Федеральное агенство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Вещественные формы эллиптических интегрируемых систем

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Выполнил:
студент 321 группы
Доценко Егор Иванович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Ольшанецкий Михаил Ааронович

Москва 2017

Содержание

1 Введение

Во многих случаях найти точное решение для задачи многих тел возможно благодаря тому, что уравнения движения можно представить в форме Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \tag{1}$$

где L может зависеть от дополнительной переменной z, которая назвается спектральным параметром. Из такого представления сразу видно, что $H_k = trL^k$ являются сохраняющимися величинами, а то, что они находятся в инволюции является следствием существования $r-$матричной структуры, а именно пусть $L_1 = L \otimes 1$, $L_2 = 1 \otimes L$, тогда если

$$\{L_1,L_2\} = [r^{12}, L_1 + L_2], \tag{2}$$

то $\{\mathrm{tr}L^k, \mathrm{tr}L^m\} = 0$.

Оказывается, что оператору Лакса со спектральным параметром можно придать геометрический смысл. Для этого нужно рассмотреть систему Хитчина. Как показал Некрасов в своей работе [6] вырождения этой системы дают такие известные рациональные, тригонометрические и эллиптические модели ,как модель Годена и система Калоджеро-Мозера рациональные тригонометрические и эллиптические соответственно. Но гамильтонианы $H_k = \mathrm{tr}L^k$, получающиеся в результате общей процедуры, являются комплексными. Это, например, может мешать ставить спектральную задачу на волновую функцию для соответствующего квантового гамильтониана, который не является эрмитовым оператором.Общая проблема квантования алгебраических интегрируемых систем (в качестве обзора см. [22]) подробно рассмотивается в [8], что инициировало ряд проверок: [19], [20], [21] .

Общая процедура овеществления систем Хитчина на произвольной гладкой комплексной кривой была предложена в [4]. Мы, следуя этой общей процедуре, рассматриваем задачу об овеществлении sl_N эллпитического Кладжеро-Мозера и $SL(N,\mathbb{C})$ эллиптического волчка. Подобный вопрос разбирался в [15], но для расслоений без отмеченных точек

Данная работа организована следующим образом:

В разделе 2 мы кратко опишем общую систему Хитчина на произвольной комплексной кривой и покажем как из общей конструкции можно получить оператор Лакса для эллиптического Калоджеро-Мозера со спином.

В разделе 3 мы опишем какие эллиптически кривые подходят для овеществления определенных на них систем Хитчина.

В разделе 4 мы обсудим редукции к вещественным формам и явно опишем вещественные подмногообразия в исходном комплексном фазовом пространстве, которые получаются после редукции, а также явно выпишем соответствующие гамильтонианы для случая системы Калоджеро-Мозера.

В разделе 5 мы проделываем аналогичную процедуру для эллиптического волчка.

2 Краткое обсуждение системы Хитчина

2.1 Описание общей конструкции для расслоений без отмеченных точек

Следуя [9] опредеим систему Хитчина произвольной комплексной кривой Σ - сфере с $g > 1$ ручками с калибровочной группой $GL(N,\mathbb{C})$. Отметим, что данная комплесная кривая может быть особой. Для этого нужно выбрать голоморфное векторное расслоение V ранга N - слой над точкой изоморфен $\mathbb{C}^N$ с фиксированным первым числом Черна k - степенью расслоения ($\deg(V) = k$). Выбранное вектроное расслоение должно удовлетворять условию стабильности: для любого собственного подрасслоения U

$$\frac{\deg(U)}{\mathrm{rk}(U)} < \frac{\deg(V)}{\mathrm{rk}(V)}. \tag{3}$$

Поле Хиггса $\Phi(z) \in \Gamma(\mathrm{End}(V) \otimes K)$, где Γ означает пространство сечений, K-канкласс (для интесерующего нас случая эллиптической кривой канкласс равен dz, т.к. $\dim H^{1,0} = 1$). Следующий шаг в определении состоит в выборе голоморфной структуры на сечениях $\Gamma(\mathrm{End}(V) \otimes K)$. Для этого нужно выбрать оператор $\overline{\nabla} = \overline{\partial} + \overline{A}$, задающий комплесную структуру. По определению сечение называется голоморфным, если оно лежит в ядре этого оператора: $\overline{\nabla}\Phi = 0$.

Пара $\overline{A}, \Phi$ называется расслоением Хиггса, на нем естественным образом определяется симплектическая структура

$$\Omega = \int_\Sigma \mathrm{tr}\delta\overline{A} \wedge \delta\Phi. \tag{4}$$

Так как $\overline{A}$ при калибровочных преобразованиях преобразуется как матрица связности, поле Φ по присоединенному представлению $GL(N,\mathbb{C})$, то форма Ω калибровочно инвариантна. Отображение момента по такому действию

$$\mu = \overline{\partial}\Phi + [\overline{A},\Phi]. \tag{5}$$

Фазовое пространство для интегрируемой системы $\mathcal{M} = (\mu = 0/\mathcal{G})$ - есть пространство модулей стабильных голоморфных расслоений степени k. По формуле Римана-Роха $\mathrm{dim}M = 2(N^2(g-1)+1)$. Так как $\mathrm{tr}\Phi^m$ калибровочно инвариантны, то они будут находиться в инволюции на фазовом пространстве M. Это позволяет определить гамильтонианы

$$H_{mj} = \int_\Sigma \mathrm{tr}\Phi^m \nu_{m_j,1}, \tag{6}$$

которые уже являются функциями на фазовом пространстве и также находятся в инволюции и функционально независимы. $\nu_{m_j,1}$ - дифференциалы Бельтрами, индекс j нумерует базис в этом пространстве дифференциалов. Снова пользуясь формулой Римана-Роха можно показать, что число гамильтонианов H_{mj} есть $\mathrm{dim}M/2$. Таким образом система интегрируема по Лиувиллю.

2.2 Эллиптическая система Калоджеро-Мозера со спином

Общее описание, приведенное выше, обобщается на случай расслоений с отмеченными точками. Обсуждать это обобщение в общих терминах мы не будем, но отметим что в случае отмеченных точек поле Хиггса $\Phi(z)$ может иметь, например полюса 1 порядка, с вычетами, лежащими в коприсоединенной орбите калибровочной группы (спинами). В качестве примера работы общей конструкции получим оператор Лакса для эллиптической системы Калоджеро-Мозера со спином.

Пускай базовая кривая - это комплексный тор Σ_τ с модулярным параметром τ. Рассмотрим на ней голоморфное векторное расслоение V ранга N и степени 0 общего положения. Как и прежде выбор $\overline{A}$ - есть выбор некоторой голоморфной структуры на $\Gamma(End(V) \otimes K)$. Благодаря условию стабильности (3) голоморфная структура общего положения $\overline{A}$ диагоналиуется. Ее собственные значения u_i и есть координаты частиц, они же являются параметрами расслоения. Существуют остаточные калибровочные преобразования, которые сохраняют диагональную форму $\overline{A}$ - это постоянные преобразования из группы Вейля $W = S_N(S_N$ - группа перестановок) и локальные преобразвания диагональными матрицами, которые индуцируют перестановки сдвиги собственных значений соответственно

$$u_i \to u_i + n_i + \tau m_i \qquad n_i,\ m_i \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Другими словами координаты $u_i \in \mathrm{Jac}(\Sigma)^N/S_N$

Из сказанного выше в случае отмеченных точек условие момента имеет следюующий вид для диагональных и офф-дианогнальных компонент поля Φ соответственно

$$\overline{\partial}\Phi_{ii}(z) + S_{ii}\delta(z,\overline{z}) = 0 \tag{8a}$$

$$\overline{\partial}\Phi_{ij}(z) + (u_i - u_j)\Phi_{ij} + S_{ij}\delta(z,\overline{z}) = 0 \tag{8b}$$

Эти уравнения решаются в терминах функции $\phi(u;z)$, определение и свойства этой функции описаны в приложении.

$$\Phi_{ij} = \delta_{ij}p_j + (1-\delta_{ij})S_{ij}\exp(2\pi\sqrt{-1}u_{ij}\frac{z-\overline{z}}{\tau-\overline{\tau}})\phi(u_{ij};z). \tag{9}$$

Полученное выражение для $\Phi(z)$ совпадает с оператором Лакса для системы Калоджеро со спином. Система Калоджеро без спина получается из спиновой выбором минимальной коприсоединенной орбиты, которую можно параметризовать следующим образом

$$S_{ij} = \xi_i\eta_j - \frac{(\xi,\eta)}{N} \tag{10}$$

Условие момента относительно диагонального действия Картановской подгруппы имеет вид

$$S_{ii} = 0 \tag{11}$$

После такой редукции и калибровочного преобразования (фиксации калибровки), получим оператор Лакса для бесспиновой системы Калоджеро-Мозера

$$L_{ij} = p_{ij}\delta_{ij} + \nu(1-\delta_{ij})\phi(u_i - u_j,z) \tag{12}$$

3 Овеществление $\mathfrak{sl}_N$ Каложеро мозера

Эллиптическая кривая $\Sigma_{tau} = \mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$, $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Мы будем рассматривать такие эллиптические кривые, которые допускают антиголоморфные инволюции $\sigma(z) = \pm\overline{z}$ (соответствующие решетки инвариантны относительно σ). Эллиптических кривых, допускающих такие инволюции, всего два вида- $Re(\tau) = 0$ и $\tau = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$, то есть соответствующая решетка генерируется комплексно сопряженными периодами.

Общая схема овеществления систем Хитчина была предложена в [4]. Согласно ей овеществление проходит в 2 этапа: сперва нужно выбрать некоторую антиголоморфную инволюцию σ на базовой кривой. Второй шаг состоит в выборе инволютивного автоморфизма ι комплексной алгебры Ли к какой-то ее вещественной форме в слое. В результате условие редукции к вещественной форме интегрируемой системы имеет вид

$$\iota(\Phi(\sigma(z))) = \Phi(z), \tag{13}$$

где $\Phi(z) \in \mathrm{End}(V) \otimes K$ - поле Хиггса. Равенство (13) следует понимать как равенство классов эквивалентности этих сечений, то есть нас интересуют решения этого уравнения по модулю калибровочных преобразований.

В данной работе исследуется $\mathfrak{sl}_N$ система Калоджеро-Мозера на эллиптических кривых Σ_τ, допускающих в качестве антиголоморфных инволюций $\sigma(z) = \pm\overline{z}$

(см. секцию 3). Инволютивные автоморфизмы в слое - редукци к $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{R})$ и к $\mathfrak{su}_N$ подалгебрам, формулы ($14a$) и ($14b$) соответственно, пусть $\Phi_z = L(z)$, тогда

$$\overline{L(\pm z)} = L(z) \tag{14a}$$

$$L^{\dagger}(\pm z) = -L(z). \tag{14b}$$

Фазовое пространство системы Калоджеро-Мозера $\mathcal{M} = T^{*}(\mathrm{Jac}^{N}(\Sigma_{\tau}))/S_N$ - есть комплескное многообразие размерности N и инволюции ($14a$), ($14b$) высекают в нем вещественные подмногообразия половинной размерности. Эти подмногообразия будут явно описаны в следующих секциях. Также следует отметить, что в результате редукции ($14a$) гамильтонианы $H_k = \mathrm{tr}(L^k)$ будут вещественными. А в результате редукции ($14b$) гамильтонианы H_k при четных k будут вещественными, а при нечетных - чисто мнимыми.

Дальнейшее рассмотрение зависит от модуля базовой эллиптичской кривой, к которому мы и переходим.

3.1 Случай чисто мнимого модуля базовой кривой

Напомним явный вид оператора Лакса

$$L_{ij}(z) = p_j\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})\phi(u_i - u_j; z). \tag{15}$$

Функция Кронекера $\phi(u; z)$ определена в приложении.

Пустай модуль базовой эллиптической кривой такой, что $\mathrm{Re}(\tau) = 0$. Условия редукции имеют вид

$$\iota_{1,2}(L(\pm z)) = B(z)L(z)B^{-1}(z), \tag{16a}$$

$$\iota_{1,2}(M(\pm z)) = B(z)M(z)B^{-1}(z) \tag{16b}$$

где $B(z) \in \mathcal{W} \ltimes \mathbb{Z}$, ι_1 - редукция к $\mathfrak{sl}$(N,$\mathbb{R}$), ι_2 - редукция к $\mathfrak{su}$(N). В данном случае группа Вейля $\mathcal{W}$- группа перестановок порядка N.

Легко видеть, что такая редукция оставляет инвариантными уравнения движения (1).

Пусть $\mathtt{w} \in \mathcal{W}$, $\forall i\ m_i \in \mathbb{Z}$ и

$$B = \mathrm{diag}(\mathbf{e}(m_1 z)\dots\mathbf{e}(m_N z))\mathtt{w}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16a) и пребирая все возможные комбинации анти-инволющий на базовой кривой и инволюций алгебры Ли в слое, получим следующие условия на импульсы, координаты и константу связи. Ответ приведен в таблице

В следующих секциях мы получим ограничение на матрицу $\mathtt{w}$ и проверим совместность редукции и квази-периодичености.

3.1.1 Совместность редукции и квази-периодичности

Покажем, что из общих соображений совместности квазипериодичности Лакса и редкуции следуют те же самые условия на координаты, что были приведены в таблице. Напомним, что оператор Лакса, как следует из (15), обладает следующими

Таблица 1

Инволюция		Условие		
на кривой	в алгебре	на координаты	на имплуьсы	на константу связи
$\sigma(z) = \overline{z}$	$\mathfrak{su}$(N)	$\overline{u}_i = -\mathtt{w}_{ij}u_j + n_i + \tau m_i$	$\overline{p_i} = -\mathtt{w}_{ij}p_j$	$\overline{\nu} = -\nu$
$\sigma(z) = -\overline{z}$	$\mathfrak{su}$(N)	$\overline{u}_i = \mathtt{w}_{ij}u_j + n_i + \tau m_i$	$\overline{p_i} = -\mathtt{w}_{ij}p_j$	$\overline{\nu} = \nu$
$\sigma(z) = \overline{z}$	$\mathfrak{sl}$(N,$\mathbb{R}$)	$\overline{u}_i = \mathtt{w}_{ij}u_j + n_i + \tau m_i$	$\overline{p_i} = \mathtt{w}_{ij}p_j$	$\overline{\nu} = \nu$
$\sigma(z) = -\overline{z}$	$\mathfrak{sl}$(N,$\mathbb{R}$)	$\overline{u}_i = -\mathtt{w}_{ij}u_j + n_i + \tau m_i$	$\overline{p_i} = \mathtt{w}_{ij}p_j$	$\overline{\nu} = -\nu$

квази-периодичностями

$$L(z+1) = L(z) \tag{18a}$$
$$L(z+\tau) = \mathtt{e}(\mathtt{u})L(z)\mathtt{e}(-\mathtt{u}) \tag{18b}$$
$$\mathtt{e}(\mathtt{u}) = \mathrm{diag}(\mathtt{e}(u_1), \ldots, \mathtt{e}(u_N)) \tag{18c}$$

'Пронесём', к примеру, условие редукции (14b) через квази-периодичность, а именно

$$L(\pm(\overline{z+\tau}))^\dagger = -L(z+1) \to \mathtt{e}(\pm\overline{\mathtt{u}})L(z)\mathtt{e}(\mp\overline{\mathtt{u}}) = -\mathtt{e}(\mathtt{u})L(z)\mathtt{e}(-\mathtt{u}). \tag{19}$$

Откуда мы получаем следующие условия на координаты

$$\overline{\mathtt{u}} = \pm\mathtt{w}\mathtt{u} + \mathtt{n} + \mathtt{m}\tau, \tag{20}$$

где $\mathtt{u}$, $\mathtt{n}$ и $\mathtt{m}$ - вектор-столбцы из координат частиц и целых чисел соответственно. (20) находится в полном соответствии с приведенной таблицей. Отметим, что аналогичное условие на координаты получается из совместности редукции к $\mathfrak{sl}$(N,$\mathbb{R}$) и квази-периодичности.

3.1.2 Описание вещественных подмногообразий и соответствующих гамильтонианов

Рассмотрим условия,полученные в предыдущих секциях, которые получаются на координаты в результате редукций

$$\overline{u}_i = \pm\mathtt{w}_{ij}u_j + n_i + \tau m_i. \tag{21}$$

Разделим уравнение (21) на вещественную и мнимую части

$$u_i = x_i + \sqrt{-1}y_i, \tag{22a}$$
$$\begin{cases} x_i = \pm\mathtt{w}_{ij}x_j + n_i \\ y_i = \mp\mathtt{w}_{ij}y_j + m_i\sqrt{-1}\tau. \end{cases} \tag{22b}$$

Эта система уравнений на $2N$ переменных, и мы хотим, чтобы эти условия высекли нам в фазовом пространстве подмногообразие размерности N. Это можно сформулировать, как условие на ранг матрицы $\mathtt{w}$

$$2N - \mathrm{rk}(1-\mathtt{w}) - \mathrm{rk}(1+\mathtt{w}) = N \tag{23}$$

или

$$\mathrm{rk}(1-\mathtt{w}) + \mathrm{rk}(1+\mathtt{w}) = N. \tag{24}$$

Пускай $\mathrm{rk}(1-\mathtt{w}) = \mathrm{r}$, тогда в базисе из собственных векторов матрицы $\mathtt{w}$ имеем

$$\mathtt{w} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots, \lambda_r, 1 \dots, 1). \tag{25}$$

Тогда $\mathrm{rk}(1+\mathtt{w}) = N - \mathrm{r}$, и в её собственном базисе

$$1+\mathtt{w} = \mathrm{diag}(1+\lambda_1 \dots, 1+\lambda_r, 2 \dots, 2). \tag{26}$$

Откуда мы делаем вывод, что $\lambda_i = -1$, то есть

$$\boxed{\mathtt{w}^2 = 1}. \tag{27}$$

Таким образом мы получаем, что из условия (23) следует (27). Другими словами $\mathtt{w}$ есть прямая сумма транспозиций и тождественных перестановок.

Ответ для некоторых вещественных подмногообразий и соответствующих гамильтонианов приведен в Таблице 2, где на место $\dots$ можно поставить любой $N-2l$ частичный Гамильтониан из 1-ых 5 строк Таблицы.

3.2 Случай комплексно сопряженных периодов

В этом разделе мы получим овеществленую систему Калоджеро-Мозера на эллиптической кривой Σ_τ, у которой фундаментальный параллелограмм имеет форму ромба, исключительно из условий совместности квазипериодичности оператора Лакса и условия редукции.

Чтобы получить условие редукции на координаты нужно сделать с L, после анти-инволюции на базовой кривой, такое калибровочное преобразование, которое поменяет его квазипериодичность. Выберем калибровочное преобразование в виде

$$\hat{L(\overline{z})} := e(\pm\alpha\overline{z})L(\overline{z})e(\mp\alpha\overline{z}), \tag{28}$$

где α - параметр, который определятся следующим условием

$$e(\pm(u+\alpha\overline{\omega})) = 1 \tag{29a}$$
$$\alpha = -\frac{u}{\omega} \tag{29b}$$

Таким образом мы изменили квазипериодичность

$$\hat{L(\overline{z}+\overline{\omega})} = \hat{L(\overline{z})} \tag{30a}$$
$$\hat{L(\overline{z}+\omega)} = e(-\frac{u\omega}{\overline{\omega}}u)\hat{L(\overline{z})}e(\frac{u\omega}{\overline{\omega}}). \tag{30b}$$

Таблица 2: Явные формулы для овеществлённых систем

Вещественная форма	Эллиптический Гамильтониан	Тригонометрическое вырождение
$\bar{\mathtt{u}} = \mathtt{u}$, $\mathtt{w} = 1$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(u_{ij})$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sin^2(u_{ij})}$
$\bar{\mathtt{u}} = -\mathtt{u}$, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(u_{ij})$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sinh^2(u_{ij})}$
$\mathtt{u} = \mathtt{x} + \frac{\tau}{2}$, $\mathtt{w} = 1$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(u_{ij})$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sin^2(u_{ij})}$
$\mathtt{u} = i\mathtt{y} + \frac{1}{2}$, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum_{i \neq j} \wp(u_{ij})$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sinh^2(u_{ij})}$
$y_i = \frac{\tau}{2}$ $\forall i < k$, для остальных 0, x_i- произвольные, $\mathtt{w} = 1$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j<k; i,j>k} \nu^2 \wp(u_{ij}) +$ $+ \sum_{i<k,j>k} \nu^2 \wp(u_{ij} + \frac{\tau}{2}) +$ $+ \sum_{i>k;j<k} \wp(u_{ij} - \frac{\tau}{2})$	$\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j<k; i,j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\sin^2(u_{ij})}$ $+ \sum_{i<k;j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\cos^2(u_{ij})}$ $+ \sum_{i>k;j<k} \frac{\nu^2\pi^2}{\cos^2(u_{ij})}$
$x_i = \frac{1}{2}$ $\forall i < k$, для остальных 0, y_i - произвольные, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j<k; i,j>k} \nu^2 \wp(u_{ij}) +$ $+ \sum_{i<k;j>k} \nu^2 \wp(u_{ij} + \frac{1}{2}) +$ $\sum_{i>k;j<k} \nu^2 \wp(u_{ij} - \frac{1}{2})$	$-\sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j<k; i,j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\sinh^2(u_{ij})} +$ $+ \sum_{i<k;j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\cosh^2(u_{ij})}$
$\overline{u_k} = u_{k+1}$ для первых l пар для оставшихся $N - 2l$ частиц имеем предыдущий случай	$\sum_{k<2l} \frac{\overline{p}_k^2 + p_{k+1}^2}{2} + \sum_{k>2l} \frac{p_k^2}{2}$ $\nu^2 \sum_{i=1,j=2l+1}^{i=l,j=N} \wp(\overline{u_i} - u_j) + \wp(u_i - u_j) +$ $+\nu^2 \sum_{i=1}^{l} \wp(\overline{u_i} - u_i) + \ldots$	$\sum_{k<2l} \frac{\overline{p}_k^2 + p_{k+1}^2}{2} +$ $\nu^2 \sum_{i=1,j=2l+1}^{i=l,j=N} \frac{\pi^2}{\sinh^2(\overline{u_i} - u_j)} + \frac{\pi^2}{\sinh^2(u_i - u_j)} +$ $+\nu^2 \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\sinh^2(\overline{u_i} - u_i)} + \ldots$

Таблица 3: Квази-периодичность оператора Лакса

До инволюции на базовой кривой	После инволюции на базовой кривой
$L(z+\omega)=L(z)$	$L(\pm\overline{z}\pm\overline{\omega})=e(\pm u)L(\overline{z})e(\mp u)$
$L(z+\overline{\omega})=e(u)L(z)e(-u)$	$L(\pm\overline{z}\pm\omega)=L(\pm\overline{z})$

После этой подготовки рассмотрим условие совместности редукции и квазипериодичности

$$\begin{gathered}L(\hat{\pm\overline{z}})^{\dagger}=-L(z)\rightarrow L(\pm(\hat{\overline{z}+\omega}))^{\dagger}=-L(z+\omega)\rightarrow\\ \rightarrow e(\pm\frac{\overline{u\omega}}{\omega})L(\hat{\overline{z}})^{\dagger}e(\mp\frac{\overline{u\omega}}{\omega})=-e(u)L(z)e(-u).\end{gathered} \tag{31}$$

Откуда имеем следующее условие на координаты

$$\pm\,\overline{\omega\mathtt{u}}=\mathtt{w}(\omega\mathtt{u})+\mathtt{n}\omega+\mathtt{m}\overline{\omega}. \tag{32}$$

Перестановки и сдвиги координат присутствуют из-за остаточных калибровочных преобразований, которые состоят из постоянных преобразований, принадлежащих группе Вейля и из сопряжений диагональными матрицами. Для вещественной и мнимой части ωu это уравнение имеет следующий вид

$$(1+\mathtt{w})\mathtt{x}=(\mathtt{n}+\mathtt{m})\mathrm{Re}(\omega) \tag{33a}$$
$$(1-\mathtt{w})\mathtt{y}=(\mathtt{n}-\mathtt{m})\mathrm{Im}(\omega), \tag{33b}$$

после замены $\mathtt{k}=\mathtt{m}+\mathtt{n}$, $\mathtt{l}=\mathtt{n}-\mathtt{m}$ и растяжений $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$

$$(1+\mathtt{w})\mathtt{x}=\mathtt{k} \tag{33c}$$
$$(1-\mathtt{w})\mathtt{y}=\mathtt{l}. \tag{33d}$$

Уравнения ($33c$), ($33d$) совпадают с полученными в секции, посвященной рассмотрению чисто мнимого τ.

Также отметим, что явная формула оператора Лакса имеет вид

$$L_{ij}=p_i\delta_{ij}+(1-\delta_{ij})\frac{1}{\omega}\phi(\frac{z}{\omega};u_{ij}) \tag{34}$$

Где z леит на решетке $\Gamma_\tau=\omega\mathbb{Z}+\overline{\omega}\mathbb{Z}$. Деление $\phi(u;z)$ на $\overline{\omega}$ необходимо для того, чтобы

$$res_{z=0}L(z)=\nu\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}, \tag{35}$$

где ν - константа связи.

В Таблице 4 функция Вейерштрасса $\wp(z)=\wp(z,\omega,\overline{\omega})$. В Таблице на место ... можно поставить любой $N-2l$ частичный Гамильтониан из первых 5 строк соответствующего столбца.

Таблица 4: Явные формулы в случае сопряженных периодов

Вещественная форма	Эллиптический Гамильтониан	Тригонометрическое вырождение
$\overline{\omega\mathtt{u}} = \omega\mathtt{u}$, $\mathtt{w} = 1$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum\limits_{i \neq j} \wp(\omega u_{ij})$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{\sin(u_{ij})}$
$\overline{\omega\mathtt{u}} = -\omega\mathtt{u}$, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum\limits_{i \neq j} \wp(\omega u_{ij})$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{\sinh(u_{ij})}$
$\omega\mathtt{u} = \mathrm{Re}(\omega\mathtt{x}) + \frac{\omega - \overline{\omega}}{2}$, $\mathtt{w} = 1$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum\limits_{i \neq j} \wp(\omega u_{ij})$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{\sin(u_{ij})}$
$\mathtt{u} = i\mathrm{Im}(\omega\mathtt{y}) + \frac{\omega + \overline{\omega}}{2}$, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \nu^2 \sum\limits_{i \neq j} \wp(\omega u_{ij})$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + (\nu\pi)^2 \sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{\sinh^2(u_{ij})}$
$\omega y_i = \frac{\omega - \overline{\omega}}{2}$ $\forall i < k$, для остальных 0, ωx_i -произвольные, $\mathtt{w} = 1$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \sum\limits_{i,j<k;i,j>k} \nu^2 \wp(\omega u_{ij}) +$ $+ \sum\limits_{i<k,j>k} \nu^2 \wp(\omega u_{ij} + \frac{\omega - \overline{\omega}}{2}) +$ $+ \sum\limits_{i>k;j<k} \wp(\omega u_{ij} - \frac{\omega - \overline{\omega}}{2})$	$\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \sum\limits_{i,j<k;i,j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\sin^2(u_{ij})}$ $+ \sum\limits_{i<k;j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\cos(u_{ij})}$
$\omega x_i = \frac{\omega + \overline{\omega}}{2}$ $\forall i < k$, для остальных 0, ωy_i - произвольные, $\mathtt{w} = 1$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \sum\limits_{i,j<k;i,j>k} \nu^2 \wp(\omega u_{ij}) +$ $+ \sum\limits_{i<k;j>k} \nu^2 \wp(\omega u_{ij} + \frac{\omega + \overline{\omega}}{2}) +$ $\sum\limits_{i>k;j<k} \nu^2 \wp(\omega u_{ij} - \frac{\omega + \overline{\omega}}{2})$	$-\sum\limits_i \frac{p_i^2}{2} + \sum\limits_{i,j<k;i,j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\sinh^2(u_{ij})} +$ $+ \sum\limits_{i<k;j>k} \frac{\nu^2\pi^2}{\cosh^2(u_{ij})}$
$\overline{\omega u_k} = \omega u_{k+1}$ для первых l пар для оставшихся $N - 2l$ частиц имеем предыдущий случай	$\sum\limits_{i<2l} \frac{\overline{p}_k^2 + p_{k+1}^2}{2} + \nu^2$ $\sum\limits_{i=1,j=2l+1}^{i=l,j=N} \wp(\overline{\omega u_i} - \omega u_j) +$ $+\wp(\omega(u_i - u_j)) + \sum\limits_{i=1}^{l} \wp(\overline{\omega u_i} - \omega u_i) + \ldots$	$\sum\limits_{i<2l} \frac{\overline{p}_k^2 + p_{k+1}^2}{2} + \nu^2$ $\sum\limits_{i=1,j=2l+1}^{i=l,j=N} \frac{\pi^2}{\sinh^2(\overline{u_i} - u_j)} +$ $+ \frac{\pi^2}{\sinh^2(u_i - u_j)} + \sum\limits_{i=1}^{l} \frac{\pi^2}{\sinh^2(\overline{u_i} - u_i)} + \ldots$

Отметим, что гамильтонианы допускают вырождение из эллиптического сразу в рациональное, для этого нужно взять ω, $\overline{\omega} \to \infty$, так, что $\overline{\omega}+\omega$ не фиксирована. Например для 5-той строчки таблицы получим следующий ответ:

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{k<2l} \frac{\overline{p}_k^2 + p_{k+1}^2}{2} + \sum_{k>2l} \frac{p_k^2}{2} + \\
+\nu^2 \sum_{i=1,j=2l+1}^{i=l,j=N} \frac{1}{(\overline{u_i} - u_j)} + \frac{1}{(u_i - u_j)} + \nu^2 \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(\overline{u_i} - u_i)} + \dots,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

где на место $\dots$ можно поставить любой из рациональных Гамильтонианов с 1-ой по 4-ую строки таблицы.

4 Овеществление $SL(N,\mathbb{C})$ волчка

4.1 Описание $SL(N,\mathbb{C})$ системы

Под $SL(N,\mathbb{C})$ волчком понимается система Хичтина на эллиптической кривой с одной отмеченой точкой, где векторное расслоение V ранга N и степени 1. У таких расслоений нет модулей, другими словами для почти всех $\overline{A}$ найдется такое калибровочное преобразоваения, что оно открутит голоморфную стуктуру в 0. Оператор Лакса в этом случае имеет следующие квази-периоды

$$L^{top}(z+1) = Q(\tau) L^{top}(z) Q^{-1}(\tau) \tag{37a}$$

$$L^{top}(z+\tau) = \hat{\Lambda}(z,\tau) L^{top}(z) \hat{\Lambda}^{-1}(z,\tau) \tag{37b}$$

$$Q(\tau) = \mathrm{diag}(e(1/N),..,e(m/N),..,1) \tag{37c}$$

$$\hat{\Lambda}(z,\tau) = \mathsf{e}(-\frac{z+\frac{\tau}{2}}{N}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{37d}$$

Так как у этих расслоений нет модулей, то функции переклейки $Q(\tau)$ и $\hat{\Lambda}(z,\tau)$ не зависят от динамических переменных. И, следовательно, условие совместности редукции и квазипериодичности не даст никакого ограничения на динамические переменные. Также отметим, что некоторые редукции невозможны. Например невозможна следующая редукция: иволюция на базовой кривой $\sigma(z) = -z$ и редукция в слое к $\mathfrak{su}_N$ при $N > 2$ (при $N = 2$ редукция проходит, потому что харкласс расслоения не меняется). Чтобы это показать выберем связность A в нашем векторном расслоении, и проследим за первым числом Черна:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int dz d\overline{z} \mathrm{tr}((dA)_{z\overline{z}}) = -\overline{\frac{1}{2\pi i} \int dz d\overline{z} tr((dA)_{z\overline{z}})} = -\overline{c_1}. \tag{38}$$

В формуле (38) использовалось, что $\mathrm{tr}(A \wedge A) = 0$. Знак c_1 изменился, следовательно изменился харкласс и получаем, что такая редукция невозможна.

4.2 Редукция волчка к вещественной форме

Следуя [7] выпишем явный вид L и M операторов

$$L^{top}(z) = \sum_{m,n} S_{mn}\varphi\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(z)T_{mn}, \qquad \varphi\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(z) = e(-\frac{nz}{N})\phi(-\frac{m+n\tau}{N}; z) \tag{39}$$

$$M^{top}(z) = \sum_{m,n} S_{mn}f\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(z)T_{mn},\ f\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(z) = e(-\frac{nz}{N})\partial_u\phi(u;z)|_{u=-\frac{n+m\tau}{N}} \tag{40}$$

$T_{mn} = \exp(\pi i\frac{mn}{N})Q^m\Lambda^n$. Q-опередлена в $(37c)$. $\Lambda = e(\frac{z+\tau/2}{N})\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}$ - опеределена в $(37d)$.

Выберем следующую иволюцию

$$\sigma(z) = -\overline{z} \tag{41a}$$

$$\overline{L(\sigma(z))} = -L(z) \tag{41b}$$

$$\overline{M(\sigma(z))} = M(z). \tag{41c}$$

Она не меняет уравнений движения (1). Найдем, какое условие возникнет на переменные S_{mn}

$$\begin{aligned} \overline{L}^{top}(-\overline{z}) &= \sum_{m,n}\overline{S}_{mn}\overline{\varphi}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(-\overline{z})\overline{T}_{m,n} = \\ = \sum_{m,n}\overline{S}_{mn}\varphi\begin{bmatrix} m \\ N-n \end{bmatrix}(-z)T_{N-m,n}(-1)^{n+1} &= \sum_{m,n} S_{mn}\varphi\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(z)T_{m,n} \end{aligned} \tag{42}$$

И условие редукции

$$\overline{S}_{mn} = (-1)^{n+1}\frac{\varphi\left[\begin{smallmatrix} N-m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)}{\varphi\left[\begin{smallmatrix} m \\ N-n \end{smallmatrix}\right](-z)}S_{mn} \tag{43a}$$

$$\varphi\begin{bmatrix} m \\ N-n \end{bmatrix}(-z) = -\exp(-2\pi i\frac{nz}{N})\phi(\frac{m-n\tau}{N}; z) \tag{43b}$$

$$\varphi\begin{bmatrix} N-m \\ n \end{bmatrix}(z) = \exp(-2\pi i\frac{nz}{N})\phi(\frac{m-n\tau}{N}; z) \tag{43c}$$

Откуда мы заключаем, что

$$(-1)^n\overline{S}_{mn} = S_{N-m,n}. \tag{44}$$

Проверим, что условия редукции $(41b)$ и $(41c)$ совместны. Другими словами редукция M оператора также дает (44).

Запишем условие редукции в духе $(43a)$

$$\overline{S_{mn}} = (-1)^n\frac{f\left[\begin{smallmatrix} N-m \\ n \end{smallmatrix}\right](z)}{f\left[\begin{smallmatrix} m \\ N-n \end{smallmatrix}\right](-z)}S_{mn}. \tag{45}$$

После использования тождеств на $f(u;z)$, находим, что

$$f\begin{bmatrix} m \\ N-n \end{bmatrix}(-z) = \exp(-2\pi i\frac{nz}{N})f(\frac{m-n\tau}{N};z) \tag{46a}$$
$$f\begin{bmatrix} N-m \\ n \end{bmatrix}(z) = \exp(-2\pi i\frac{nz}{N})f(\frac{m-n\tau}{N};z) \tag{46b}$$

Откуда видно, что условие редукции (45) тождественно ($43a$).

Проверим, что полученная редукция не изменяет перое число Черна, следовательно харкласс инвариантен относительно такой редукции.

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int dz d\overline{z} \mathrm{tr}((dA)_{z\overline{z}}) = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\int d\overline{z} dz \mathrm{tr}((d\overline{A})_{z\overline{z}}) = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int dz d\overline{z} \mathrm{tr}((dA)_{z\overline{z}})} = \overline{c_1}. \end{aligned} \tag{47}$$

Также совместность с квази-периодичностью

$$\begin{aligned} \overline{L(-\overline{(z+1)})} = \overline{Q(-\tau)L(-\overline{z})Q^{-1}(-\tau)} = \\ = Q(\tau)\overline{L(-\overline{z})}Q^{-1}(\tau) = -Q(\tau)L(z)Q^{-1}(\tau), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \overline{L(-\overline{(z+\tau)})} = \overline{\Lambda(-\overline{z},\tau)L(-\overline{z})\Lambda{-1}(\overline{z},\tau)} = \\ = \Lambda(z,\tau)\overline{L(-\overline{z})}\Lambda(z,\tau) = -\Lambda(z,\tau)L(z)\Lambda^{-1}(z,\tau) \end{aligned} \tag{49}$$

Из формул (48), (49) видно, что условие редукции совместно с квази-периодичностью.

5 Заключение

Рассмотренные условия редукции (14a) и (14b) для системы Калоджеро-Мозера, и редукция уравнений движения (41b), (41c) для $SL(N,\mathbb{C})$ волчка привели к новым вещественным формам этих эллиптических интегрируемых систем. Для соответствующх этим формам веществеными подмногообразий процедура квантования приведет не к некоторому формальному ответу (например, нет естественного способа выбрать Гильбертово пространство состояний, где будут действовать операторы, соответствующие $C^{\infty}(T^*(\mathcal{M}))$ функциям, полученные в ходе формальной процедуры), а даст ответ, отвечающий всем естественным, с физической точки зрения, требованиям (например пространство состояний - это L^2 интегрируемые, вещественно аналитические сечения $\sqrt{K}$, где K-это каноническое линейное расслоение на $\mathcal{M}$). Такая проблема обсуждается, например, в пункте 2.2 [3]. Два возможных варианта овеществления эллиптического Калоджеро-Мозера и цепочки Тоды вместе с квантованием рассмаривались в [8] в контексте связи четырехмерых калибровочных теорий и интегрируемых систем.

6 Приложение

6.1 Эллиптические функции

В этой секции очень кратко изложены необходимые определения и свойства эллиптических функций и их вырождений. Для более полного изложения можно обратиться, например, к [17] и [14].

Для нас важна нечётная тета функция

$$\theta_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i(n+\frac{1}{2})^2\tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})). \tag{50}$$

Ряд (50) хорошо сходится, если $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, также имеет следующие свойства, легко проверяемые непосредственно из определения

$$\theta_1(z) = -\theta_1(-z) \tag{51a}$$
$$\theta_1(z+1) = \theta_1(z) \tag{51b}$$
$$\theta_1(z+\tau) = \exp(-\pi i\tau - \pi i - 2\pi i z)\theta_1(z). \tag{51c}$$

Также нам потребуется функция Кронекера

$$\phi(z;u) = \frac{\theta_1(z+u)\theta_1'(0)}{\theta_1(u)\theta_1(z)}, \tag{52}$$

откуда видно, что

$$\phi(z;u) = \phi(u;z) = -\phi(-z;-u) \tag{53a}$$
$$\phi(z+\tau;u) = \mathsf{e}(-u)\phi(z;u) \tag{53b}$$
$$\mathsf{e}(u) = \exp(2\pi i u). \tag{53c}$$

Для определения M оператора для Калоджеро-Мозера и волчка нам требуются производные от $\phi(z;u)$

$$f(z;u) = \partial_u\phi(z;u) \tag{54a}$$
$$f(-z;-u) = f(z;u). \tag{54b}$$

Определим $\wp$- функцию Вейрштрасса на эллиптической кривой $\mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z}$ как

$$\wp(z,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{n^2+m^2\neq 0\\ n,m\in\mathbb{Z}}} \left[\frac{1}{(z+n\omega_1+m\omega_2)^2} - \frac{1}{(n\omega_1+m\omega_2)^2}\right] \tag{55}$$

Из опеределения функции Вейерштрасса следуют следующие свойства

$$\wp(-z,\omega_1,\omega_2) = \wp(z,\omega_1,\omega_2) \tag{56a}$$
$$\wp(z+\omega_1,\omega_1,\omega_2) = \wp(z,\omega_1,\omega_2) \tag{56b}$$
$$\wp(z+\omega_2,\omega_1,\omega_2) = \wp(z,\omega_1,\omega_2) \tag{56c}$$

Для тригонометрических вырождений полезно следующее представление для $\wp$ ($\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$)

$$\wp(z,2\omega_1,2\omega_2) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \frac{1}{\sinh^2(\pi i n\tau)} + (\frac{\pi}{2\omega_1})^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sinh^2(\frac{\pi i}{2\omega_1}(z-2n\omega_2))}. \tag{57}$$

Список литературы

[1] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras //Physics Reports. – 1981. – Т. 71. – №. 5. – С. 313-400.

[2] Calogero F. Exactly solvable one-dimensional many-body problems //Lettere Al Nuovo Cimento (1971–1985). – 1975. – Т. 13. – №. 11. – С. 411-416.

[3] Nekrasov N., Witten E. The omega deformation, branes, integrability and Liouville theory //Journal of High Energy Physics. – 2010. – Т. 2010. – №. 9. – С. 1-83.

[4] Baraglia D., Schaposnik L. P. Real structures on moduli spaces of Higgs bundles //arXiv preprint arXiv:1309.1195. – 2013.

[5] Baraglia D., Schaposnik L. P. Higgs bundles and (A, B, A)-branes //arXiv preprint arXiv:1305.4638. – 2013.

[6] Nekrasov N. Holomorphic bundles and many-body systems //Communications in Mathematical Physics. – 1996. – Т. 180. – №. 3. – С. 587-603.

[7] Levin A. M., Olshanetsky M. A., Zotov A. Hitchin systems–symplectic hecke correspondence and two-dimensional version //Communications in mathematical physics. – 2003. – Т. 236. – №. 1. – С. 93-133.

[8] Nekrasov N. A., Shatashvili S. L. Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories //XVIth International Congress on Mathematical Physics. – 2010. – С. 265-289.

[9] Hitchin N. et al. Stable bundles and integrable systems //Duke Math. J. – 1987. – Т. 54. – №. 1. – С. 91-114.

[10] Зотов А. В., Черняков Ю. Б. Интегрируемые многочастичные системы, полученные с использованием предела Иноземцева //Теоретическая и математическая физика. – 2001. – Т. 129. – №. 2. – С. 258-277.

[11] Aminov G., Arthamonov S. Reduction of the elliptic top //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2011. – Т. 44. – №. 7. – С. 075201.

[12] Levin A. et al. Characteristic classes and integrable systems. General construction //arXiv preprint arXiv:1006.0702. – 2010.

[13] Grekov A., Dotsenko E. to appear

[14] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. – Мир, 1988.

[15] Hitchin N. J. Spectral data for G-Higgs bundles : дис. – University of Oxford, 2013.

[16] Babelon O., Bernard D., Talon M. Introduction to classical integrable systems. – Cambridge University Press, 2003.

[17] Weil A. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. – Springer Science , Business Media, 1999. – T. 88.

[18] Krichever I. M. Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles //Functional Analysis and Its Applications. – 1980. – T. 14. – №. 4. – C. 282-290.

[19] Mironov A., Morozov A. Nekrasov functions and exact Bohr-Sommerfeld integrals //Journal of High Energy Physics. – 2010. – T. 2010. – №. 4. – C. 1-15.

[20] Mironov A., Morozov A. Nekrasov functions from exact Bohr–Sommerfeld periods: the case of SU (N) //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – T. 43. – №. 19. – C. 195401.

[21] Grechishnikov L. V. Nekrasov functions and the SU (2) Calogero–Moser system //Mathematical Notes. – 2015. – T. 98. – №. 3-4. – C. 589-600.

[22] Donagi R. Y. Seiberg-Witten integrable systems //arXiv preprint alg-geom/9705010. – 1997.