Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

R-матричнозначные пары Лакса для систем Калоджеро-Мозера

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Выполнил:
студент 321 группы
Греков Андрей Михайлович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Зотов Андрей Владимирович

Москва 2017

Аннотация

Для эллиптических систем Калоджеро-Мозера, построенных по SO(2N), SO(2N+1), Sp(2N) и BC(N) (для некоторых значений констант связи) системам корней, открытых в работе [4], мы построили пары Лакса нового типа, основанные на R-матричных операторах, действующих во вспомогательных квантовых пространствах. Количество квантовых пространств и их размерность зависит от констант связи гамильтониана.

Содержание

1 Введение

В работе [1] была рассмотрена пара Лакса для эллиптической системы Калоджеро-Мозера нового типа. Функции Кронекера в ней были заменены квантовыми R-матрицами. В этой части работы мы кратко резюмируем этот результат.

1.1 Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера

Мы будем рассматривать операторы, удовлетворяющие ассоциативному уравнению Янга-Бакстера, полученному в [9]:

$$R^{\hbar}_{ab}R^{\hbar'}_{bc} = R^{\hbar'}_{ac}R^{\hbar-\hbar'}_{ab} + R^{\hbar'-\hbar}_{bc}R^{\hbar}_{ac}$$

Где $R^{\hbar}_{ab} = R^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b) \in \mathrm{End}(V \otimes V \otimes ... \otimes V)$, V - $\tilde{N}$-мерное векторное пространство. Имеется в виду, что $R^{\hbar}_{ab}$ действует в "a"и "b"пространствах нетривиально, а в остальных единичной матрицей.

Оно является аналогом тождества Фэя для функций Кронекера:

$$\phi(x, q_a - q_b)\phi(y, q_b - q_c) = \phi(x - y, q_a - q_b)\phi(y, q_a - q_c) + \phi(y - x, q_b - q_c)\phi(x, q_a - q_c)$$

Ему удовлетворяет широкий класс R-матриц. В работе [10] было показано, что ему удовлетворяет R-матрица Белавина:

$$R^{\hbar}_{12}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \varphi_\alpha(u, \omega_\alpha + \hbar) \ \ T_\alpha \otimes T_{-\alpha}$$

Где T_α - генераторы синус-алгебры, $\omega_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}$, и:

$$\varphi_\alpha(u, \omega_\alpha + \hbar) = e^{2\pi i u \partial_\tau \omega_\alpha}\phi(u, \omega_\alpha + \hbar)$$

Где ϕ -функция Кронекера.

Дифференцируя его по q_b и положив $\hbar' = \hbar$, мы получаем:

$$R^{\hbar}_{ac}F^{\hbar}_{cb} - F^{\hbar}_{ac}R^{\hbar}_{cb} = F^{0}_{cb}R^{\hbar}_{ab} - R^{\hbar}_{ab}F^{0}_{ac} \tag{1}$$

Где $F^{\hbar}_{ab}(u) = \partial_u R^{\hbar}_{ab}(u)$

Мы будем называть это уравнение "эллиптическим тождеством".

Можно заметить, что обычное уравнение Янга-Бакстера:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

следует из ассоциативного (см. [1]), таким образом, объекты, которые мы будем рассматривать, автоматически являются R-матрицами.

Мы также будем предполагать выполненным следующие условие:

$$R^{\hbar}_{ab}(u) = -R^{-\hbar}_{ba}(-u)$$

Из которого следует симметрия $F^0_{ab} : F^0_{ab}(q_a - q_b) = F^0_{ba}(q_b - q_a)$

И наконец, мы зафиксируем нормировку $R^{\hbar}_{ab}$, таким образом, что условие унитарности примет вид:

$$R^{\hbar}_{ab}R^{\hbar}_{ba} = \tilde{N}^2(\wp(\tilde{N}\hbar) - \wp(q_a - q_b)) \ 1 \otimes 1 \tag{2}$$

1.2 R-матричная пара Лакса для SL(N) системы Калоджеро-Мозера

Рассмотрим R-матричнозначную пару Лакса для SL(N) системы Калоджеро-Мозера, полученную в [1]:

$$L = \sum_a p_a E_{aa} \otimes 1 + \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes R^{\hbar}_{ab} = P + R, \tag{3}$$

$$M = \nu \sum_a E_{aa} \otimes (d_a + \mathcal{F}^0) + \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes F^{\hbar}_{ab} = D + \mathcal{F} + F. \tag{4}$$

Где были введены новые обозначения:

$$d_a = -\sum_{\substack{c \\ c\neq a}} F^0_{ac}, \qquad \mathcal{F}^0 = \frac{1}{2}\sum_{\{c,d\}} F^0_{cd}.$$

Она обобщает пару Лакса, полученную Кричивером [5]. Роль спектрального параметра играет постоянная Планка в R-матрице.

Уравнения движения в Лаксовой форме выглядят следующим образом:

$$\dot{L} = [L, M].$$

В работе [6] было показано, что следы степеней оператора L, как и раньше, дают коммутирующие интегралы движения системы Калоджеро-Мозера. В том числе $H = \frac{1}{2}TrL^2$

1.3 Обычные пары Лакса для других систем корней

Цель этой работы найти обобщения вышеприведённой пары Лакса на другие системы корней. Для некоторых систем это уже было сделано: например, для BC(1) системы с 4 константами взаимодействия ответ был получен в работе [8].

В этой работе мы будем рассматривать гамильтониан следующего вида:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} p_a^2 - \nu^2 \sum_{a<b}^{N} (\wp(q_a - q_b) + \wp(q_a + q_b)) - \mu^2 \sum_{a=1}^{N} \wp(2q_a) - g^2 \sum_{a=1}^{N} \wp(q_a) \tag{5}$$

С дополнительным ограничением на константы:

$$g(g^2 - 2\nu^2 + \nu\mu) = 0 \tag{6}$$

Мы попытаемся построить Лаксовы пары нового типа, беря за основу результат Д'Хокера и Фонга [2] для обычной пары Лаксы:

$$L = \begin{pmatrix} P + A & B_1 & C_1 \\ B_2 & -P + A^T & C_2 \\ C_2^T & C_1^T & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$M = \begin{pmatrix} A' + d & B_1' & C_1' \\ B_2' & A'^T + d & C_2' \\ C_2'^T & C_1'^T & d_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Где:

$$P_{ab} = \delta_{ab} p_a$$
$$A_{ab} = \nu(1 - \delta_{ab})\phi(q_a - q_b)$$
$$B_{1ab} = \nu(1 - \delta_{ab})\phi(q_a + q_b) + \mu\delta_{ab}\phi(2q_a)$$
$$B_{2ab} = \nu(1 - \delta_{ab})\phi(-q_a - q_b) + \mu\delta_{ab}\phi(-2q_a)$$
$$C_{1a} = g\phi(q_a)$$
$$C_{2a} = g\phi(-q_a)$$
$$d_a = \frac{g^2}{\nu}\wp(q_a) + \mu\wp(2q_a) + \nu\sum_{b\neq a}(\wp(q_a - q_b) + \wp(q_a + q_b))$$
$$d_0 = 2\nu \sum_{c} \wp(q_c)$$

2 R-матричнозначные пары Лакса, которые можно получить редукцией из SL(N) случая

2.1 Sp(2N) R-матричнозначная пара Лакса с 2N квантовыми пространствами

Из пары Лакса для SL(N) системы Калоджеро-Мозера, мы можем получить пару Лакса для Sp(2N) с $\mu = \nu$. Чтобы это сделать, рассмотрим SL(2N) пару Лакса с координатами $u_i, i = 1...2N$, и импульсами $k_i, i = 1...2N$, и произведём редукцию:

$$
\begin{aligned}
k_i &= p_i,\ i = 1...N \\
k_i &= -p_i,\ i = N+1...2N \\
u_i &= q_i,\ i = 1...N \\
u_i &= -q_i,\ i = N+1...2N
\end{aligned}
$$

Где q_i и p_i новые координаты и импульсы уже для Sp(2N) системы Калоджеро-Мозера. Выписывая новую пару Лакса явно, получаем:

$$
\mathcal{L} = \begin{pmatrix} P + A_1 & B_1 \\ B_2 & -P + A_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P} + R \tag{9}
$$

$$
\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A'_1 + D_1 + \mathcal{F} & B'_1 \\ B'_2 & A'_2 + D_2 + \mathcal{F} \end{pmatrix} = D + \mathcal{F} + F \tag{10}
$$

Где:

$$P = \sum_a p_a E_{aa} \otimes 1$$

$$A_1 = \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes R^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b)$$

$$A_2 = \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b+N} \otimes R^{\hbar}_{a+N,b+N}(-q_a + q_b)$$

$$B_1 = \nu \sum_{a,b} E_{a,b+N} \otimes R^{\hbar}_{a,b+N}(q_a + q_b)$$

$$B_2 = \nu \sum_{a,b} E_{a+N,b} \otimes R^{\hbar}_{a+N,b}(-q_a - q_b)$$

$$A_1' = \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b)$$

$$A_2' = \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b+N} \otimes F^{\hbar}_{a+N,b+N}(-q_a + q_b)$$

$$B_1' = \nu \sum_{a,b} E_{a,b+N} \otimes F^{\hbar}_{a,b+N}(q_a + q_b)$$

$$B_2' = \nu \sum_{a,b} E_{a+N,b} \otimes F^{\hbar}_{a+N,b}(-q_a - q_b)$$

$$D_1 = \nu \sum_a E_{aa} \otimes d_a$$

$$D_2 = \nu \sum_a E_{a+N,a+N} \otimes d_{a+N}$$

$$d_a = -\sum_{\substack{c \\ c\neq a}} F^0_{ac}(q_a - q_c) - \sum_c F^0_{a,c+N}(q_a + q_c)$$

$$d_{a+N} = -\sum_c F^0_{a+N,c}(q_a + q_c) - \sum_{\substack{c \\ c\neq a}} F^0_{a+N,c+N}(q_a - q_c)$$

$$\mathcal{F} = \nu \sum_a E_{aa} \otimes \mathcal{F}^0$$

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{2} \sum_{\{c,d\}} (F^0_{cd}(q_c - q_b) + F^0_{c+N,d+N}(q_c - q_d)) + \frac{1}{2} \sum_{c,d} (F^0_{c,d+N}(q_c + q_d) + F^0_{c+N,d}(q_c + q_d))$$

2.2 BC(N) R-матричнозначная пара Лакса для специальных значений констант с 2N+1 квантовыми пространствами

Чтобы получить пару Лаксу BC(N) типа в частном случае $\mu = \nu$ и $g = \nu$ мы можем рассмотреть следующую редукцию SL(2N+1) пары Лакса:

$$\begin{aligned} k_i = p_i,\ i = 1...N \\ k_i = -p_i,\ i = N+1...2N \\ u_i = q_i,\ i = 1...N \\ u_i = -q_i,\ i = N+1...2N \\ k_{2N+1} = 0 \\ u_{2N+1} = 0 \end{aligned}$$

BC(N) пара Лакса таким образом имеет вид:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} P + A_1 & B_1 & C_1 \\ B_2 & -P + A_2 & C_2 \\ C_2^T & C_1^T & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A_1' + D_1 + \mathcal{F} & B_1' & C_1' \\ B_2' & A_2' + D_2 + \mathcal{F} & C_2' \\ C_2'^T & C_1'^T & D_3 + \mathcal{F} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Где A, B и P такие же как в Sp(2N) случае,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \nu \sum_a E_{a,2N+1} \otimes R^{\hbar}_{a,2N+1}(q_a) \\
C_2 &= \nu \sum_a E_{a+N,2N+1} \otimes R^{\hbar}_{a+N,2N+1}(-q_a) \\
C_1^T &= \nu \sum_a E_{2N+1,a+N} \otimes R^{\hbar}_{2N+1,a+N}(q_a) \\
C_2^T &= \nu \sum_a E_{2N+1,a} \otimes R^{\hbar}_{2N+1,a}(-q_a) \\
C_1' &= \nu \sum_a E_{a,2N+1} \otimes F^{\hbar}_{a,2N+1}(q_a) \\
C_2' &= \nu \sum_a E_{a+N,2N+1} \otimes F^{\hbar}_{a+N,2N+1}(-q_a) \\
C_1'^T &= \nu \sum_a E_{2N+1,a+N} \otimes F^{\hbar}_{2N+1,a+N}(q_a) \\
C_2'^T &= \nu \sum_a E_{2N+1,a} \otimes F^{\hbar}_{2N+1,a}(-q_a) \\
D_3 &= \nu\ E_{2N+1,2N+1} \otimes d_{2N+1} \\
d_{2N+1} &= -\sum_c F^0_{c,2N+1}(q_c) - \sum_c F^0_{c+N,2N+1}(q_c)
\end{aligned}$$

А D и $\mathcal{F}$ переопределены следующим образом:

$$\begin{aligned}
d_a^{BC(N)} &= d_a^{Sp(2N)} - F^0_{a,2N+1}(q_a) \\
d_{a+N}^{BC(N)} &= d_{a+N}^{Sp(2N)} - F^0_{a+N,2N+1}(q_a) \\
\mathcal{F}^0_{BC(N)} &= \mathcal{F}^0_{Sp(2N)} - d_{2N+1}
\end{aligned}$$

3 R-матричнозначные пары Лакса с половинным набором квантовых пространств

В предыдущей части мы рассматривали R-матричнозначные пары Лакса, получаемые редукцией. По сравнению с SL(N) случаем они содержат удвоенное количество квантовых пространств. В этой части мы рассмотрим пары Лакса с тем же числом квантовых пространств, что и в SL(N) случае. Нам пока удалось получить лишь случаи $\mu = 0$ и $g = \sqrt{2}\nu$.

3.1 SO(2N) R-матричнозначная пара Лакса с N квантовыми пространствами

R-матричная SO(2N) пара Лакса с N квантовыми пространствами имеет ту же блочную структуру что и в Sp(2N) случае с 2N пространствами (9), но теперь соответствующие блоки имеют вид:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes R^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b) \\
A_2 &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b+N} \otimes R^{\hbar}_{ab}(-q_a + q_b) \\
B_1 &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a,b+N} \otimes R^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) \\
B_2 &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b} \otimes R^{\hbar}_{ab}(-q_a - q_b) \\
A_1' &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{ab} \otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b) \\
A_2' &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b+N} \otimes F^{\hbar}_{ab}(-q_a + q_b) \\
B_1' &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a,b+N} \otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) \\
B_2' &= \nu \sum_{\{a,b\}} E_{a+N,b} \otimes F^{\hbar}_{ab}(-q_a - q_b) \\
D_1 &= \nu \sum_{a} E_{aa} \otimes d_a \\
D_2 &= \nu \sum_{a} E_{a+N,a+N} \otimes d_a \\
d_a &= -\sum_{\substack{c \\ c \neq a}} (F^0_{ac}(q_a - q_c) + F^0_{ac}(q_a + q_c)) \\
\mathcal{F} &= \nu \sum_{a} E_{aa} \otimes \mathcal{F}^0 \\
\mathcal{F}^0 &= \frac{1}{2} \sum_{\{c,d\}} (F^0_{cd}(q_c - q_b) + F^0_{cd}(q_c + q_d))
\end{aligned}
$$

Хотим обратить внимание, что в блоках B_1 и B_2 на диагонали теперь стоят нули.

3.1.1 Доказательство для блока (11)

Посчитаем коммутатор в правой стороне уравнения Лакса :

$$[L, M] = [\mathcal{P} + R, D + \mathcal{F} + F] = [\mathcal{P}, F] + [R, D] + [R, \mathcal{F}] + [R, F],$$

Вычислим его для блока (11):

Первое слагаемое равно:

$$[P,F]=\sum_{\{a,b\}c}\nu p_c[E_{cc}\otimes 1, E_{ab}\otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)]=\sum_{\{a,b\}c}\nu p_c(\delta_{ac}E_{cb}-\delta_{ac}E_{cb})\otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)=$$
$$=\sum_{\{a,b\}}\nu(p_a-p_b)E_{ab}\otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)=\sum_{\{a,b\}}\nu(\dot q_a-\dot q_b)E_{ab}\otimes F^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b),$$

Второе слагаемое:

$$[R,D]=\sum_{\{a,b\}}\nu^2E_{ab}\otimes(R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)d_b-d_aR^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b))=$$
$$\sum_{\{a,b\}}\nu^2E_{ab}(\sum_{\substack{c\\ c\neq a}}F^0_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)+F^0_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)-$$
$$-\sum_{\substack{c\\ c\neq b}}R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{bc}(q_b-q_c)+R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{bc}(q_b+q_c)$$

$$[R,D]=\sum_{\{a,b\}}\nu^2E_{ab}\otimes[\sum_{\substack{c\\ c\neq a,b}}(F^0_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)+F^0_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)-$$
$$-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{bc}(q_b-q_c)-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{bc}(q_b+q_c))+$$
$$+F^0_{ab}(q_a-q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)+F^0_{ab}(q_a+q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)-$$
$$-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{ba}(q_b-q_a)-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{ba}(q_b+q_a))]$$

Последнее слагаемое:

$$[R,F](\text{off-diagonal})=\sum_{\{a,b\}}\nu^2E_{ab}\otimes\sum_{\substack{c\\ c\neq a,b}}R^{\hbar}_{ac}(q_a-q_c)F^{\hbar}_{cb}(q_c-q_b)-F^{\hbar}_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{cb}(q_c-q_b)+$$
$$+R^{\hbar}_{ac}(q_a+q_c)F^{\hbar}_{cb}(-q_c-q_b)-F^{\hbar}_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{cb}(-q_c-q_b)$$

К каждой разности в последней сумме можно применить эллиптическое тождество (1):

$$R^{\hbar}_{ac}F^{\hbar}_{cb}-F^{\hbar}_{ac}R^{\hbar}_{cb}=F^0_{cb}R^{\hbar}_{ab}-R^{\hbar}_{ab}F^0_{ac},$$

После этого получим:

$$[R,F](\text{off-diagonal})=\sum_{\{a,b\}}\nu^2E_{ab}\otimes\sum_{\substack{c\\ c\neq a,b}}F^0_{cb}(q_c-q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{ac}(q_a-q_c)+$$
$$+F^0_{cb}(-q_c-q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)-R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)F^0_{ac}(q_a+q_c)$$

$$[R,F](\text{diagonal})=\sum_{a}\nu^2E_{aa}\otimes\sum_{\substack{c\\ c\neq a}}R^{\hbar}_{ac}(q_a-q_c)F^{\hbar}_{ca}(q_c-q_a)-F^{\hbar}_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{ca}(q_c-q_a)+$$
$$+R^{\hbar}_{ac}(q_a+q_c)F^{\hbar}_{ca}(-q_c-q_a)-F^{\hbar}_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{ca}(-q_c-q_a)$$

Используя условие унитарности R-матрицы (2) :

$$R^{\hbar}_{ab}R^{\hbar}_{ba}=\tilde N^2\big(\wp(\tilde N\hbar)-\wp(q_{ab})\big)\cdot 1,$$
$$\partial_{q_a}\big(R^{\hbar}_{ab}R^{\hbar}_{ba}\big)=-\tilde N^2\wp'(q_{ab})\cdot 1,$$

Где $\tilde{N}$ - размерность квантового пространства. $q_{ab} = q_a - q_b$

Можно переписать это выражение следующим образом:

$$[R, F](\text{diagonal}) = \sum_a \nu^2 \tilde{N}^2 E_{aa} \otimes \sum_{\substack{c \\ c \neq a}} \wp'(q_a - q_b) + \wp'(q_a + q_b)$$

Мы видим, что:

$$\dot{L} = [P, F] + [R, F](\text{diagonal})$$

даёт нам уравнения движения.

Теперь проверим, что сумма всех остальных членов в правой части уравнения Лакса равна нулю:

$$[R, F](\text{off-diagonal}) + [R, \mathcal{F}] + [R, D] = 0$$

Заметим, что её можно переписать следующим образом:

$$[R, F](\text{off-diagonal}) + [R, \mathcal{F}] + [R, D] = \sum_{\{a,b\}} \nu^2 E_{ab} \otimes [R^{\hbar}_{ab}(q_a - q_b), (\mathcal{F}^0 - F^0_{ab}(q_a - q_b) - F^0_{ab}(q_a + q_b) -$$

$$\sum_{\substack{c \\ c \neq a,b}} (F^0_{ac}(q_a - q_c) + F^0_{ac}(q_a + q_c) + F^0_{bc}(q_b - q_c) + F^0_{bc}(q_b + q_c)))]$$

Но это выражение равно нулю, так как в правой части коммутатора не осталось слагаемых, действующих нетривиально в a и b квантовых пространствах.

3.1.2 Доказательство для блока (12)

Сначала выпишем все слагаемые:

$$[L, M]_{a,b+N} = [\mathcal{P} + R, D + \mathcal{F} + F]_{a,b+N} = [\mathcal{P}, F]_{a,b+N} + [R, D]_{a,b+N} + [R, \mathcal{F}]_{a,b+N} + [R, F]_{a,b+N},$$

Как и в предыдущем разделе $[\mathcal{P}, F]_{a,b+N}$ даёт нам уравнения движения для недиагональной части. Но у (12)-блока матрицы Лакса нет диагональной части в этом случае. Поэтому остальные слагаемые в сумме должны давать ноль:

$$[R, D]_{a,b+N} + [R, \mathcal{F}]_{a,b+N} + [R, F]_{a,b+N} = 0$$

Рассмотрим, для начала, последнее слагаемое:

$$[R, F]_{a,b+N}(\text{off-diagonal}) = \sum_{\substack{c \\ c \neq a,b}} R^{\hbar}_{ac}(q_a - q_c) F^{\hbar}_{cb}(q_c + q_b) - F^{\hbar}_{ac}(q_a - q_c) R^{\hbar}_{cb}(q_c + q_b) +$$

$$+ R^{\hbar}_{ac}(q_a + q_c) F^{\hbar}_{cb}(-q_c + q_b) - F^{\hbar}_{ac}(q_a + q_c) R^{\hbar}_{cb}(-q_c + q_b)$$

В недиагональной части мы можем воспользоваться эллиптическим тождеством (1) :

$$[R, F]_{a,b+N}(\text{off-diagonal}) = \sum_{\substack{c \\ c \neq a,b}} F^0_{cb}(q_c + q_b) R^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) - R^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) F^0_{ac}(q_a - q_c) +$$

$$+ F^0_{cb}(-q_c + q_b) R^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) - R^{\hbar}_{ab}(q_a + q_b) F^0_{ac}(q_a + q_c)$$

В диагональной части мы не можем воспользоваться никакими тождествами и пока оставим её без изменений:

$$[R, F]_{a,a+N} = \sum_{\substack{c \\ c \neq a}} R^{\hbar}_{ac}(q_a - q_c) F^{\hbar}_{ca}(q_c + q_a) - F^{\hbar}_{ac}(q_a - q_c) R^{\hbar}_{ca}(q_c + q_a) +$$

$$+ R^{\hbar}_{ac}(q_a + q_c) F^{\hbar}_{ca}(-q_c + q_a) - F^{\hbar}_{ac}(q_a + q_c) R^{\hbar}_{ca}(-q_c + q_a)$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое:

$$[R,D]_{a,b+N} = (R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)d_b - d_a R^{\hbar}_{ab}(q_a-q_b)) =$$
$$(\sum_{\substack{c\\c\neq a}} F^0_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) + F^0_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) -$$
$$-\sum_{\substack{c\\c\neq b}} R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{bc}(q_b-q_c) + R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{bc}(q_b+q_c)$$

$$[R,D]_{a,b+N} = [\sum_{\substack{c\\c\neq a,b}} (F^0_{ac}(q_a-q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) + F^0_{ac}(q_a+q_c)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) -$$
$$-R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{bc}(q_b-q_c) - R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{bc}(q_b+q_c)) +$$
$$+F^0_{ab}(q_a-q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) + F^0_{ab}(q_a+q_b)R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b) -$$
$$-R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{ba}(q_b-q_a) - R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b)F^0_{ba}(q_b+q_a))]$$

Собирая всё вместе, получим:

$$[L,M]_{a,b+N}(\text{off-diagonal}) = [R,F]_{a,b+N}(\text{off-diagonal}) + [R,D]_{a,b+N} + [R,\mathcal{F}]_{a,b+N} =$$
$$= [R^{\hbar}_{ab}(q_a+q_b), (\mathcal{F}^0 - F^0_{ab}(q_a-q_b) - F^0_{ab}(q_a+q_b) -$$
$$\sum_{\substack{c\\c\neq a,b}} (F^0_{ac}(q_a-q_c) + F^0_{ac}(q_a+q_c) + F^0_{bc}(q_b-q_c) + F^0_{bc}(q_b+q_c)))]$$

Это выражение равно нулю по тем же причинам, что и для блока (11).

Таким образом, остаётся только слагаемое:

$$[L,M]_{a,a+N} = [R,F]_{a,a+N}$$

Чтобы доказать, что оно равно нулю, нам требуется следующее свойство:

$$R^{\hbar}_{ab}(u)F^{\hbar}_{ba}(v) - F^{\hbar}_{ab}(v)R^{\hbar}_{ba}(u) = 0 \tag{13}$$

Заметим, что это тождество всегда выполнено для R-матрицы Янга:

$$R^{\hbar}_{ab}(u) = \frac{1}{\hbar} + \frac{P_{ab}}{u} \tag{14}$$

просто потому, что единичный оператор коммутирует с перестановкой.

Но для тригонометрического и эллиптического случаев оно выполнено только для размерности квантовых пространст: $\tilde{N}=2$.

Мы можем проверить его явно для R-матрицы Бакстера:

$$R^{\hbar}_{ab}(u) = \sum_{\alpha=0}^{3} W_\alpha(u)\ \sigma^a_\alpha \otimes \sigma^b_\alpha \tag{15}$$

Вычислим коммутатор:

$$[R^\hbar_{ab}(u), R^\hbar_{ab}(v)] = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} W_\alpha(u)W_\beta(v)(\sigma_\alpha\sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha\sigma_\beta - \sigma_\beta\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta\sigma_\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} W_\alpha(u)W_\beta(v)(\sigma_\alpha\sigma_\beta \otimes \sigma_\alpha\sigma_\beta - \sigma_\beta\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta\sigma_\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} W_\alpha(u)W_\beta(v)[(\delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma) \otimes (\delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta\mu}\sigma_\mu) - (\delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}\sigma_\gamma) \otimes (\delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\beta\alpha\mu}\sigma_\mu)] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} W_\alpha(u)W_\beta(v)[i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}i\epsilon_{\alpha\beta\mu}\ \sigma_\gamma \otimes \sigma_\mu - i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}i\epsilon_{\beta\alpha\mu}\ \sigma_\gamma \otimes \sigma_\mu] = 0$$

Дифференцируя его по v, мы получаем (13).

Таким образом выражение:

$$R^\hbar_{ac}(q_a-q_c)F^\hbar_{ca}(q_c+q_a) - F^\hbar_{ac}(q_a-q_c)R^\hbar_{ca}(q_c+q_a) + R^\hbar_{ac}(q_a+q_c)F^\hbar_{ca}(-q_c+q_a) - F^\hbar_{ac}(q_a+q_c)R^\hbar_{ca}(-q_c+q_a) = 0$$

Это именно то выражение, которое стоит по знаком суммы в $[R, F]_{a,a+N}$

Доказательства для блоков (21) и (22) абсолютно аналогичны.

3.2 SO(2N+1) R-матричнозначная пара Лакса с N+1 квантовыми пространствами

R-матричная SO(2N+1) пара Лакса с N+1 квантовыми пространствами имеет ту же блочную структуру, что и BC(N) с 2N+1 (11), но соответствующие блоки имеют вид:

Блоки A, B и P такие же, как в SO(2N) случае с N квантовыми пространствами, а остальные равны:

$$C_1 = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{a,2N+1} \otimes R^\hbar_{a,N+1}(q_a)$$

$$C_2 = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{a+N,2N+1} \otimes R^\hbar_{a,N+1}(-q_a)$$

$$C_1^T = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{2N+1,a+N} \otimes R^\hbar_{N+1,a}(q_a)$$

$$C_2^T = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{2N+1,a} \otimes R^\hbar_{N+1,a}(-q_a)$$

$$C_1' = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{a,2N+1} \otimes F^\hbar_{a,N+1}(q_a)$$

$$C_2' = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{a+N,2N+1} \otimes F^\hbar_{a,N+1}(-q_a)$$

$$C_1'^T = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{2N+1,a+N} \otimes F^\hbar_{N+1,a}(q_a)$$

$$C_2'^T = \sqrt{2}\nu \sum_a E_{2N+1,a} \otimes F^\hbar_{N+1,a}(-q_a)$$

$$D_3 = \nu\ E_{2N+1,2N+1} \otimes d_{N+1}$$

$$d_{N+1} = -2\sum_c F^0_{c,N+1}(q_c)$$

Новые D и $\mathcal{F}$ выглядят следующим образом:

$$d_a^{SO(2N+1)} = d_{a+N}^{SO(2N+1)} = d_a^{SO(2N)} - 2\ F^0_{a,N+1}(q_a)$$
$$\mathcal{F}^0_{SO(2N+1)} = \mathcal{F}^0_{SO(2N)} - d_{N+1}$$

3.2.1 Доказательство для блока (11)

В ходе доказательства мы будем выписывать лишь те слагаемые, которые отличаются от SO(2N) случая.

$$[L,M]_{ab} = [L,M]_{ab}^{SO(2N)} + (C_1 C_2'^T)_{ab} - (C_1' C_2^T)_{ab} -$$
$$-2\nu^2(1-\delta_{ab})(R^\hbar_{ab}(q_a-q_b)F^0_{b,N+1}(q_b) - F^0_{a,N+1}(q_a)R^\hbar_{ab}(q_a-q_b)\ + [R^\hbar_{ab}(q_a-q_b), d_{N+1}])$$

Используя эллиптическое тождество (1), условие унитаности (2), и тот факт, что $F^0_{ab}(x) = F^0_{ba}(-x)$, мы можем переписать это следующим образом:

$$[L,M]_{ab} = [L,M]_{ab}^{SO(2N)} + 2\tilde{N}^2\nu^2\wp'(q_a)\ \delta_{ab} + 2\nu^2(1-\delta_{ab})(F^0_{N+1,b}(q_b)R^\hbar_{ab}(q_a-q_b) - R^\hbar_{ab}(q_a-q_b)F^0_{N+1,a}(q_a) -$$
$$-R^\hbar_{ab}(q_a-q_b)F^0_{N+1,b}(q_b) + F^0_{N+1,a}(q_a)R^\hbar_{ab}(q_a-q_b) + \sum_c [R^\hbar_{ab}(q_a-q_b), F^0_{N+1,c}(q_c)]\ )$$

После перегруппировки слагаемых, получаем:

$$[L,M]_{ab} = (\text{r.h.s of eq. of motion})_{ab} +$$
$$+2\nu^2(1-\delta_{ab})[R^\hbar_{ab}(q_a-q_b), \sum_c F^0_{N+1,c}(q_c)\ - F^0_{N+1,a}(q_a) - F^0_{N+1,b}(q_b)]$$

После вычитания $F^0_{N+1,a}(q_a)$ и $F^0_{N+1,b}(q_b)$ из суммы $\sum_c F^0_{N+1,c}(q_c)$, в ней не остаётся слагаемых, содержащих "a"и "b"квантовые пространства, и коммутатор зануляется.

3.2.2 Доказательство для блока (12)

$$[L,M]_{ab+N} = [L,M]_{ab+N}^{SO(2N)} + (C_1 C_1'^T)_{ab} - (C_1' C_1^T)_{ab} -$$
$$-2\nu^2(1-\delta_{ab})(R^\hbar_{ab}(q_a+q_b)F^0_{b,N+1}(q_b) - F^0_{a,N+1}(q_a)R^\hbar_{ab}(q_a+q_b)\ + [R^\hbar_{ab}(q_a+q_b), d_{N+1}])$$

С этого момента будем рассматривать диагональную и внедиагональную части отдельно.

Внедиагональная:

$$[L,M]_{a,b+N}(\text{off-diagonal}) = 2\nu^2(F^0_{N+1,b}(q_b)R^\hbar_{ab}(q_a+q_b) - R^\hbar_{ab}(q_a+q_b)F^0_{N+1,a}(q_a) -$$
$$-R^\hbar_{ab}(q_a+q_b)F^0_{N+1,b}(q_b) + F^0_{N+1,a}(q_a)R^\hbar_{ab}(q_a+q_b) + \sum_c [R^\hbar_{ab}(q_a+q_b), F^0_{N+1,c}(q_c)]\ ) = 0$$

Где мы, как обычно, использовали эллиптическое тождество.

Диагональная:

$$[L,M]_{a,a+N} = 2\nu^2(R^\hbar_{a,N+1}(q_a)F^\hbar_{N+1,a}(q_a) - F^\hbar_{a,N+1}(q_a)R^\hbar_{N+1,a}(q_a)) = 0$$

Благодаря тождеству (13) .

3.2.3 Доказательство для блока (13)

$$[L,M]_{a,2N+1} = [C_1, \mathcal{F}^0_{SO(2N)}]_a + (d_{N+1}C_1)_a - (D_1C_1)_a + \\ +(PC_1')_a + (A_1C_1')_a - (A_1'C_1)_a + (B_1C_2')_a - (B_1'C_2)_a$$

Как обычно:

$$\frac{d}{dt}C_{1a} = (PC_1')_a$$

Следовательно, нам нужно показать, что:

$$[C_1, \mathcal{F}^0_{SO(2N)}]_a + (d_{N+1}C_1)_a - (D_1C_1)_a + (A_1C_1')_a - (A_1'C_1)_a + (B_1C_2')_a - (B_1'C_2)_a = 0$$

Распишем это выражение явно:

$$\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (R^\hbar_{ab}(q_a-q_b)F^\hbar_{b,N+1}(q_b) - F^\hbar_{ab}(q_a-q_b)R^\hbar_{b,N+1}(q_b)) + \\ +\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (R^\hbar_{ab}(q_a+q_b)F^\hbar_{b,N+1}(-q_b) - F^\hbar_{ab}(q_a+q_b)R^\hbar_{b,N+1}(-q_b)) + \\ +\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (F^0_{ab}(q_a-q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + F^0_{ab}(q_a+q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a)) + \\ +2\sqrt{2}\nu^2\, F^0_{a,N+1}(q_a)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \sqrt{2}\nu^2\, d_{N+1}R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \sqrt{2}\nu^2\, [R^\hbar_{a,N+1}(q_a), \mathcal{F}^0_{SO(2N)}]$$

После использования эллиптического тождества в первых двух строках, получим:

$$\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (F^0_{b,N+1}(q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) - R^\hbar_{a,N+1}(q_a)F^0_{ab}(q_a-q_b)) + \\ +\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (F^0_{b,N+1}(q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) - R^\hbar_{a,N+1}(q_a)F^0_{ab}(q_a+q_b)) + \\ +\sqrt{2}\nu^2 \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (F^0_{ab}(q_a-q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + F^0_{ab}(q_a+q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a)) + \\ +2\sqrt{2}\nu^2\, F^0_{a,N+1}(q_a)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \sqrt{2}\nu^2\, d_{N+1}R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \sqrt{2}\nu^2\, [R^\hbar_{a,N+1}(q_a), \mathcal{F}^0_{SO(2N)}]$$

После перегруппировки слагаемых наше выражение становится равным следующему:

$$\sqrt{2}\nu^2\, [R^\hbar_{a,N+1}(q_a), \mathcal{F}^0_{SO(2N)} - \sum_{\substack{b\\ b\neq a}} (F^0_{ab}(q_a-q_b) + F^0_{ab}(q_a+q_b))] + \\ +2\sqrt{2}\nu^2 \sum_b F^0_{b,N+1}(q_b)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \sqrt{2}\nu^2\, d_{N+1}R^\hbar_{a,N+1}(q_a)$$

Перва строка зануляется по тем же причинам, что и в предыдущих разделах, а вторая в силу определения d_{N+1}.

3.2.4 Доказательство для блока (33)

$$[L,M]_{2N+1,2N+1} = (C_2^TC_1' - C_2'^TC_1 + C_1^TC_2' - C_1'^TC_2)$$

$$[L,M]_{2N+1,2N+1} = 2\nu^2 \sum_a (R^\hbar_{N+1,a}(-q_a)F^\hbar_{a,N+1}(q_a) - F^\hbar_{N+1,a}(-q_a)R^\hbar_{a,N+1}(q_a) + \\ +R^\hbar_{N+1,a}(q_a)F^\hbar_{a,N+1}(-q_a) - F^\hbar_{N+1,a}(q_a)R^\hbar_{a,N+1}(-q_a))$$

$$[L,M]_{2N+1,2N+1} = 2\nu^2 \sum_a (\tilde{N}^2 \wp'(-q_a) + \tilde{N}^2 \wp'(q_a)) = 0$$

Где мы использовали условие унитарности.

4 Квантовые R-матричнозначные пары Лакса

Перейдём теперь к квантовой версии системы Калоджеро-Мозера . Под этим мы подразумеваем просто: $p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$. Где, $\hbar$ вообще говоря, новая постоянная Планка, которая может быть не связана со старой. Постоянную Планка, входящую в R-матрицу и играющую роль спектрального параметра мы с этого момента будем называть буквой η. Квантовое уравнение Лакса выглядит следующим образом:

$$[L,H] = i\hbar[L,M] \tag{16}$$

4.1 SL(N) Квантовая R-матричнозначная пара Лакса

L и M операторы абсолютно такие же как в классическом случае: (3)

Действительно, вычислим левую сторону уравнения Лакса:

$$\begin{aligned}
[L_{ab},H] = [L_{ab}, \frac{1}{2}\sum_k p_k^2 - \nu^2 \sum_{k<j} \wp(q_k - q_j)] = i\hbar\dot{p_a}\delta_{ab} + \nu(1-\delta_{ab})[R^\eta_{ab}(q_a - q_b), \frac{1}{2}\sum_k p_k^2] = \\
= i\hbar\dot{p_a}\delta_{ab} + \frac{1}{2}\nu(1-\delta_{ab})\sum_k([R^\eta_{ab}(q_a-q_b), p_k]p_k + p_k[R^\eta_{ab}(q_a-q_b), p_k]) = \\
= i\hbar\dot{p_a}\delta_{ab} + \frac{i\hbar}{2}\nu(1-\delta_{ab})\sum_k(\partial_k R^\eta_{ab}(q_a-q_b)p_k + p_k\partial_k R^\eta_{ab}(q_a-q_b)) = \\
= i\hbar\dot{p_a}\delta_{ab} + \frac{i\hbar}{2}\nu(1-\delta_{ab})(F^\eta_{ab}(q_a-q_b)p_a - F^\eta_{ab}(q_a-q_b)p_b + p_a F^\eta_{ab}(q_a-q_b) - p_b F^\eta_{ab}(q_a-q_b)) = \\
= i\hbar\dot{p_a}\delta_{ab} + i\hbar\nu(1-\delta_{ab})[F^\eta_{ab}(q_a-q_b)(p_a-p_b) - i\hbar\partial_{q_a}F^\eta_{ab}(q_a-q_b)]
\end{aligned}$$

Теперь вычислим $[L,M]$:

$$[L,M] = [P+R, D+F+\mathcal{F}^0] = [P, D+\mathcal{F}^0] + [P,F] + [R,F] + [R,D]$$

Два последних слагаемых такие же как в классическом случае, они равны $\dot{P}$.

Перейдём к вычислению $[P,F]$:

$$[P,F]_{ab} = \nu p_a F^\eta_{ab}(q_a-q_b) - \nu F^\eta_{ab}(q_a-q_b)p_b = \nu F^\eta_{ab}(q_a-q_b)(p_a-p_b) - i\hbar\nu\partial_{q_a}F^\eta_{ab}(q_a-q_b)$$

Это выражение совпадает с внедиагональной частью $[L_{ab},H]$.

Значит нам нужно только показать, что $[P, D+\mathcal{F}^0] = 0$:

$$[P, D+\mathcal{F}^0]_{aa} = \nu[p_a, \sum_{c<b} F^0_{cb}(q_c-q_b) - \sum_{c\neq a} F^0_{ac}(q_a-q_c)] = 0$$

Так как выражение в правой части коммутатора не зависит от q_a

4.2 Квантовые R-матричные пары Лакса для других систем корней

Квантовые R-матричные пары Лакса для Sp(2N) и BC(N) систем с 2N и 2N+1 квантовыми пространствами соответственно могут быть получены редукциями как в разделах 2.1 и 2.2 и с теми же условиями на константы связи.

Квантовые R-матричные пары Лакса для SO(2N) и SO(2N+1) случаев с N и N+1 квантовыми пространствами соответственно также совпадают с классическим выражениями. Мы докажем это утверждение для SO(2N+1) системы, так как для SO(2N) случая доказательство полностью аналогично.

Для начала докажем, что, как и для SL(N) системы:

$$[P, D + \mathcal{F}^0] = 0$$

$$[P, D + \mathcal{F}^0]_{aa} = \nu[p_a, \sum_{c<b}(F^0_{cb}(q_c - q_b) + F^0_{cb}(q_c + q_b)) + 2\sum_c F^0_{c,N+1} - \\ - \sum_{c \neq a}(F^0_{ac}(q_a - q_c) + F^0_{ac}(q_a + q_c) - 2F^0_{a,N+1}] = 0$$

По тем же самым аргументам, что и в SL(N) случае.

После этого достаточно доказать 3 равенства (для блоков (11), (12) и (13)):

$$[(A_1)_{ab}, H] = i\hbar[P, A_1']_{ab}$$
$$[(B_1)_{ab}, H] = i\hbar(PB_1' + B_1'P)_{ab}$$
$$[(C_1)_a, H] = i\hbar(PC_1')_a$$

Первое было доказано в предыдущем разделе.

Докажем второе.

l.h.s. :

$$[(B_1)_{ab}, H] = \frac{\nu}{2}\sum_k([R^\eta_{ab}(q_a + q_b), p_k]p_k + p_k[R^\eta_{ab}(q_a + q_b), p_k]) = \\ = \frac{i\hbar\nu}{2}(F^\eta_{ab}(q_a + q_b)p_a + F^\eta_{ab}(q_a + q_b)p_b + p_a F^\eta_{ab}(q_a + q_b) + p_b F^\eta_{ab}(q_a + q_b)) = \\ = i\hbar\nu[F^\eta_{ab}(q_a + q_b)(p_a + p_b) - i\hbar\partial_{q_a}F^\eta_{ab}(q_a + q_b)]$$

r.h.s. :

$$[P, A_1']_{ab} = \nu p_a F^\eta_{ab}(q_a + q_b) + \nu F^\eta_{ab}(q_a + q_b)p_b = \nu F^\eta_{ab}(q_a + q_b)(p_a + p_b) - i\hbar\nu\partial_{q_a}F^\eta_{ab}(q_a + q_b)$$

Как можно видеть, левые и правые стороны совпадают.

Для третьего:

l.h.s. :

$$[(C_1)_a, H] = \frac{\nu}{2}\sum_k([R^\eta_{a,N+1}(q_a), p_k]p_k + p_k[R^\eta_{a,N+1}(q_a), p_k]) = \\ = \frac{i\hbar\nu}{2}(F^\eta_{a,N+1}(q_a)p_a + p_a F^\eta_{a,N+1}(q_a)) = \\ = i\hbar\nu[F^\eta_{a,N+1}(q_a)p_a - i\hbar\partial_{q_a}F^\eta_{a,N+1}(q_a)]$$

r.h.s :

$$i\hbar(pC_1')_a = i\hbar\nu p_a F^\eta_{a,N+1}(q_a) = \\ = i\hbar\nu[F^\eta_{a,N+1}(q_a)p_a - i\hbar\partial_{q_a}F^\eta_{a,N+1}(q_a)]$$

Вся основная информация о рассмотренных парах Лакса сведена в таблицу в последнем разделе.

5 Обсуждение и связь с другими системами

5.1 Квантовые интегралы движения

Квантовое уравнение Лакса ещё не гарантирует нам наличия набора операторов, коммутирующих с гамильтонианом, как это было в классическом случае. Для того, чтобы их построить нужно, чтобы M-оператор обладал дополнительным свойством (условие нулевой суммы):

$$\sum_b M_{ab} = \sum_a M_{ab} = 0 \tag{17}$$

Тогда из квантового уравнения Лакса получаем (например, индукцией):

$$[L^k, H] = i\hbar[L^k, M]$$

Расписывая это равенство в координатах, получим:

$$[(L^k)_{ab}, H] = i\hbar[(L^k)_{ac}M_{cb} - M_{ac}(L^k)_{cb}]$$

Просуммируем это равенство по "a"и "b"и воспользуемся свойством (17) :

$$[\sum_{a,b}(L^k)_{ab}, H] = [Ts(L^k), H] = 0$$

Таким образом величины $Ts(L^k) = \sum_{a,b}(L^k)_{ab}$ коммутируют с гамильтонианом.
Для спиновой системы Калоджеро-Мозера эти величины были построены в работе [11].

5.2 SL(N) случай

Заметим что M-оператор из предыдущего раздела условию (17) не удовлетворяет. Однако и гамильтониан в левой стороне уравнения Лакса не совпадает с общепринятым квантовым гамильтонианом Калоджеро - константа связи ν^2 в нём не содержит квантовой добавки $-i\hbar\nu$. Чтобы это исправить, введём новый оператор: $\tilde{M} = M - \mathcal{F}^0$, и запишем уравнение Лакса в виде:

$$[L, H - i\hbar\mathcal{F}^0] = i\hbar[L, \tilde{M}]$$

Мы можем интерпретировать его, как квантовое уравнение Лакса для спиновоподобной системы Калоджеро-Мозера с гамильтонианом:

$$\tilde{H} = H - i\hbar\mathcal{F}^0$$

Теперь выясним, когда из него можно получить интегралы движения. Проверим условие нулевой суммы:

$$\sum_b M_{ab} = \sum_{b\neq a}(F^\eta_{ab}(q_{ab}) - F^0_{ab}(q_{ab})) \tag{18}$$

$$\sum_a M_{ab} = \sum_{a\neq b}(F^{-\eta}_{ab}(q_{ab}) - F^0_{ab}(q_{ab})) \tag{19}$$

Оно выполнено, если

$$F^\eta_{ab}(q_{ab}) = F^0_{ab}(q_{ab}) \tag{20}$$

Видно, что для простейших R-матриц вида: $R^\eta_{ab}(u) = (\frac{1}{\eta} + \frac{1}{u})P_{ab}$, $R^\eta_{ab}(u) = (\cot\eta + \cot u)P_{ab}$, а также для R-матрицы Янга оно выполнено, однако для простейшей эллиптической R-матрицы $R^\eta_{ab}(u) = \phi(u, \eta)P_{ab}$ - уже нет.

5.2.1 R-матрицы пропорциональные P_{ab}

Если мы возьмём R-матрицу вида: $R_{ab}(u) = \frac{P_{ab}}{u}$ или $R_{ab}(u) = P_{ab}\cot(u)$, мы получим хорошо известные рациональные или тригонометрические спиновые системы Калоджеро-Мозера соответственно. Они рассматривались, например в работе [7]. Заметим, что в этом случае прямым вычислением можно убедится, что: $\tilde{H} = TsL^2$.

А при ограничении гамильтониана на волновые функции с симметричной спиновой частью ($P_{ab} = 1$) мы получаем стандартный гамильтониан квантового бесспинового Калоджеро с квантовой добавкой к константе связи $-i\hbar\nu$, которая в уравнении Лакса приходит из $\mathcal{F}^0$, а в равенстве $\tilde{H} = TsL^2$ за счёт замены Tr на Ts.

5.2.2 R-матрица Янга

Если рассмотреть R-матрицу Янга, то ничего особенно нового по сравнению с рациональным случаем мы не получим, не считая небольшой деформации L :

$$L(\text{Yang})_{ab} = \frac{\nu}{\eta}(1 - \delta_{ab}) + L(\text{rational})_{ab}$$

А также изменения определения гамильтониана:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}TsL^2 - \frac{\nu N}{2\eta}TsL + \frac{\nu^2}{\eta^2}\frac{N(N^2-1)}{2}$$

5.2.3 Тригонометрическая R-матрица 4x4

Рассмотрим тригонометрическую R-матрицу вида:

$$R^{\eta}_{ab}(u) = \sum_{\alpha=0}^{3} W^{\eta}_{\alpha}(u)\ \sigma^{\alpha}_{a} \otimes \sigma^{\alpha}_{b} \tag{21}$$

Где:

$$W^{\eta}_{0}(u) = \frac{1}{2}(\cot\eta + \cot u + \frac{1}{\sin\eta})$$
$$W^{\eta}_{1}(u) = W^{\eta}_{2}(u) = \frac{1}{2\ \sin u}$$
$$W^{\eta}_{3}(u) = \frac{1}{2}(\cot\eta + \cot u - \frac{1}{\sin\eta})$$

Мы видим, что так как слагаемые, зависящие от η, не зависят от u, после дифференцирования они исчезнут, значит условие (20) , а с ним и условие (17) выполнено.

Значит величины: $Ts(L^k) = \sum_{a,b}(L^k)_{ab}$ коммутируют со спиновым гамильтонианом. В этом случае он равен:

$$\tilde{H} = H + \frac{i\hbar\nu}{2}\sum_{a<b}[\frac{1}{\sin^2 q_{ab}}(\sigma^0_a \otimes \sigma^0_b + \sigma^3_a \otimes \sigma^3_b) + \frac{\cos q_{ab}}{\sin^2 q_{ab}}(\sigma^1_a \otimes \sigma^1_b + \sigma^2_a \otimes \sigma^2_b)]$$

Если же мы возьмём более сложную R-матрицу, мы ожидаем увидеть некоторые обобщения этих систем, для которых интегрируемость ещё не была доказана. Подобные системы упоминались в [3]

5.3 Случай других систем корней

Рассмотренные $Sp(2N)$ и $BC(N)$ (со специальными константами) системы получаются редукцией из $SL(N)$ случая, следовательно всё вышепроделанное верно и для них.

Для $SO(2N)$ системы, как можно видеть из 10, условие нулевой суммы также выполнено для тех R-матриц, для которых оно верно в $SL(N)$ системе.

Однако для $SO(2N+1)$ системы оно было бы выполнено при $g = 2\nu$, а не при $g = \sqrt{2}\nu$, как у нас. Причины этого расхождения пока непонятны.

6 Заключение и подведение итогов

Подведём итоги вычисления пар Лакса в следующей таблице:

По вертикали - тип системы корней

По горизонтали - количество квантовых пространств

g и μ - параметры гамильтониана (5)

N - количество частиц

$\tilde{N}$ - размерность квантового пространства

R-матричнозначные пары Лакса для систем Калоджеро-Мозера

	N	N+1	2N	2N+1
SO(2N)	$\tilde{N} = 2,\ \mu = 0$			
Sp(2N)			$\tilde{N} = \text{any},\ \mu = \nu$	
SO(2N+1)		$\tilde{N} = 2,\ g = \sqrt{2}\nu,\ \mu = 0$		
BC(N)				$\tilde{N} = \text{any},\ g = \nu,\ \mu = \nu$

В следующей таблице мы поместили полученные $\mathcal{F}^0$

	одинарный набор кв. пр.	удвоенный набор кв. пр.
SO(2N)	$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{2}\sum_{\{c,d\}}(F^0_{cd}(q_c - q_b) +$ $+F^0_{cd}(q_c + q_d))$	
Sp(2N)		$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{2}\sum_{\{c,d\}}(F^0_{cd}(q_c - q_b) + F^0_{c+N,d+N}(q_c - q_d))$ $+\frac{1}{2}\sum_{c,d}(F^0_{c,d+N}(q_c + q_d) + F^0_{c+N,d}(q_c + q_d))$
SO(2N+1)	$\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0_{SO(2N)} + 2\sum_c F^0_{c,N+1}(q_c)$	
BC(N)		$\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0_{Sp(2N)} + \sum_c F^0_{c,2N+1}(q_c) + \sum_c F^0_{c+N,2N+1}(q_c)$

Список литературы

[1] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Planck Constant as Spectral Parameter in Integrable Systems and KZB Equations*, JHEP 10 (2014) 109; arXiv:1408.6246 [hep-th].

[2] D'Hoker E., Phong D. H. Calogero-Moser Lax pairs with spectral parameter for general Lie algebras //Nuclear Physics B. – 1998. – Т. 530. – №. 3. – С. 537-610.

[3] Polychronakos A. P. The physics and mathematics of Calogero particles //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2006. – Т. 39. – №. 41. – С. 12793.

[4] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Inventiones mathematicae, 37:2 (1976) 93—108.

[5] I. Krichever, *Elliptic solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and integrable systems of particles*, Funct. Anal. Appl., 14:4 (1980) 282–290.

[6] A. Zotov, *Higher order analogues of unitarity condition for quantum R-matrices*, Theoret. and Math. Phys., 189:2 (2016), 1554–1562; arXiv:1511.02468 [math-ph]

[7] Inozemtsev V. I., Sasaki R. Universal Lax pairs for spin Calogero–Moser models and spin exchange models //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2001. – T. 34. – №. 37. – C. 7621.

[8] A.M. Levin, M.A. Olshanetsky, A.V. Zotov, *Quantum Baxter-Belavin R-matrices and multidimensional Lax pairs for Painlevé VI*, Theor. Math. Phys. 184:1 (2015) 924-939; arXiv:1501.07351 [math-ph]

[9] S. Fomin, A.N. Kirillov, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, Discrete Mathematics, 153 (1996) 123–143.

[10] A. Polishchuk, *Classical Yang–Baxter equation and the A^∞-constraint*, Advances in Mathematics 168:1 (2002) 56—95.

[11] Hikami K., Wadati M. Integrability of Calogero-Moser spin system //Journal of the Physical Society of Japan. – 1993. – T. 62. – №. 2. – C. 469-472.