

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Численное изучение перехода конфайнмент-деконфайнмент в плотной $SU(2)$ КХД с помощью абелевых монополей

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Выполнил:

студент 321 группы
Кудров Илья Евгеньевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Брагута В.В.

Долгопрудный
2017

Содержание

1	Введение	3
2	Теория	7
2.1	Абелева проекция	7
2.2	Максимальная абелева проекция	7
2.3	Решеточный формализм	8
2.4	Фермионы Когута-Сасскинда	9
2.5	Улучшенное действие и дикварковый источник	10
2.6	Абелева проекция на решетке	11
2.7	Монополи на решетке	12
2.8	Абелева доминантность	12
2.9	Теория перколяции	13
2.10	Плотность монополей	13
3	Подробности вычислений	13
3.1	Проделанная работа	13
3.2	Решетка	14
3.3	Статистическая сумма	14
3.4	Посчитанные физические величины	14
4	Результаты	15
4.1	Средняя длина максимального кластера	15
4.2	Сумма длин неперколирующих кластеров	17
4.3	Отношение длины максимального кластера к сумме длин всех кластеров	17
4.4	Плотность монополей	18
4.5	Плотность траекторий, намотанных на пространственные направления	21
4.6	Отношение длины кластера к его длине во временном направлении	22

1 Введение

Одна из широко обсуждаемых в последние десятилетия областей физики - теория сильных взаимодействий. Она описывает широкий круг явлений: распад, слияние и столкновения тяжелых ядер, рассеяние адронов и мезонов, кварк-глюонная плазма, в состоянии которой, предположительно, находилась Вселенная на ранних стадиях развития. Для изучения этих явлений необходимо знать микроскопическую структуру этих систем.

Микроскопическая теория сильных взаимодействий была построена в 70-х годах, она была названа квантовая хромодинамика (КХД). Она описывает фермионы - кварки и калибровочные бозоны - глюоны. Это калибровочная теория с группой $SU(3)$, действующей в цветовом пространстве. В дополнение к спиновой структуре, кваркам приписывается дополнительная степень свободы в трехмерном пространстве, называемая цветом, и физические явления считаются инвариантными относительно унитарных вращений в этом цветовом пространстве. Подробнее можно найти в [1].

Интересно узнать, как себя будет вести макроскопическая система таких полей. Равновесные состояния случайных систем с взаимодействием описываются статистической теорией поля [2]. На данный момент из опытов и аналитических исследований накоплены некоторые данные о поведении сильновзаимодействующих систем. В частности, известно, что материя в КХД может находиться в различных равновесных состояниях (фазах). Например, при низкой температуре система находится в состоянии адронной материи: кварки связаны в бесцветные структуры - барионы и мезоны, при высокой температуре система находится в состоянии кварк-глюонной плазмы.

Подробнее рассмотрим основные свойства КХД. Одним из важных свойств КХД при низких температурах является маленькая сила взаимодействия между кварками на малых расстояниях и линейно растущая - на больших. Хотя фундаментальными степенями свободы являются кварки, они не наблюдаются как свободные частицы, а находятся в связанных состояниях в виде адронов, являющихся наблюдаемыми степенями свободы системы. Это явление называется конфайнмент. С другой стороны, при температурах выше некоторой критической, система находится в фазе деконфайнмента: потенциал между кварками становится достаточно слабым, чтобы кварки могли быть наблюдаемыми степенями свободы.

Помимо температуры есть другой параметр, характеризующий систему - химический потенциал μ . Для конкретных применений очень важна фазовая диаграмма в плоскости (T, μ) . Необходимо знать в какой фазе находится система, чтобы, например, использовать правильные уравнения состояния. Например, в астрофизике: существуют нейтронные звезды, в центре которых плотность вещества в несколько раз может превосходить плотность барионной материи. Есть предположение, что материя там может находиться в состоянии кварк-глюонной

плазмы. И для описания процессов внутри таких звезд необходимо знание фазовой диаграммы в области образования кварк-глюонной плазмы. Другой важный пример - это столкновения тяжелых ионов. Хотя, реальные процессы столкновений тяжелых ионов являются неравновесными, было бы интересно изучить весьма полезные характеристики равновесных состояний этой системы, например, фазовую диаграмму, уравнения состояния или транспортные коэффициенты. Таким образом, фазовая диаграмма КХД важна для понимания свойств этих систем.

Еще один интересный феномен - это сверхпроводящая фаза. Она, предположительно, возникает при большом μ и не слишком больших T . Кварки близкие к поверхности ферми объединяются в Куперовские пары. В фазе сверхпроводимости нарушаются некоторые симметрии исходной теории, поэтому транспортные свойства и спектр возмущений тоже сильно отличаются.

Конфайнмент пока что не описан исходя из первых принципов - $SU(3)$ КХД очень сложная теория, которая тяжело поддается аналитическому описанию. Однако существуют феноменологические теории, предсказывающие переход конфайнмент - деконфайнмент. Предположительный вид фазовой диаграммы изображен на Рис. 1. Он был получен с использованием как теоретических методов, так и с помощью моделирования на решетке.

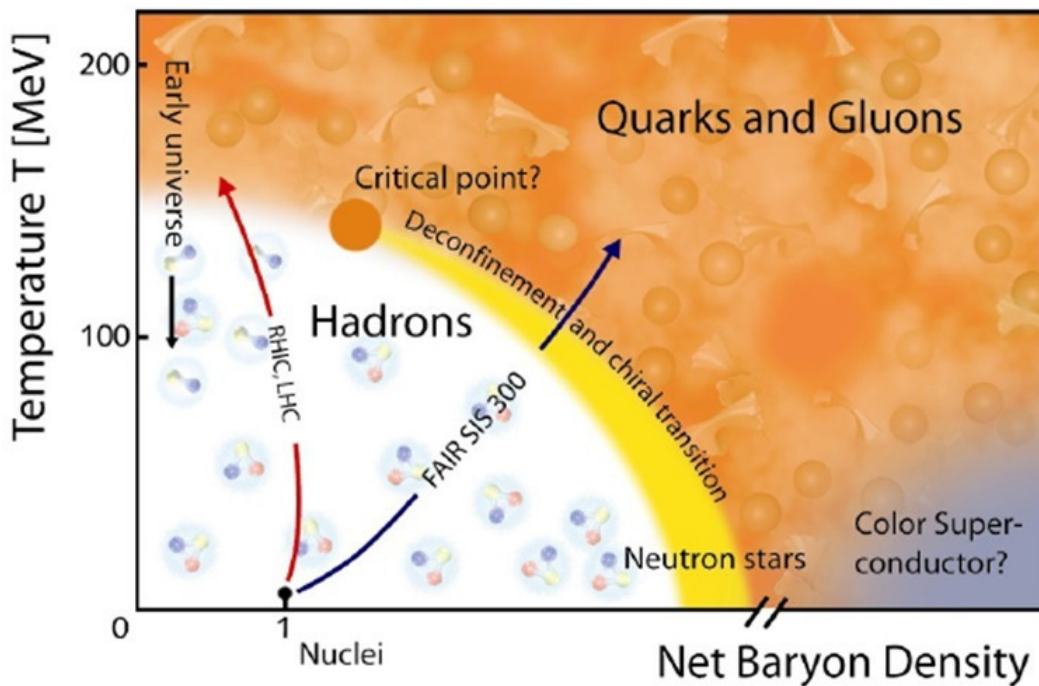


Рис. 1: Приблизительный вид фазовой диаграммы КХД

Фазовая диаграмма $SU(3)$ КХД хорошо изучена при $\mu = 0$ и $T \neq 0$ [3], [4]. При температуре порядка 200 MeV происходит переход конфайнмент деконфайнмент. Но неизвестно имеется ли он при ненулевом хим. потенциале, поэтому важно исследовать диаграмму при $\mu \neq 0$ и $T \neq 0$. Однако моделирование $SU(3)$

КХД на решетке при ненулевом хим. потенциале на данный момент невозможно из-за проблемы знака. Она возникает из соотношения для среднего некоторого оператора \hat{A}

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int [DU] \hat{A} e^{-S_{YM}} \det M(\mu)}{\int [DU] e^{-S_{YM}} \det M(\mu)} \quad (1)$$

где S_{YM} - действие Янга-Миллса

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3)$$

а

$$\det M = \int d\psi d\bar{\psi} \exp[\bar{\psi}(\hat{D} + m + \gamma_0 \mu)\psi] \quad (4)$$

фермионный детерминант. Он становится комплексным при ненулевом хим. потенциале, что не позволяет пользоваться методами численного моделирования.

Один из альтернативных вариантов - исследование более простой в плане численных расчетов $SU(2)$ теории. Введение в ней химического потенциала не приводит к проблеме знака. Например, в статье [7] посчитаны киральный конденсат, дикварковый конденсат, барионная плотность в $SU(2)$ КДХ. Хотя теории с двумя и тремя цветами различаются, можно предположить, что некоторые свойства фазовой диаграммы могут быть схожими. Некоторые специальным образом нормированные физические величины очень близки по значению в $SU(2)$ и $SU(3)$. $SU(2)$ КХД проще и в плане аналитических исследований. В частности, к ней, в отличие от $SU(3)$, применима киральная теория возмущений при $\mu \neq 0$ [12].

На данный момент имеются некоторые исследования перехода конфайнмент-деконфайнмент в плотной $SU(2)$ КХД. Решеточной группой ИТЭФ, в частности, был вычислен потенциал взаимодействия между кварком и антикварком Рис. 2. Можно заметить, что при $\mu_q a < \frac{M_\pi a}{2}$ ($M_\pi a = 0.1608(86)$) имеется линейный рост, что соответствует фазе конфайнмента, а при бóльших μ на достаточно больших расстояниях выходит на постоянное значение.

Есть различные способы численно исследовать свойства КХД. Один из способов - с помощью абелевых монополей [5]. Можно зафиксировать калибровку таким образом, чтобы диагональные степени свободы как можно более точно описывали динамику системы. Одни из степеней свободы абелевой теории - монополи. Как показывают численные расчеты, получается так, что, учитывая только монополярные степени свободы, можно довольно точно оценивать физические величины. Есть различные численные факты того, что такие степени свободы являются приемлемыми для описания неабелевых теорий.

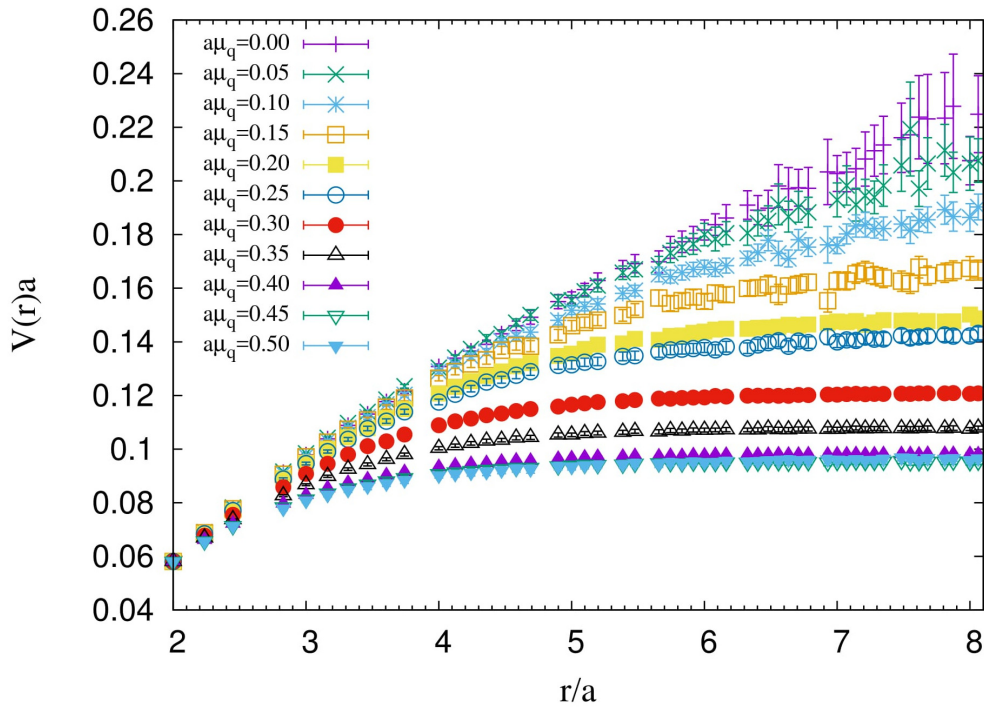


Рис. 2: Зависимость потенциала взаимодействия между кварком и анти-кварком в зависимости от расстояния между ними при нулевой температуре при различных значениях химического потенциала.

Существуют различные подходы к объяснению конфайнмента. В отличие от $SU(3)$, в $SU(2)$ КХД можно составить бесцветную комбинацию кварковых полей, так что адроны состоят из двух кварков и являются бозонами. Поэтому, в теории может быть Бозе-Эйнштейновская конденсация. Фаза конфайнмента характеризуется конденсацией топологических дефектов вроде монополей. Которые как раз возникают в абелевой проекции. На данный момент не существует аналитического доказательства конденсации магнитных абелевых монополей в глюодинамике или хромодинимике, однако во всех теориях, допускающих аналитическое доказательство наличия конфайнмента, он появляется за счет абелевых монополей.

Монополи - точечные частицы, поэтому на четырехмерной решетке образуют замкнутые траектории (в следствие сохранения тока) – кластеры. Они чувствительны к переходу конфайнмент-деконфайнмент. При $\mu = 0$ это было показано для $SU(3)$ КХД в [8]. В фазе конфайнмента образуется так называемый перколирующий кластер монополей. Он заполняет почти все пространство на решетке. Однако при переходе в деконфайнмент он распадается на множество отдельных кластеров. В данной работе исследуется переход конфайнмент-деконфайнмент при изменении химического потенциала при различных температурах при помощи абелевых монополей. Для начала нужно понять, как абелевы монополи появляются в неабелевой теории.

2 Теория

2.1 Абелева проекция

Абелева проекция – это частичная фиксация степеней свободы, при которой незафиксированными остаются только диагональные. Например, можно диагонализировать $\hat{F}_{21}(x)$, который преобразуется как

$$\hat{F}_{12}(x) \rightarrow \hat{F}'_{12}(x) = \Omega^+(x) \hat{F}_{12}(x) \Omega(x) \quad (5)$$

Тогда после фиксации калибровки \hat{F}'_{12} будет инвариантен относительно U(1) преобразований

$$\hat{F}'_{12}(x) \rightarrow \hat{F}'_{12}(x) = \Omega_{U(1)}^+(x) \hat{F}'_{12}(x) \Omega_{U(1)}(x) \quad (6)$$

где

$$\Omega_{U(1)} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(x)} \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi) \quad (7)$$

Поле SU(2)

$$\hat{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^+ \\ A_\mu^- & A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Преобразуется под действием группы как

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \Omega^+ \hat{A}_\mu \Omega - \frac{i}{g} \Omega^+ \partial_\mu \Omega \quad (9)$$

После фиксации калибровки поля преобразуются как

$$A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha, \quad A_\mu^+ \rightarrow e^{2i\alpha} A_\mu^+, \quad A_\mu^- = A_\mu^1 + iA_\mu^2$$

В получившаяся абелева теория обладает монополями. Есть бесконечное число возможных способов выбрать абелеву проекцию. При численном моделировании интересные результаты получаются при использовании максимальной абелевой проекции.

2.2 Максимальная абелева проекция

Максимальная абелева проекция фиксирует калибровку таким образом, чтобы в недиагональных степенях свободы было как можно меньше информации о системе. Можно определить как максимизацию некоторого функционала

$$\max_{\Omega} R[\hat{A}]$$

Для $SU(2)$ это, например, может быть

$$R[\hat{A}] = - \int d^4x [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] \quad (10)$$

Таким образом, максимальная абелева проекция фиксирует калибровку таким образом, чтобы почти все степени свободы содержались в A_3 .

2.3 Решеточный формализм

В данном разделе будут кратко изложены основные положения теории полей на решетке. За более подробной информации читателю предлагается обратиться к [9] или [10]. Рассмотрим калибровочную теорию. Для численного моделирования необходимо дискретизовать пространство. Для этого поля рассматриваются на четырехмерной решетке. При этом координаты заменяются на номера узлов

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \quad (11)$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \dots, N_s - 1; n_4 = 0, \dots, N_t - 1 \quad (12)$$

Для простоты рассмотрим скалярную калибровочную теорию.

Фермионные поля расположены на узлах четырехмерной решетки. Пусть калибровочная группа теории G действует на поля в фундаментальном представлении

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Omega(x)\phi(x) \quad (13)$$

где $\Omega(x) \in G$

На решетке нужно дискретизовать действие. Кинетический член можно записать как

$$\frac{1}{2} \sum_x a^4 \Delta_\mu^f \phi \cdot \Delta_\mu^f \phi = - \sum_{\langle xy \rangle} a^2 \phi(x) \cdot \phi(y) + 4 \sum_x a^2 \phi(x) \cdot \phi(x) \quad (14)$$

где производная "вперед"

$$\Delta_\mu^f f(x) = \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \quad (15)$$

где $\hat{\mu}$ - единичный вектор, направленный вдоль координаты μ , а $\langle xy \rangle$ обозначает сумму по соседям. Можно заметить, что этот член не является калибровочно инвариантным относительно преобразований (ссылка на формулу).

Чтобы сделать действие инвариантным относительно группы, нужно добавить в лагранжиан калибровочное поле. В непрерывном случае калибровочное поле вводилось как инфинитезимальный параллельный перенос. В дискретном же случае наименьшее расстояние равно a - шагу решетки. Поэтому будем помещать элементы группы на линки, соединяющие соседние узлы (сайты) решетки.

Таким образом, они будут осуществлять параллельный перенос скалярных полей. Обозначим переменную на линке b , соединяющем x и $x + a\hat{\mu}$ как

$$U(b) \equiv U(n + a\hat{\mu}, n) \equiv U_{n\mu} \equiv U(n, \mu) \quad (16)$$

где $(n + a\hat{\mu}, n)$ обозначает упорядоченный путь от n к $n + \hat{\mu}$. Соответственно,

$$U(m, n) = U^{-1}(n, m) \quad (17)$$

Под действием группы переменная на линке преобразуется как

$$U'(n, m) = \Omega(n)U(n, m)\Omega^{-1}(m) \quad (18)$$

Тогда калибровочный член

$$- \sum_{\langle nm \rangle} \phi(n) \cdot U(n, m)\phi(m) \quad (19)$$

будет инвариантен под относительно действия группы. Для удобства можно ввести ковариантную производную

$$D_\mu \phi(n) = \frac{1}{a}(U^{-1}(n, \mu)\phi(n + a\hat{\mu}) - \phi(n)) \quad (20)$$

И напишем кинетический член как

$$\frac{1}{a} \sum_n a^4 D_\mu \phi(n) \cdot D_\mu \phi(n) = -a^2 \sum_{\langle nm \rangle} \phi(n) \cdot U(n, m)\phi(m) + 4a^2 \sum_n \phi(n)^2 \quad (21)$$

и будет инвариантен, что и требовалось.

Для калибровочного поля используется Вильсоновское действие

$$S_G = \beta \sum_n \sum_{\mu < \nu = 1}^4 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_{n, \mu\nu}\right) \quad (22)$$

2.4 Фермионы Когута-Сасскинда

Аналогично на решетке можно рассмотреть Дираковские фермионы [11]. Однако при дискретизации возникают некоторые трудности. При наивной дискретизации свободное калибровочно инвариантное действие для фермионов выглядит как

$$S_F^{free}[\bar{\psi}, \psi, U] = a^4 \sum_n \bar{\psi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu (U_{n, \mu} \psi_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu}, \mu}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}}) + m \psi_n \right) \quad (23)$$

Пропагатор запишется как

$$G(p) = \frac{m - ia^{-1} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu})}{m^2 + a_{-2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_{\mu})} \quad (24)$$

Можно заметить, что пропагатор имеет 16 полюсов, хотя и дает правильный предел $a \rightarrow 0$. Это можно трактовать как 16 ароматов фермионов. Во взаимодействующей теории это может привести к неправильным результатам. Нужно выбрать другой способ дискретизации. Существуют различные варианты дискретизации. Один из них - фермионы Когута-Сасскинда. Сделаем преобразование полей

$$\psi_n = \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \gamma_4^{n_4} \chi_n, \bar{\psi}_n = \bar{\chi}_n \gamma_4^{n_4} \gamma_3^{n_3} \gamma_2^{n_2} \gamma_1^{n_1} \quad (25)$$

Тогда действие переписывается как

$$S_F^{stag}[\bar{\chi}, \chi, U] = a^4 \sum_n \bar{\chi}_n \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \eta_{n,\mu} (U_{n,\mu} \chi_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\mu}^{\dagger} \chi_{n-\hat{\mu}}) + m \chi_n \right) \quad (26)$$

где

$$\eta_{n,1} = 1 \quad (27)$$

$$\eta_{n,2} = (-1)^{n_1} \quad (28)$$

$$\eta_{n,3} = (-1)^{n_1+n_2} \quad (29)$$

$$\eta_{n,4} = (-1)^{n_1+n_2+n_3} \quad (30)$$

Таким образом, избавляясь от спинорной структуры, получаем вместо 16 фермионов 4.

2.5 Улучшенное действие и дикварковый источник

При моделировании на решетке из-за конечного объема могут возникнуть некоторые дефекты вроде новых фаз и фазовых переходов. Чтобы избавиться от подобных артефактов в Вильсоновское действие вводят дополнительные члены [11]. В данной статье использовалось следующее улучшенное действие

$$S_{imp.g}[U] = -\frac{\beta}{N_c} \left(c_0 \sum_{n,\mu,\mu<\nu} ReTr P_{\mu\nu}[U](n) + c_1 \sum_{n,\mu,\mu\neq\nu} ReTr R_{\mu\nu}[U](n) \right) \quad (31)$$

где

$$c_0 = \frac{5}{3}, \quad c_1 = -\frac{1}{12} \quad (32)$$

$P_{\mu\nu}$ - плакет из 4 линков в плоскости $\mu\nu$, а $R_{\mu\nu}$ - плакет из 6 линков в плоскости $\mu\nu$ с некоторым определенным выбранным направлением в плоскости и

выбранным порядком линков. Еще одна проблема, связанная с конечным объемом - отсутствие дикваркового конденсата. Чтобы исправить эту проблему, необходимо добавить в лагранжиан член, явно нарушающий $U(1)_V$ симметрию [7]

$$S^{diquark} = \frac{\lambda}{2} \sum_n \left(\psi_n^T \tau_2 \psi_n + \bar{\psi}_n \tau_2 \bar{\psi}_n^T \right) \quad (33)$$

2.6 Абелева проекция на решетке

На решетке калибровочные поля это элементы группы симметрии теории, прикрепленные к линкам между узлами. Они связаны с полями в непрерывном случае

$$U_{x,\mu} = e^{iag\hat{A}_\mu(x)} \quad (34)$$

И преобразуются под действием группы как

$$U_{x,\mu}^\Omega = \Omega_x^+ U_{x,\mu} \Omega_{x+\mu} \quad (35)$$

Элементы группы $\Omega_x \in G$ принадлежат узлам решетки x .

Для группы $SU(2)$ максимальная абелева проекция определена условием

$$\max_{\Omega} R[\hat{U}_l^\Omega] \quad R[U_l] = \sum_l Tr[\sigma_3 U_l^+ \sigma_3 U_l] \quad (36)$$

Это условие относится к абелевой, так как R инвариантно относительно преобразований группы.

Можно параметризовать матрицу

$$U_l = \begin{pmatrix} \cos \varphi_l e^{i\theta_l} & \sin \varphi_l e^{i\chi_l} \\ -\sin \varphi_l e^{-i\chi_l} & \cos \varphi_l e^{-i\theta_l} \end{pmatrix} \quad (37)$$

где $\theta, \chi \in [-\pi, +\pi)$ и $\varphi \in [0, \pi)$. В этой параметризации

$$R[U_l] = \sum_l \cos 2\varphi_l \quad (38)$$

Можно видеть, что функционал $R[U_l]$ максимизирует диагональные элементы. Под действием получившейся абелевой группы поля преобразуются как

$$\theta_{x,\mu} \rightarrow \theta_{x,\mu} + \alpha_x - \alpha_{x+\hat{\mu}}, \quad \chi_{x\mu} \rightarrow \chi_{x\mu} + \alpha_x + \alpha_{x+\hat{\mu}}, \quad \varphi_{x,\mu} \rightarrow \varphi_{x,\mu} \quad (39)$$

Следовательно, в максимальной абелевой проекции, θ - $U(1)$ калибровочное поле, χ - векторное поле с зарядом 2, φ - нейтральное векторное поле.

2.7 Монополи на решетке

Конфигурации абелевых полей θ_l могут содержать монополи. Рассмотрим элементарный куб на решетке. По аналогии с непрерывным случаем можно определить магнитный поток через поверхность куба

$$m = \sum_{P \in \partial P} \bar{\theta}_P \quad (40)$$

Ток определяется как

$$j_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\partial}_\nu \bar{\theta}_{\rho\sigma}, \quad \hat{\partial}_\nu \theta_\mu \equiv \theta_\mu(n + \hat{\nu}) - \theta_\mu(n) \quad (41)$$

где $\bar{\theta}_P$ магнитное поле, определенное следующим образом. Рассмотрим поля на плакете P : $\theta_P = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \equiv d\theta$, где θ_i принадлежат i 'м линкам плакета, упорядоченным вдоль его границы.

Тогда $\bar{\theta}_P = \theta_P + 2\pi k$ так, что $\theta \in (-\pi, \pi]$. Таким образом определенный магнитный заряд обладает следующими свойствами:

1. m квантуется: $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
2. Если $m \neq 0$, то существует ток j , принадлежащий двойственной решетке.
3. Монопольный ток сохраняется: $\delta j = 0$, образуя на четырехмерной решетке замкнутые траектории.

2.8 Абелева доминантность

Абелева доминантность означает, что среднее значение физической величины $\langle \chi \rangle$ в неабелевой теории совпадает (или очень близко) со средним соответствующего оператора в абелевой проекции. То есть, наблюдаемые физические величины будут близки к тем в неабелевой теории, если для их оценки использовать только монопольные степени свободы. Таким образом, можно посчитать значение физической величины с помощью монопольных токов. Если у нас есть N конфигураций неабелевых полей на решетке

$$\frac{1}{N} \sum_{conf} \chi(\hat{U}_{nonabelian}) = \frac{1}{N} \sum_{conf} \chi'(\hat{U}_{abelian}) \quad (42)$$

где сумма ведется по конфигурациям.

В частности, хорошо изучено натяжение струны между кварком и антикварком для случая $SU(2)$. Справедливы следующие отношения

$$\sigma_{SU(2)} \approx 92\% \sigma_{U(1)}, \sigma_{U(1)} = 95\% \sigma_j \quad (43)$$

где σ_j - вклад монопольных токов.

2.9 Теория перколяции

В фазе конфайнмента появляется большой кластер, он называется перколирующим. Теория, изучающая появление таких структур в статистических системах, называется теорией перколяции [14]. Перколяция - это вероятностная теория, заключающаяся в следующем. Рассмотрим решетку, переменная на линках которой может иметь значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$. Тогда какова будет вероятность того, что есть путь из линков со значением 1 из центра куба со стороной n к его краю? Вероятность существования такого пути при $n \rightarrow \infty$ называется перколяционной, обозначим ее $\theta(p)$. Получается так, что при достаточно маленьком p , $\theta(p) = 0$. Но при p большем некоторого критического значения p_c , $\theta(p)$ становится ненулевой. Исходя из закона нуля и единицы Колмогорова [15] при $p > p_c$ вероятность становится равной единице. Происходит аналог фазового перехода в статистической физике. Похожая ситуация реализуется в случае абелевых монополей. В фазе деконфайнмента вероятность того, что на линке есть монополярный ток слишком мала, но после фазового перехода в конфайнмент вероятность появления перколирующего кластера становится равной единице. Таким образом, он выступает в роли параметра порядка для этой системы. Таким образом, если в системе появляется очень большой кластер монополей, можно считать, что система находится в фазе конфайнмента.

2.10 Плотность монополей

В связи с тем, что решетка имеет периодические граничные условия, траектории монополей могут иметь тривиальную топологию или быть намотаны на решетку. Прежде чем замкнуться, траектория проходит через границу решетки и выходит с другой стороны. Они могут быть намотаны произвольное количество раз, однако вероятность уменьшается с увеличением числа намоток. Траектории с нетривиальной положительной (отрицательной) намоткой отождествляются с термальными (анти-)монополями.

3 Подробности вычислений

3.1 Прделанная работа

В данной работе были использованы конфигурации и программа для фиксации максимальной абелевой проекции, полученные решеточной группой ИТЭФ, использовал суперкомпьютер ИТЭФ, чтобы зафиксировать максимальную абелеву проекцию, написал программу, которая считывает данные с получившихся конфигураций и вычисляет определенные физические величины, и проанализировал результаты.

3.2 Решетка

Вычисления проводились на решетках размером 32^4 , $32^3 \times 24$, $32^3 \times 16$ и $32^3 \times 8$. Шаг решетки $a = 0.073 fm$ одинаков во всех направлениях. В единицах $\hbar = 1$, $c = 1$

$$1 fm^{-1} \approx 197 MeV \quad (44)$$

В квантовой механике в периодических граничных условиях на решетке температура определяется как

$$T = \frac{1}{L_t} \quad (45)$$

где L_t - размер решетки вдоль времени. Отсюда, выше указанные решетки соответствуют температурам 88 MeV, 117 MeV, 175 MeV и 352 MeV соответственно.

3.3 Статистическая сумма

Использовалась стат. сумма

$$Z = \int DU D\psi D\bar{\psi} e^{-S} \quad (46)$$

где $S = S^G + S^{stag} + S^{diquark}$ см. (31), (26) и (33).

Можно проинтегрировать по фермионным степеням свободы и дополнительно извлечь корень из фермионного детерминанта

$$Z = \int DU e^{-S_G} \left(\det(M^\dagger M + \lambda^2) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (47)$$

такая стат. сумма, соответствующая двум фермионам, будет исследоваться. Для генерации конфигураций использовался метод Монте-Карло. Константа из (33) постоянна и равна $\lambda = 0.00075$.

3.4 Посчитанные физические величины

1. Средняя плотность монополей. Определяется как

$$n_t = \frac{\langle \sum |N| \rangle}{N_s^3} \quad (48)$$

где N - количество намоток вдоль времени, N_s - размер решетки вдоль пространственного направления, сумма идет по монопольным траекториям на конфигурации, усреднение проводится по всем конфигурациям.

Из-за периодических граничных условий на границе решетки некоторые кластеры могут быть намотаны. Плотность намотанных монопольных траекторий отождествляется с плотностью монополей.

2. Средняя плотность пространственных монополей.

$$n_s = \frac{\langle \sum |N| \rangle}{N_s^3} \quad (49)$$

где N - количество намоток вдоль пространственных направлений, N_s - размер решетки вдоль пространственного направления, сумма идет по монопольным траекториям на конфигурации, усреднение проводится по всем конфигурациям.

3. Средняя длина максимального кластера. В фазе конфайнмента появляется кластер монопольных токов, заполняющий очень большое пространство, и распадающийся на отдельные кластеры в фазе деконфайнмента. Поэтому ожидается, что максимальная длина кластера начнет редко падать после перехода.

4. Суммарная длина кластеров на конфигурации.

5. Отношение длины максимального кластера к суммарной длине всех кластеров

$$\left\langle \frac{L_{max}}{\sum L} \right\rangle \quad (50)$$

усреднение ведется по конфигурациям.

6. Отношение длины кластера к длине кластера во временном направлении.

$$\left\langle \frac{L}{L_t} \right\rangle \quad (51)$$

усреднение ведется по всем кластерам, имеющим нетривиальную намотку, на всех конфигурациях, кроме максимальных кластеров на каждой конфигурации.

4 Результаты

4.1 Средняя длина максимального кластера

Как было указано выше, из опыта численного моделирования при нулевом химическом потенциале при ненулевой температуре известен тот факт, что монополи чувствительны к переходу конфайнмент-деконфайнмент. В фазе конфайнмента появляется перколирующий кластер, занимающий очень большую часть пространства. В то время как в деконфайнменте он исчезает. На рис. 3 показана зависимость средней длины максимального кластера от хим. потенциала при разных температурах.

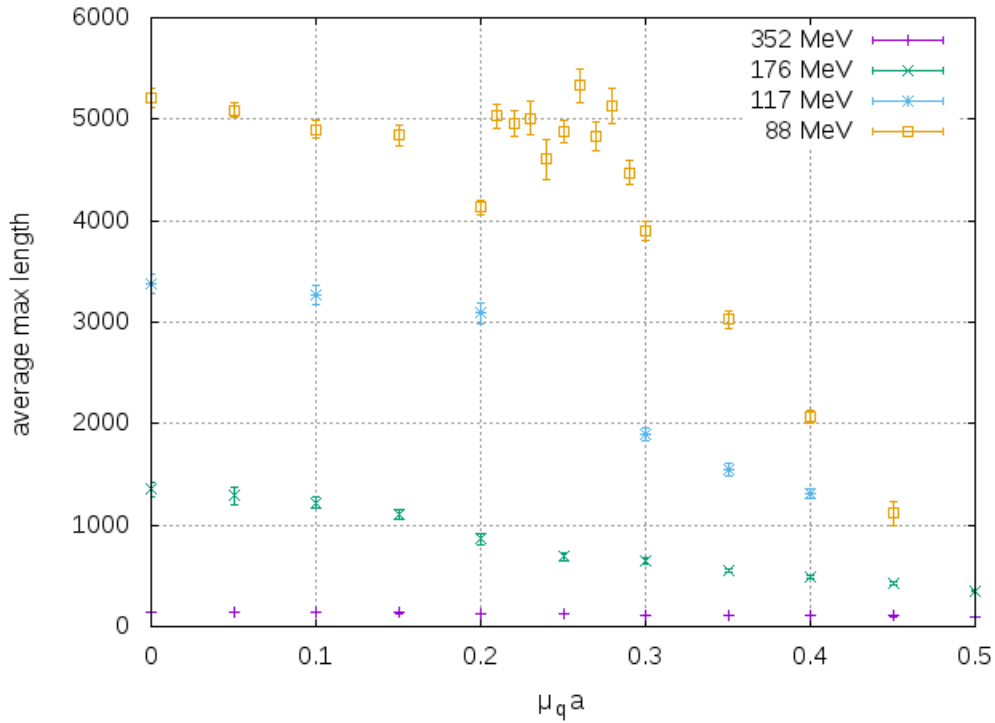


Рис. 3: Средняя длина максимального кластера

На графике, соответствующему температуре 88 MeV видно, что примерно до $0.2 \mu_q a$ длина кластера примерно равна 5000 и постоянна, но затем к $\mu_q a = 0.45$ резко падает почти в 5 раз. Это соответствует тому, что в системе пропадает тот большой перколирующий кластер. Отсюда можно заключить, что до $\mu_q a = 0.2$ система находится в фазе конфайнмента, где-то в промежутке от 0.2 до 0.3 имеется фазовый переход конфайнмент-деконфайнмент, и при больших $\mu_q a$ у нас фаза деконфайнмента. Похожую ситуацию можно наблюдать на графике, соответствующему температуре 117 MeV. Однако, в отличие от 88 MeV, падение длины начинается немного раньше. Из этого следует, что при повышении температуры кривая фазового перехода движется в сторону уменьшения хим. потенциала, что соответствует Рис. 3.

В работах по изучению перехода конфайнмент-деконфайнмент при нулевом хим. потенциале была найдена температура перехода $T \approx 160 \text{ MeV}$. Температуры 176 MeV и 352 MeV соответствуют фазе деконфайнмента при $\mu_q = 0$. Из графика видно, что для них длина максимального кластера довольно маленькая и изменение слабо заметно. Это означает, что для этих температур нет перехода при ненулевом μ_q . Что, опять же, соответствует тому, что при увеличении температуры μ_q перехода уменьшается.

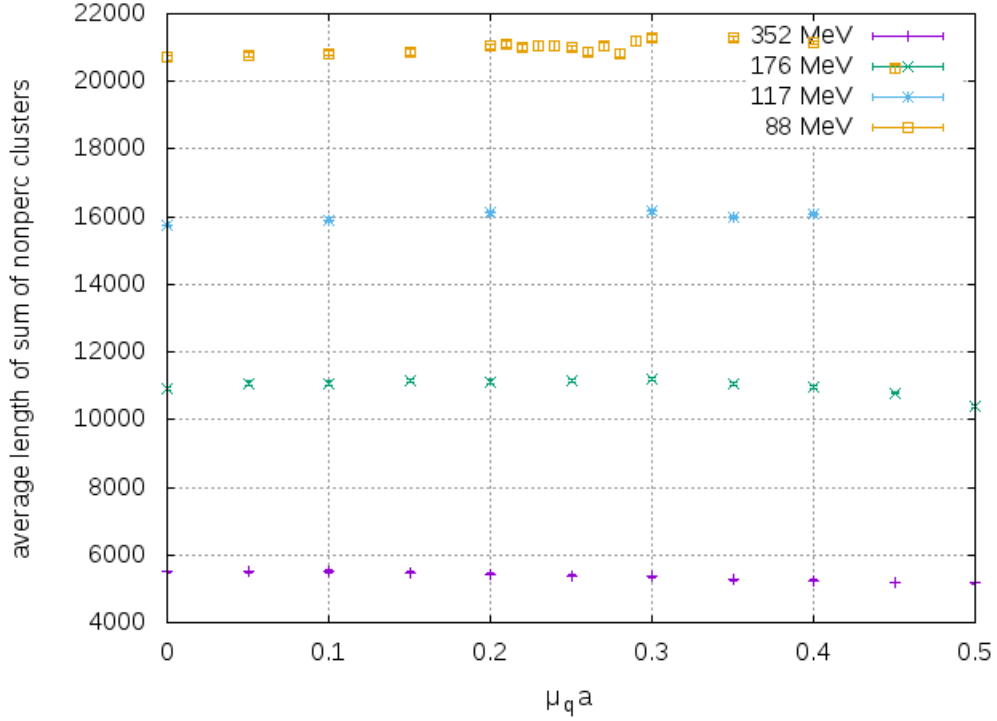


Рис. 4: Среднее суммы неперколирующих кластеров

4.2 Сумма длин неперколирующих кластеров

На рис. 4 изображена зависимость среднего суммарной длины неперколирующих кластеров. Из графиков видно, что для всех температур эта величина остается постоянной. Дело в том, что основной вклад в сумму вносят вклад монополи маленькой длины (4 и 6, например). Но эти кластеры отвечают физике на маленьких расстояниях, то есть большим импульсам. Такие ультрафиолетовые флуктуации очень слабо зависят от хим. потенциала. Для того, чтобы это понять, рассмотрим фермионный пропагатор с ненулевым хим. потенциалом

$$D(p) = \frac{\hat{p} + i\mu\gamma_4 + m}{(p_4 + i\mu)^2 + \vec{p}^2 + m^2} \quad (52)$$

Легко видеть, что при больших импульсах пропагатор почти не зависит от хим. потенциала, он входит лишь как маленькая поправка. Таким образом, монопольные траектории маленькой длины не чувствуют изменения хим. потенциала.

4.3 Отношение длины максимального кластера к сумме длин всех кластеров

На рис. 5 указано отношение длины максимального кластера к сумме длин всех кластеров. Так как сумма длин неперколирующих кластеров не меняется с изменением $\mu_q a$, то качественно этот график должен быть таким же, как и

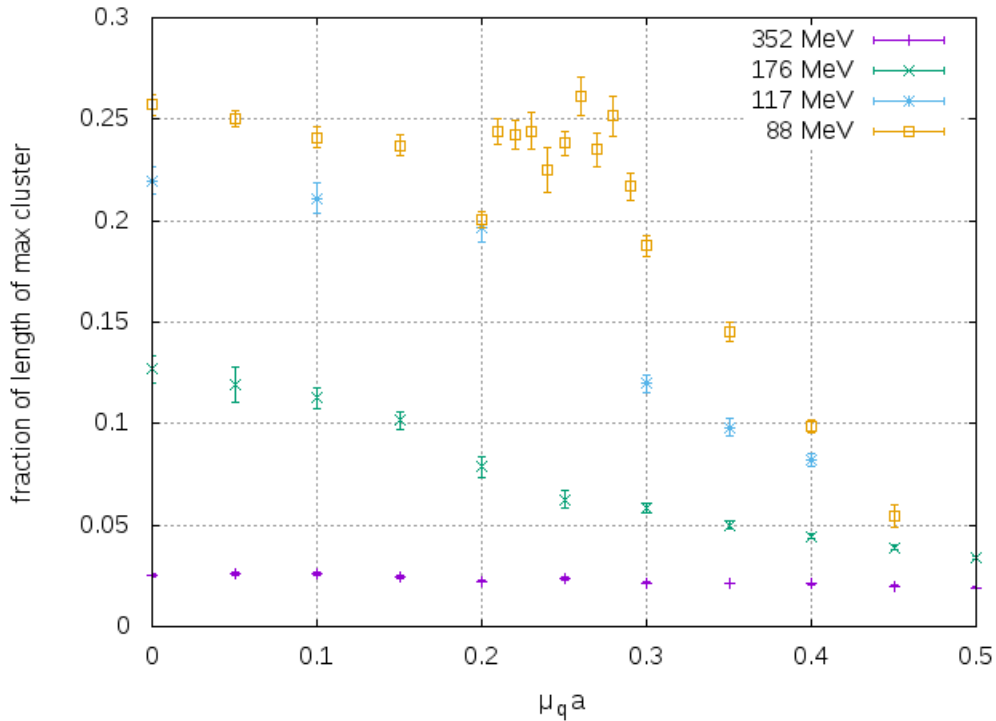


Рис. 5: Отношение длины максимального кластера к сумме длин всех кластеров

рис. 3, что, собственно, и можно наблюдать. Однако, из рис. 5 можно сделать некоторые выводы. На графике, соответствующему температуре 88 MeV видно, что при маленьком $\mu_q a$ примерно четверть от длины всех кластеров составляет максимальный. Это позволяет нам с уверенностью говорить, что этот кластер перколирующий, и что это фаза конфайнмента. То же и с 117 MeV.

Соответственно, из графиков для 176 MeV и 352 MeV видно, что длина максимального кластера составляет малую часть от суммы длин всех кластеров. Отсюда можно заключить, что это действительно фаза деконфайнмента.

4.4 Плотность монополей

На рис. 6 изображена зависимость плотность намоток монопольных токов на временное направление от хим. потенциала. Но количество намоток траекторий на временное направление можно отождествить с количеством монополей, т.к. это соответствует тому, что в каждом временном срезе существует монополю - точечная частица в трехмерном пространстве. Из графика видно, что плотность возрастает с увеличением хим. потенциала. Давайте разберемся, с чем это связано.

В квантовой электродинамике (КЭД) в среде электрическое поле экранируется. То есть, при помещении пробного электрического заряда в среду, потен-

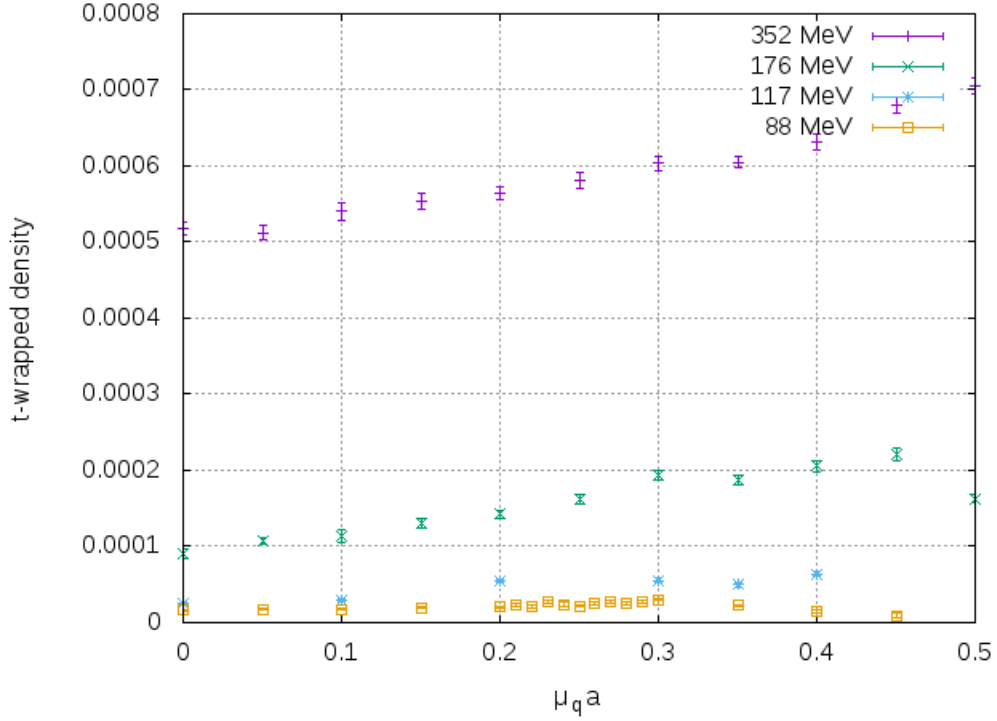


Рис. 6: Плотность монополей

циал взаимодействия убывает с расстоянием как

$$V(r) \sim \frac{e^{-m_D r}}{r} \quad (53)$$

где m_D - дебаевская масса, которая связана с характерной длиной экранирования

$$l \sim \frac{1}{m_D} \quad (54)$$

Похожий эффект ожидается в КХД для электрического и магнитного поля. Сначала разберемся с корректным определением дебаевской массы. Ее можно определить как асимптотическое поведение коррелятора петли Полякова [13]. Петля Полякова определяется как

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} P \exp(-ig \int_0^\beta d\tau A_0(\mathbf{x}, \tau)) \quad (55)$$

где P означает упорядочение вдоль траектории, а $\beta = \frac{1}{T}$. Коррелятор определяется как

$$C(R) = \langle L^\dagger(\mathbf{0})L(\mathbf{R}) \rangle - \langle L(\mathbf{0}) \rangle^2 \quad (56)$$

Чтобы посчитать статический коррелятор петли Полякова на больших R , нужно построить эффективную теорию. При больших температурах в статиче-

ском случае моно воспользоваться размерной редукцией. Действие

$$S = \int d^3\mathbf{x} \int_0^\beta dx_4 \left(\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 \right) \quad (57)$$

в статическом случае можно проинтегрировать по x_4 , тогда действие перейдет в

$$S_{EQCD} = \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{1}{4} \text{Tr}(G_{ij}G_{ij}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(D_i A_0 D_i A_0) + \frac{1}{2} m_E^2 \text{Tr}(A_0 A_0) + \delta L_{EQCD} \right) \quad (58)$$

где

$$G_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + ig_E [A_i, A_j] \quad (59)$$

$$D_i A_0 = \partial_i A_0 + ig_E [A_i, A_0] \quad (60)$$

с новой константой связи $g_E^2 = g^2(T)T$ Таким образом, при $T \rightarrow \infty$ статическая 4-х мерная КХД без фермионов эквивалентна 3-х мерной Евклидовой теории поля. Эта теория называется электростатическая КХД.

При этом, пертурбативные вычисления в главном порядке дают [16]

$$m_D = m_0 + O(g^2 T) \quad (61)$$

где

$$m_0 = \left(\frac{N_c}{3} + \frac{N_f}{6} \right)^{1/2} gT \quad (62)$$

Однако, поправка порядка $g^2 T$ непертурбативна и связана с высокотемпературным обменом магнитными глюонами с импульсом порядка $g^2 T$. При большом μ

$$m_D^E \sim g\mu \quad (63)$$

Отсюда можно заметить сходство между теориями при больших T и больших μ для электрического сектора.

Магнитная дебаевская масса - непертурбативная величина. Для нее нельзя получить результат из однопетлевого приближения. Однако, из размерных соображений можно предположить, что

$$m_D^M \sim g_E^2 \sim g^2 T \quad (64)$$

Наивно можно предположить, что сходство аналогичное электрическому сектору будет реализовываться и в магнитном, то есть

$$m_D^M \sim g^n \mu \quad (65)$$

при больших μ . Допустим, что

$$(m_D^M)^2 = c_1 g^4 T^2 + c_2 g^n \mu^2 \quad (66)$$

Вспомним, что $m_D = \frac{1}{l}$. Это привело бы к тому, что при увеличении μ увеличивалась бы m_D , а, следовательно, уменьшался l , который можно рассматривать как характерный размер объектов в системе или радиус экранирования. При этом уменьшалась бы плотность объектов в системе. Однако, как видно из графика, плотность монополей увеличивается с увеличением μ . Отсюда можно заключить, что вклад $g^2\mu$ в дебаевскую массу отсутствует. Почему же тогда происходит увеличение? При большом хим. g - бегущая константа связи, она зависит от масштаба. При большом μ константа связи должна браться на масштабе μ . При увеличении хим. потенциала $g(\mu)$ уменьшается из-за асимптотической свободы, поэтому масса уменьшается и плотность объектов в системе увеличивается, что находится в соответствии с работой [17].

4.5 Плотность траекторий, намотанных на пространственные направления

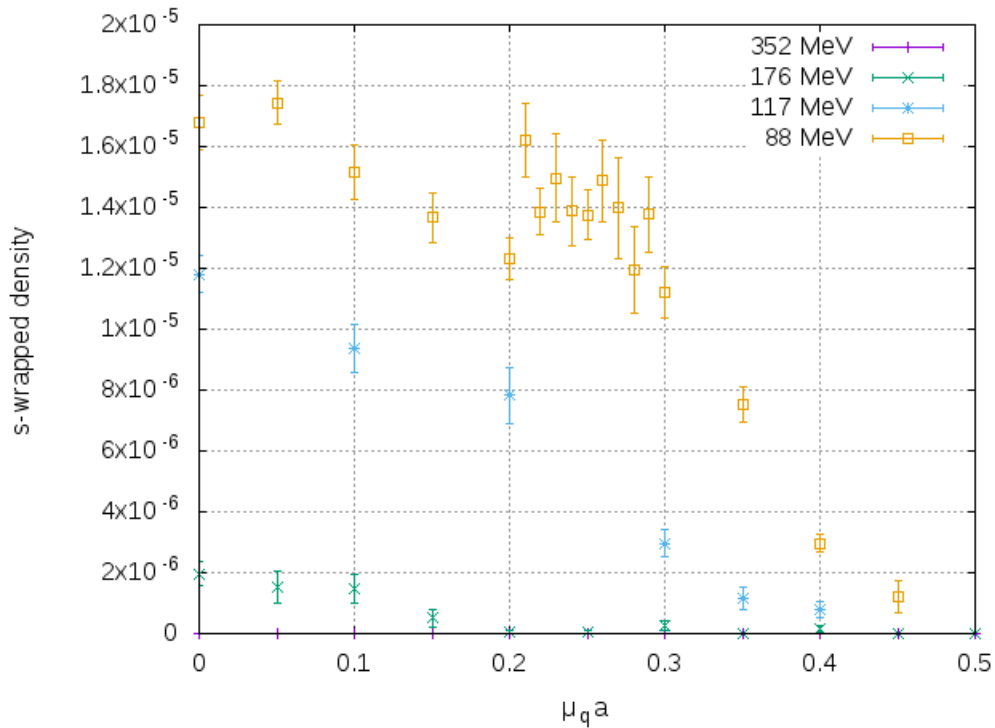


Рис. 7: Плотность траекторий, намотанных на пространственные направления

На рис. 7 изображена Плотность траекторий, намотанных на пространственные направления. Из графиков для 88 MeV и 117 MeV видно, что плотность почти монотонно убывает. Было бы разумно предположить, что это связано с экранированием в плотной среде.

4.6 Отношение длины кластера к его длине во временном направлении

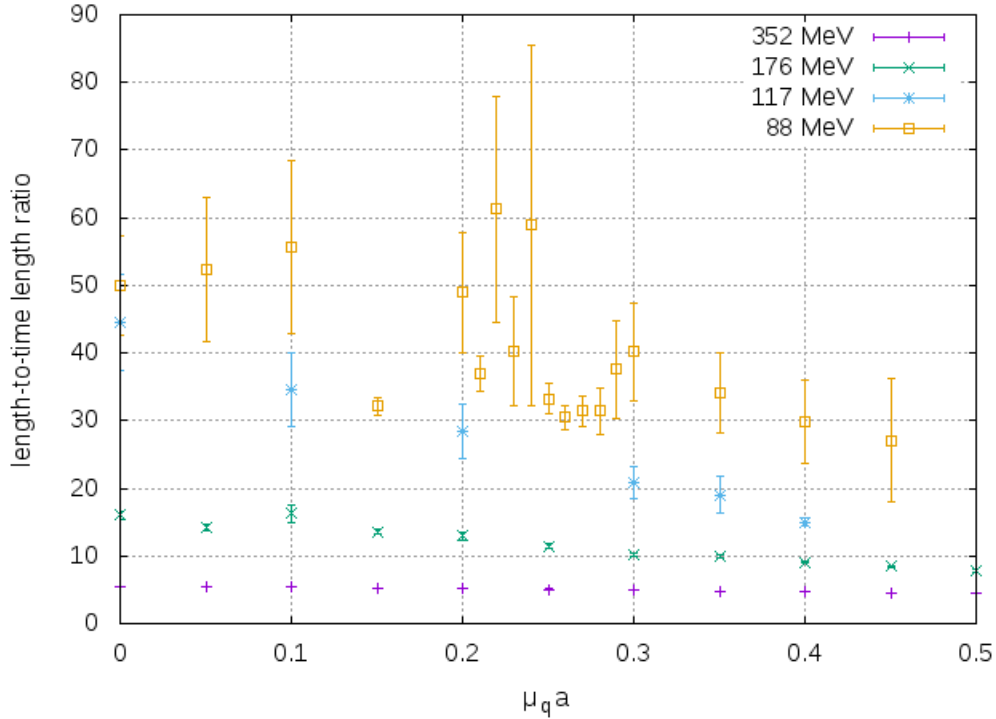


Рис. 8: Отношение длины кластера к его длине во временном направлении

На рис. 8 изображено отношение длины кластера к его длине во временном направлении. Из графика для 117 MeV видно, что отношение монотонно убывает. Это означает, что все большую долю длины траектории составляет часть, направленная вдоль времени, траектория выпрямляется. Хотя, для температуры 88 MeV имеются большие ошибки, можно наблюдать похожую тенденцию. Это соответствует тому, что монополи становятся более статичными, но не полностью стационарными объектами. В деконфайнменте при температурах 176 MeV и 352 MeV монополи практически не блуждают. Известно, что при $T \rightarrow \infty$ и $\mu = 0$ монополи становятся полностью статичными объектами, основной компонентной является магнитная. Есть предположение, что при большом хим. потенциале происходит похожий эффект. Однако, в данной работе не достигнуты достаточно большие значения μa , и только настоящие расчеты при больших хим. потенциалах покажут, что происходит в действительности.

Список литературы

- [1] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder: An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley, Reading 1995, ISBN 0-201-50397-2

- [2] Parisi G. Statistical Field Theory. — Addison-Wesley, 1988
- [3] Ding H.-T., Karsch F., Mukherjee S. Thermodynamics of strong-interaction matter from Lattice QCD // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. E24, no. 10. P. 1530007. [arXiv:hep-lat/1504.05274](https://arxiv.org/abs/1504.05274).
- [4] Philipsen O. The QCD phase diagram at zero and small baryon density [hep-lat/hep-lat/0510077](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0510077).
- [5] M.N. Chernodub and M.I. Polikarpov¹ Institute of Theoretical and Experimental Physics, B. Chermushkinskaya 25, Moscow, 117259, Russia, Abelian projection and monopoles, [arXiv:hep-th/9710205v3](https://arxiv.org/abs/hep-th/9710205v3) 25 Nov 1997
- [6] Alessio D'Alessandro, Massimo D'Elia and Edward V. Shuryak Dipartimento di Fisica, Università di Genova and INFN, Via Dodecaneso 33, 16146 Genova, Italy Department of Physics and Astronomy, State University of New York, Stony Brook NY 11794-3800, USA (Dated: February 22, 2010), [arXiv:1002.4161v1](https://arxiv.org/abs/1002.4161v1) [[hep-lat](https://arxiv.org/abs/hep-lat)] 22 Feb 2010
- [7] V. V. Braguta, E.-M. Ilgenfritz, A. Yu. Kotov, A. V. Molochkov, and A. A. Nikolaev, Study of the phase diagram of dense two-color QCD within lattice simulation
- [8] Vitaly Bornyakov, A.G. Kononenko, V.K. Mitrjushkin [arXiv:1312.4085v1](https://arxiv.org/abs/1312.4085v1) [[hep-lat](https://arxiv.org/abs/hep-lat)]
- [9] Montvay I., Muenster G., Quantum fields on a lattice, Cambridge University Press 1994
- [10] M.Creutz Quarks, Gluons and Lattices (Cambridge Univ. Press, 1983)
- [11] David Scheffler, Zwei-Farb Gitter-QCD im Staggered-Formalismus Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Dissertation von M.Sc. David Scheffler aus Siegen Tag der Einreichung: 26.05.2015, Tag der Prüfung: 20.07.2015 2015 — Darmstadt — D 17, Two-Color Lattice QCD with Staggered Quarks
- [12] J.B. Kogut, M.A. Stephanov, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, A. Zhitnitsky, Nucl.Phys. B582 (2000) 477, [hep-ph/0001171v2](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0001171v2)
- [13] Eric Braaten and Agustin Nieto, Department of Physics and Astronomy, Northwestern University, Evanston, Illinois 60208 (Received 5 October 1994)
- [14] Notices of the American Mathematical Society, Providence, RI: American Mathematical Society, 53 (5): 572–573 <http://www.ams.org/notices/200605/what-is-kesten.pdf>

- [15] [Kolmogorov's zero-one law](#)
- [16] Peter Arnold and Laurence G. Yaffe Department of Physics, University of Washington, Seattle, Washington 98195-1560 (Received 11 August 1995) Non-Abelian Debye screening length beyond leading order
- [17] D. T. Son, Center for Theoretical Physics, Laboratory for Nuclear Science and Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139 , published 6 April 1999