Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической и экспериментальной физики

Выпускная квалификационная работа магистра

Динамика полюсов сингулярных решений обобщений иерархии КП и интегрируемые системы типа Калоджеро-Мозера

студента 121 группы
Пашкова В. О.
Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Забродин А. В.

Долгопрудный
2017

АННОТАЦИЯ

Взаимосвязь уравнения Кадомцева-Петвиашвили и системы Калоджеро-Мозера была установлена в конце 1970-ых годов и является одним из классических результатов теории интегрируемых систем. Суть этой взаимосвязи заключается в том, что полюса сингулярных решений уравнения КП движутся так, как если бы они являлись частицами системы Калоджеро с соответствующим потенциалом. Таким образом, зная, как движутся частицы системы Калоджеро, можно получить решения уравнения КП, и наоборот.

Данная же работа посвящена описанию такой взаимосвязи для иерархий КП/мКП и систем Калоджеро-Мозера и Руйсенаарса-Шнайдера в случае рациональных и тригонометрических решений, установлению их отличительных особенностей. В работе вводится не исследованное ранее в литературе подобное соответствие между обобщением иерархии КП — матричной иерархией КП — и спиновой системой Калоджеро для рационального случая.

Мы рассматриваем первую вспомогательную линейную задачу, строим анзац для функции Бейкера-Ахиезера, исходя из вида уравнения и того, что тау-функция представляет собой полином от x или e^x. В результате подстановки анзаца во вспомогательную линейную задачу и исключения полюсов второго и первого порядков, получаем переопределённую систему уравнений на коэффициенты. Условие её совместности представляет собой не что иное, как уравнение в форме Лакса системы Калоджеро. Расширение соответствия на уровень иерархии производится с использованием билинейного тождества и некоторых его следствий.

Работа носит сугубо теоретический характер. Однако, в связи с увеличением интереса к интегрируемым системам со стороны экспериментаторов в области квантовых симуляторов, ей возможно практическое применение в будущем.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было впервые показано, что движение полюсов рациональных решений уравнений Кортевега-де Фриза (KdV) и Буссинеска описывается многочастичной системой Калоджеро-Мозера (CM, [2]) с наложением некоторых дополнительных ограничений на конфигурации частиц. Впоследствии была обнаружена замечательная связь между динамикой полюсов рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили (KP) и рациональной системой CM в работе [3]. Изучение такого соответствия было мотивировано тем фактом, что иерархия KdV может быть рассмотрена в некотором смысле как иерархия KP при условии отсутствия динамики по временам с чётными номерами. В статье [3] был развит общий подход к построению рациональных решений уравнения KP, а также было показано, что положения полюсов таких решений x_k меняется с течением времени $t_2 = y$ так, будто это частицы рациональной системы CM. Развитием этой работы стало установление подобного соответствия для эллиптических решений уравнения KP в статье [4].

Естественным продолжением этой темы стало изучение динамики полюсов сингулярных решений модифицированной иерархии KP (mKP). Было установлено, что в данной ситуации имеет место аналогичная связь между рациональными решениями mKP и системой Руйсенаарса-Шнайдера (RS, [5]), представляющей собой релятивистский аналог системы CM. Исчерпывающий обзор этого вопроса приводится в статьях [6], [7] и [8].

Отметим, что изначально факт соответствия между KP/mKP и CM/RS был установлен только в отношении динамики сингулярностей по одному из времён. Доказательство того, что данное соответствие может быть расширено до уровня иерархий, впервые было получено в работе [10] для рациональных решений. Оказалось, что эволюция положений полюсов с течением старших времён определяется старшими же гамильнонианами системы CM. Этот результат был переформулирован и обобщён на случай рациональных решений иерархии mKP в статьях [11] и [6].

В данной дипломной работе была предпринята попытка установить соответствие между тригонометрическими решениями иерархии KP и системой CM. Также были рассмотрены тригонометрические решения иерархии mKP и исследована динамика полюсов этих решений с течением времени $t_1 = t$. Основным результатом дипломной работы является доказательство существования соответствия между матричной иерархией KP и спиновой системой CM в рациональном случае. Опять же, в статье [21] такое соответствие было изучено только для динамики по времени t_2. Прямое доказательство существования соответствия на уровне иерархий не было ранее представлено в литературе.

2 ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

2.1 Иерархия KP

Данный подраздел посвящён краткому описанию иерархии KP и в основном опирается на монографию [12].

Рассмотрим так называемый псевдо-дифференциальный оператор:

$$L = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \partial^{-k},\ \partial = \partial_{t_1} \equiv \partial_x. \tag{2.1.1}$$

Назовём его оператором Лакса. Как видно, это ряд Лорана по оператору ∂^{-1}. Композиция оператора обратной производной и произвольной функции определяется так:

$$\partial^{-1} \circ f(x) = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} + \dots$$

Более того, символ ∂^{-1} действует на экспоненту так же, как и обычная производная: $\partial^{-1} e^{xz} = \dfrac{1}{z} e^{xz}$.
Далее, введём пару вспомогательных линейных задач:

$$L\psi = z\psi; \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_m} = (L^m)_+ \psi;\ m = 1, 2, 3, \dots \tag{2.1.3}$$

Здесь под $(L^m)_+$ понимается правильная (неотрицательная) часть ряда Лорана оператора L^m. Полагая $m = 1$ в уравнении (2.1.3), получаем, что $\partial \equiv \partial_{t_1}$. Условия совместности линейных задач (2.1.2) и (2.1.3) представляют собой бесконечную цепочку нелинейных уравнений, определяющих динамику зависимых переменных $u_1, u_2, u_3, \dots$ с течением так называемых времён $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$, являющихся независимыми переменными. Данные условия совместности имеют форму уравнения Лакса и представляют собой уравнения иерархии KP:

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [(L^m)_+, L]. \tag{2.1.4}$$

Условия совместности последовательности уравнений (2.1.3) называются уравнениями Захарова-Шабата (представление нулевой кривизны):

$$[\partial_{t_m} - (L^m)_+, \partial_{t_n} - (L^n)_+] = 0. \tag{2.1.5}$$

К примеру, рассмотрим операторы

$$(L^2)_+ = \partial^2 + u;$$

$$(L^3)_+ = \partial^3 + \frac{3}{2} u \partial + w;$$

где $u = 2u_1, w = u_2$; тогда условие совместности системы

$$\begin{cases} \partial_{t_2} \psi = (L^2)_+ \psi; \\ \partial_{t_3} \psi = (L^3)_+ \psi \end{cases}$$

есть не что иное как уравнение КР в исторически первоначальной форме:

$$3u_{yy} + (-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 0,$$

с $t_1 \equiv x$, $t_2 = y$ и $t_3 = t$.

Решение линейных задач (2.1.2) и (2.1.3) можно выписать в виде формального ряда, называемого функцией Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \dots\right), \qquad (2.1.6)$$

где введено стандартное обозначение, применяемое в дальнейшем изложении:

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k. \qquad (2.1.7)$$

В таком случае, условия совместности уравнений (2.1.3) могут быть переписаны в терминах так называемого одевающего оператора:

$$K = 1 + \xi_1 \partial^{-1} + \xi_2 \partial^{-2} + \dots, \qquad (2.1.8)$$

а функция Бейкера-Ахиезера представляет собой результат действия этого оператора на экспоненту:

$$\psi(\mathbf{t}, z) = K e^{\xi(\mathbf{t}, z)}. \qquad (2.1.9)$$

Таким образом, оператор Лакса и его коэффициенты легко могут быть выражены через коэффициенты одевающего оператора:

$$L = K \circ \partial \circ K^{-1}. \qquad (2.1.10)$$

Одевающий оператор подчиняется следующему эволюционному уравнению, эквивалентному уравнению Лакса:

$$\partial_{t_m} K = -(K \circ \partial^m \circ K^{-1})_- K. \qquad (2.1.11)$$

Значит, вместо того чтобы работать с двумя различными наборами зависимых переменных $u_1, u_2, u_3, \dots$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, мы можем сфокусироваться на динамике только $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо также ввести сопряжённый одевающий оператор $K^\dagger = 1 - \partial^{-1}\xi_1 + \partial^{-2}\xi_2 - \dots$. Сопряжение определяется стандартным способом: $\partial^\dagger = -\partial$, $f^\dagger = f$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Сопряжённая функция Бейкера-Ахиезера даётся формулой:

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = (K^\dagger)^{-1} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)}, \qquad (2.1.12)$$

или, в терминах формального ряда,

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1^*}{z} + \frac{\xi_2^*}{z^2} + \dots\right). \qquad (2.1.13)$$

Сопряжённая функция Бейкера-Ахиезера удовлетворяет системе следующих вспомогательных задач:

$$L^{\dagger}\psi^* = z\psi^*; \tag{2.1.14}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t_m} = -(L^m)^{\dagger}_{+}\psi^*. \tag{2.1.15}$$

Эволюция набора переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ с течением времён $t_1, t_2, t_3, \dots$ может быть полностью описана при помощи единственной функции, называемой *тау*-функцией: $\tau = \tau(t_1, t_2, t_3, \dots)$. *Тау*-функция представляет собой решение так называемого билинейного уравнения Хироты. Если определить:

$$\mathbf{t} \pm [z] = \{t_1 \pm z, t_2 \pm \frac{1}{2}z^2, t_3 \pm \frac{1}{3}z^3, \dots\},$$

то тогда уравнение Хироты записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}(z_2 - z_3)\tau(\mathbf{t} + [z_1^{-1}])\tau(\mathbf{t} + [z_2^{-1}] + [z_3^{-1}]) + \\ + (z_3 - z_1)\tau(\mathbf{t} + [z_2^{-1}])\tau(\mathbf{t} + [z_3^{-1}] + [z_1^{-1}]) + \\ + (z_1 - z_2)\tau(\mathbf{t} + [z_3^{-1}])\tau(\mathbf{t} + [z_1^{-1}] + [z_2^{-1}]) = 0.\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Нетрудно показать, что вычет оператора Лакса выражается через *tau*-функцию согласно формуле:

$$u_1 = \partial^2 \log \tau(\mathbf{t}). \tag{2.1.17}$$

Билинейное уравнение Хироты можно рассматривать как следствие так называемого билинейного тождества:

$$\oint_{\mathcal{C}} \psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}', z)dz = 0, \tag{2.1.18}$$

выполняющегося для каждого набора времён $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$. Удобно переписать билинейное тождество, исходя из представления функций Бейкера-Ахиезера в виде формальных рядов:

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} w(\mathbf{t}, z) w^*(\mathbf{t}', z)dz = 0.$$

В этом тождестве контур интегрирования $\mathcal{C}$ должен охватывать все особенности множителя $e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)}$, но ни одну из особых точек произведения $w(\mathbf{t}, z)w^*(\mathbf{t}', z)$. Ясно, что данный контур должен включать в себя ∞, так как это существенно особая точка экспоненты, если $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ и хотя бы одно из времён отлично от нуля. Ещё одно важное утверждение, следующее из билинейного тождества – это формула Сато. Она выражает функцию Бейкера-Ахиезера в терминах *тау*-функции:

$$\psi(\mathbf{t}, z) = e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau(\mathbf{t} - [z^{-1}])}{\tau(\mathbf{t})}; \tag{2.1.19}$$

аналогично, для сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера имеем:

$$\psi^*(\mathbf{t}, z) = e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \frac{\tau(\mathbf{t} + [z^{-1}])}{\tau(\mathbf{t})}. \tag{2.1.20}$$

Формулу Сато можно понимать как определение *тау*-функции. В дальнейшем также будет использовано ещё одно следствие из билинейного тождества:

$$\partial_{t_m}\partial \log \tau(\mathbf{t}) = \operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m \psi(\mathbf{t}, z)\psi^*(\mathbf{t}, z)\right). \tag{2.1.21}$$

Эта формула получается дифференцированием билинейного тождества по t_m, выбором $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ и явным вычислением вычета.

2.2 Рациональные решения иерархии КР

В этом подразделе мы используем формализм функций Бейкера-Ахиезера для построения так называемых рациональных решений иерархии КР. Здесь мы следуем [3] и [9].

Фиксирование аналитических свойств функции Бейкера-Ахиезера на римановой сфере сразу определяет вид *тау*-функции иерархии, согласно формуле Сато. Мы стартуем с *тау*-функции вида

$$\tau(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N}\left(x - x_k(t_2, t_3, \dots)\right); \tag{2.2.1}$$

и затем шаг за шагом покажем, что эта *тау*-функция отвечает рациональным решениям иерархии КР, если динамика её нулей x_k с течением времён $t_2, t_3, \dots$ определяется гамильтонианами рациональной системы СМ. Мы ограничиваемся случаем, когда все нули *тау*-функции простые.

Рассмотрим вторую вспомогательную линейную задачу, определяющую зависимость функции Бейкера-Ахиезера от времени $t_2 = y$:

$$\partial_y \psi = \partial^2 \psi + u\psi; \tag{2.2.2}$$

где $u = 2u_1 = 2\partial^2 \log \tau$. В данном конкретном случае, используя (2.2.1), получаем:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{-2}{(x - x_k(y))^2}. \tag{2.2.3}$$

Применяя формулу Сато (2.1.19), легко сделать вывод о том, как должна выглядеть функция Бейкера-Ахиезера. Мы приходим к следующему полюсному анзацу:

$$\psi(x, y, z) = e^{xz + yz^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k(y, z)}{x - x_k(y)}\right). \tag{2.2.4}$$

На данном этапе все старшие времена полагаются равными нулю.
Подстановка выражений для u и ψ в (2.2.2) и приравнивание нулю коэффициентов при полюсах второго и первого порядков даёт, соответственно, систему уравнений:

$$c_k \dot{x}_k = -2 - 2zc_k - 2\sum_{i=1}^{N}\left((1 - \delta_{ik})\frac{c_i}{x_k - x_i}\right); \tag{2.2.5}$$

$$\dot{c}_k = -2\sum_{i=1}^{N}\left((1-\delta_{ik})\frac{c_k - c_i}{(x_k - x_i)^2}\right). \tag{2.2.6}$$

Полюса третьего порядка сокращаются автоматически. В дальнейшем под точкой мы будем понимать производную по второму времени: $\dot{x_k} = \partial_y x_k$.
Введём матрицы L and M:

$$L_{ki} = -\delta_{ki}\frac{\dot{x}_k}{2} - \frac{1-\delta_{ki}}{x_k - x_i}; \tag{2.2.7}$$

$$M_{ki} = -2\delta_{ki}\sum_{j=1}^{N}\frac{1-\delta_{kj}}{(x_k - x_j)^2} + 2\frac{1-\delta_{ki}}{(x_k - x_i)^2}; \tag{2.2.8}$$

тогда систему полученных уравнений можно записать в матричном виде:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = -\mathbf{1}; \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}; \end{cases} \tag{2.2.9}$$

где использованы обозначения:

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T; \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T.$$

Данная система переопределена. Получим её условие совместности. Так как явным вычислением показывается, что $M\mathbf{1} = 0$, имеем: $\dot{L}\mathbf{c} + L\dot{\mathbf{c}} = z\dot{\mathbf{c}}$; $\dot{L}\mathbf{c} + LM\mathbf{c} = zM\mathbf{c} = ML\mathbf{c}$. В результате получается уравнение Лакса:

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{2.2.10}$$

Оно эквивалентно системе динамических уравнений:

$$\ddot{x}_k = -8\sum_{i=1;\, i\neq k}^{N}\frac{1}{(x_k - x_i)^3}. \tag{2.2.11}$$

Это уравнения движения рациональной системы CM в форме Ньютона. Эта система была решена в [22] методом гамильтоновой редукции. Следовательно, мы показали, что динамика нулей *тау*-функции в зависимости от времени t_2 совпадает с движением частиц рациональной модели CM.

Отметим ещё один факт. Вводя параметр $\hbar$, можно формально перескалировать времена $t_k \to \dfrac{t_k}{\hbar}$ и рассмотреть $\hbar$-версию иерархии KP [13]. Если параметр $\hbar \to 0$, эта иерархия переходит в бездисперсионный предел иерархии KP. В случае рациональных решений $\hbar$-KP иерархии, $\hbar^2$ возникает естественным образом как константа связи в соответствующих уравнениях движения системы CM.

Далее, мы покажем, что динамика полюсов по временам $t_3, t_4, \ldots$ определяется старшими гамильтонианами рациональной системы CM. Этот результат в деталях обсуждается в работе [11].
Рассмотрим вспомогательное линейное уравнение на сопряжённую функцию Бейкера-Ахиезера:

$$-\partial_y\psi^* = \partial^2\psi^* + u\psi^*. \tag{2.2.12}$$

Используя формулу Сато (2.1.20), выпишем анзац для сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi^*(x,y,z) = e^{-(xz+yz^2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k^*(y,z)}{x - x_k(y)} \right). \tag{2.2.13}$$

Как и ранее, подстановка этого выражения в (2.2.12) и зануление коэффициентов при полюсах второго и первого порядков приводит к переопределённой системе:

$$c_k^* \dot{x}_k = 2 - 2zc_k^* - 2\sum_{i=1}^{N} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_i^*}{x_i - x_k} \right); \tag{2.2.14}$$

$$\dot{c}_k^* = 2\sum_{i=1}^{N} \left((1-\delta_{ik}) \frac{c_k^* - c_i^*}{(x_k - x_i)^2} \right); \tag{2.2.15}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} (\mathbf{c}^*)^T (zI - L) = \mathbf{1}^T; \\ (\dot{\mathbf{c}}^*)^T = -(\mathbf{c}^*)^T M. \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Запишем формально решения неоднородных уравнений в виде:

$$\mathbf{c} = -\left(\frac{1}{zI - L} \right) \mathbf{1};\ (\mathbf{c}^*)^T = \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{zI - L} \right). \tag{2.2.17}$$

Тогда, подставляя *тау*-функцию и функции Бейкера-Ахиезера в (2.1.21) и приравнивая коэффициенты перед полюсами второго порядка в левой и правой части тождества, получаем равенство:

$$\partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m (\mathbf{c}^*)^T E_{kk} \mathbf{c} \right); \tag{2.2.18}$$

где $(E_{mn})_{ki} = \delta_{mk}\delta_{ni}$. Обозначая $p_k = \frac{1}{2}\dot{x}_k$ (канонический импульс), после несложных выкладок можно убедиться в верности равенств:

$$\partial_{p_k} L = -E_{kk};\ \partial_{x_k} L = \frac{1}{2}[E_{kk}, M]. \tag{2.2.19}$$

Значит, используя выражения для $\mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}^*)^T$, первое уравнение из (2.2.19) и формулу для производной обратной матрицы $\partial_{p_k}\left((zI-L)^{-1}\right) = (zI-L)^{-1}(\partial_{p_k} L)(zI-L)^{-1}$, получаем в результате:

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \operatorname*{res}_{\infty} \left(z^m \mathbf{1}^T (zI-L)^{-1} \mathbf{1} \right) = \partial_{p_k} (\mathbf{1}^T L^m \mathbf{1}) = \partial_{p_k} \operatorname{Tr} \left(L^m\, \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \right).$$

Также имеет место быть важное тождество, связывающее матрицу Лакса и диагональную матрицу $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$[L, X] + I = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T. \tag{2.2.20}$$

В итоге имеем:

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \operatorname{Tr} L^m. \tag{2.2.21}$$

Заметим, что если выполняется уравнение Лакса (2.2.10), то тогда $\partial_y L^n = [M, L^n]$ для любого положительного n. Мы уже установили, что $\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \operatorname{Tr} L^m = -m \operatorname{Tr}(E_{kk} L^{m-1})$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\partial_{t_m}\dot{x}_k \equiv \partial_{t_m} p_k = -\frac{m}{2}\operatorname{Tr}(E_{kk}[M, L^{m-1}]) = -m \operatorname{Tr}(\frac{1}{2}[E_{kk}, M]L^{m-1}) = -\partial_{x_k}\operatorname{Tr} L^m. \tag{2.2.22}$$

(2.2.21) и (2.2.22) являются гамильтоновыми уравнениями. Они описывают динамику частиц системы СМ с течением старших времён. Генераторами трансляций выступают здесь старшие гамильтонианы:

$$\mathcal{H}_m = \operatorname{Tr} L^m. \tag{2.2.23}$$

Таким образом, установлено полное соответствие между динамикой полюсов рациональных решений иерархии КР и движением частиц рациональной системы СМ.

2.3 Иерархия mKP

Данный подраздел посвящён краткому обзору иерархии mKP. Мы увидим, что основные объекты и технические элементы здесь практически те же самые, что и в случае иерархии КР. Изложение ведётся по работам [16], [17].

Определим оператор Лакса. Иерархия mKP может быть рассмотрена как обобщение «половины» иерархии Тоды:

$$L = e^{\partial_s} + u_0 + u_1 e^{-\partial_s} + u_2 e^{-2\partial_s} + \dots \tag{2.3.1}$$

Как и ранее, уравнения иерархии формируют бесконечный набор уравнений Лакса и определяют эволюцию бесконечного числа функций $u_0, u_1, u_2, \dots$ в зависимости от дискретной переменной $t_0 \equiv s$ и непрерывных переменных $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$:

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [(L^m)_+, L],\ m = 1, 2, 3, \dots \tag{2.3.2}$$

Ясно, что эти уравнения представляют собой условия совместности пары вспомогательных линейных задач:

$$L\psi = z\psi; \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_m} = (L^m)_+\psi. \tag{2.3.4}$$

Как и для иерархии КР, можно выписать решение этих линейных уравнений, называемое также функцией Бейкера-Ахиезера, в терминах формального ряда:

$$\psi(s, \mathbf{t}, z) = z^s e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \left(1 + \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z^2} + \dots\right). \tag{2.3.5}$$

Далее, введём одевающий оператор:

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-k\partial_s} \tag{2.3.6}$$

и перепишем условия совместности (2.3.4). Так как

$$\psi(s,\mathbf{t},z) = Kz^s e^{\xi(\mathbf{t},z)}, \tag{2.3.7}$$

оператор Лакса тоже может быть выражен через одевающий оператор:

$$L = K \circ e^{\partial_s} \circ K^{-1}. \tag{2.3.8}$$

В то же время, уравнения Лакса предоставляют всю необходимую информацию об эволюции коэффициентов одевающего оператора:

$$\partial_{t_m} K = -(L^m)_- K = -(K \circ e^{m\partial_s} \circ K^{-1})_- K. \tag{2.3.9}$$

Подобным образом определим сопряжённую функцию Бейкера-Ахиезера:

$$\psi^*(s,\mathbf{t},z) = (K^\dagger)^{-1} z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t},z)}, \tag{2.3.10}$$

или, другими словами,

$$\psi^*(s,\mathbf{t},z) = z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t},z)} \left(1 + \frac{\xi_1^*}{z} + \frac{\xi_2^*}{z^2} + \dots\right). \tag{2.3.11}$$

Эта функция удовлетворяет системе вспомогательных линейных задач:

$$L^\dagger \psi^* = z\psi^*; \tag{2.3.12}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t_m} = -(L^m)_+^\dagger \psi^*. \tag{2.3.13}$$

Вместо того чтобы работать с функциями $u_0, u_1, u_2, \dots$, можно опять же обратиться к формализму *тау*-функции, решающей всю иерархию. Рассмотрим билинейное тождество:

$$\oint\limits_{\mathbb{C}_{[0,\infty]}} \psi(s,\mathbf{t},z)\psi^*(s',\mathbf{t}',z)dz = 0. \tag{2.3.14}$$

Принимая в расчёт выражения для функций Бейкера-Ахиезера в виде формальных рядов, билинейное тождество записывается следующим образом:

$$\oint\limits_{\mathbb{C}_{[0,\infty]}} z^{s-s'} e^{\xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}',z)} w(s,\mathbf{t},z) w^*(s',\mathbf{t}',z)dz = 0.$$

Контур интегрирования здесь охватывает разрез $[0,\infty]$ в комплексной плоскости таким образом, что внутрь этого контура не попадают никакие из сингулярностей произведения $w(s,\mathbf{t},z)w^*(s',\mathbf{t}',z)$. Билинейное тождество выполняется для любых наборов времён $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}'$, $s \geq s'$. Если же $s = s'$, то тождество переходит аналогичное равенство, имеющее место быть для иерархии КР.

Важным следствием из билинейного тождества являются формулы Сато, связывающие *тау*-функцию и функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(s,\mathbf{t},z) = z^s e^{\xi(\mathbf{t},z)} \frac{\tau(s,\mathbf{t}-[z^{-1}])}{\tau(s,\mathbf{t})};\ \psi^*(s,\mathbf{t},z) = z^{-s} e^{-\xi(\mathbf{t},z)} \frac{\tau(s,\mathbf{t}+[z^{-1}])}{\tau(s,\mathbf{t})}. \tag{2.3.15}$$

В дальнейшем мы также будем использовать тождество:

$$\partial_{t_m} \log\left(\frac{\tau(s+1,\mathbf{t})}{\tau(s,\mathbf{t})}\right) = \operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m \psi(s,\mathbf{t},z)\psi^*(s+1,\mathbf{t},z)\right). \tag{2.3.16}$$

Его вывод, приводимый в [6], основан на дифференцировании билинейного тождества по t'_m, подстановке $s' = s+1$, $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ и явном вычислении вычета, которое можно аккуратно проделать, рассмотрев аналитические свойства функций Бейкера-Ахиезера в комплексной плоскости z и их поведение в окрестностях 0 и ∞.
Выпишем также явно линейные задачи, определяющие эволюцию функции Бейкера-Ахиезера и сопряжённой к ней с течением времени t_1:

$$\partial_{t_1}\psi(s,\mathbf{t},z) = \psi(s+1,\mathbf{t},z) + u(s,\mathbf{t})\psi(s,\mathbf{t},z); \tag{2.3.17}$$

$$-\partial_{t_1}\psi^*(s,\mathbf{t},z) = \psi^*(s-1,\mathbf{t},z) + u(s-1,\mathbf{t})\psi^*(s,\mathbf{t},z); \tag{2.3.18}$$

где

$$u(s,\mathbf{t}) = \partial_{t_1}\log\frac{\tau(s+1,\mathbf{t})}{\tau(s,\mathbf{t})}. \tag{2.3.19}$$

2.4 Рациональные решения иерархии mKP

В данном подразделе мы кратко описываем результаты, касающиеся рациональных решений иерархии mKP, в основном детализируя вычисления, проделанные в работе [6].

Далее мы будем всюду обозначать $s \equiv x$. Рассмотрим *тау*-функцию в виде полинома, у которого все корни простые:

$$\tau(x,\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N}(x - x_k(\mathbf{t})). \tag{2.4.1}$$

Прежде всего мы исследуем динамику нулей *тау*-функции по времени $t_1 = t$. Все старшие времена полагаются на данном этапе равными нулю. Используя формулу Сато (2.3.15), получаем выражение для функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi(x,t,z) = z^x e^{tz}\left(1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k(t,z)}{x - x_k(t)}\right); \tag{2.4.2}$$

в то же время, (2.3.19) предоставляет формулу для «потенциала»:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\dot{x}_k}{x - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x - x_k + 1}\right),\ \dot{x}_k \equiv \partial_t x_k. \tag{2.4.3}$$

Подставляя эти выражения в (2.3.17) и приравнивая к нулю коэффициенты при полюсах в точках $x = x_k - 1$ и $x = x_k$, соответственно, получаем переопределённую систему уравнений:

$$zc_k - \sum_{i=1}^{N}\frac{c_i\dot{x}_k}{x_k - x_i - 1} = \dot{x}_k; \tag{2.4.4}$$

$$\dot{c}_k = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(c_k \dot{x}_i + c_i \dot{x}_k)(1-\delta_{ki})}{x_k - x_i} - \frac{c_k \dot{x}_i}{x_k - x_i + 1} - \frac{c_i \dot{x}_k}{x_k - x_i - 1} \right]. \tag{2.4.5}$$

Условие совместности этой системы легко выписать в матричных обозначениях. Введём:

$$L_{ki} = \frac{\dot{x}_k}{x_k - x_i - 1}; \tag{2.4.6}$$

$$M_{ki} = \delta_{ki} \sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \left(\frac{\dot{x}_j}{x_k - x_j} - \frac{\dot{x}_j}{x_k - x_j + 1} \right) + \\ + (1-\delta_{ki}) \left(\frac{\dot{x}_k}{x_k - x_i} - \frac{\dot{x}_k}{x_k - x_i - 1} \right); \tag{2.4.7}$$

$$X_{ki} = \delta_{ki} x_k; \tag{2.4.8}$$

тогда система принимает форму:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = \dot{X}\mathbf{1}; \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Получим теперь само условие совместности. Очевидно, дифференцирование первого уравнения по t приводит к цепочке равенств: $z\dot{\mathbf{c}} = zM\mathbf{c} = \dot{L}\mathbf{c} + LM\mathbf{c} + \ddot{X}\mathbf{1}$; с другой стороны, $zM\mathbf{c} = ML\mathbf{c} + M\dot{X}\mathbf{1}$. Поэтому условие совместности выглядит следующим образом:

$$(\dot{L} - [M, L])\mathbf{c} = (M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1}. \tag{2.4.10}$$

Предположим, что каждое x_k удовлетворяет системе уравнений:

$$\ddot{x}_k = \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{-2\dot{x}_k \dot{x}_i}{(x_k - x_i)((x_k - x_i)^2 - 1)}. \tag{2.4.11}$$

Тогда явное вычисление приводит к тому, что $(M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1} = 0$ и $\dot{L} = [M, L]$. Значит, если уравнение Лакса выполнено, система совместна в том смысле, что её уравнения имеют достаточно большой набор общих решений, образующих базис.

Система (2.4.11) есть уравнения движения в форме Ньютона для рациональной системы RS. Следовательно, мы установили, что нули *тау*-функции движутся вдоль x с течением времени $t_1 = t$ так, как если бы это были частицы системы RS.

Теперь перейдём к доказательству данного соответствия на уровне иерархий.

Используем формулу Сато (2.3.15), чтобы выписать анзац для сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера:

$$\psi^*(x, t, z) = z^{-x} e^{-tz} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k^*(t, z)}{x - x_k(t)} \right). \tag{2.4.12}$$

Как и ранее, подставляя это выражение в (2.3.18) и приравнивая к нулю коэффициенты при полюсах в точках $x = x_k + 1$ и $x = x_k$, получаем систему уравнений:

$$zc_k^* + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^* \dot{x}_k}{x_k - x_i + 1} = -\dot{x}_k; \tag{2.4.13}$$

$$-\dot{c}_k^* = c_k^* \sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \left(\frac{\dot{x}_j}{x_k - x_j - 1} - \frac{\dot{x}_j}{x_k - x_j} \right) + \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} c_i^* \left(\frac{\dot{x}_k}{x_i - x_k} - \frac{\dot{x}_k}{x_i - x_k - 1} \right). \quad (2.4.14)$$

Принимая во внимание, что выполняются уравнения движения в форме Ньютона (2.4.11), можно показать, что получившаяся система эквивалентна следующей матричной системе:

$$\begin{cases} (\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1}(zI - L) = -\mathbf{1}^T; \\ \partial_t((\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1}) = -(\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1} M. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Подстановка выражений для функций Бейкера-Ахиезера и для *тау*-функции в формулу (2.3.16) приводит к уравнению:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial_{t_m} x_k}{x - x_k} - \frac{\partial_{t_m} x_k}{x - x_k + 1} \right) = \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^{m-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{x - x_k} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^*}{x - x_i + 1} \right) \right].$$

Приравнивая коэффициенты при полюсах в точках $x = x_k$ и $x = x_k - 1$ из левой и правой части уравнения, получаем одно и то же условие (с учётом первых уравнений систем (2.4.9) и (2.4.15)):

$$\partial_{t_m} x_k = -\frac{1}{\dot{x}_k} \operatorname*{res}_{\infty}(z^m (\mathbf{c}^*)^T E_{kk} \mathbf{c}). \quad (2.4.16)$$

Формальные выражения для $\mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}^*)^T$ могут быть выписаны как решения соответствующих неоднородных уравнений:

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{zI - L} \right) \dot{X} \mathbf{1};\ (\mathbf{c}^*)^T = -\mathbf{1}^T \left(\frac{1}{zI - L} \right) \dot{X}. \quad (2.4.17)$$

В результате получаем соотношение:

$$\partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^m \operatorname{Tr} \left(\dot{X}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{zI - L} \right) E_{kk} \left(\frac{1}{zI - L} \right) \right) \right].$$

Прямое вычисление показывает, что матрица Лакса L обладает следующим важным свойством:

$$[X, L] = L + \dot{X}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T. \quad (2.4.18)$$

Заметим, что $[X, L] = -[X, zI - L] = -X(zI - L) + (zI - L)X$, в таком случае,

$$\operatorname{Tr} \left([X, L] \left(\frac{1}{zI - L} \right) E_{kk} \left(\frac{1}{zI - L} \right) \right) = \operatorname{Tr} \left([X, \frac{1}{zI - L}] E_{kk} \right) = \left([X, \frac{1}{zI - L}] \right)_{kk} = 0,$$

потому как X есть диагональная матрица и диагональная часть коммутатора равна нулю. Поэтому

$$\partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty} \left[\operatorname{Tr} \left(- \left(\frac{1}{zI - L} \right) E_{kk} L \left(\frac{1}{zI - L} \right) \right) \right].$$

Так как наша цель – получить уравнения движения для положений полюсов в виде уравнений Гамильтона, необходимо перейти от набора переменных x_k, $\dot{x}_k$ к каноническим переменным. Такой переход осуществляется по формулам:

$$p'_k = -\log(-\dot{x}_k) + \sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \log \left(\frac{x_k - x_j + 1}{x_k - x_j} \right);\ x'_k = x_k. \quad (2.4.19)$$

В дальнейшем мы будем опускать штрихи, то есть работать непосредственно с p_k и x_k. Легко показать, что $\frac{\partial}{\partial p_k} = -\dot{x}_k \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} = -\frac{\partial}{\partial(\log \dot{x}_k)}$. Кроме того, матрица Лакса обладает ещё одним свойством:

$$E_{kk} L = \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial(\log \dot{x}_k)}. \tag{2.4.20}$$

Поэтому

$$\partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial(\log \dot{x}_k)} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{zI - L} \right) z^m \right) = -\frac{\partial}{\partial(\log \dot{x}_k)} \operatorname{Tr} L^m = \partial_{p_k} \operatorname{Tr} L^m. \tag{2.4.21}$$

Далее, $\partial_{p_k} \operatorname{Tr} L^m = -m \operatorname{Tr}(E_{kk} L^m)$. Дифференцируя (2.4.21) по t и используя уравнение Лакса, можно получить формулу:

$$\partial_{t_m} \dot{x}_k = -m \operatorname{Tr}(E_{kk}[M, L^m]) = -m \operatorname{Tr}([E_{kk}, M] L^m).$$

Это уравнение остается неизменным при следующих заменах матрицы M: $M \to M + \alpha L + \beta A$, где A – произвольная диагональная матрица. Поэтому вместо исходной матрицы M мы будем использовать матрицу

$$M_{ki} \to M'_{ki} = (1 - \delta_{ki}) \frac{\dot{x}_k}{x_k - x_i}.$$

Дифференцирование выражения для канонического импульса p_k по времени t_m может быть записано таким образом:

$$\partial_{t_m} p_k = -\frac{\partial_{t_m} \dot{x}_k}{\dot{x}_k} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N} \left(\partial_{x_l} \log \left(\frac{x_k - x_j + 1}{x_k - x_j} \right) \partial_{t_m} x_l \right).$$

Комбинируя это выражение с формулами для $\partial_{t_m} x_k$ и $\partial_{t_m} \dot{x}_k$, получаем:

$$\partial_{t_m} p_k = m \operatorname{Tr} \left[\left(\frac{1}{\dot{x}_k} (L E_{kk} M' - M' E_{kk} L) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N} \left(\partial_{x_l} \log \left(\frac{x_k - x_j + 1}{x_k - x_j} \right) E_{ll} L \right) \right) L^{m-1} \right].$$

Рассмотрим матрицу $K^{(k)}$:

$$K^{(k)} = \left(\frac{1}{\dot{x}_k} (L E_{kk} M' - M' E_{kk} L) - \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N} \left(\partial_{x_l} \log \left(\frac{x_k - x_j + 1}{x_k - x_j} \right) E_{ll} L \right) \right).$$

Выпишем явно её матричные элементы:

$$K^{(k)}_{rq} = -L_{rq} \left[\delta_{rq} \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N} \left(\frac{1}{x_k - x_j + 1} - \frac{1}{x_k - x_j} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1 - \delta_{rk}}{x_k - x_q - 1} - \frac{1 - \delta_{kq}}{x_k - x_q} + \frac{1 - \delta_{kq}}{x_k - x_r + 1} - \frac{1 - \delta_{rk}}{x_k - x_r + 1} \right].$$

В терминах канонических координат, элементы матрицы Лакса записываются следующим образом:

$$L_{rq} = -\exp \left(-p_r - \log(x_r - x_q - 1) + \sum_{j=1;\, j \neq r}^{N} \log \left(\frac{x_r - x_j + 1}{x_r - x_j} \right) \right).$$

Прямое поэлементное вычисление показывает, что выполняется равенство:

$$\partial_{x_k} L + [C^{(k)}, L] = -K^{(k)};\ C^{(k)} = E_{kk} + \sum_{l=1;\, l\neq k}^{N} E_{ll}\left(\frac{1}{x_l - x_k + 1} - \frac{1}{x_l - x_k}\right).$$

Наконец, мы получаем второе уравнение Гамильтона:

$$\partial_{t_m} p_k = -m \operatorname{Tr}((\partial_{x_k} L + [C^{(k)}, L])L^{m-1}) = -\partial_{x_k} \operatorname{Tr} L^m. \tag{2.4.22}$$

Иными словами, мы показали, что движение полюсов рациональных решений mKP определяется гамильтонианами системы RS. Можно сказать, что в этом отношении имеется изоморфизм между данными интегрируемыми системами.

В заключение этого подраздела упомянем $\hbar$-версию иерархии mKP, введённую в работе [18]. Если формально перескалировать времена при помощи двух параметров, $\hbar$ и η, следующим образом: $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$, $k = 1, 2, \dots$ и $t_0 \to \frac{t_0}{\eta\hbar}$, то данные параметры появляются в соответствующих уравнениях движения нулей *тау*-функции. Первый параметр выступает в роли константы связи, в то время как второй представляет собой обратную скорость света в уравнениях движения системы RS.

2.5 Матричная иерархия KP

Этот подраздел литературного обзора даёт краткое описание матричной иерархии KP, являющейся обобщением иерархии KP.

Прежде всего, рассмотрим так называемую многокомпонентную иерархию KP ([19] и [20]). Она определяется следующим образом. Пусть имеется N бесконечных наборов независимых непрерывных переменных – времён:

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_N)^T,\ \mathbf{t}_\alpha = \{t_{\alpha 1}, t_{\alpha 2}, t_{\alpha 3}, \dots\},\ \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Положим также, что имеется N дискретных переменных, называемых зарядами:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T,\ \sum_{\alpha=1}^{N} s_\alpha = 0.$$

Тогда N-компонентная иерархия KP определяется через билинейные тождества как условия на *тау*-функцию $\tau(\mathbf{s}, \mathbf{t})$:

$$\sum_{\gamma=1}^{N} \epsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{s})\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{s}') \oint dz\, e^{\xi(\mathbf{t}_\gamma - \mathbf{t}'_\gamma, z)} z^{s_\gamma - s'_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\beta\gamma} - 2}\cdot$$

$$\tau(\mathbf{s} + \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\gamma; \mathbf{t} - [z^{-1}]_\gamma)\tau(\mathbf{s}' - \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\gamma; \mathbf{t}' + [z^{-1}]_\gamma) = 0 \tag{2.5.1}$$

для $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$. Здесь использована следующая нотация: $\mathbf{e}_\alpha$ есть вектор с 1 на позиции α и остальными элементами, равными нулю;

$$\epsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{s}) = \begin{cases} (-1)^{s_{\alpha+1} + \dots + s_\gamma},\ \text{если } \alpha < \gamma, \\ 1,\ \text{если } \alpha = \gamma, \\ -(-1)^{s_{\gamma+1} + \dots + s_\alpha},\ \text{если } \alpha > \gamma; \end{cases}$$

и
$$(\mathbf{t}-[z^{-1}]_\gamma)_{\alpha k}=t_{\alpha k}-\delta_{\alpha\gamma}\frac{z^{-j}}{j}.$$
Функция Бейкера-Ахиезера и сопряжённая к ней в случае N-компонентной иерархии КР представляют собой матрицы размера $N\times N$ с компонентами, определёнными по формулам:

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{s},\mathbf{t},z)=\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s})\frac{\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\beta,\mathbf{t}-[z^{-1}]_\beta)}{\tau(\mathbf{s},\mathbf{t})}z^{s_\beta+\delta_{\alpha\beta}-1}e^{\xi(\mathbf{t}_\beta,z)}; \tag{2.5.2}$$

$$\Psi^*_{\alpha\beta}(\mathbf{s},\mathbf{t},z)=\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s})\frac{\tau(\mathbf{s}-\mathbf{e}_\alpha+\mathbf{e}_\beta,\mathbf{t}+[z^{-1}]_\beta)}{\tau(\mathbf{s},\mathbf{t})}z^{-s_\beta+\delta_{\alpha\beta}-1}e^{-\xi(\mathbf{t}_\beta,z)}. \tag{2.5.3}$$

Это аналоги формул Сато, позволяющие переписать билинейное тождество в следующей форме:
$$\oint dz\,\Psi(\mathbf{s},\mathbf{t},z)\Psi^\dagger(\mathbf{s},\mathbf{t},z)=0;\ (\Psi^\dagger)_{\alpha\beta}=\Psi^*_{\beta\alpha}. \tag{2.5.4}$$
Функция Бейкера-Ахиезера может быть записана как формальный ряд:
$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{s},\mathbf{t},z)=\left(\delta_{\alpha\beta}+\sum_{j=1}^\infty\frac{(\xi_j)_{\alpha\beta}}{z^j}\right)z^{s_\beta}e^{\xi(\mathbf{t}_\beta,z)}=K_{\alpha\beta}e^{\xi(\mathbf{t}_\beta,z)}; \tag{2.5.5}$$

где K есть не что иное как одевающий оператор:

$$K_{\alpha\beta}=\left(\delta_{\alpha\beta}+\sum_{j=1}^\infty(\xi_j)_{\alpha\beta}\partial^{-j}\right)\partial^{s_\beta},\ \partial=\sum_{\alpha=1}^N\partial_{t_{\alpha1}}. \tag{2.5.6}$$

Используя одевающий оператор, определим оператор Лакса и проекторы:

$$L=K\partial K^{-1}=\partial+u_1\partial^{-1}+u_2\partial^{-2}+\ldots;\ P_\alpha=KE_{\alpha\alpha}K^{-1};\ \sum_{\alpha=1}^N P_\alpha=I. \tag{2.5.7}$$

Вспомогательная линейная задача для функции Бейкера-Ахиезера тогда имеет следующий вид:
$$\frac{\partial\Psi(\mathbf{s},\mathbf{t},z)}{\partial t_{\alpha m}}=(L^mR_\alpha)_+\Psi(\mathbf{s},\mathbf{t},z),\ \alpha=1,\ldots,N,\ m=1,2,3,\ldots \tag{2.5.8}$$

Приступим к рассмотрению собственно матричной иерархии КР. Это подиерархия многокомпонентной иерархии КР с некоторыми ограничениями на времена и заряды. Для каждого набора времён $\mathbf{t}_\alpha$ фиксируются «начальные» значения $\mathbf{t}_\alpha^{(0)}$ и предполагается, что времена меняются следующим образом:

$$t_{\alpha m}=t^{(0)}_{\alpha m}+t_m \text{ для каждого } \alpha \text{ и } m. \tag{2.5.9}$$

Другими словами, для фиксированного m эволюция по каждому из времён $t_{\alpha m}$, $\alpha=1,\ldots,N$ совпадает; остаётся одна независимая переменная t_m. Заряды же предполагаются постоянными; мы будем опускать зависимость функций Бейкера-Ахиезера от зарядов в дальнейшем. Соответственно, билинейное тождество для матричной иерархии КР записывается в виде:

$$\sum_{\gamma=1}^{N}\epsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{s})\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{s})\oint dz\, e^{\xi(\mathbf{t}_\gamma-\mathbf{t}'_\gamma,z)}z^{\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-2}\cdot$$
$$\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\gamma;\mathbf{t}-[z^{-1}]_\gamma)\tau(\mathbf{s}-\mathbf{e}_\beta+\mathbf{e}_\gamma;\mathbf{t}'+[z^{-1}]_\gamma)=0. \quad (2.5.10)$$

Вспомогательные линейные задачи переопределяются как суммы соответствующих линейных задач для многокомпонентной иерархии КР:

$$\frac{\partial\Psi(\mathbf{t},z)}{\partial t_m}=(L^m)_+\Psi(\mathbf{t},z),\ m=1,2,3,\dots \quad (2.5.11)$$

Выведем также полезное тождество для изучения зависимости от времён *тау*-функции матричной иерархии КР. Дифференцирование билинейного тождества (2.5.10) по t_m даёт два слагаемых. Первое содержит дополнительный фактор z^m, возникающий при дифференцировании экспоненты. Во втором слагаемом дифференцируется *тау*-функция. Выбрав $\mathbf{t}=\mathbf{t}'$ и $\alpha\neq\beta$, замечаем, что вычет отличен от нуля только когда $\gamma=\alpha$ или $\gamma=\beta$, потому что в противном случае разложение подынтегрального выражения в ряд Лорана начинается как минимум с z^{-2}. Следовательно,

$$\sum_{\gamma=1}^{N}\epsilon_{\alpha\gamma}(\mathbf{s})\epsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{s})\oint dz\, z^{\delta_{\alpha\gamma}+\delta_{\beta\gamma}-2}\cdot(\partial_{t_m}\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\gamma;\mathbf{t}-[z^{-1}]_\gamma))\tau(\mathbf{s}-\mathbf{e}_\beta+\mathbf{e}_\gamma;\mathbf{t}+[z^{-1}]_\gamma)=$$
$$=\epsilon_{\beta\alpha}(\mathbf{s})(\partial_{t_m}\tau(\mathbf{s},\mathbf{t}))\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\beta)+\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s})(\partial_{t_m}\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\beta,\mathbf{t}))\tau(\mathbf{s},\mathbf{t}).$$

Используя антисимметрию символа $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{s})$ и определения функций Бейкера-Ахиезера, получаем:

$$\sum_{\gamma=1}^{N}\oint dz\, z^m\Psi_{\alpha\gamma}(\mathbf{t},z)\Psi^*_{\beta\gamma}(\mathbf{t},z)=-\partial_{t_m}\left(\frac{\tau(\mathbf{s}+\mathbf{e}_\alpha-\mathbf{e}_\beta,\mathbf{t})}{\tau(\mathbf{s},\mathbf{t})}\right)=-\partial_{t_m}(\xi_1)_{\alpha\beta};\ \alpha\neq\beta. \quad (2.5.12)$$

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1 Тригонометрические решения иерархии КР

В этой главе мы переходим к описанию полученных результатов. Изложение начинается с вычислений, касающихся тригонометрических решений КР.

Выберем подходящую *тау*-функцию. Это есть многочлен от $e^{\gamma x}$ с N попарно различными корнями на каждом отрезке длины $2\pi/\gamma$ вдоль мнимой оси. Такая *тау*-функция описывает N-параметрическое семейство периодических N-солитонных решений иерархии КР. С точностью до «калибровочного» экспоненциального фактора, *тау*-функция имеет вид:

$$\tau(\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N} \sinh[\gamma(x - x_k)],\ x_k = x_k(t_2, t_3, \dots). \tag{3.1.1}$$

Тогда потенциальная функция записывается следующим образом:

$$u(x, y) = -2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma^2}{\sinh^2[\gamma(x - x_k)]}. \tag{3.1.2}$$

Возьмём в качестве анзацей для функции Бейкера-Ахиезера и ей сопряжённой выражения:

$$\psi = e^{xz+yz^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \gamma c_k \frac{e^{\gamma(x-x_k)}}{\sinh[\gamma(x - x_k)]}\right); \tag{3.1.3}$$

$$\psi^* = e^{-(xz+yz^2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \gamma c_k^* \frac{e^{-\gamma(x-x_k)}}{\sinh[\gamma(x - x_k)]}\right). \tag{3.1.4}$$

Подстановка этих выражений вместе с потенциалом во вспомогательные линейные уравнения и зануление коэффициентов при полюсах второго и первого порядков приводят к переопределённой системе уравнений. Для линейного уравнения на функцию Бейкера-Ахиезера, приравнивание к нулю коэффициентов при $\dfrac{1}{\sinh^2[\gamma(x - x_k)]}$ приводит к уравнениям:

$$c_k \frac{\dot{x}_k}{2} = -\gamma c_k - z c_k - 1 - \gamma \sum_{i=1;\, i \neq k}^{N} \frac{e^{\gamma(x_k - x_i)}}{\sinh[\gamma(x_k - x_i)]} c_i; \tag{3.1.5}$$

в то время как аналогичная операция с коэффициентами при $\dfrac{e^{\gamma(x-x_k)}}{\sinh[\gamma(x - x_k)]}$ даёт уравнения:

$$\dot{c}_k = -2\gamma^2 c_k \sum_{j=1;\, j \neq k}^{N} \frac{1}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_j)]} + 2\gamma^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1 - \delta_{ki}}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]} c_i. \tag{3.1.6}$$

Если ввести матрицы L и M с элементами

$$L_{ki} = -\delta_{ki}\left(\frac{\dot{x}_k}{2} + \gamma\right) - (1 - \delta_{ki})\gamma \frac{e^{\gamma(x_k - x_i)}}{\sinh[\gamma(x_k - x_i)]}; \tag{3.1.7}$$

$$M_{ki} = -2\delta_{ki}\gamma^2 \sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \frac{1}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_j)]} + 2\gamma^2 \frac{1-\delta_{ki}}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]}; \tag{3.1.8}$$

то эти уравнения переписываются в матричном виде:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = -\mathbf{1}; \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}; \end{cases} \tag{3.1.9}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T$ и $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Подобным образом, в случае сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера, для полюсов второго порядка $\dfrac{1}{\sinh^2[\gamma(x - x_k)]}$ имеем:

$$-c_k^* \frac{\dot{x}_k}{2} = zc_k^* + \gamma c_k^* - 1 + \gamma \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} c_i^* \frac{e^{\gamma(x_i - x_k)}}{\sinh[\gamma(x_i - x_k)]}. \tag{3.1.10}$$

Для полюсов первого порядка $\dfrac{e^{-\gamma(x-x_k)}}{\sinh[\gamma(x - x_k)]}$ получаем уравнения:

$$\dot{c}_k^* = \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{2\gamma^2(c_k^* - c_i^*)}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]}. \tag{3.1.11}$$

В матричном виде, используя тот факт, что $M = M^T$, записываем:

$$\begin{cases} (\mathbf{c}^*)^T(zI - L) = \mathbf{1}^T; \\ \partial_y(\mathbf{c}^*)^T = -(\mathbf{c}^*)^T M. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Условие совместности для обеих систем представляет собой уравнение в форме Лакса:

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{3.1.13}$$

Явное вычисление производной матрицы Лакса и коммутатора показывает, что положения полюсов x_k должны удовлетворять системе уравнений Ньютона:

$$\ddot{x}_k = -8\gamma^3 \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} \frac{\coth[\gamma(x_k - x_i)]}{\sinh^2[\gamma(x_k - x_i)]}. \tag{3.1.14}$$

Следовательно, мы установили, что динамика полюсов тригонометрических решений по времени t_2 описывается уравнениями движения тригонометрической системы CM. Теперь обратимся к вопросу о том, имеется ли подобное соответствие между иерархиями. Как и в случае рациональных решений, основным техническим инструментом является тождество (2.1.21). Подстановка выражений для функции Бейкера-Ахиезера, ей сопряжённой и *тау*-функции в это тождество и приравнивание коэффициентов при полюсах вида $\dfrac{1}{\sinh^2[\gamma(x - x_k)]}$ в левой и правой частях уравнения позволяет заключить, что:

$$\partial_{t_m} x_k = \operatorname*{res}_{\infty}(z^m (\mathbf{c}^*)^T E_{kk}\mathbf{c}) = \operatorname*{res}_{\infty}\left(z^m \mathbf{1}^T \left(\frac{1}{zI - L}\right)(-E_{kk})\left(\frac{1}{zI - L}\right)\mathbf{1}\right).$$

Если ввести канонический импульс согласно формуле $p_k = \dfrac{\dot{x}_k}{2} + \gamma$, то прямым вычислением показывается, что

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -E_{kk};\ \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2}[E_{kk}, L]. \tag{3.1.15}$$

Следовательно, мы получаем уравнение:

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \operatorname{Tr}(L^m \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T).$$

Матрица Лакса L удовлетворяет следующему тождеству:

$$I + \frac{1}{2\gamma}(U^{-1}LU - L) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T;\ U = \operatorname{diag}(e^{2\gamma x_1}, e^{2\gamma x_2}, \ldots, e^{2\gamma x_N}). \tag{3.1.16}$$

В результате имеем:

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \operatorname{Tr}\left(L^m + \frac{1}{2\gamma}(U^{-1}LUL^m - L^{m+1})\right). \tag{3.1.17}$$

Очевидно, что это выражение отличается от аналогичного, полученного в случае рациональных решений. Более того, явное вычисление показывает, что для тригонометрической матрицы Лакса

$$\operatorname{Tr}(L^m \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T) \neq \operatorname{Tr} L^m,$$

по крайней мере, для $m = 1, 2, 3$. Далее, дифференцируя тождество (2.1.21) по y, получаем:

$$\frac{1}{2}\partial_{t_m} \dot{x}_k = \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^m(\partial_y(\mathbf{c}^*)^T E_{kk}\mathbf{c} + (\mathbf{c}^*)^T E_{kk}\partial_y \mathbf{c})\right] = \operatorname*{res}_{\infty} \left[z^m \left((\mathbf{c}^*)^T \left(\frac{1}{2}[E_{kk}, M]\right) \mathbf{c}\right)\right].$$

Используя выражения для $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}^*$ и формулу производной обратной матрицы, находим, что:

$$\partial_{t_m} p_k = -\partial_{x_k} \operatorname{Tr}\left(L^m \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T\right) = -\partial_{x_k} \operatorname{Tr}\left(L^m + \frac{1}{2\gamma}(U^{-1}LUL^m - L^{m+1})\right). \tag{3.1.18}$$

Следовательно, в общем случае нельзя говорить о том, что динамика полюсов в тригонометрическом случае определяется старшими гамильтонианами системы CM. Имеются некоторые указания, что за эволюцию положения полюсов ответственны скорее некоторые линейные комбинации этих гамильтонианов.

В заключение этого подраздела процитируем некоторые результаты относительно тригонометрических решений иерархии KP, представленные в литературе. В работе [14] было показано, что если тройка матриц X, Y, Z удовлетворяет условию

$$\operatorname{rank}(XZ - YX) = 1,$$

то тогда *тау*-функция вида

$$\tau(\mathbf{t}) = \det(I + Xe^{g(Z)}e^{-g(Y)}),\ \text{где } g(A) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j A^j,$$

является решением иерархии KP. В статье [15] доказано, что выбор в качестве $Y = Z - I$ и отождествление Z и X с матрицами L и U, соответственно, приводит к *тау*-функции вида (3.1.1).

3.2 Тригонометрические решения иерархии mKP

В этом подразделе мы рассматриваем тригонометрическую *тау*-функцию иерархии mKP и изучаем динамику её нулей.

В данном случае подходящей формой для *тау*-функции является выражение

$$\tau(x,\mathbf{t}) = \prod_{k=1}^{N} \sinh[\gamma(x-x_k)];\ x_k = x_k(\mathbf{t});\ k = 1,2,\dots,N. \tag{3.2.1}$$

В первую очередь следует исследовать динамику её нулей по первому времени $t_1 \equiv t$. Рассмотрим пару вспомогательных линейных задач (2.3.17) и (2.3.18). Положим все старшие времена равными нулю. Соответственно, потенциальная функция имеет вид:

$$u = \gamma \sum_{k=1}^{N} \dot{x}_k \left(\coth[\gamma(x-x_k)] - \coth[\gamma(x-x_k+1)]\right). \tag{3.2.2}$$

Для функции Бейкера-Ахиезера и её сопряжённой выберем следующие анзацы:

$$\psi = z^x e^{tz} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \gamma c_k(t) \coth[\gamma(x-x_k)]\right); \tag{3.2.3}$$

$$\psi^* = z^{-x} e^{-tz} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \gamma c_k^*(t) \coth[\gamma(x-x_k)]\right). \tag{3.2.4}$$

Подстановка функции Бейкера-Ахиезера и приравнивание к нулю коэффициентов при полюсах вида $\coth[\gamma(x-x_k+1)]$ и $\coth[\gamma(x-x_k)]$ приводит к системе уравнений:

$$zc_k = \dot{x}_k + \sum_{i=1}^{N} \gamma c_i \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i - 1)]; \tag{3.2.5}$$

$$\begin{split}\dot{c}_k = \sum_{i=1}^{N} \gamma(1-\delta_{ki})(c_i\dot{x}_k + c_k\dot{x}_i)\coth[\gamma(x_k-x_i)] - \gamma c_k\dot{x}_i \coth[\gamma(x_k-x_i+1)] - \\ - \gamma c_i \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i-1)].\end{split} \tag{3.2.6}$$

Если рассмотреть матрицы L и M с элементами:

$$L_{ki} = \gamma \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i - 1)]; \tag{3.2.7}$$

$$\begin{split}M_{ki} = \gamma\delta_{ki} \sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \left(\dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_j)] - \dot{x}_j \coth[\gamma(x_k-x_j+1)]\right) + \\ + \gamma(1-\delta_{ki})\left(\dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i)] - \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k-x_i-1)]\right);\end{split} \tag{3.2.8}$$

то полученную ранее переопределённую систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} (zI - L)\mathbf{c} = \dot{X}\mathbf{1}; \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}; \end{cases} \tag{3.2.9}$$

где $X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Выведем теперь её условие совместности. Дифференцируя первое уравнение системы по y и используя второе уравнение, получаем:

$$(\dot{L} - [M, L])\mathbf{c} = (M\dot{X} - \ddot{X})\mathbf{1}.$$

Явное вычисление показывает, что если правая часть данного уравнения равна нулю, то соотношение:

$$\dot{L} = [M, L] \tag{3.2.10}$$

тождественно выполняется. Таким образом, мы получили условие совместности. Посредством явного вычисления легко показать, что оно эквивалентно системе уравнений Ньютона:

$$\ddot{x}_k = \sum_{i=1;\, i\neq k} \frac{-2\gamma \dot{x}_k \dot{x}_i \sinh^2[\gamma] \cosh[\gamma(x_k - x_i)]}{\sinh[\gamma(x_k - x_i)] \sinh[\gamma(x_k - x_i + 1)] \sinh[\gamma(x_k - x_i - 1)]}. \tag{3.2.11}$$

Матрица L — это матрица Лакса тригонометрической системы RS. Следовательно, мы установили, что динамика нулей тригонометрической *тау*-функции по времени t_1 определяется соответствующей моделью RS.

В дополнение к этому подразделу выведем уравнения на коэффициенты сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера $\mathbf{c}^*$. Подстановка соответствующего выражения в линейную задачу и зануление коэффициентов при полюсах первого порядка вида $\coth[\gamma(x - x_k - 1)]$ и $\coth[\gamma(x - x_k)]$ приводит к условиям:

$$z c_k^* \dot{x}_k^{-1} + 1 - \gamma \sum_{i=1}^{N} c_i^* \coth[\gamma(x_i - x_k - 1)] = 0; \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned} -\dot{c}_k^* = \gamma c_k^* \left(\sum_{j=1;\, j\neq k}^{N} \dot{x}_j (\coth[\gamma(x_k - x_j - 1)] - \coth[\gamma(x_k - x_j)]) \right) + \\ + \gamma \sum_{i=1;\, i\neq k}^{N} c_i^* (\dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i + 1)] - \dot{x}_k \coth[\gamma(x_k - x_i)]). \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Используя уравнения движения (3.2.11), а также введённые ранее матрицы L, M и X, легко показать, что эта система может быть переписана в матричном виде:

$$\begin{cases} (\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1} (zI - L) = -\mathbf{1}^T; \\ \partial_t ((\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1}) = -(\mathbf{c}^*)^T \dot{X}^{-1} M. \end{cases} \tag{3.2.14}$$

3.3 Рациональные решения матричной иерархии КР

В данном подразделе мы используем формализм, описанный в соответствующей части литературного обзора, чтобы исследовать рациональные решения матричной иерархии КР.

Такой тип решений был рассмотрен в работе [21]. В этой статье было показано, что решения матричного уравнения КР, представляемые в виде суммы произведений матриц ранга один на эллиптические функции Вейерштрасса с полюсами в различных точках x_k, изоморфны спиновому обобщению эллиптической модели СМ. Более строго, было доказано, что динамика полюсов таких сингулярных решений матричного уравнения КР по второму и третьему времени совпадает с движением спиновой эллиптической системы СМ, причём в качестве генераторов трансляции выступают второй и третий гамильтонианы этой системы. Мы будем рассматривать только рациональный предел эллиптического решения и покажем, что в этом случае соответствие может быть распространено на уровень иерархий. Однако для этого следует модифицировать анзац для функции Бейкера-Ахиезера, так как в общем случае она матричнозначна.

Как и в предыдущих вычислениях, мы используем обозначения $t_1 \equiv x$, $t_2 \equiv y$. Рассмотрим две вспомогательные линейные задачи:

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi(x,y,z) &= \partial_x^2 \Psi(x,y,z) + u(x,y)\Psi(x,y,z); \\ -\partial_y \Psi^*(x,y,z) &= \partial_x^2 \Psi^*(x,y,z) + \Psi^*(x,y,z)u(x,y). \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Здесь волновые функции $\Psi(x,y,z)$, $\Psi^*(x,y,z)$ и потенциал $u(x,y)$ являются матрицами размера $N \times N$, где N есть число компонент в матричной иерархии:

$$\Psi(x,y,z) = e^{xz+yz^2}\left(I + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{a}_k(\mathbf{c}_k^*)^T}{x - x_k(y)}\right); \tag{3.3.2}$$

$$\Psi^*(x,y,z) = e^{-(xz+yz^2)}\left(I + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{b}_k\mathbf{c}_k^T}{x - x_k(y)}\right); \tag{3.3.3}$$

$$u(x,y) = -2\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k^T}{(x - x_k(y))^2}; \tag{3.3.4}$$

здесь $\mathbf{a}_k = (a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{N,k})^T$, $\mathbf{b}_k = (b_{1,k}, b_{2,k}, \ldots, b_{N,k})^T$ — это вектора, зависящие от y; $\mathbf{c}_k = (c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{N,k})^T$ и $\mathbf{c}_k^* = (c_{1,k}^*, c_{2,k}^*, \ldots, c_{N,k}^*)^T$ — вектора, зависящие одновременно от y и z. Отметим, что $\mathcal{N}$ обозначает количество полюсов, и всюду далее суммирование по латинским индексам происходит от 1 до $\mathcal{N}$, а суммирование по греческим индексам — от 1 до N. Важный факт, следующий из теоремы 6.5 в [21]:

$$u(x,y) = -2\partial_x \xi_1; \tag{3.3.5}$$

где ξ_1 представляет собой коэффициент при z^{-1} в разложении функции Бейкера-Ахиезера в формальный ряд. Как следствие, имеем:

$$\xi_1 = -\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k^T}{x - x_k(y)}. \tag{3.3.6}$$

Подстановка функции Бейкера-Ахиезера и потенциала в первую линейную задачу и приравнивание нулю коэффициентов при полюсах разных порядков даёт систему уравнений. Для коэффициентов при полюсах третьего порядка имеем:

$$\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_k = 1. \tag{3.3.7}$$

Аналогично, для полюсов второго порядка:

$$a_{\alpha,k}\, c^*_{\beta,k} \dot{x}_k = -2z a_{\alpha,k}\, c^*_{\beta,k} - 2a_{\alpha,k}\, b_{\beta,k} - 2 \sum_\gamma \sum_{i\neq k} \frac{a_{\alpha,k}\, b_{\gamma,k}\, a_{\gamma,i}\, c^*_{\beta,i}}{x_k - x_i}; \tag{3.3.8}$$

или, вводя матрицу Лакса L с элементами

$$L_{ki} = -\frac{\dot{x}_k}{2}\delta_{ki} - (1-\delta_{ki})\frac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_i}{x_k - x_i}, \tag{3.3.9}$$

перепишем это условие в матричном виде:

$$\sum_i (zI - L)_{ki} c^*_{\alpha,i} = -b_{\alpha,k}. \tag{3.3.10}$$

Уравнения, следующие из зануления коэффициентов при полюсах первого порядка, выглядят так:

$$\partial_y (a_{\alpha,k}\, c^*_{\beta,k}) = -2 \sum_\gamma \sum_{i\neq k} \frac{a_{\alpha,i} b_{\gamma,i} a_{\gamma,k} c^*_{\beta,k} - a_{\alpha,k} b_{\gamma,k} a_{\gamma,i} c^*_{\beta,i}}{(x_k - x_i)^2}. \tag{3.3.11}$$

Используя матрицу M

$$M_{ki} = 2(1-\delta_{ki})\frac{\mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_i}{(x_k - x_i)^2}, \tag{3.3.12}$$

мы можем сформулировать достаточное условие выполнения этих уравнений:

$$\partial_y c^*_{\alpha,k} = \sum_i M_{ki} c^*_{\alpha,i}; \tag{3.3.13}$$

$$\partial_y a_{\alpha,k} = \sum_i (-M^T)_{ki} a_{\alpha,i}. \tag{3.3.14}$$

Подобным образом, подстановка сопряжённой функции Бейкера-Ахиезера и потенциала в соответствующую вспомогательную линейную задачу приводит к переопределённной системе. Коэффициенты при полюсах третьего порядка дают то же условие, что и ранее. При полюсах второго порядка:

$$-c_{\alpha,k} b_{\beta,k} \dot{x}_k = 2z c_{\alpha,k} b_{\beta,k} - 2a_{\alpha,k} b_{\beta,k} - 2 \sum_\gamma \sum_{i\neq k} \frac{c_{\alpha,i} b_{\gamma,i} a_{\gamma,k} b_{\beta,k}}{x_k - x_i}; \tag{3.3.15}$$

или в матричном виде:

$$\sum_i (zI - L^T)_{ki} c_{\alpha,i} = a_{\alpha,k}. \tag{3.3.16}$$

При рассмотрении полюсов первого порядка получаются следующие уравнения:

$$-\partial_y(c_{\alpha,k}b_{\beta,k}) = -2\sum_\gamma \sum_{i\neq k} \frac{c_{\alpha,k}b_{\gamma,k}a_{\gamma,i}b_{\beta,i} - c_{\alpha,i}b_{\gamma,i}a_{\gamma,k}b_{\beta,k}}{(x_k - x_i)^2}. \tag{3.3.17}$$

Достаточные условия их выполнения записываются так:

$$\partial_y c_{\alpha,k} = \sum_i (-M^T)_{ki} c_{\alpha,i}; \tag{3.3.18}$$

$$\partial_y b_{\alpha,k} = \sum_i M_{ki} b_{\alpha,i}. \tag{3.3.19}$$

Таким образом, мы вывели систему из шести матричных уравнений. Получим условие их совместности. Дифференцируя (3.3.10) по y, получаем:

$$\sum_j (\partial_y(zI - L)_{kj})c^*_{\alpha,j} + \sum_m (zI-L)_{km}\partial_y c^*_{\alpha,m} = \sum_j (-\partial_y L)_{kj} c^*_{\alpha,j} + \sum_{m,\,j}(zI-L)_{km}M_{mj}c^*_{\alpha,j} =$$

$$= \sum_m M_{km}(-b_{\alpha,m}) = \sum_{m,\,j} M_{km}(zI-L)_{mj}c^*_{\alpha,j}.$$

Следовательно, уравнения системы имеют общие решения, образующие базис, тогда и только тогда, когда

$$\partial_y L = [M, L]. \tag{3.3.20}$$

Такой же результат с точностью до транспозиции матриц получается после дифференцирования (3.3.16) и проведения подобных преобразований. Явное вычисление коммутатора и производной матрицы Лакса приводит к системе уравнений в форме Ньютона:

$$\ddot{x}_k = -8\sum_{j\neq k} \frac{(\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_j)(\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_k)}{(x_k - x_j)^3}. \tag{3.3.21}$$

Мы установили, что динамика полюсов по времени $t_2 = t$ описывается рациональной версией спиновой системы CM. Далее мы докажем, что это соответствие имеет место быть для всех старших времён.

Рассмотрим формулу (2.5.12). Её правая часть может быть вычислена при помощи выражения (3.3.6). В результате суммирования без вычисления вычета в левой части формулы имеем:

$$\sum_\gamma \Psi_{\alpha\gamma}\Psi^*_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_k \frac{b_{\beta,k}c_{\alpha,k}}{x - x_k} + \sum_k \frac{a_{\alpha,k}c^*_{\beta,k}}{x - x_k} +$$

$$+\sum_\gamma \sum_{i;k;i\neq k} \frac{a_{\alpha,k}c^*_{\gamma,k}b_{\beta,i}c_{\gamma,i} + a_{\alpha,i}c^*_{\gamma,i}b_{\beta,k}c_{\gamma,k}}{(x_k - x_i)(x - x_k)} + \sum_\gamma \sum_k \frac{a_{\alpha,k}c^*_{\gamma,k}b_{\beta,k}c_{\gamma,k}}{(x - x_k)^2}.$$

Решения неоднородных линейных систем (3.3.10) и (3.3.16) записываются в виде:

$$c_{\alpha,k} = \sum_j a_{\alpha,j}\left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jk};\ c^*_{\alpha,k} = \sum_n \left(\frac{1}{zI-L}\right)_{kn}(-b_{\alpha,n}). \tag{3.3.22}$$

Сравнение коэффициентов при полюсах второго порядка по x в уравнении (2.5.12) приводит к условию:

$$\partial_{t_m} x_k = -\oint z^m dz \ \sum_{\gamma} \sum_{j;n} a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L} \right)_{jk} \left(\frac{1}{zI - L} \right)_{kn} b_{\gamma,n}. \qquad (3.3.23)$$

Здесь мы использовали выражения для $\mathbf{c}_k$ и $\mathbf{c}_k^*$. Введём канонический импульс по формуле $p_k = \dfrac{\dot{x}_k}{2}$. Матрица Лакса спиновой модели CM удовлетворяет следующим тождествам:

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = -E_{kk}; \ \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2}[E_{kk}, M]. \qquad (3.3.24)$$

Тогда, используя формулу для производной обратной матрицы, получаем:

$$\partial_{t_m} x_k = \oint z^m dz \ \sum_{\gamma} \sum_{j;q;r;n} a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L} \right)_{jq} \left(\frac{\partial L_{qr}}{\partial p_k} \right) \left(\frac{1}{zI - L} \right)_{rn} b_{\gamma,n} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_k} \oint z^m dz \ \sum_{\gamma} \sum_{j;n} a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L} \right)_{jn} b_{\gamma,n} = \sum_{\gamma} \sum_{j;n} a_{\gamma,j} \left(L^m \right)_{jn} b_{\gamma,n} = \sum_{j;n} (L^m)_{jn} \mathbf{b}_n^T \mathbf{a}_j.$$

Рассмотрим матрицы вида:

$$X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_{\mathcal{N}}); \ (f)_{ki} = \mathbf{b}_k^T \mathbf{a}_i. \qquad (3.3.25)$$

Тогда прямым вычислением показывается, что

$$I + [L, X] = f. \qquad (3.3.26)$$

Таким образом, мы получаем первое уравнение Гамильтона:

$$\partial_{t_m} x_k = \partial_{p_k} \mathrm{Tr}(L^m f) = \partial_{p_k} \mathrm{Tr}\, L^m. \qquad (3.3.27)$$

Отметим, что

$$\partial_{t_m} x_k = -m \,\mathrm{Tr}(E_{kk} L^{m-1}).$$

Подействовав на это уравнение производной ∂_y, имеем в результате:

$$\frac{1}{2} \partial_{t_m} \dot{x}_k = -\frac{m}{2} \mathrm{Tr}(E_{kk} (\partial_y L^{m-1})) = -\frac{m}{2} \mathrm{Tr}(E_{kk} [M, L^{m-1}]) = -m \,\mathrm{Tr}(\frac{1}{2} [E_{kk}, M] L^{m-1}).$$

Иными словами, мы приходим ко второму уравнению Гамильтона:

$$\partial_{t_m} p_k = -\partial_{x_k} \mathrm{Tr}\, L^m. \qquad (3.3.28)$$

Наконец, приравнивая нулю коэффициенты при полюсах первого порядка по x в (2.5.12), получаем уравнение:

$$\partial_{t_m} (a_{\alpha,k} b_{\beta,k}) = \oint z^m dz \ \Big(b_{\beta,k} c_{\alpha,k} + a_{\alpha,k} c_{\beta,k}^* +$$

$$+ \sum_{\gamma} \sum_{i \neq k} \frac{a_{\alpha,k} c_{\gamma,k}^* b_{\beta,i} c_{\gamma,i} + a_{\alpha,i} c_{\gamma,i}^* b_{\beta,k} c_{\gamma,k}}{x_k - x_i} \Big). \qquad (3.3.29)$$

Это равенство верно, если выполнены два достаточных условия:

$$\partial_{t_m} a_{\alpha,k} = \sum_j a_{\alpha,j} (L^m)_{jk} +$$
$$+ \oint z^m dz \sum_{j;n;i\neq k} \frac{a_{\alpha,i}}{x_k - x_i} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jk} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{in} (-b_{\gamma,n}); \quad (3.3.30)$$

$$\partial_{t_m} b_{\beta,k} = \sum_j (L^m)_{kj} (-b)_{\beta,j} +$$
$$+ \oint z^m dz \sum_{j;n;i\neq k} \frac{b_{\beta,i}}{x_k - x_i} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{ji} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{kn} (-b_{\gamma,n}). \quad (3.3.31)$$

Мы вновь воспользовались выражениями для $\mathbf{c}_k$ и $\mathbf{c}_k^*$. Явным вычислением можно показать, что:

$$\frac{\partial}{\partial b_{\alpha,k}} \oint z^m dz \sum_{j;n} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jn} (-b_{\gamma,n}) =$$
$$= -\sum_j a_{\alpha,j} (L^m)_{jk} - \oint z^m dz \sum_{j;n;i\neq k} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jk} \left(\frac{a_{\alpha,i}}{x_k - x_i}\right) \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{in} (-b_{\gamma,n});$$
$$\frac{\partial}{\partial a_{\beta,k}} \oint z^m dz \sum_{j;n} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jn} (-b_{\gamma,n}) =$$
$$= \sum_j (L^m)_{kj} (-b)_{\beta,j} + \oint z^m dz \sum_{j;n;i\neq k} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{ji} \left(\frac{b_{\beta,i}}{x_k - x_i}\right) \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{kn} (-b_{\gamma,n}).$$

Следовательно, мы получаем гамильтоновы уравнения на $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$:

$$\partial_{t_m} a_{\alpha,k} = \frac{\partial}{\partial b_{\alpha,k}} \oint z^m dz \sum_{j;n} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jn} b_{\gamma,n} = \frac{\partial}{\partial b_{\alpha,k}} \operatorname{Tr} L^m; \quad (3.3.32)$$

$$\partial_{t_m} b_{\beta,k} = -\frac{\partial}{\partial a_{\beta,k}} \oint z^m dz \sum_{j;n} \sum_\gamma a_{\gamma,j} \left(\frac{1}{zI - L}\right)_{jn} b_{\gamma,n} = -\frac{\partial}{\partial a_{\beta,k}} \operatorname{Tr} L^m. \quad (3.3.33)$$

Это завершает доказательство: матричная иерархия КР изоморфна спиновой системе СМ в том смысле, что динамика полюсов рациональных решений матричной иерархии КР определяется гамильтонианами рациональной спиновой модели СМ. Ясно, что при выборе $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ постоянными, решение сводится к случаю обычной иерархии КР. Этот факт также подтверждает полученный результат, так как матричная иерархия КР является обобщением иерархии КР.

4 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этой главе перечисляются и обсуждаются основные результаты данной дипломной работы.

Во-первых, мы рассмотрели иерархию KP и изучили динамику нулей тригонометрической *тау*-функции. Были проделаны явные выкладки, основанные на формализме функции Бейкера-Ахиезера и билинейного тождества вместе с некоторыми его следствиями. Мы продемонстрировали, что динамика нулей *тау*-функции определяется уравнениями тригонометрической системы CM. Однако, генераторы трансляций отличаются от ожидаемых. К сожалению, получить адекватное выражение для них не удалось, хотя имеются некоторые указания, что эти генераторы представляют собой линейные комбинации следов степеней матрицы Лакса, то есть высших гамильтонианов системы CM.

Во-вторых, мы обратились к тригонометрическим решениям иерархии mKP. Мы установили, что динамика полюсов по времени t_1 описывается моделью RS. Ситуация с продолжением этого соответствия на уровень иерархий здесь ещё хуже, чем в случае тригонометрических решений иерархии KP. Хотя матрица Лакса тригонометрической системы RS и удовлетворяет некоторому соотношению типа (2.4.18), это не упрощает выкладки, и техника, развитая в [6], не приводит к ожидаемому результату. Возможно, для доказательства наличия соответствия на уровне иерархий необходимо изменить анзац для функции Бейкера-Ахиезера. Другими словами, эта тема нуждается в дальнейшей доработке.

В-третьих, мы изучили рациональные решения матричной иерархии KP. Мы установили, что эта иерархия изоморфна спиновой системе CM и получили уравнения движения в гамильтоновой форме как для канонических координат полюсов, так и для спиновых переменных, используя билинейное тождество. Это новый результат, так как в литературе не представлено явного доказательства этого факта.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Связь между сингулярными решениями иерархии KP, mKP, матричной иерархии KP и многочастичными системами типа Калоджеро-Мозера — это давно известный в теории интегрируемых систем факт. Тем не менее, существует ряд технических трудностей, не позволяющих напрямую расширить эту связь до полноценного изоморфизма. В перспективе мы планируем добиться нескольких результатов. В первую очередь следует понять, как устроены генераторы потоков в случае тригонометрических решений KP. Затем следует обратиться к иерархии mKP и выяснить, как нужно изменить подход, чтобы доказать соответствие. В отношении матричной иерархии KP отметим, что мы полагали заряды фиксированными. Рассмотрение их как динамических переменных является интересной задачей. На текущий момент нет понимания, как зависит *тау*-функция от зарядов. Данная дипломная работа представляет собой основу для дальнейшего развития этих сюжетов.

6 БИБЛИОГРАФИЯ

[1] H. Airault, H. P. McKean, and J. K. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem*, Communications in Pure and Applied Mathematics, **30**, 1977, 95–148

[2] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv.Math. 16 (1975), 197-220

[3] И. М. Кричевер, *О рациональных решениях уравнения Кадомцева-Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой*, Функц. анализ и его прил., 1978, том 12, выпуск 1, 76–78

[4] И. М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функц. анализ и его прил., 1980, том 14, выпуск 4, 45–54

[5] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Annals of Physics 170 (2), 370-405

[6] A. Zabrodin, *The Master T-Operator for Inhomogeneous XXX Spin Chain and mKP Hierarchy*, SIGMA, 10 (2014), 006, 18 pp.

[7] A. Zabrodin, *The master T-operator for vertex models with trigonometric R-matrices as a classical tau-function*, Teoret. Mat. Fiz., 174:1 (2013), 59–76

[8] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, *Спиновое обобщение модели Рейсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина*, УМН, 50:6(306) (1995), 3–56

[9] A. Zabrodin, *Quantum Gaudin model and classical KP hierarchy*, Journal of Physics: Conference Series, Volume 482, conference 1

[10] T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J.Math.Phys., 35 (1994), 5844-5849

[11] A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, *The master T-operator for the Gaudin model and the KP hierarchy*, Nucl. Phys. B 883 (2014) 173-223

[12] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, 2000

[13] K. Takasaki, T. Takebe, *$\hbar$-expansion of KP hierarchy: Recursive construction of solutions*, arXiv:0912.4867

[14] A. Kasman, M. Gekhtman, *Solitons and Almost-Intertwining Matrices*, Journal of Mathematical Physics 42, 3540 (2001)

[15] L. Haine, *KP Trigonometric Solitons and an Adelic Flag Manifold*, SIGMA 3 (2007), 015, 15 pages

[16] P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Phys. D 229 (2007), no. 2, 184–190

[17] T. Takebe, L. Teo, *Coupled Modified KP Hierarchy and Its Dispersionless Limit*, SIGMA 2 (2006), 072, 30 pages

[18] K. Takasaki, T. Takebe, *An $\hbar$-expansion of the Toda hierarchy: a recursive construction of solutions*, Analysis and Mathematical Physics Volume 2, Number 2 (2012), 171-214

[19] L.-P. Teo, *The Multicomponent KP Hierarchy: Differential Fay Identities and Lax Equations*, J. Phys. A 44 (2011), 225201

[20] A. Tacchella, *On rational solutions of multicomponent and matrix KP hierarchies*, Journal of Geometry and Physics, Volume 61, Issue 8, August 2011, Pages 1319-1328

[21] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 170, 83-119 (1995)

[22] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с.

[23] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics (Book 12), 310 p., World Scientific Pub. Co. Inc., 1991

[24] F. Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*, 2001. Buch. XIX, 550 S., Hardcover, Springer

[25] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press