

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ КАК
АНДЕРСОВСКИЙ ПЕРЕХОД**

Научный руководитель,
д.ф.-м.н.

Горский.А.С

Дипломник

Литвинов М.В.

г. Долгопрудный, 2017

Содержание

1	Введение	3
2	D4-D8 и общие сведения о hard wall	3
3	КХД с температурой	5
4	Петля Вильсона	7
5	Переход Хокинга-Пейджа	8
6	Спектральный коррелятор	9
7	Матричные модели и голография	10
8	Качественная картина перехода	11
9	Заключение	14
	Список литературы	15

1 Введение

На сегодняшний день в квантовой хромодинамике существует большое количество нерешенных задач и проблем. Одной из таких задач является определение характера фазового перехода с восстановление киральной симметрии.

Более 10 лет назад было сделано предположение, что фазовый переход в КХД аналогичен фазовому переходу проводник-изолятор в физике твердого тела, если в качестве гамильтониана выбирать оператор Дирака в поле инстантон-антиинстантонных конфигураций. Гипотеза была подтверждена в решеточной КХД[5], однако нет никаких аналитических результатов в её пользу. Поэтому новый голографический взгляд на эту проблему представляется очень важным, так как это один из немногих аналитических подходов к режиму сильной связи.

Параметром порядка этой модели является спектральный коррелятор, level spacing distribution, а также Inverse Participation ratio. Мы будем пытаться исследовать фазовый переход в терминах спектрального коррелятора, потому что он является удобным кандидатом для наших целей.

2 D4-D8 и общие сведения о hard wall

Статистическая сумма КХД имеет вид:

$$Z_{QCD} = \int dA_\mu \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) \exp(-S_{YM}) \quad (2.1)$$

ADS/cft соответствие дает явный вид связи Yang-Mills константы связи и радиуса кривизны ADS

$$\frac{R^4}{4\pi\alpha^2} = \alpha_s N_c = N_c g_{ym} \quad (2.2)$$

в пределе $N \rightarrow \infty$

$$Z_{cft} = Z_{Asd5} = \exp^{-S_{grav} + O(l_s^2)} \quad (2.3)$$

Есть две возможности получить конфайнмент:

1. Жестко обрезать геометрию
2. Добавить дополнительное измерение, которое стягивается к нулевому размеру на каком-либо радиусе

Последуем второму варианту, тогда D4 brane Рис. 1

$$ds^2 = \left(\frac{u}{R_{D^4}}\right)^{\frac{3}{2}} [\eta_{\mu\nu} dX_\mu dX_\nu + f(u) d\theta^2] + \frac{u}{R_{D^4}} \left(\frac{u}{R_{D^4}}\right)^{-\frac{3}{2}} [du^2 / f(u) + u^2 d\Omega_4], f(u) = 1 - \left(\frac{u_\Lambda}{u}\right)^3 \quad (2.4)$$

$$\theta \simeq \theta + L_\Lambda, c L_\Lambda = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\frac{R_{D^4}^3}{u_\Lambda}} \quad (2.5)$$

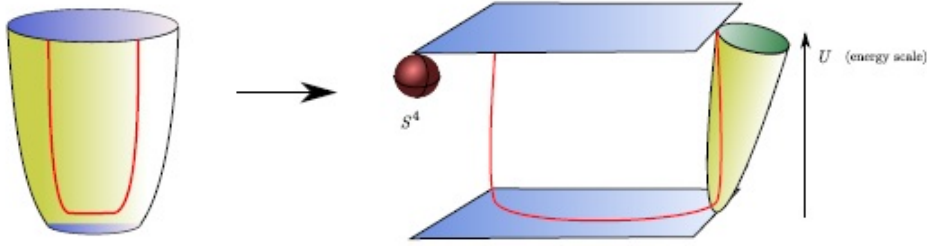


Рис. 1: геометрия 4 браны, вместо того чтобы вводить жесткое обрезание(левая), введем окружность координата на которой θ , которая стягивается в точку на конечном значении координаты.

Получив конфайнмент, вторая вещь которую мы должны получить это поля в фундаментальном представлении калибровочной группы. Чтобы это сделать мы должны добавить кроме фоновой супергравитации, некоторой число дополнительных "flavour" бран. Они вводят новые степени свободы, соответствующие струне, тянущейся от оригинальной браны до новых флейворных, что и является кварком. Также открытая струна, обоими концами заканчивающаяся на флейворных бранах, это мезонные состояния. Вложение бран будем осуществлять как на Рис. 2

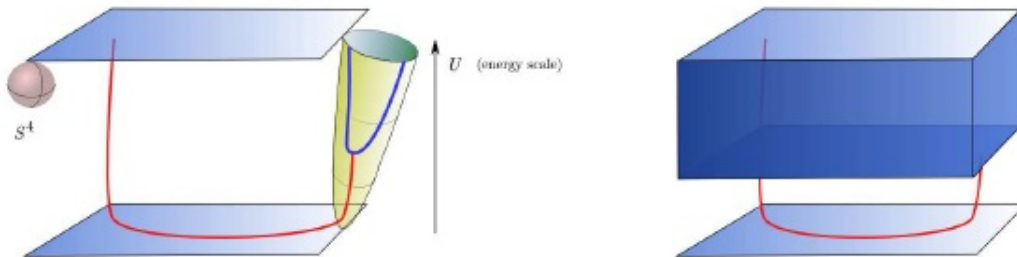


Рис. 2: D8 брана в модели Sakai-Sugimoto, которая полностью заполняет все пространство кроме одного направления

Действие для D-8 браны в бекграунде 2.4 дается

$$S_{D8} \propto \int d^4x d\theta \sqrt{f(u) + \frac{R_{D4}^3 (u')^2}{u f(u)}} \quad (2.6)$$

В этой модели есть два типа мезонов со спином меньше $J \leq 1$, они отвечают малым флуктуациям флейворной браны. И с большим спином, отвечающий длинной струне, которая имеет оба конца на флейворной бране. Векторные мезоны получаются, если взять действие:

$$S \propto \int d^5x e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha F_{\mu\nu})} \propto \int d^5x \sqrt{-g} F^2 + \dots \quad (2.7)$$

3 КХД с температурой

Для исследований будем использовать простую модель, в которой пространство обрезается "вручную" дополнительно не будем рассматривать динамику в S_4 . То есть модель живет в простейшем AdS_5 с обрезание по радиусу

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 - dx^\mu * dx_\mu}{z^2} \quad \text{Poincaré metric} \quad (3.1)$$

$$S = \int d^5x \sqrt{g} (|DX|^2 + 3X/R^2 + (F_L^2 + F_R^2)/4) \quad (3.2)$$

$$V = A_L + A_R$$

Сравните(2.4) Будем считать, что модель находится после перехода, то есть с черной дырой.

Плоская черная дыра имеет метрику

$$ds^2 = \frac{(r_0/L)^2}{u^2} (-h * dt^2 + d\vec{x}_3^2) + L^2 du^2 / hu^2; \quad h = 1 - u^4 \quad (3.3)$$

Чтобы избежать конической сингулярности необходимо сделать время периодическим, что эквивалентно $T = r_0/(\pi L^2)[3]$

$$\frac{\partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X)}{\sqrt{g}} = \frac{3X}{L^2} \quad (3.4)$$

Возле горизонта $u=1+\epsilon$ $T \gg T_{transition}$

$$X'' + X'/\epsilon + k\beta/16\epsilon^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + \beta^2/16; \beta = w/T \quad (3.6)$$

$$X \propto (1 - u)^{\pm iw/4\pi} \quad (3.7)$$

Возле черной дыры мы должны оставить только "входящие" волны. В подходящих координатах

$$ds^2 \propto f(r)(-dt^2 + dr^2) \quad (3.8)$$

$$u^* = \frac{\ln(1-u)}{4\pi T} \quad (3.9)$$

$$X \propto \exp -iw(t - u^*) \quad (3.10)$$

Нужное нам решение это $X \propto (1-u)^{-iw/4}$
Рассмотрим предел постоянной волны $\lim_{w \rightarrow 0} X$. Тогда возле черной дыры решение должно становиться константой

$$X'' + X'(-4u^3/h - 3/u) + 3X/(u^2h) = 0 \quad (3.11)$$

сделаем замену:

$$\begin{aligned} 1) x &= u^4 \\ 2) x &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

В итоге получим

$$X''z(1-z) + X'(1-2z) - X3/16 = 0 \quad (3.12)$$

это известная гипергеометрическая функция.

$$X(z) = z(m_{q2}F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{z^4}{z_T^4}) + cz^2{}_2F_1(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{z^4}{z_T^4})) \quad (3.13)$$

Позиция стенки фиксируется первым мезоном. До квадратичного порядка, опуская коммутатор

$$\partial_c(g^{ac}g^{bd}Fv, AB/u^5) \quad (3.14)$$

в простейшем пределе без черной дыры

$\lim_{r_0 \rightarrow 0}$ превращается

$$\partial_z \frac{\partial_z V_\mu}{z} + \frac{V_\mu \times q^2}{z} = 0 \quad (3.15)$$

В этом случае $J_0(u_m m_\rho) = 0 \implies u_m = 2$

$$ds^2 = \frac{L^2}{u^2}(hdt^2 - d\vec{x}_3^2 + du^2/h); \quad h = 1 - (ur_0/L^2)^4 \quad (3.16)$$

Это разложение решения вблизи черной дыры, посчитанное в пакет программ Wolfram Mathematica

$$\frac{\sqrt{\pi}(-\log(z-1) + i\pi - 2\gamma - 2\psi^{(0)}(\frac{3}{4}))}{2\Gamma(\frac{3}{4})^2} + O((z-1)^1) \quad (3.17)$$

$$\frac{\sqrt{\pi} \left(-\log(z-1) + i\pi - 2\gamma - 2\psi^{(0)}\left(\frac{1}{4}\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} + O((z-1)^1) \quad (3.18)$$

Как видно отсюда, для того чтобы на черной дыре было конечное значение решения необходимо, чтобы новая константа сигма стала отрицательна, что свидетельствует о восстановлении киральной симметрии.

4 Петля Вильсона

Проведем еще одно рассуждение, которое подтвердит восстановление симметрии. Найдем петлю Вильсона в теории на границе

$$J_\mu = \oint \delta(x^\mu - y^\mu(\lambda)) \frac{dy^\mu}{d\lambda} d\lambda \quad (4.1)$$

$$\delta S = \int d^4x A_\mu J^\mu \quad (4.2)$$

В дуальных моделях это соответствует струне (описание на рисунке Рис. 4)

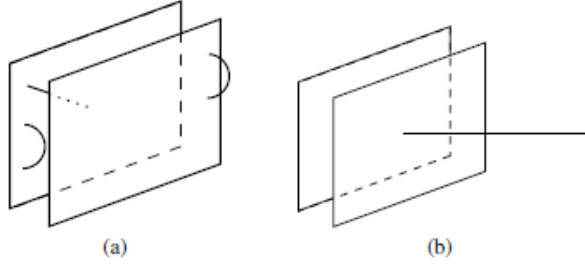


Рис. 3: Слева SU(N) калибровочная модель, так как струна может иметь концы на всех N бранах, Справа бесконечная струна "кварк"

$$E \propto \sqrt{g_{xx}g_{tt}}|_{r_m} * E(r) \quad (4.3)$$

В нашем случае подсчет петли происходит тривиальным образом, мы видим все режимы

1. Колумбовский потенциал до того как струна достигает стенки (положение поворота струны $r_m = L^2/R$) $E \propto \frac{1}{R}$
2. Струна ложится на обрезание и мы видим конфайнмент $E \propto R$
3. После перехода энергия горизонтальной струны, лежащей на границе $E=0$, поэтому мы наблюдаем зануление Поляковской петли, что сигнализирует о смене фазы, конфайнмент/деконфайнмент.

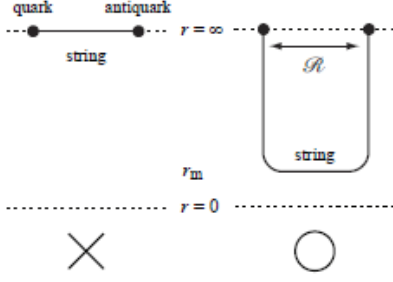


Рис. 4: Струна тянущуюся от браны к концу пространства и заполняющая всю временную координату

5 Переход Хокинга-Пейджа

Покажем на качественном уровне в самой простой модели, существования темпеарутры перехода между двумя геометриями, которая соответствует фазовому переходу конфайнмент/деконфайнмент. Будем полагать, что термодинамика фиксированна гравитационной частью действия. Что верно в случае больших N_c так как гравитационная часть скалируется квадратично, а мезонная линейно. Рассмотрим гравитационное действие с кривизной.

$$I = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5x \sqrt{g} \left(R + \frac{12}{L^2} \right). \quad (5.1)$$

Гравитационная константа $\lambda = g_c N_c \Rightarrow \kappa \sim g_s \sim 1/N_c$. Есть два решения этого уравнения, первое термальная адс с линейным элементом

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2}{z^2} \right) \quad (5.2)$$

где радиальная кордината протяжена от $z = 0$ до $z = z_0$. Второе решение это обрезанное ADS с черной дырой

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(f(z) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right), \quad (5.3)$$

где $f(z) = 1 - (z/z_h)^4$. Температура хокинга этого решения is $T = 1/(\pi z_h)$.

В обоих случаях, мы сделали время переодическим, таким образом ввели температуру, в случае черной дыры переодичность накладывается регулярно метрики около горизонта, $0 \leq t < \pi z_h$. В термальном случае на время нет никакого ограничения.

В обоих случаях кривизна решения $R = -20/L^2$ (показывается сверткой уравнения Эйнштейна) и на нем действие становится

$$I = \frac{4}{L^2 \kappa^2} \int d^5x \sqrt{g}, \quad (5.4)$$

то есть объемом всего пространства, умноженного на константу ¹.

Значения I для обеих метрик бесконечные, поэтому обрежем их на $z = \epsilon$. Для термального ADS, регуляризованное действие становится

$$V_1(\epsilon) = \frac{4L^3}{\kappa^2} \int_0^{\beta'} dt \int_{\epsilon}^{z_0} dz z^{-5} , \quad (5.5)$$

в тоже время для черной дыры в адсе, плотность становится

$$V_2(\epsilon) = \frac{4L^3}{\kappa^2} \int_0^{\pi z_h} dt \int_{\epsilon}^{\min(z_0, z_h)} dz z^{-5} . \quad (5.6)$$

Это V_i свободная энергия в теории поля $F = -T \ln Z = -TS$.

Мы сравним две геометрии на радиусе $z = \epsilon$, где периодичность по физическим причинам должна быть одна и таже. Другими словами, $\beta' = \pi z_h \sqrt{f(\epsilon)}$. После этой "настройки"

$$\begin{aligned} \Delta V &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (V_2(\epsilon) - V_1(\epsilon)) \\ &= \begin{cases} \frac{L^3 \pi z_h}{\kappa^2} \frac{1}{2z_h^4} & z_0 < z_h \\ \frac{L^3 \pi z_h}{\kappa^2} \left(\frac{1}{z_0^4} - \frac{1}{2z_h^4} \right) & z_0 > z_h \end{cases} . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Когда ΔV положительная (отрицательная), термальная AdS (the black hole) стабильна. Такак образом переход Хокинга-Пейджса происходит при температуре соответствующей $z_0^4 = 2z_h^4$, или

$$T_c = 2^{1/4} / (\pi z_0) . \quad (5.8)$$

Когда температура растет, термальная адс страновится нестабильной и черная дыра становится стабильной. На T_c , горизонт черной дыры формируется внутри адс между границей и инфракрасным обрезанием $z_h < z_0$.

6 Спектральный коррелятор

Спектральный коррелятор можно посчитать двумя способами

1. методом реплик

2. с помощью формулы $K(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{Z_{N_f+2}(i\lambda_1, i\lambda_2)}{Z}$

¹Также есть поверхностный вклад на $z \rightarrow 0$, но как отмечено в [7] исчезает для этого пространства.

Покажем первым, что в модели hard-wall коррелятор зануляется

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \sum \delta(\lambda_1 - E_{j1}) \delta(\lambda_2 - E_{j2}) \rangle = \quad (6.1)$$

$$\langle \sum \mathfrak{S} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_i - i\mu} \mathfrak{S} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_k - i\nu} \rangle \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{S} \partial_\mu \partial_\nu \ln \det(\lambda_1 - i\mathcal{D} - i\mu) \dots \quad (6.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \partial_x x^n = \ln x \Rightarrow \quad (6.4)$$

$$\ln \det(\lambda_1 - i\mathcal{D} - i\mu) = \lim_{n \rightarrow 0} \partial_n \det_n(\lambda_1 - i\mathcal{D} - i\mu) \quad (6.5)$$

В работе [4] было показано что такой детерминант с точностью до констант $e^{-(aCn(\mu+\lambda_i))}$, где C это конденсат. Отсюда видно, что выживает только член $-a\partial_\mu(C(\mu + \lambda_1))$ умноженный на аналогичный член от второго множителя. А это в свою очередь равно

$$\sum \langle \delta(\lambda_1 - E_{j1}) \rangle \langle \delta(\lambda_2 - E_{j2}) \rangle \quad (6.6)$$

7 Матричные модели и голография

$$e^{2i\pi(x_\mu)/f_\pi} = U(x_\mu) \quad (7.1)$$

Мы хотим получить

$$L = -1/2\Sigma Tr(MU + M^\dagger U^{-1}) + F^2/4Tr \partial^\mu U \partial_\mu U^{-1} \quad (7.2)$$

Берем $A = A_R - A_L$ в калибровке $A_z = 0$ в силу нарушение в модели аксиальной симметрии $A_\mu = A_\mu^\perp + \partial_\mu \phi$
 ϕ отвечает реальным физической частице π . Разложим матричную модель в ряд по π и примем для простоты, что в модели всего два кварка с равными массами тогда $M = \text{diag}(m, m)$ Кинетический член уже не раз был получен из голографии[4], попробуем получить массовый.

$$Tr(MU + M^\dagger U^{-1}) = \text{tr}(m(2 + 8t_a t_b \pi_a \pi_b / f_\pi)) = 2m + 16\pi^2 m / f_\pi + O(\pi^4) \quad (7.3)$$

Со стороны голографии

$$S \propto \int d^4 x dz (mz + \sigma z^3)^2 (\partial_\mu \psi)^2 \quad (7.4)$$

Если мы теперь разложим наше поле $\psi^a = \sum_n \psi^{a(n)}(x) f_\psi^{(n)}(z)$ и проинтегрируем всю динамику по оси z . Мы видим, что единственный член который мог дать вклад в массовое слагаемое имеет другой вид, пропорциональный кинетическому слагаемому.

8 Качественная картина перехода

Давайте опустим пространственно-временную зависимость U координаты. тогда нужная нам часть голографической геометрии это сигара в (r, ψ) координатах.

$$ds^2 = (r/R)^{3/2} f(r) d\phi^2 + (R/r)^{3/2} \frac{dr^2}{F(r)} \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_{kk}}{r}\right)^3 \quad (8.1)$$

Две матричные модели возникают таким образом. В первой модели N_f бран, которые соединены на кончике сигары и помещены в $\psi = 0, \pi$ на окружности. Таким образом мы имеем $N_f \times N_f$ матричную квантовую механику на мировом листе браны, где радиальная координата играет роль времени. Это дуальная версия кирального лагранжиана.

Вторая матричная модель появляется как инстантон-антиинстантонная жидкость, созданная D0 бранами. Инстантон живет на ϕ координате локализован на радиальной координате. Его позиция вдоль радиальной координаты связана с его размером σ . Плотность инстантонов зависит от размера $d(\sigma) \propto \sigma^{-5}$. Радиус круга зависит от радиальной координаты и может быть рассмотрен как бегущая константа связи и непостоянный дилатон. Одна форма C_1 меняется по окружности и дает θ зависимость действия от действия инстантона.[6]. Переменная ϕ играет роль термального времени в низкотемпературной фазе.

Традиционный спектральный формфактор касающийся коррелятора в энергетическом спектре или зависимость фурье преобразованного коррелятора в разные моменты времени. Здесь ситуация другая и настоящее время опущено, следовательно мы должны определить вид спектрального коррелятора, с которым мы имеем дело. Собственные значения оператора Дирака входят в сумму с фермионными массами, следовательно мы должны посчитать коррелятор двух детерминантов с разными флейворами. Что такое дуальная, в духе "Фурье переменная. В картине первичного квантования масса входит в комбинации с подходящей временной переменной. Другой путь получить некоторую интерпретацию - это использовать Дуальное фурье спектрального коррелятора как вероятность вернуться $p(\tau)$ в течение подходящего времени

$\tau[2]$

$$K(t) = \int dx e^{itx} R(x) \propto p(\tau) \quad (8.2)$$

С другой стороны мы знаем что подходящее время можете быть идентифицировано с радиальной координатой в AdS[9]. Радиальная координата имеет смысл RG scale в теории поля и стохастическое квантование на границе протекает следуя уравнению Ланжевена с Rg scale в качестве времени. Со стороны гравитации это соответствует уравнению Wheeler-DeWitt для гравитационного волнового функционала.

Следовательно у нас получается такая картинка. У нас есть AdS_2 геометрия с D8 баранами, локализованными в двух точках на границе и протянутая в объеме, где две стопки брат N_f D8 встречаются в центре (на кончике сигары). Когда они продолжают в балк они ударяются об большое количество инстантон-антиинстантонов расположенных на разных радиусах. Это должно дать хаотическое поведение, если мы рассматриваем RG время как аргумент фурье спектрального коррелятора

Есть два типа поведения для $K(t)$ в матричной модели, обсуждавшийся недавно[11]. Есть "спуск" который отвечает пертурбативному режиму в матричной модели для спектрально плотности

$$R_{pert}(x_1, x_2) \propto \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} K(t) \propto t \quad (8.3)$$

и плато когда инстантоны матричной модели приняты в счет, дающие \sin ядро

$$K(t) = const \quad (8.4)$$

Что же отвечает этим режимам в голографическом КХД? Из решеточных вычисление мы знаем что распределение уровней спектра оператора Дирака в кирально нарушенной фазе рождает край подвижности, разделяющий локализованную и делокализованную область собственных значений

$$\begin{cases} P_{deloc}(s) = A s e^{-Bs^2} & \text{ниже области подвижности, } \lambda_m \\ P_{loc}(s) = e^{-s} & \text{выше области подвижности, } \lambda_m \end{cases} \quad (8.5)$$

Это означает что мы ожидаем два режима для $K(t)$ также. Помня, что t отождествлена как радиальная координата в AdS_2 мы ожидаем две области по радиальной координате. Они, естественно, отождествлены, если мы вспомним что инстантоны намотаны на переодическую координату на сигаре и являются объектами с конечным натяжением и стянутся на конце сигары, где плотность инстантонов самая большая и сильно влияет на D8 браны. с Другой стороны, далеко от кончика сигры плтоность инстантонов мала.

Таким образом, мы ясно видим два различных режима по RG временной динамике для D8 динамики. Какая из них соответствует локализации и какая делокализации? Ответ следует из простого аргумента. Рассмотрим деконфайнмент когда киральная симметрия восстанавливается. Голографически Рис. 5. Сигара до фазового перехода превращается в цилиндр после. С другой стороны, точно в этот момент край подвижности "ударяется об начало"[12] и локализованные состояния пропадают. Таким образом, мы можем сказать что область $RG_{\text{времени}} = \text{радиальная координата}$ возле кончика сигары отвечает области Андерсовской локализации и край подвижности разделяет два режима RG времени. Суммируя, мы получили качественно удовлетворительную картину деконфайнмента как Андерсовского перехода для флейворных бран.

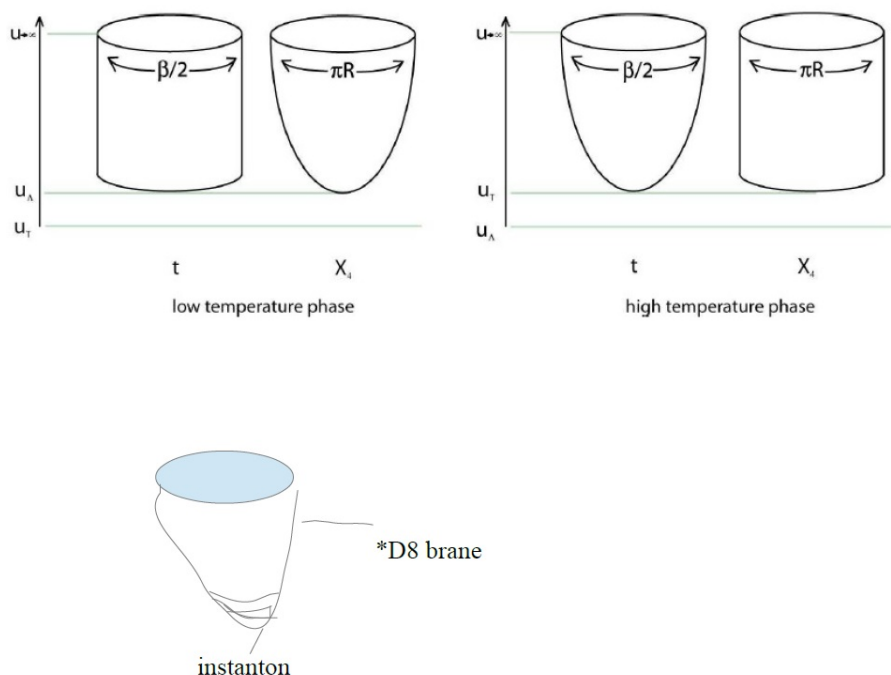


Рис. 5

9 Заключение

В данной работе были рассмотрены несколько вариантов голографических моделей, а также было показано, что модель жесткой стенки является слишком грубой для анализа данной задачи. Был исследован переход конфайнмент-деконфайнмент, посчитана Вильсоновская петля, являющаяся его критерием. Также показано наличие перехода между геометриями AdS_5 и черной дыры (переход Хокинга-Пейджа). Попытки свести модель жесткой стенки к матричной модели с массой на данный момент не увенчались успехом.

Были сделаны первые оценки, касающиеся более сложной модели Сакаи-Сугимото. Качественная картинка в этой же модели позволяет показать наличие интересующего нас перехода, но количественное описание не было освещено в этой работе. Обсуждена связь со спектральным формфактором, который может служить полезной величиной для анализа фазового перехода.

Список литературы

- [1] J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **50**, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/0003017]
- [2] R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, “Chiral random matrix models in QCD,” *Acta Phys. Polon. B* **29**, 3957 (1998) [hep-ph/9812376].
- [3] Makoto Natsuume , *User guide*, arXiv:1409.3575v4 [hep-th] 31 Aug 2016
- [4] P.N.Kopnin , *Low-energy theorems and spectral density of the Dirac operator in AdS/QCD*, arXiv:0907.1294 [hep-ph] 7 Jul 2009
- [5] Antonio M. Garcia-Garcia, James C. Osborn , *Chiral phase transition in lattice QCD as a metal-insulator transition*, arXiv:hep-lat/0611019 9 Mar 2007
- [6] E. Witten, “Theta dependence in the large N limit of four-dimensional gauge theories,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2862 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.81.2862 [hep-th/9807109].
- [7] S. W. Hawking and D. N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983).
- [8] Joshua Erlich, Emanuel Katz, Dam T. Son, Mikhail A. Stephanov, *QCD and a Holographic Model of Hadrons*, arXiv:hep-ph/0501128 20 Dec 2005
- [9] Rajesh Gopakumar (Harish-Chandra Research Institute) *From Free Fields to AdS* arXiv:hep-th/0308184 27 Aug 2003
- [10] Ofer Aharony, Jacob Sonnenschein, Shimon Yankielowicz *A holographic model of deconfinement and chiral symmetry restoration* arXiv:hep-th/0604161 24 Apr 2006
- [11] J. S. Cotler *et al.*, “Black Holes and Random Matrices,” *JHEP* **1705**, 118 (2017) doi:10.1007/JHEP05(2017)118 [arXiv:1611.04650 [hep-th]].
- [12] M. Giordano, T. G. Kovacs and F. Pittler, *Phys. Rev. Lett.* **112**, no. 10, 102002 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.112.102002 [arXiv:1312.1179]
T. G. Kovacs and R. A. Vig, “The localization transition in SU(3) gauge theory,” arXiv:1706.03562 [hep-lat].