами. Здесь $C_1 = A_g$, $dC_1 = F_g$, A_g — гравифотонное поле, а dC_3 — 4-форма напряженности поля, содержащая заряд D4-бран в следующем смысле. Можно проинтегрировать это выражение по S_4, так что $\int\limits_{S_4} dC_3 = 2\pi N_c$. Следовательно, согласно [8] нужный нам член есть $\frac{N_c}{24\pi^2} \int C_1 \wedge \ F \wedge F$.

Ниже для удобства пренебрежем константным коэффициентом члена Черна-Саймонса и произведем все операции с самим интегралом. В конечном результате константа будет восстановлена. Таким образом, имеем

$$S_{cs} = \int C_1 \wedge F_A \wedge F_A$$

Гравифотонное поле $C_{1,\mu} = A^g_\mu$, $dC_1 = F^g$ и $F^g_{\mu\nu} = \partial_\mu A^g_\nu - \partial_\nu A^g_\mu$ по аналогиии с электродинамикой. Согласно общему принципу, Черн-Саймонсовский член входит в голографическое действие как $S_{cs}(A_L) - S_{cs}(A_R)$. Поэтому, нужно переписать это выражение, используя замену: $V = \frac{A_L + A_R}{2}$, $A = \frac{A_L - A_R}{2}$, $A_L = V + A$, $A_R = V - A$.

Таким образом, имеем

$$F_{A_L}F_{A_L} - F_{A_R}F_{A_R} = (F_V + F_A)(F_V + F_A) - (F_V - F_A)(F_V - F_A) = 2(F_V F_A + F_A F_V), \tag{3.1}$$

$$S_{cs} = \int 2(C_1 \wedge F_V \wedge F_A + C_1 \wedge F_A \wedge F_V). \tag{3.2}$$

Так как F — точная форма, можно переписать ее как $F = d\omega$, и $\omega = A_\mu dx^\mu$. Следовательно, $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, $\mu < \nu$, и очевидно, что $dF = d(d\omega) = 0$. Можем записать результат в этих обозначениях.

$$S_{cs} = \int 2(C_1 \wedge d\omega_V \wedge d\omega_A + C_1 \wedge d\omega_A \wedge d\omega_V) \tag{3.3}$$

$$\int C_1 \wedge F_V \wedge F_A = -\int dC_1 \wedge d\omega_V \wedge \omega_A \tag{3.4a}$$

$$\int C_1 \wedge F_A \wedge F_V = -\int dC_1 \wedge \omega_A \wedge d\omega_V \tag{3.4b}$$

Формы могут быть переписаны в виде: $\omega_A = A_\mu dx^\mu$, $F = d\omega_A = F_{\rho\nu} dx^\rho \wedge dx^\nu$, $F^g = dC_1 = F^g_{\omega\eta} dx^\omega \wedge dx^\eta$. Тогда, подставляя (3.4a), (3.4b) в (3.3), получим:

$$S_{cs} = -2\int F_{g\omega\eta} F_{V\rho\nu} A_\mu dx^\omega \wedge dx^\eta \wedge dx^\rho \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu$$

$$-2\int F_{g\omega\eta} F_{V\rho\nu} A_\mu dx^\omega \wedge dx^\eta \wedge dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\nu =$$

$$= -2\varepsilon^{\omega\eta\rho\nu\mu} \int F_{g\omega\eta} F_{V\rho\nu} A_\mu d^5x - 2\varepsilon^{\omega\eta\mu\rho\nu} \int F_{g\omega\eta} F_{V\rho\nu} A_\mu d^5x =$$

$$= -4\varepsilon^{\omega\eta\rho\nu\mu} \int d^5x F_{g\omega\eta} F_{V\rho\nu} A_\mu \tag{3.5}$$

Нам нужен только $F_{12} = -F_{21} = 2\Omega$, потому что мы всегда можем выбрать координатную систему так, что ось вращения параллельна оси x_3. Выражение (3.5) упрощается в этом частном случае.

$$S_{cs} = -4\varepsilon^{12\rho\nu\mu} \int d^5x (2\Omega) F_{V\rho\nu} A_\mu =$$

$$= -8\Omega\varepsilon^{12\rho\nu\mu} \int dx_1 dx_2 dx_\rho dx_\nu dx_\mu (\partial_\rho V_\nu - \partial_\nu V_\rho) A_\mu$$

Фиксируем калибровку $A_z = V_z = 0$ [7], а индексы будут $\{01234\} \equiv \{0123z\}$, так что можно запистаь покомпонентно:

$$S_{cs} = -8\Omega \int d^5x (A_3 \partial_z V_0 - A_0 \partial_z V_3). \tag{3.6}$$

Удобно сделать 4d преобразование Фурье, так что $V(x,z) = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} e^{(-\imath q_1 x)} V(q_1, z)$, $A(x,z) = \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{(-\imath q_2 x)} A(q_2, z)$.

$$S_{cs} = -8\Omega \int dz \int d^4x \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^8} e^{-\imath(q_1+q_2)x} \{A_3(q_2,z)\partial_z V_0(q_1,z) - A_0(q_2,z)\partial_z V_3(q_1,z)\}$$

$$\int d^4x \frac{1}{(2\pi)^8} e^{-\imath(q_1+q_2)x} = \frac{1}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(q_1+q_2)$$

$$S_{cs} = -8\Omega \int dz \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(q_1+q_2)\{A_3(q_2,z)\partial_z V_0(q_1,z) - A_0(q_2,z)\partial_z V_3(q_1,z)\} =$$

$$= -8\Omega \int dz \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\{A_3(-q_1,z)\partial_z V_0(q_1,z) - A_0(-q_1,z)\partial_z V_3(q_1,z)\} \quad (3.7)$$

Очевидно, этот член даст не трехточечный коррелятор, упомянутый в начале, а эффективно двуточку вида $\langle AV \rangle$ во внешнем поле. Используя обозначения статьи [5], если $\hat{V}_0$, $\hat{A}_0$ — источники на границе, тогда

$$\langle AV \rangle = \frac{\delta^{(2)} S_{cs}}{\delta \hat{A}_0 \delta \hat{V}_0},$$

после взятия преобразования Фурье и учета только нужного члена формулы (3.7), получаем следующий интеграл:

$$\langle A_0(-Q)V_3(Q)\rangle = 8\Omega \int dz a_0(-Q,z)\partial_z v_3(Q,z) = 8\Omega \int dz a(-Q,z)\dot{v}_3(Q,z). \quad (3.8)$$

В это выражение нужно подставить классические решения уравнений движения для полей. В случае плоской метрики и с нулевым химпотенциалом $\mu = 0$, эти решения были найдены в работе [7]. Наша цель сейчас — найти линейные поправки кним [7], в предположении того, что μ и Ω — малые параметры. (Конечно, точное решение было бы сложно найти аналитически.) В этом случае необходимо учесть только те поправки, который связаны с химпотенциалом μ, потому что члены, содержащие Ω, входят в действие в степени Ω более высокой, чем первая.

Ненулевой химпотенциал будем учитывать, принимая подстановку $\partial_0 \to \partial_0 + \mu$. Вообще говоря, так вводится химпотенциал на границе. Химпотенциал в балке (голографический) правильно рассматривать как член разложения компоненты поля A_0 на границе. Однако нам интересно только поведение поля вблизи границы при $z \to 0$, кроме того, химпотенциал рассматривается только как малое возмущение. В этом случае введение химпотенциала при помощи удлиннения производной по времени будет довольно просто реализовать. Результат не будет претендовать на высокую точность, но мы рассматриваем его как некоторое грубое приближение, которое можно выполнить в данной модели и с данным членом действия Черна-Саймонса. Иначе говоря, мы делаем предположение о том, что в данном конкретном случае оба описанных выше способа введения химпотенциала эквивалентны.

С этого момента рассуждения становится важно, какой химпотенциал мы подразумеваем под μ. Здесь для поля V он есть $\frac{\mu_L+\mu_R}{2}$, а для A он был бы $\frac{\mu_L-\mu_R}{2}$, то есть фактически киральным химпотенциалом. Мы им пренебрежем, и вычислим только поправки к V. Так как $(\partial_0+\mu)^2 = \partial_0^2+2\mu\partial_0+\mu^2$, тогда из $-\partial_z\frac{1}{z}\partial_z V_\mu + \frac{1}{z}\triangle V_\mu = 0$, уравнение для V принимает форму (3.9)

$$-\partial_z\frac{1}{z}\partial_z V_\mu + \frac{1}{z}\triangle V_\mu + \frac{2\mu}{z}\partial_0 V_\mu = 0. \tag{3.9}$$

Возьмем преобразование Фурье : $V(q,z) = \int d^4x \exp^{\imath qx} V(x,z)$.

$$-\partial_z\frac{1}{z}\partial_z V_\mu(q,z) - \frac{q^2}{z}V_\mu(q,z) - \frac{2\imath\mu q_0}{z}V_\mu(q,z) = 0 \tag{3.10}$$

Здесь $V_\mu = V_\mu^a$ согласно известному обозначнию. Как было упомянуто, решение имеет вид $V(q,z) = V_0(q)v(q,z)$, где $V_0(q)$ обозначает источник на границе, так что $v(q,\varepsilon) = 1$. Также перепишем $q^2 = -Q^2$.

$$\partial_z\frac{1}{z}\partial_z v - \frac{Q^2}{z}v = -\frac{2\imath\mu q_0}{z}v$$

$$-\frac{1}{z}\partial_z v + \partial_z^2 v - Q^2 v = -2\imath\mu q_0 v$$

Сделаем подстановку $x = Qz$, $x_0 = Q\varepsilon$, $x_m = Qz_m$, чтобы x был безразмерной переменной.

$$-\frac{1}{x}\partial_x v + \partial_x^2 v - v = -\frac{2\imath\mu q_0}{Q^2}v$$

Пусть $\alpha_0 \equiv -\frac{2\imath\mu q_0}{Q^2}$ будет малым параметром. Так мы получаем следующее дифференциальное уравнение (3.11).

$$-\frac{1}{x}\partial_x v + \partial_x^2 v - v = \alpha_0 v \tag{3.11}$$

Найдем поправки к однородному уравнению с помощью функций Грина. Применяем те же самые аргументы, как и в [7] (с заменой λx^4 на α_0 в возмущении). Очевидно, что можно взять решение $v^{(0)}$ однородного уравнения, которое было получено в этой статье.

$$v^{(1,\mu)} = \int_{x_0}^{x_m} dx'\alpha_0 v^{(0)}(x')\frac{G(x,x')}{x'}$$

Как несложно видеть, все вычисления сходны с теми, которые были проделаны в [7], в предположении, что $x_0 \to 0$, $x \to 0$, то есть, рассматривая решения у границы. Итак,

$$v^{(1,\mu)} = \alpha_0\frac{x[AI_1(x)+BK_1(x)]}{AD-BC}\int_{x_0}^{x} dx' v^0(x')[CI_1(x')+DK_1(x')]+$$

$$+\alpha_0 \frac{x[CI_1(x)+DK_1(x)]}{AD-BC} \int\limits_x^{x_m} dx' v^0(x')[AI_1(x')+BK_1(x')].$$

Помня о том, что $x_0 = Q\varepsilon \to 0$ и $x \to x_0$, мы видим, что вклад первого интеграла стремится к нулю, и нам нужен только второй член.

$$v^{(0)}(x) = \frac{x}{B}(AI_1(x)+BK_1(x))$$

Известные асимптотики есть $K_1(x) \sim \frac{1}{x}$, $I_1(x) \sim \frac{x}{2}$ at $x \to 0$ и $K_1(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$, $I_1(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ at $x \to \infty$, то есть второй интерграл имеет сингулярность при $x = 0$, а x_m — конечная точка. Поэтому основной вклад дает $K_1(x)$ возле $x = 0$:

$$\int\limits_{Q\varepsilon}^{x_m} dx' \frac{x'}{B}[AI_1(x')+BK_1(x')]^2 = \int\limits_{Q\varepsilon}^{x_m} dx' \frac{x'}{B} B^2 [K_1(x')]^2 \simeq \int\limits_{Q\varepsilon}^{x_m} dx' B \frac{1}{x'} =$$

$$= B\ln(\frac{x_m}{Q\varepsilon}) = B\ln(\frac{z_m}{\varepsilon}).$$

$$AD-BC = AI_1(x_0) - BK_1(x_0) \simeq A\frac{x_0}{2} - B\frac{1}{x_0} \simeq -\frac{B}{x_0}$$

$$x[CI_1(x)+DK_1(x)] \simeq x\frac{1}{x_0}I_1(x) \simeq \frac{x^2}{2x_0}$$

$$\frac{x[CI_1(x)+DK_1(x)]}{AD-BC} \simeq -\frac{x^2}{2B}$$

$$v^{(1,\mu)} = -\alpha_0 \frac{x^2}{2B} B\ln(\frac{z_m}{\varepsilon}) = -\alpha_0 \frac{x^2}{2}\ln(\frac{x_m}{Q\varepsilon}) \tag{3.12}$$

Здесь $\varepsilon \to 0$ и $x \to Q\varepsilon$. Мы предполагаем, что они оба одного порядка, так что $x \simeq Q\varepsilon$, и граница x_m фиксирована, когда фиксировано Q.

$$v^{(1,\mu)} \simeq -\alpha_0 \frac{x^2}{2}\ln(\frac{x_m}{x}) = -(-\frac{2\imath\mu q_0}{Q^2})\frac{Q^2z^2}{2}(\ln(x_m) - \ln(Qz) =$$

$$= \imath\mu q_0 z^2 \ln(x_m) - \imath\mu q_0 z^2 \ln(Qz) \tag{3.13}$$

С этого момента удобнее использовать обозначение

$$v^{(1,\mu)} \equiv v^{(\mu)}.$$

Следовательно, из (3.13) несложно получить выражение для нужной производной:

$$\partial_z v^{(\mu)} = 2\imath\mu q_0 z\ln(x_m) - 2\imath\mu q_0 z \ln(Qz) - \imath\mu q_0 z \tag{3.14}$$

Теперь нужно вычислить $\langle A_{||}(-Q)V(Q)\rangle$, где $A_{\mu||} = \partial_\mu \phi$, и искать члены $\sim \frac{1}{Q^4}$, чтоюы сравнить результат с операторным разложением [6] $\frac{m\langle\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi\rangle}{Q^4}$. (Ниже будут даны аргументы для использования этого члена.) Известно [5], что $a \sim \phi^{(0)} + \phi^{(m)}$ и вклад $\frac{1}{Q^4}$ может дать только часть $\phi^{(m)} = -\frac{2}{9}\frac{k^2 m\sigma}{\alpha^2}z^2$. Нужно также помнить о выражении (3.8):

$$\langle A_{0||}(-Q)V_3(Q)\rangle = 8\Omega \int dz a_{||}(-Q,z)\partial_z v(Q,z)$$

Рассмотрим сначала интеграл в общем виде: $\int\limits_0^{x_m} x^k \ln x dx$. Подставляя $\ln x = t$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и интегрируя по частям, если $(k+1) > 0$, получим:

$$\int\limits_0^{x_m} x^k \ln x dx = \int\limits_{-\infty}^{\ln x_m} t e^{(k+1)t} dt = \frac{x_m^{(k+1)}}{k+1}\ln x_m - \frac{x_m^{(k+1)}}{(k+1)^2}.$$

Для $k = 3$ (наш случай) интеграл равен $\frac{x_m^4}{4}\ln x_m - \frac{x_m^4}{16}$. Используя этот результат, (3.14) и выражение для a, можно записать:

$$8\Omega \int dz \partial_0 \phi^{(m)} \partial_z v = (8\Omega)(\imath\mu q_0)(-\frac{2}{9}\frac{k^2 m\sigma}{\alpha^2})(-\imath q_0)\int\limits_{\varepsilon}^{z_m}[2z^3 \ln x_m - 2z^3 \ln(Qz) - z^3]dz$$

$$\int\limits_0^{z_m}[2z^3 \ln x_m - 2z^3 \ln(Qz) - z^3]dz = \frac{1}{Q^4}\int\limits_0^{x_m}[2x^3 \ln x_m - 2x^3 \ln(x) - x^3]dx =$$

$$= \frac{1}{Q^4}\{\frac{x_m^4}{2}\ln x_m - \frac{x_m^4}{2}\ln x_m + \frac{x_m^4}{8} - \frac{x_m^4}{4}\} = -\frac{1}{Q^4}\frac{x_m^4}{8}$$

Таким образом, член в двуточке, который важен для нас, принимает форму:

$$\langle AV\rangle \simeq (8\Omega)(\mu q_0^2)(\frac{2}{9}\frac{k^2 m\sigma}{\alpha^2})\frac{1}{Q^4}\frac{x_m^4}{8}. \tag{3.15}$$

Его мы можем переписать с использованием известных обозначений для констант

$$\frac{k^2 m\sigma}{\alpha^2} = \frac{1,815}{3}\frac{N_f m\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle}{f_\pi^2}.$$

Восстанавливая константу действия в (3.15), голографическое вычисление в итоге дает

$$\langle AV\rangle \simeq q_0^2 \frac{2\Omega\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle m}{Q^4}\frac{1,815 x_m^4}{27}\frac{\mu N_f}{f_\pi^2}\frac{N_c}{24\pi^2}. \tag{3.16}$$

Вернемся к операторному разложению для этой двухточечной функции $\langle A_{0||}(-Q)V_3(Q)\rangle$. Здесь рассмотрим более общий случай $\langle A_\nu V_\mu\rangle$, помня о том, что это двуточка во внешнем поле. Похожие вычисления были проделаны в работе [4] в электромагнитном поле (мягкий фотон, который учитывается в амплитуде). У нас аналогичная ситуация с гравифотоном вместо фотона. Важно, что мы зафиксировали калибровку $\partial_\mu V_\mu = 0$ [7], решая уравнения движения. Это означает, что наша двухточечная корреляционная функция, амплитуда (в присутствии гравифотона, который также полагается "мягким") поперечна по V. Следовательно, можно применить аргументы из статьи [4], чтобы заключить, что в данной работе операторное разложение будет иметь такую же форму:

$$V_\mu A_\nu = \sum_i \{c_T^i(q^2)(\mathcal{O}^i_{\mu\nu} + q_\mu q^\sigma \mathcal{O}^i_{\sigma\nu} - q_\nu q^\sigma \mathcal{O}^i_{\sigma\mu}) + c_L(q^2) q_\nu q^\sigma \mathcal{O}^i_{\sigma\mu}\} \tag{3.17}$$

Чтобы получить восприимчивость, нужен оператор $\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi$, поэтому рассматриваем члены с размерностью d=3. То есть $\mathcal{O}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{\Psi}\sigma_{\gamma\delta}\Psi$, так что, возвращаясь к нашему частному случаю $\mu = 3$ и $\nu = 0$, нужно только $\mathcal{O}^{03} = \overline{\Psi}\sigma_{12}\Psi$. Более того, принимаем во внимание $A_{||}$, и, как было показано в [4], только вторая структура в операторном разложении (3.17) продольна по аксиальному току (в то время, как первая поперечна). Итак, операторное разложение имеет следующий вид (сохраняем только необходимые для нас члены):

$$V_3 A_{||0} \simeq c_L q_0 q^0 \mathcal{O}_{03} \simeq c_L q_0 q^0 (\overline{\Psi}\sigma_{12}\Psi). \tag{3.18}$$

Коэффициент c_L может быть вычислен из диаграммы комптоновского типа с учетом размерности целого оператора. В сравнении с электродинамикой, гравифотон имеет другую вершину в аналогичной диаграмме. Вопрос был обсужден в статье [6], и было показано, что, когда рассматривается случай "мягкого"гравифотона, член взаимодействия такой же, как и в электроднамике, но с дополнительным фактором μ в вершине. Поэтому, по аналогии со случаем фотона, можно записать, что $c_L = 2c_T = \frac{4m}{Q^4}$, и Q^4 появляется из анализа размерностей. Утверждается, что это единственный член операторного разложения, который может быть сравнен с выражением (3.16) для получения восприимчивости. Таким образом, мы имеем:

$$\langle V_3 A_{0||}\rangle \simeq \frac{(4q_0 q^0 m \langle\overline{\Psi}\sigma_{12}\Psi\rangle)}{Q^4}.$$

Очевидно, нужнл переписать это, используя $\langle\overline{\Psi}\sigma_{12}\Psi\rangle = 2\Omega\langle\overline{\Psi}\Psi\rangle\chi_g$. Так, из (3.16) окончательно получим нужный параметр

$$\chi_g = \frac{1,815 x_m^4}{2\cdot 54}\frac{\mu N_f}{f_\pi^2}\frac{N_c}{24\pi^2} \simeq 0,7\cdot 10^{-3} x_m^4 \frac{\mu N_f N_c}{\pi^2 f_\pi^2} \tag{3.19}$$

Выражение (3.19) показывает, что рассмотренная в этой задаче простая модель с жесткой стенкой дает плохой результат для восприимчивости χ_g из-за x_m в ответе. Однако x_m появляется засчет обрезания, присущего модели. Очевидно, что этот параметр невозможно избежать в конечном результате, потому что полученный член — единственный имеющий подходящую размерность.

4 Заключение

В данной работе вычислена вращательная восприимчивость кврукового конденсата с использованием спектра оператора Дирака и в голографической модели КХД с жесткой стенкой.

Первый вариант дает положительный результат. Хотя выражение для восприимчивости получилось громоздким, можно попытаться найти подходящий численный метод и вычислить само значение χ_g. Так, в этом смысле, формула (2.19), полученная в части 2 ясна.

К сожалению, последний способ вычисления оказался не подходящим для вычисления восприимчивости с достаточной точностью. Причиной тому является обрезание x_m, с неизбежностью появляющееся в конечном результате. Мы делаем вывод о том, что восприимчивость — довольно тонкий параметр, так что он не может быть хорошо оценен в простой голографической модели с жесткой стенкой. В то же время, несложно заметить, что χ_g связано с членом действия Черна-Саймонса, а именно, χ_g можно получить из этого члена. Это свойство в точности такое же, как и в магнитном случае, для которого оно было исследовано в [5].

Однако все еще есть надежды, что другие голографические модели, такие как модель с мягкой стенкой или модель с жесткой стенкой и тензорными полями ранга 2 [9], [10], дали бы лучший результат для той же самой восприимчивости. Так же было бы интересно исследовать эффекты, появляющиеся за счет кирального химпотенциала.

Список литературы

[1] B. L. Ioffe and A. V. Smilga, “Nucleon Magnetic Moments and Magnetic Properties of Vacuum in QCD,” Nucl. Phys. B 232, 109 (1984). doi:10.1016/0550-3213(84)90364-X

[2] G. S. Bali, F. Bruckmann, M. Constantinou, M. Costa, G. Endrodi, S. D. Katz, H. Panagopoulos and A. Schafer, “Magnetic susceptibility of QCD at zero and at finite temperature from the lattice,” Phys. Rev.D86v., 09409452(2012) [arXiv:1209.6015 [hep-lat]]

[3] P.V. Buividovich, M.N. Chernodub, E.V. Luschevskaya, M.I. Polikarpov, "Chiral magnetization of non-Abelian vacuum: a lattice study [arXiv:0906.0488 [hep-lat]]

[4] A. Vainshtein, “Perturbative and nonperturbative renormalization of anomalous quark triangles,” Phys. Lett. B 569, 187 (2003) doi:10.1016/j.physletb.2003.07.038 [arXiv:hep-ph/0212231].

[5] Alexander Gorsky, Alexander Krikun, "Magnetic susceptibility of the quark condensate via holography [arXiv:0902.1832 [hep-ph]]

[6] A. Aristova, D. Frenklakh, A. Gorsky, D. Kharzeev, "Vortical susceptibility of finite-density QCD matter [arXiv:1606.05882 [hep-ph]]

[7] A. Krikun, "On two-point correlation functions in AdS/QCD [arXiv:0801.4215 [hep-th]

[8] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. 113, 843 (2005), [arXiv:hep-th/0412141]

[9] A. Gorsky, P. N. Kopnin, A. Krikun, A. Vainshtein, "More on the Tensor Response of the QCD Vacuum to an External Magnetic Field [arXiv:1201.2039 [hep-ph]]

[10] Sophia K. Domokos, Jeffrey A. Harvey, Andrew B. Royston, "Successes and Failures of a More Comprehensive Hard Wall AdS/QCD [arXiv:1210.6351 [hep-th]]

[11] Andreas Gustavsson, "A preliminary test of Abelian D4-M5 duality"arXiv:1111.6339 [hep-th]