Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

О голографической ренормализационной группе

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:
студент 321 группы
А. И. Лотков
Научный руководитель:
д. ф.-м. н., Э. Т. Ахмедов

Москва 2017

Содержание

1 Введение

Вилсоновская ренорм группа [8] является полезным инструментом для изучения различных явлений в КТП и статистической физике. Удобной формой вилсоновской ренорму группы является уравнения Польчинского [7]. Обычно эти уравнения сформулированы в скалярной теории поля.

Через некоторое время после открытия AdS/CFT соответствия [6] было понято, что уравнения ренорм группы со стороны конформной теории поля представляются классическими уравнениями движения в AdS [3]. После дальнейшего развития этой идеи стало ясно, что голография является общим феноменом при корректной формулировке вилсоновской ренорм группы в случае больших N [5].

Дополнительная размерность в гравитационной теории имеет естественную интерпретацию масштаба энергии в калибровочной теории [6](см. [4] для ревью). Более того уравнения движения в $(D+1)$-мерной теории можно соотнести с уравнениями ренорм группы для калибровочной теории [3].

В работах [2], [1] был рассмотрен случай матричной скалярной теории. Было сформулировано уравнение Польчинского для вилсоновской ренорм-группы. В случае больших N уравнения сводились к гамильтоновым. Было показано, что получившаяся система интегрируема.

Данная работа посвящана обобщению полученных результатов на случай M полей. В работе формулируется уравнения Польчинского для M матричных (N x N) скалярных полей. И далее они приводятся к гамильтонову виду.

2 Вывод уравнения Польчинского

Мы рассматриваем D-мерную евклидову теорию M матричных скалярных полей, со следующим действием:

$$S[\phi] = -\frac{N}{2}\sum_{k=1}^{M}\int \left(Tr[\partial_\mu \phi_k(x)\partial_\mu \phi_k(x)] + m^2 Tr[\phi_k(x)\phi_k(x)]\right) d^D x + NS_I, \tag{1}$$

где S_I имеет вид:

$$S_I = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\int J_{i_{(l)}}(x) Tr[\phi_{i_1}(x_1)...\phi_{i_l}(x_l)] d^D x_1 ... d^D x_l \tag{2}$$

$J_{i_{(l)}}$ - это источники. Мы включили только операторы с одним следом. Можно заметить, что мы записали таким образом источники для полного базиса операторов с одним следом с производными. Регуляризованное действие после преобразование Фурье:

$$S[\phi] = -\frac{N}{2}\int\limits_p Tr[\phi_k(p)(p^2+m^2)\phi_k(-p)K_\Lambda^{-1}(p^2)] + NS_I \tag{3}$$

$$S_I[\phi] = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\int_{k_{(l)}} Tr[\phi_{i_1}(k_1)...\phi_{i_l}(k_l)] J_{i_{(l)}}(k_1,...,k_l) \tag{4}$$

Здесь мы добавили обрезание по высоким импульсам: $K_\Lambda(p^2) \sim 1$ при $p^2 \ll \Lambda^2$, в то время, как $K_\Lambda(p^2) \to 0$ при $p^2 \gg \Lambda^2$. Кроме того, мы предполагаем, что $J_{i_{(l)}}(k_1,...,k_l) = 0$ для всех $\{i_l\}$ при $|k_l| > \lambda$, где λ некоторый низкий масштаб энергии, на котором мы смотрим нашу физику.

Далее мы выведем уравнение Польчинского для нашей теории. Функциональный интеграл для теории (1):

$$Z = \int D\phi \exp S[\phi, \Lambda, \{J\}] \tag{5}$$

Поставим условие, чтобы физика не зависила от обрезания:

$$\Lambda\frac{dZ}{d\Lambda} = 0 \tag{6}$$

Получим, что:

$$\Lambda\frac{dZ}{d\Lambda} = \int D\phi \exp S[\phi]\left(-\frac{N}{2}\int\limits_p Tr\left[\phi_k(p)(p^2+m^2)\phi_k(-p)\frac{dK_\Lambda^{-1}(p^2)}{d\Lambda}\right] + \right.$$
$$\left. + N\Lambda\frac{dS_I[\phi]}{d\Lambda}\right) = 0 \tag{7}$$

Теперь давайте проверим, что при следующем условии это уравнение выполняется (всюду далее суммирование по индексам i, j, k подразумевается):

$$\Lambda\frac{dS_I[\phi]}{d\Lambda} = -\frac{1}{2}\int\limits_p (p^2+m^2)^{-1}\Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\left[N^{-1}\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)} + \right. \tag{8}$$
$$\left. + \frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(-p)}\right]$$

Сначала сосчитаем:

$$\frac{\delta \exp S[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)} = \exp S[\phi]\left[-N(p^2+m^2)\phi_k^{ij}(-p)K_\Lambda^{-1}(p^2) + N\frac{\delta S_I}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\right]$$

$$\frac{\delta^2 \exp S[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ji}(-p)} = \exp S[\phi]\left[-N(p^2+m^2)K_\Lambda^{-1}(p^2) + N\frac{\delta^2 S_I}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)} + \right.$$
$$+ \left(-N(p^2+m^2)\phi_k^{ji}(-p)K_\Lambda^{-1}(p^2) + N\frac{\delta S_i}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\right)\times$$
$$\left.\times\left(-N(p^2+m^2)\phi_k^{ij}(p)K_\Lambda^{-1}(p^2) + N\frac{\delta S_i}{\delta\phi_k^{ji}(-p)}\right)\right]$$

Теперь давайте подставим (8) в (7):

$$\Lambda\frac{dZ}{d\Lambda} = \int D\phi \exp S[\phi] \int\limits_p \left(-\frac{N}{2}Tr\left[\phi_k(p)(p^2+m^2)\phi_k(-p)\frac{dK_\Lambda^{-1}(p^2)}{d\Lambda}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p^2+m^2)^{-1}\Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\left[N^{-1}\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)}+\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(-p)}\right]\right)=$$

$$=-\int\limits_p \Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\int D\phi \exp S\left(-\frac{1}{2}K_\Lambda^{-1}(p^2)+\frac{1}{2}K_\Lambda^{-1}(p^2)-\right.$$

$$-\frac{N}{2}\phi_k^{ij}(p)(p^2+m^2)\phi_k^{ji}(-p)K_\Lambda^{-2}(p^2)-$$

$$\left.-\frac{1}{2}(p^2+m^2)^{-1}\left[N^{-1}\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)}+\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(-p)}\right]\right)=$$

$$=-\int\limits_p \Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\int D\phi \exp S\left[-\frac{1}{2}K_\Lambda^{-1}(p^2)+K_\Lambda^{-1}(p^2)+\right.$$

$$+\phi_k^{ij}(p)K_\Lambda^{-1}(p^2)\left(-N(p^2+m^2)K_\Lambda^{-1}(p^2)\phi_k^{ji}(-p)+N\frac{\delta S_I}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2N}(p^2+m^2)^{-1}\left(-N(p^2+m^2)K_\Lambda^{-1}(p^2)+N\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ji}(-p)}+\right.$$

$$+\left(-N(p^2+m^2)\phi_k^{ji}(-p)K_\Lambda^{-1}(p^2)+N\frac{\delta S_I}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\right)\times$$

$$\left.\left.\times\left(-N(p^2+m^2)\phi_k^{ij}(p)K_\Lambda^{-1}(p^2)+N\frac{\delta S_I}{\delta\phi_k^{ji}(-p)}\right)\right)\right]=$$

$$=-\int\limits_p \Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\int D\phi\left[\left(-\frac{1}{2}K_\Lambda^{-1}(p^2)+K_\Lambda^{-1}(p^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \phi_k^{ij}(p)K_\Lambda^{-1}(p^2)\frac{\delta}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\frac{1}{2N}(p^2+m^2)^{-1}\frac{\delta^2}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ji}(-p)}\right)\exp S[\phi]\right]=$$

$$=-\int\limits_p \Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\int D\phi\frac{\delta}{\delta\phi_k^{ij}(p)}\left[\phi_k^{ij}(p)K_\Lambda^{-1}(p^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2N}(p^2+m^2)^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi_k^{ji}(-p)}\right]\exp S[\phi]+\int\limits_p \Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\int D\phi\left[\frac{1}{2}K_\Lambda^{-1}(p^2)\right]$$

Последнее слагаемое неинтересно, потому что оно не зависит от поля. А первое есть полная функциональная производная, поэтому получаем, что

$$\Lambda \frac{dZ}{d\Lambda} = 0 \tag{9}$$

Будем называть (8) уравнением Польчинского.

3 Получение уравнений в Гамильтоновой форме

Возьмем квантовое среднее от уравнения Польчинского:

$$\left\langle \Lambda \frac{dS_I[\phi]}{d\Lambda} \right\rangle = -\frac{1}{2} \int\limits_p (p^2+m^2)^{-1} \Lambda \frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda} \left\langle \left[N^{-1} \frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)} + \right.\right. \tag{10}$$
$$\left.\left. + \frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)} \frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(-p)} \right] \right\rangle$$

Среднее берется только по высокоэнергетическим модам. Мы представим $\phi(p)$ как сумму высокоэнергетический и низкоэнергетических мод $\phi(p) = \phi_0(p) + \varphi(p)$ и проинтегрируем по полю $\varphi(p)$. Здесь $\phi_0(p)$ решение уравнений движения, следующее из действия (1),а $\varphi(p)$ содержит моды между λ и Λ. Как мы увидим ниже, взятие среднего в уравнении выше необходимо для того, чтобы замкнуть систему уравнений для источников. Найдем $\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)\delta\phi_k^{ij}(-p)}$ и $\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)} \frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(-p)}$ для нашей теории. Найдем сначала:

$$\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k^{ij}(p)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i_{(l)}}^{M} \int\limits_{q_{(l)}} l(\phi_{i_1}(q_1)...\phi_{i_l}(q_l))^{ji} J_{k,i_{(l)}}(p, q_{(l)})$$

Отсюда можно видеть, что:

$$Tr\left[\frac{\delta^2 S_I[\phi]}{\delta\phi_k(p)\delta\phi_k(-p)}\right] = \tag{11}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{a=1}^{l} \sum_{i_{(a-1)}}^{M} \sum_{j_{(l-a)}}^{M} \int\limits_{q_{(a-1)}, r_{(l-a)}} (l+1) \cdot Tr[\phi_{i_1}(q_1)...\phi_{i_{a-1}}(q_{a-1})] \times$$
$$\times Tr[\phi_{j_1}(r_1)...\phi_{l-a}(r_{l-a})] J_{k,i_{(a-1)},k,j_{(l-a)}}(p, q_{(a-1)}, -p, r_{(l-a)}) =$$
$$= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{i_{(a)}}^{M} \sum_{j_{(b)}}^{M} \int_{q_{(a)}, r_{(b)}} (a+b+2) \cdot T_{i_{(a)}} T_{j_{(b)}} J_{k,i_{(a)},k,j_{(b)}}(p, q_{(a)}, -p, r_{(b)})$$

$$Tr\left[\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k(p)}\frac{\delta S_I[\phi]}{\delta\phi_k(-p)}\right] = \tag{12}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}} (l+1)\cdot(n+1) Tr[\phi_{i_1}(q_1)...\phi_{i_l}(q_l)\phi_{j_1}(r_1)\phi_{j_n}(r_n)]\times$$
$$\times J_{k,i_{(l)}}(p,q_{(l)}) J_{k,j_{(n)}}(-p,r_{(n)}) =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}} (l+1)\cdot(n+1) T_{i_{(l)},j_{(n)}} J_{k,i_{(l)}}(p,q_{(l)}) J_{k,j_{(n)}}(-p,r_{(n)})$$

Если подставить полученные выражения для вариаций S_I (11), (12) в (10), то в правой части получиться выражение с операторами, содержащими несколько следов. Кажется, что для того, чтобы замкнуть полученную систему нужно добавить в действие операторы, содержащие несколько следов. Это стандартный подход для вилсоновской ренорм группы: в итоге используется раскрытие операторного произведение и полнота базиса операторов.

Но в пределе больших N можно воспользоваться другим способом [5]. В этом пределе мы имеем следующее свойство: $\left\langle \prod\limits_n O_n \right\rangle = \prod\limits_n \langle O_n\rangle + O(\frac{1}{N^2})$, которое верно для любого действия, используемого для взятия квантового среднего $<\,..\,>$. Благодаря этому свойству при больших N можно выразить любой оператор из OPE алгебры как произведение односледовых операторов. Иными словами, в пределе больших N односледовые операторы образуют базис, в котором любые операторы из OPE алгебры могут быть выражены алгебраически. Теперь давайте посчитаем квантовые средние этих следов.

Квантовое среднее следа $Tr[(\phi_{0i_1}+\varphi_{i_1})...(\phi_{0i_n}+\varphi_{i_n})]$ по высокоэнергетическим модам может быть сведено к действию некого оператора на

$T_{i_{(l)}}(k_1, ..., k_l)$:

$$\left\langle \int\limits_{p_{(n)}} Tr\left[(\phi_{0i_1}(p_1) + \varphi_{i_1}(p_1))...(\phi_{0i_n}(p_n) + \varphi_{i_n}(p_n))\right] \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{p_{(n)}} \int D\varphi \exp S_0 Tr\left[(\phi_{0i_1}(p_1) + \varphi_{i_1}(p_1))...(\phi_{0i_n}(p_n) + \varphi_{i_n}(p_n))\right] =$$

$$= \int\limits_{p_{(n)}} \int D\varphi \exp S_0 \prod_{j=0}^{M} \exp\left[\int\limits_p \varphi_j(p) \frac{\delta}{\delta\phi_{0j}(p)}\right] Tr\left[\phi_{0i_1}(p_1)...\phi_{0i_n}(p_n)\right] =$$

$$= \hat{W}\left\{\int\limits_{p_{(n)}} Tr\left[\phi_{0i_1}...\phi_{0i_n}\right]\right\} = \hat{W}\left[\int\limits_{p_{(n)}} T_{i_{(n)}}(p_{(n)})\right],$$

где $S_0 = -\frac{N}{2}\int\limits_p Tr\left[\phi_k(p)(p^2+m^2)K_\Lambda^{-1}(p^2)\phi_k(-p)\right]$, и где

$$\hat{W} = \exp\left(\frac{1}{2N}\int\limits_p Tr\left[\frac{\delta}{\delta\phi_{0k}(p)}\frac{\delta}{\delta\phi_{0k}(-p)}\right] G_\Lambda(p)\right) \tag{13}$$

$G_\Lambda(p) = K_\Lambda(p^2)/(p^2+m^2)$ - это свободный пропагатор.

Так как в пределе больших N, мы можем пользоваться свойством факторизации, поэтому получаем:

$$\hat{W}\left[T_{i_{(l)}}(k_1, ..., k_l)T_{i_{(n)}}(p_1, ..., p_n)\right] = \hat{W}\left[T_{i_{(l)}}(k_1, ..., k_l)\right]\hat{W}T_{i_{(n)}}(p_1, ..., p_n)\Big] =$$
$$= \tilde{T}_{i_{(l)}}(k_1, ..., k_l)\tilde{T}_{i_{(n)}}(p_1, ..., p_n)]$$

Таким образом, получаем уравнение Польчинского в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\int\limits_{k_{(l)}} \tilde{T}_{i_{(l)}}(k_{(l)})\dot{J}_{i_{(l)}}(k_{(l)}) = -\frac{1}{2}\int\limits_p (p^2+m^2)^{-1}\Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\times \tag{14}$$

$$\times\left[N^{-1}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{i_{(a)}}^{M}\sum_{j_{(b)}}^{M}\int_{q_{(a)},r_{(b)}}(a+b+2)\cdot T_{i_{(a)}}T_{j_{(b)}}J_{k,i_{(a)},k,j_{(b)}}(p, q_{(a)}, -p, r_{(b)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}}(l+1)\cdot(n+1)T_{i_{(l)},j_{(n)}}J_{k,i_{(l)}}(p, q_{(l)})J_{k,j_{(n)}}(-p, r_{(n)})\right]$$

здесь точка обозначает дифференцирование по $d/d\log\Lambda$. Заметим, что $\tilde{T}$ зависит от Λ, потому что $\hat{W}$ зависит от Λ.

Уравнения еще не замкнуты, так как ренорм групповая динамика источников J зависит от значений $\tilde{T}$. Замкнуть систему можно также выведя ренорм групповые уравнения для $\tilde{T}$. Для того, чтобы вывести уравнение Польчинского в форме, представленной выше, мы использовали, что эффективное действие $W(J) = \log Z$ не зависит от импульса обрезания. Так как $W(J)$ - это эффективное действие, то $\tilde{T}_{i_{(l)}} = \delta W(J)/\delta J_{i_{(l)}}(k_{(l)})$ - это просто импульс, сопряженный источнику $J_{i_{(l)}}(k_{(l)})$ Поэтому мы можем сделать преобразование Лежандра от $W(J)$ к эффективному действию $I(\tilde{T}) = \left[\int \tilde{T} J - W(J)\right] |_{\tilde{T}=\delta W/\delta J}$. Последнее также не должно зависить от обрезания. Таким образом, из ренорм групповой инваринтности $I(\tilde{T})$ мы хотим получить сопряженное уравнение описывающее динамику $\tilde{T}$. Это в явном виде проверено в теории возмущений в [5].

Теперь перенесем все слагаемые в одну сторону в (14) (сделаем то же самое для сопряженного уравнения), затем приравняем нулю все члены перед каждым оператором $\tilde{T}_{i_{(l)}}$ (для сопряженного приравняем нулю член стоящий перед $J_{i_{(l)}}$). Тогда получим систему уравнений в гамильтоновой форме:

$$\dot{J}_{i_{(l)}}(k_{(l)}) = \frac{\delta H(J,\tilde{T})}{\delta \tilde{T}_{i_{(l)}}(k_{(l)})} \tag{15}$$

$$\dot{\tilde{T}}_{i_{(l)}}(k_{(l)}) = -\frac{\delta H(J,\tilde{T})}{\delta J_{i_{(l)}}(k_{(l)})}, \tag{16}$$

где гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned} H = &-\frac{1}{2}\int\limits_p (p^2+m^2)^{-1}\Lambda\frac{dK_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\times \qquad (17)\\ &\times\left[N^{-1}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{i_{(a)}}^{M}\sum_{j_{(b)}}^{M}\int_{q_{(a)},r_{(b)}}(a+b+2)\cdot\tilde{T}_{i_{(a)}}\tilde{T}_{j_{(b)}}J_{k,i_{(a)},k,j_{(b)}}(p,q_{(a)},-p,r_{(b)})+\right.\\ &\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}}(l+1)\cdot(n+1)\tilde{T}_{i_{(l)},j_{(n)}}J_{k,i_{(l)}}(p,q_{(l)})J_{k,j_{(n)}}(-p,r_{(n)})\right] \end{aligned}$$

Так как интересующая нас теория имеет полюс Ландау, все J (даже соответствующие маргинальным операторам) масштабируются в ноль в инфракрасном пределе при ренормгрупповом потоке. Поэтому оставим только источники, соответствующие операторам без производных. Так как преобразование Фурье от $\int J_{i_{(l)}}(x)Tr[\phi_{i_1}(x)...\phi_{i_l}]$ это $\int\limits_{k_{(l)}} Tr[\phi_{i_1}(k_1)...\phi_{i_l}(k_l)]J_{i_{(l)}}(-k_1-...-k_l)$, оставим только источники, зависящие от суммы k_l,а не от всех k_l по отдельности.

Теперь введем следующее определение:

$$\Pi_{i_{(l)}}(p) = \frac{1}{N}\int\limits_{p_{(l)}} \delta(p - p_1 - ... - p_l)\tilde{T}_{i_{(l)}} \tag{18}$$

Это определение отражает тот факт, что источники зависят только от суммы аргументов $\tilde{T}$. Получим гамильтониан:

$$\begin{aligned} H = &\int dq_1 dq_2 \times \\ &\times \left[\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{i_{(a)}}^{M}\sum_{j_{(b)}}^{M}\int_{q_{(a)},r_{(b)}} (a+b+2)\cdot \Pi_{i_{(a)}}(q_1)\Pi_{j_{(b)}}(q_2)J_{k,i_{(a)},k,j_{(b)}}(-q_1-q_2)+\right. \\ &\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}} (l+1)\cdot(n+1)\Pi_{i_{(l)},j_{(n)}}(q_1+q_2)J_{k,i_{(l)}}(-q_1)J_{k,j_{(n)}}(-q_2)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

T здесь соотносится с параметром обрезания следующим образом: $T = \int \frac{dpK_\Lambda(p^2)}{p^2+m^2}$.И применив обратное преобразование Фурье, получим в окончательном виде:

$$\begin{aligned} H = &\int dx \times \\ &\times \left[\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{i_{(a)}}^{M}\sum_{j_{(b)}}^{M}\int_{q_{(a)},r_{(b)}} (a+b+2)\cdot \Pi_{i_{(a)}}(x)\Pi_{j_{(b)}}(x)J_{k,i_{(a)},k,j_{(b)}}(x)+\right. \\ &\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_{(l)}}^{M}\sum_{j_{(n)}}^{M}\int\limits_{q_{(l)},r_{(n)}} (l+1)\cdot(n+1)\Pi_{i_{(l)},j_{(n)}}(x)J_{k,i_{(l)}}(x)J_{k,j_{(n)}}(x)\right] \end{aligned} \tag{20}$$

4 Заключение

Таким образом, мы смогли записать уравнение Польчинского для матричной скалярной теории поля при больших N в гамильтоновом виде. Конфигурационное пространство полученной $(D+1)$-мерной теории состоит из однοследовых операторов изначальной D-мерной теории. Наш результат не зависит от того, является ли рассматриваемая теория ренормализуемой или нет, и даже от наличия ультрафиолетовых расходимостей в ней.

Почему данное соотношение важно? Во-первых, оно явно демонстрирует, что, если сохранить все источники для подпространства полного OPE базиса, тогда ренорм группа становится голографической. Действительно, зная значения J и Π при каком-то энергетическом масштабе, можно при помощи гамильтоновых уравнений значения для любого другого масштаба.

Более того, несмотря на тот факт, что мы усредняем с помощью гауссовой квадратичной части действи при преобразования, мы сохраняем полную информацию о ренормгрупповом потоке теории.

Кроме того, в предыдущих работах было получено, что в случае одного матричного скалярного поля получающаяся гамильтонова система является интегрируемой. Для нашего случая нескольких полей были предприняты попытки также доказать интегрируемость системы, но тем не менее каких-то конкретных выводов получено не было. Это остается материалом для дальнейшей работы.

5 Приложение: расшифровка вводимых обозначений

В работе используются следующие сокращенные обозначения:

$$J_{i_1...i_l} := J_{i_{(l)}}$$

$$\sum_{i_{(l)}}^{M} := \sum_{i_1}^{M} ... \sum_{i_l}^{M}$$

$$\int\limits_{q_{(l)}} := \int dq_1 ... dq_l$$

$$T_{i_{(l)}} := Tr[\phi_{i_1} ... \phi_{i_l}]$$

$$\hat{W} T_{i_{(l)}} = \tilde{T}_{i_{(l)}}$$

Список литературы

[1] E. T. Akhmedov, I. B. Gahramanov, and E. T. Musaev. Hints on integrability in the Wilsonian/holographic renormalization group. *JETP Lett.*, 93:545–550, 2011.

[2] E. T. Akhmedov and E. T. Musaev. An exact result for Wilsonian and Holographic renormalization group. *Phys. Rev.*, D81:085010, 2010.

[3] Emil T. Akhmedov. A Remark on the AdS / CFT correspondence and the renormalization group flow. *Phys. Lett.*, B442:152–158, 1998.

[4] Emil T. Akhmedov. Introduction to the AdS / CFT correspondence. 1999.

[5] Emil T. Akhmedov. Notes on multitrace operators and holographic renormalization group. In *Workshop on Integrable Models, Strings and Quantum Gravity Chennai, India, January 15-19, 2002*, 2002.

[6] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

[7] Joseph Polchinski. Renormalization and Effective Lagrangians. *Nucl. Phys.*, B231:269–295, 1984.

[8] K. G. Wilson and John B. Kogut. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, 12:75–200, 1974.