

Федеральное государственное образовательное  
учреждение высшего профессионального  
образования «Московский физико-технический  
институт (государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Инфракрасная динамика скалярных полей в  
расширяющемся де Ситтере

Кирилл Евгеньевич Павленко

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук

Эмиль Тофикович Ахмедов

Москва, 2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение и структура повествования</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Безмассовое поле</b>	<b>4</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	4
2.2	Свободный коррелятор . . . . .	4
2.3	Выделение ведущего инфракрасного вклада . . . . .	6
2.4	Уравнение Ланжевена . . . . .	6
2.5	Решение уравнения Фоккера-Планка в случае $V(\phi) = \lambda\phi^4$ . . . . .	7
2.6	Уравнение Ланжевена в случае произвольного состояния . . . . .	8
2.7	Уравнение Фоккера-Планка в случае произвольного состояния . . . . .	9
2.8	В технике Келдыша-Швингера . . . . .	10
2.8.1	Обозначения . . . . .	11
2.8.2	Однопетлевая поправка . . . . .	11
2.8.3	Вклад из двух петель . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Массивное поле</b>	<b>16</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	16
3.2	Формализм Швингера-Келдыша . . . . .	16
3.3	Общее обсуждение петлевых поправок к пропагаторам . . . . .	18
3.4	Поправка к пропагаторам, главная серия . . . . .	19
3.5	Дополнительная серия . . . . .	20
3.6	Поправки к вершинам . . . . .	23
3.7	Суммирование ведущих вкладов во всех петлях, общее обсуждение . . . . .	24
3.8	Суммирование ведущих вкладов в случае главной серии . . . . .	25
3.9	Суммирование ведущих вкладов в случае дополнительной серии . . . . .	28

# 1 Введение и структура повествования

Квантовая теория поля на фоне искривленной метрики является важным предметом изучения на пути к квантовой гравитации. В рамках такого изучения пространство де Ситтера представляет большой интерес, так как обладает богатой группой симметрий и, к тому же, расширяющийся де Ситтер является простейшей моделью инфляции.

В работе исследуются двухточечные корреляционные функции скалярных полей на фоне расширяющегося де Ситтера. Показывается, что, в отличие от плоского пространства, где основные вклады даются древесными приближениями, в нестационарном случае петлевые поправки не подавлены по константе связи и требуется учитывать вклады от всех петель. Тем не менее, в большинстве случаев это удается сделать.

Оказывается, что значение их массы существенно влияет на поведение корреляторов и существует по меньшей мере 4 различных режима поведения корреляторов. В настоящий момент примеры суммирования во всех петлях найдены в трех из четырех режимов. Большая часть работы посвящена взаимодействию  $\lambda\phi^4$ , но в некоторых случаях результаты обобщаются. Так, например, при  $m = 0$  так называемый стохастический подход, впервые предложенный Старобинским и Якоямой, позволяет в некотором смысле выразить ответ для произвольного взаимодействия.

Более того, во всех известных примерах квантовый вопрос о поведении корреляторов удается свести к классическим уравнениям, что представляет большой интерес.

Текст разделен на два блока. Один посвящен безмассовому полю, второй — массивному. Эти два случая принципиально отличаются разработанными подходами. Первый блок с пунктов 2.1 до 2.5 основывается на работе Тсамиса и Вударда ([31]). Здесь приводится достаточно строгое рассуждение, показывающее, что динамика безмассовых скалярных полей подчиняется уравнению Ланжевена. Пункт 2.5 посвящен решению этого уравнения в случае потенциала  $\lambda\phi^4$ . Вторая часть второго раздела представляют собой некоторое оригинальное исследование. Подход распространяется на случай более общего состояния, а затем проводится пертурбативная проверка результатов с помощью нестационарных диаграммных методов. Во втором блоке показывается, что в случае массивного поля только келдышевский пропагатор получает существенные инфракрасные поправки, что позволяет просуммировать ответ во всех порядках для корреляторов (в некотором приближении). В случае ненулевой массы найдены сингулярные решения.

## 2 Безмассовое поле

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим безмассовое скалярное поле в  $D = 3 + 1$  с самодействием на фоне внешней фиксированной метрики расширяющегося де Ситтера:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \sqrt{-g}V(\phi). \quad (2.1)$$

Метрика дается выражением:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \quad (2.2)$$

где

$$a(t) = e^{Ht}. \quad (2.3)$$

Здесь  $H$  — постоянная Хаббла. В дальнейшем, изучая стохастический подход, мы будем работать в координатах  $(\vec{x}, t)$ . Однако при работе с диаграммной техникой Келдыша, более удобно станет использовать другие координаты, выраженные в терминах конформного времени  $\eta$ . В координатах  $(\vec{x}, \eta)$  метрика имеет вид:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}), \quad d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.4)$$

Нас будет интересовать динамика корреляционных функций в совпадающих «точках» в зависимости от времени  $\langle\Omega|\phi^2(\vec{x}, t)|\Omega\rangle$ . В качестве состояния  $|\Omega\rangle$  взят т. н. вакуум Банчи-Дэвиса, однако в дальнейшем мы обсудим и усреднение в случае произвольного состояния.

Стохастический подход замечателен тем, что в некотором смысле он не требует спецификации вида потенциала  $V(\phi)$ . Поэтому сначала, развивая стохастический подход, мы тоже не станем конкретизировать  $V(\phi)$ , но затем, получив уравнение Ланжевена, мы будем решать его при  $V(\phi) = \lambda\phi^4$  и сконцентрируем наши дальнейшие усилия только на этом случае.

### 2.2 Свободный коррелятор

Для начала следует задаться вопросом, как ведет себя свободный коррелятор  $\langle\Omega|\phi^2(\vec{x}, t)|\Omega\rangle$  при  $V(\phi) = 0$ . Для этого мы будем использовать каноническое квантование.

Несложно получить уравнение движения для  $\phi$ .

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0. \quad (2.5)$$

Также нетрудно проверить, что следующие гармоники

$$\begin{aligned} u(t, k) &= \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( 1 - \frac{ik}{Ha} \right) e^{\frac{ik}{Ha}} \\ u^*(t, k) &= \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( 1 + \frac{ik}{Ha} \right) e^{-\frac{ik}{Ha}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

решают свободное уравнение движения

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + \frac{k^2}{a^2}\phi_0 = 0. \quad (2.7)$$

Свободное поле  $\phi_0(t, \vec{x})$  может быть канонически проквантована в терминах гармоник  $u(t, k)$  и операторов рождения и уничтожения:

$$\phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( e^{i\vec{k}\vec{x}} u(t, \vec{x}) \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right), \quad (2.8)$$

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.9)$$

Будем следить только за инфракрасным вкладом в корреляционные функции. Таким образом, мы можем разделить наши моды на два типа

- инфракрасные  $\implies H < k < Ha(t)$ ,
- ультрафиолетовые  $\implies k > Ha(t)$ .

Ограничивая наши полевые операторы на инфракрасную область, получаем

$$\Phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha(t) - k) \theta(k - H) \left( e^{i\vec{k}\vec{x}} u(t, \vec{x}) \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right). \quad (2.10)$$

Теперь можно вычислить вакуумное ожидание  $\phi_0^2$ :

$$\langle 0 | \Phi_0^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(Ha - k') \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger e^{-i(k-k')x} u(t, k) u^*(t, k') | 0 \rangle. \quad (2.11)$$

Используя соотношения нормировки

$$\langle 0 | \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(k - k'),$$

несложно получить

$$\langle 0 | \Phi_0^2 | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H^2}{2k^3} \left( 1 + \frac{k^2}{H^2 a^2} \right) = \frac{H^2}{4\pi^2} \int_H^{Ha} \frac{dk}{k} \left( 1 + \frac{k^2}{H^2 a^2} \right). \quad (2.12)$$

Таким образом, мы приходим к ответу

$$\langle 0 | \Phi_0^2 | 0 \rangle = \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \left( \ln a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \right). \quad (2.13)$$

То есть корреляции линейно растут по времени.

## 2.3 Выделение ведущего инфракрасного вклада

Для начала следует посмотреть на коммутатор  $\phi$  с его производной по времени  $\dot{\phi}$ .

$$\left[ \Phi_0(t, \vec{x}), \dot{\Phi}_0(t, \vec{x}') \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) (u\dot{u}^* - u^*\dot{u}) e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}, \quad (2.14)$$

$$u\dot{u}^* - u^*\dot{u} = \frac{i}{a^3(t)}. \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$\left[ \Phi_0(t, \vec{x}), \dot{\Phi}_0(t, \vec{x}') \right] = \frac{i}{4\pi^2 a^3} \int_H^{Ha} dk k \frac{\sin(k(x - x'))}{x - x'} \neq 0. \quad (2.16)$$

Как и ожидалось, коммутатор не равен нулю, что является следствием квантовой природы  $\phi$ .

Внимательно глядя на формулы (2.11) и (2.12), можно заметить, что лидирующий логарифм возникает исключительно из первого константного члена наших гармоник

$$u_{IR} \sim \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (2.17)$$

Оставив только константный вклад в гармоники

$$\phi_{IR}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left( e^{i\vec{k}\vec{x}} \alpha_{\vec{k}} + h.c. \right), \quad (2.18)$$

можно вычислить коммутатор в таких гармониках

$$\left[ \phi_{IR}(t, \vec{x}), \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}') \right] = 0. \quad (2.19)$$

Обнуление коммутатора означает, что поле  $\phi_{IR}$  можно считать классическим. Тогда операторы рождения-уничтожения  $\alpha$  и  $\alpha^\dagger$  можно интерпретировать как случайные стохастические переменные.

## 2.4 Уравнение Ланжевена

Раз поле  $\phi$  можно интерпретировать как классическое, то появляется надежда, что на него можно получить классическое уравнение в случае  $V(\phi) \neq 0$ .

Функция Грина записывается стандартным образом:

$$G_{ret}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = i\theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (u(t, k)u^*(t', k) - u^*(t, k)u(t', k)) e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')}. \quad (2.20)$$

Можно проверить, что

$$(u(t, k)u^*(t', k) - u^*(t, k)u(t', k)) = \frac{i}{3H} \left( \frac{1}{a^3(t')} - \frac{1}{a^3(t)} \right) + O(k^2).$$

Следя лишь за временами  $t > t'$ , получаем

$$a'^3 G_{ret}^{IR}(t, \vec{x}, t', \vec{x}') \sim \frac{1}{3H} \theta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.21)$$

Подставляя полученную форму функции Грина, получаем

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_{IR}(t, \vec{x}) - \frac{1}{3H} \int_0^t dt' V'(\phi(t', \vec{x})).$$

Осталось только продифференцировать последнее уравнение по времени  $t$ :

$$\dot{\phi}(t, \vec{x}) = \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) - \frac{1}{3H} V'(\phi(t, \vec{x})). \quad (2.22)$$

Полученное уравнение — это уравнение Ланжевена на классическую величину  $\phi(t, \vec{x})$ . Проинтерпретируем  $\dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x})$  как стохастический источник и проверим, что он является белым гауссовым шумом.

Во-первых,

$$\dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(Ha - k) \theta(k - H) \frac{H^3 a}{\sqrt{k^3}} (e^{ikx} \alpha_k + h.c.).$$

Тогда коррелятор равен

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dot{\phi}_{IR}(t, \vec{x}) \dot{\phi}_{IR}(t', \vec{x}') | 0 \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\delta(Ha(t) - k)}{\sqrt{2k^3}} \frac{\delta(Ha(t') - k')}{\sqrt{2k'^3}} \\ &H^6 a(t) a(t') e^{i(k-k')x} \alpha_k \alpha_{k'}^\dagger | 0 \rangle = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.23)$$

## 2.5 Решение уравнения Фоккера-Планка в случае $V(\phi) = \lambda\phi^4$

Полученное ранее уравнение Ланжевена эквивалентно уравнению Фоккера-Планка. Для потенциала  $V(\phi) = \lambda\phi^4$  получаем

$$\partial_t \rho(t, \phi) = \frac{\lambda}{18H} \partial_\phi (\phi^3 \rho(t, \phi)) + \frac{H^3}{8\pi^2} \partial_\phi^2 (\rho(t, \phi)). \quad (2.24)$$

Для того, чтобы получить решение этого уравнения при  $t \rightarrow +\infty$  введем анзац

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, \phi) = \rho_\infty(\phi).$$

Анзац приводит к уравнению первого порядка

$$\frac{d\rho_\infty(\phi)}{\rho_\infty(\phi)} = -\frac{4\pi^2 \lambda}{9H^4} \phi^3 d\phi, \quad (2.25)$$

решение которого вполне просто

$$\rho_\infty(\phi) = \frac{2}{\Gamma(1/4)} \left( \frac{\pi^2 \lambda}{9H^4} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{\pi^2}{9} \lambda \left( \frac{\phi}{H} \right)^4 \right). \quad (2.26)$$

С одной стороны,

$$\partial_t \langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \dot{\rho}(t, \omega) \omega^{2n}. \quad (2.27)$$

С другой —

$$\partial_t \langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \frac{n(2n-1)H^3}{4\pi^2} \langle 0 | \phi^{2n-2}(t, \vec{x}) | 0 \rangle - \frac{n\lambda}{9H} \langle 0 | \phi^{2n+2}(t, \vec{x}) | 0 \rangle \quad (2.28)$$

Это уравнение можно решить итеративно. Ответ для  $\phi^2(t, \vec{x})$  следующий:

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} \ln a \left( 1 - \frac{\lambda}{36\pi^2} \ln^2 a + \frac{63}{35} \left( \frac{\lambda}{36\pi^2} \ln^2 a \right)^2 + \dots \right) \quad (2.29)$$

Таким образом, корреляции растут полиномиально по времени. Степень полинома увеличивается на два с каждым новым порядком по константе связи.

Однако интересно, что ряд можно просуммировать.

Заметим, что уравнение на  $\rho_\infty(\phi)$  имеет решение:

$$\rho_\infty(\phi) = \frac{2}{\Gamma(1/4)} \left( \frac{\pi^2 \lambda}{9H^4} \right)^{1/4} \exp \left[ -\frac{\pi^2}{9} \lambda \frac{\phi^4}{H^4} \right] \quad (2.30)$$

из которого легко получить точный ответ на коррелятор.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | \phi^{2n}(t, \vec{x}) | 0 \rangle = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}) \left( \frac{9H^4}{\pi^2 \lambda} \right)^{n/2}}. \quad (2.31)$$

Это решение стационарно! Это означает, что скалярное поле в конце концов уравновешивает эффект от рождения пар.

Существуют ли нестационарные решения? Приведенное выше вычисление было сделано в специальном случае: мы выбрали конкретный вакуум. Но что будет, если мы приготовим состояние более общего вида? Этому посвящены два следующих пункта.

## 2.6 Уравнение Ланжевена в случае произвольного состояния

Покажем, что вывод уравнения Ланжевена не зависит от начальной плотности частиц. Итак, в случае произвольной плотности

$$\langle \Omega | \alpha_k^\dagger \alpha_{k'} | \Omega \rangle = (2\pi)^3 \delta(k - k') n_k. \quad (2.32)$$

Следует следить за тремя вещами.

1. Запаздывающая функция Грина останется в точности такой же, так как коммутатор  $[\phi(x), \phi(x')]$  является просто  $c$ -числом. Поэтому усреднение не зависит от выбора состояния.

2. Среднее значение дается выражением

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi_0^2(x) | \Omega \rangle &= \langle 0 | \phi_0^2(x) | 0 \rangle + 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\phi_k|^2 n_k \rightarrow \\ &\rightarrow \langle 0 | \phi_0^2(x) | 0 \rangle + \frac{H^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^3} n_k. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь был взят предел  $t \rightarrow +\infty$ . Линейный рост по времени сохраняется независимо от  $n_k$ .

3. Осталось только проверить, что шум, фигурирующий в уравнении Ланжевена, по-прежнему остается гауссовым белым шумом.

$$\langle \Omega | \dot{\phi}_0(t, \vec{x}) \dot{\phi}_0(t', \vec{x}) | \Omega \rangle = \frac{H^4}{4\pi^2} \delta(t - t') (1 + 2n_{Ha(t)}). \quad (2.34)$$

Шум зависит от времени, но все еще является белым.

Таким образом, вывод уравнения Ланжевена справедлив в случае произвольного состояния в том же смысле, в каком он справедлив для вакуума Банча-Девиса.

## 2.7 Уравнение Фоккера-Планка в случае произвольного состояния

Теперь обратимся к тому, как устроен вывод уравнения Фоккера-Планка из уравнения Ланжевена в случае произвольного состояния. Итак, имеем

$$\dot{\phi}(t, \vec{x}) = f_\phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{3H} V'(\phi(t, \vec{x})). \quad (2.35)$$

По определению

$$\rho_\phi(\phi_0, t) = \langle \delta(\phi - \phi_0) \rangle. \quad (2.36)$$

Продифференцируем  $\rho_\phi(\phi_0, t)$  по времени  $t$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\phi(\phi_0, t) &= \partial_t \langle \delta(\phi - \phi_0) \rangle = \left\langle \dot{\phi} \partial_\phi (\delta(\phi - \phi_0)) \right\rangle = -\partial_{\phi_0} \left\langle \dot{\phi} \delta(\phi - \phi_0) \right\rangle = \\ &= -\partial_{\phi_0} \left\langle \left( -\frac{1}{3H} V'(\phi(t, \vec{x})) + f_\phi(t, \vec{x}) \right) \delta(\phi - \phi_0) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Первое слагаемое простое:

$$\left\langle -\frac{1}{3H} V'(\phi(t, \vec{x})) \delta(\phi - \phi_0) \right\rangle = -\frac{1}{3H} V'(\phi_0(t, \vec{x})) \rho_\phi(\phi_0, t). \quad (2.38)$$

Второе устроено более хитро. Формально представим дельта-функцию в виде ряда Тейлора и попробуем понять, как разобраться с каждым слагаемым в отдельности.

$$\langle f_\phi(t, \vec{x}) \delta(\phi - \phi_0) \rangle = \left\langle f_\phi(t, \vec{x}) \left( \delta(\phi_0) - \phi \delta'(\phi_0) + \frac{1}{2} \phi^2 \delta''(\phi_0) + \dots \right) \right\rangle \quad (2.39)$$

Во-первых, ясно, что

$$\langle f_\phi \delta(\phi_0) \rangle = 0.$$

А слагаемое с первой производной можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \langle f_\phi \delta'(\phi_0) \phi \rangle &= \left\langle f_\phi \delta'(\phi_0) \left( \int_{-\infty}^t -\frac{1}{3H} V'(\phi_0(t', \vec{x})) dt' + \int_{-\infty}^t f_\phi dt' \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle f_\phi \delta'(\phi_0) \int_{-\infty}^t f_\phi dt' \right\rangle = \left\langle f_\phi(t, \vec{x}) \int_{-\infty}^t f_\phi(t', \vec{x}) dt' \right\rangle \langle \delta'(\phi_0) \rangle = \frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2n_{Ha(t)}) \langle \delta'(\phi_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В точности также можно поступить со второй и более высокими производными дельта-функции

$$\left\langle \frac{1}{2} f_\phi \delta''(\phi_0) \phi^2 \right\rangle = \frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2n_{Ha(t)}) \langle \phi \delta''(\phi_0) \rangle.$$

Это означает, что финальный ответ выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle f_\phi(t, \vec{x}) \delta(\phi - \phi_0) \rangle &= -\frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2n_{Ha(t)}) \langle \delta'(\phi - \phi_0) \rangle = \frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2n_{Ha(t)}) \partial_{\phi_0} \langle \delta(\phi - \phi_0) \rangle = \\ &= \frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2n_{Ha(t)}) \partial_{\phi_0} \rho_\phi(\phi_0, t). \end{aligned} \quad (2.41)$$

И уравнение Фоккера-Планка модифицируется следующим образом:

$$\dot{\rho}(t, \phi) = \frac{1}{3H} \partial_\phi (V'(\phi) \rho(t, \phi)) + \frac{H^3}{8\pi^2} (1 + 2\mathbf{n}_{Ha(t)}) \partial_\phi^2 (\rho(t, \phi)). \quad (2.42)$$

Кажется, что такая модификация не добавляет новых решений уравнению Фоккера-Планка. Действительно, рассмотрим предел  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда значение  $n_{Ha(t)}$  обязано стремиться к нулю (чтобы распределение было нормированным), и мы приходим к исходному уравнению.

## 2.8 В технике Келдыша-Швингера

Покажем, как воспроизвести ответы для корреляторов, полученные из уравнения Фоккера-Планка более привычными методами квантовой теории поля — с помощью диаграммной техники. Так как задача нестационарна, то стандартная техника Фейнмана неприменима для такого расчета, требуется использовать более общий инструмент пертурбативного вычисления. Мы будем работать в т.н. диаграммной технике Келдыша-Швингера.

### 2.8.1 Обозначения

Для удобства мы будем работать в терминах конформного времени

$$\eta = \frac{1}{Ha(t)} = \frac{1}{H} e^{-Ht}.$$

Тогда гармоники, переписанные в конформном времени примут вид

$$u(\eta, k) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} (1 - ik\eta) e^{ik\eta}. \quad (2.43)$$

Келдышевские пропагаторы

$$G(\eta_1, \eta_2, k) = u(\eta_1, k)u^*(\eta_2, k).$$

$$G_{++}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k)\theta(\eta_2 - \eta_1) + G(\eta_1, \eta_2, k)\theta(\eta_1 - \eta_2).$$

$$G_{--}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k)\theta(\eta_1 - \eta_2) + G(\eta_1, \eta_2, k)\theta(\eta_2 - \eta_1).$$

$$G_{+-}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_1, \eta_2, k).$$

$$G_{-+}(\eta_1, \eta_2, k) = G(\eta_2, \eta_1, k). \quad (2.44)$$

Заметим, что

$$\Theta(t_1 - t_2) = \Theta(\eta_2 - \eta_1).$$

### 2.8.2 Однопетлевая поправка

Вычислим однопетлевой вклад в двухточечную корреляционную функцию в совпадающих точках. Однопетлевая поправка к корреляционной функции в совпадающих точках равна

$$\mathcal{K} = - \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\eta_l}{(2\pi)^3} \frac{1}{H^4 \eta_l^4} \int_H^{1/\tau} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++}. \quad (2.45)$$

Здесь

$$K_{++} = G_{++}(\eta, \eta_l, k)G_{++}(\eta_l, \eta_l, p)G_{++}(\eta, \eta, k) - G_{+-}(\eta, \eta_l, k)G_{--}(\eta_l, \eta_l, p)G_{-+}(\eta, \eta, k). \quad (2.46)$$

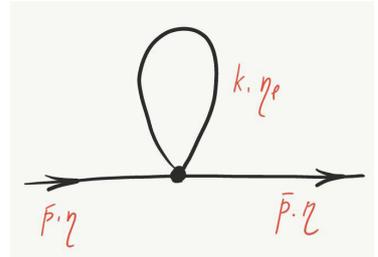


Рис. 1: Диаграмма однопетлевой поправки в пропагатор

$\eta_l$  — конформное время частицы в петле и  $k$  — импульс частицы в петле.

Подставим гармоники в Келдышевские пропагаторы, тогда выражение для петлевой поправки примет вид

$$K_{++} = u(\eta, k)u^*(\eta, k) \left( u(\eta, p)^2 u^*(\eta, p)^2 - u(\eta, p)^2 u^*(\eta_l, p)^2 \right).$$

Поработаем с выражением в скобках. Для начала разложим гармоники в терминах  $\eta k$ , выделяя инфракрасный вклад.

$$u(\eta, k) = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}(1 - i\eta k) \left( 1 + i\eta k + \frac{1}{2}(i\eta k)^2 + \frac{1}{6}(i\eta k)^3 \right),$$

Подставляя полученное разложение, находим выражение в скобках:

$$\left( u(\eta, p)^2 u^*(\eta, p)^2 - u(\eta, p)^2 u^*(\eta_l, p)^2 \right) \approx -\frac{iH^4(\eta^3 - \eta_l^3)}{3p^3} + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Таким образом, выражение для  $K_{++}$  преобразуется к

$$K_{++} \approx -\frac{H^2}{2k^3}(1 - ik\eta)(1 + ik\eta)\frac{iH^4(\eta^3 - \eta_l^3)}{3p^3}. \quad (2.47)$$

Интегрируя по  $k$  получаем:

$$\int_H^{1/\eta_l} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} K_{++} = \frac{i\pi H^6(\eta^3 - \eta_l^3)(\eta^2(H^2\eta_l^2 - 1) + 2\eta_l^2 \log(H\eta_l))}{(2\pi)^3 3p^3 \eta_l^2}.$$

Затем интегрируем по  $\eta_l$ :

$$\int_{\eta}^{1/H} \frac{d\eta_l}{H^4 \eta_l^4} \dots \approx \frac{i\pi H^2 \log^2(\eta H)}{(2\pi)^3 3p^3}. \quad (2.48)$$

И, наконец, результат для  $\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle$ :

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim 2 \int_H^{1/\eta} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{i\pi H^2 \log^2(\eta H)}{(2\pi)^3 3p^3} = -\frac{iH^2 \log^3(\eta)}{48\pi^4}. \quad (2.49)$$

Ответ в точности совпадает с тем, что получается стохастическим анализом.

### 2.8.3 Вклад из двух петель

Двухпетельный вклад приходит из трех диаграмм, показанных на рисунке.

Легко проверить, что для первой диаграммы

$$\begin{aligned} K'_{++} &= K_{++}G_{++}(\tau, \tau, k)G_{++}(\tau, \eta, p) - K_{+-}G_{--}(\tau, \tau, k)G_{-+}(\tau, \eta, p) = \\ &= K_{++}(G_{++}(\tau, \tau, k)G_{++}(\tau, \eta, p) - G_{--}(\tau, \tau, k)G_{-+}(\tau, \eta, p)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

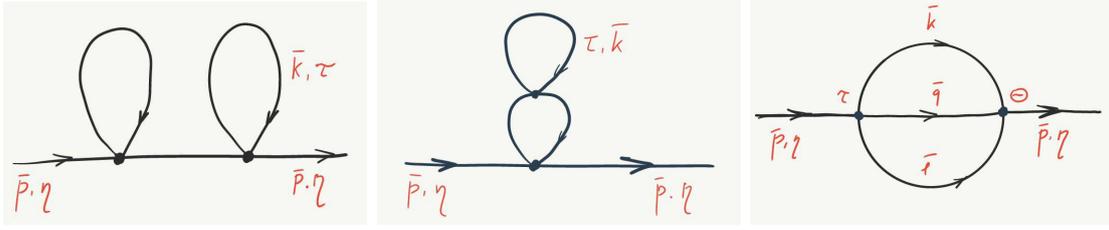


Рис. 2: Двухпетельный вклад в пропагатор

И в терминах гармоник:

$$K'_{++} = K_{++} (u(\tau, k)u^*(\tau, k)(u(\tau, p)u^*(\eta, p) - u(\eta, p)u^*(\tau, p))) \quad (2.51)$$

Используем здесь то же разложение, что и в однопетельном вычислении.

$$(u(\tau, p)u^*(\eta, p) - u(\eta, p)u^*(\tau, p)) \approx -\frac{1}{3}iH^2 (\eta^3 - \tau^3).$$

В итоге, получим

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim 2 \int_H^{1/\eta} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{H^4 \tau^4} \int_H^{1/\tau} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{H^2(1 - ik\tau)(1 + ik\tau) (iH^2 (\eta^3 - \tau^3)) (i\pi H^2 \log^2(\eta H))}{3(2k^3)(3p^3)}. \quad (2.52)$$

И, интегрируя по  $k$ ,  $\tau$  and  $p$ , ответ на первую диаграмму:

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim \frac{1}{18(2\pi)^3} H^2 \log^5(\eta H) \quad (2.53)$$

Вклад от второй диаграммы считается аналогично

$$\begin{aligned} K'_{++} &= G_{++}(\eta, \tau, p)K_{++}G_{++}(\tau, \eta, p) - G_{+-}(\eta, \tau, p)K_{--}G_{-+}(\tau, \eta, p) = \\ &= K_{++} (G_{++}(\eta, \tau, p)G_{++}(\tau, \eta, p) - G_{+-}(\eta, \tau, p)G_{-+}(\tau, \eta, p)). \end{aligned} \quad (2.54)$$

В терминах гармоник

$$K'_{++} = K_{++} (u(\tau, p)^2 u^*(\eta, p)^2 - u(\eta, p)^2 u^*(\tau, p)^2). \quad (2.55)$$

Как и ранее

$$(u(\tau, p)^2 u^*(\eta, p)^2 - u(\eta, p)^2 u^*(\tau, p)^2) \approx -\frac{iH^4 (\eta^3 - \tau^3)}{3p^3} + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim -2 \int_H^{1/\eta} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_\eta^{1/H} \frac{d\tau}{H^4 \tau^4} \frac{(iH^4 (\eta^3 - \tau^3)) (-iH^2 \log^3(\tau))}{(48\pi^4) (3p^3)} = \frac{H^2 \log^5(\eta H)}{144\pi^3} \quad (2.56)$$

Наконец, последняя диаграмма имеет некоторые отличия в своей структуре:

Имеем для нее

$$\begin{aligned} K'_{++} = & D_{++}(\eta, \tau, p) D_{++}(\tau, \theta, k) D_{++}(\tau, \theta, q) D_{++}(\tau, \theta, l) D_{++}(\theta, \eta, p) - \\ & - D_{+-}(\eta, \tau, p) D_{-+}(\tau, \theta, k) D_{-+}(\tau, \theta, q) D_{-+}(\tau, \theta, l) D_{++}(\theta, \eta, p) - \\ & - D_{++}(\eta, \tau, p) D_{+-}(\tau, \theta, k) D_{+-}(\tau, \theta, q) D_{+-}(\tau, \theta, l) D_{--}(\theta, \eta, p) + \\ & + D_{+-}(\eta, \tau, p) D_{--}(\tau, \theta, k) D_{--}(\tau, \theta, q) D_{--}(\tau, \theta, l) D_{-+}(\theta, \eta, p). \end{aligned} \quad (2.57)$$

В терминах гармоник при  $\tau > \theta$ :

$$\begin{aligned} K'_{++} = & (u(\tau, p)u^*(\eta, p) - u(\eta, p)u^*(\tau, p)) \\ & (u(\theta, k)u(\theta, l)u(\theta, p)u(\theta, q)u^*(\tau, k)u^*(\tau, l)u^*(\eta, p)u^*(\tau, q) - \\ & - u(\tau, k)u(\tau, l)u(\eta, p)u(\tau, q)u^*(\theta, k)u^*(\theta, l)u^*(\theta, p)u^*(\theta, q)). \end{aligned} \quad (2.58)$$

При  $\tau < \theta$ :

$$\begin{aligned} & (u(\theta, p)u^*(\eta, p) - u(\eta, p)u^*(\theta, p)) \\ & (u(\tau, k)u(\tau, l)u(\tau, p)u(\tau, q)u^*(\theta, k)u^*(\theta, l)u^*(\eta, p)u^*(\theta, q) - \\ & - u(\theta, k)u(\theta, l)u(\eta, p)u(\theta, q)u^*(\tau, k)u^*(\tau, l)u^*(\tau, p)u^*(\tau, q)). \end{aligned} \quad (2.59)$$

С выражением в первых скобках (в обоих случаях) поступим так же как и с предыдущими диаграммами. Сконцентрируемся на выражении во вторых скобках. После взятия предела  $k \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow 0$ ,  $l \rightarrow 0$  и  $p \rightarrow 0$ , выражение принимает вид

$$\begin{aligned} & (u(\theta, k)u(\theta, l)u(\theta, p)u(\theta, q)u^*(\tau, k)u^*(\tau, l)u^*(\eta, p)u^*(\tau, q) - \\ & - u(\tau, k)u(\tau, l)u(\eta, p)u(\tau, q)u^*(\theta, k)u^*(\theta, l)u^*(\theta, p)u^*(\theta, q)) \approx \\ & \approx \frac{i(\theta^3 H^8 - \eta^3 H^8)}{24k^3 l^3 q^3} + O(p) \end{aligned}$$

Восстанавливая  $K'_{++}$ , получаем

$$K'_{++} \approx \frac{(i(\theta^3 H^8 - \eta^3 H^8)) (-iH^2 (\eta^3 - \tau^3))}{3(24k^3 l^3 q^3)}. \quad (2.60)$$

Находим вклад в коррелятор:

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim \int d^3 p d^3 k d^3 q d^3 l \int \frac{d\tau}{H^4 \tau^4} \int \frac{d\theta}{H^4 \theta^4} K'_{++} \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k} - \vec{l}). \quad (2.61)$$

Выражение выше для  $K'_{++}$  не зависит от  $p$ , поэтому мы можем легко проинтегрировать по  $p$  с использованием дельта-функции. Тогда

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim \int_H^{1/\eta} d^3k d^3q d^3l \int \frac{d\tau}{H^4 \tau^4} \int \frac{d\theta}{H^4 \theta^4} \frac{(\theta^3 H^8 - \eta^3 H^8) H^2 (\eta^3 - \tau^3)}{3 (24 k^3 l^3 q^3)}. \quad (2.62)$$

Аккуратно проинтегрировав, используя правильные пределы (верхний предел интегрирования по обоим импульсам —  $1/\eta$ ), получаем

$$\langle 0 | \phi^2(t, \vec{x}) | 0 \rangle \sim \frac{H^2 \log^3(\eta H) (\eta^3 (-H^3) + 3 \log(\eta H) + 1)^2}{10368 \pi^6}. \quad (2.63)$$

Собирая вклады от трех диаграмм вместе, видим, что результат согласуется со стохастическим вычислением.

## 3 Массивное поле

### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим действительное массивное, минимально взаимодействующую скалярную теорию поля:

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (3.1)$$

Как и ранее, мы ограничиваем нашу теорию расширяющимся Пуанкаре-патчем пространства де Ситтера.

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^2} [-d\eta^2 + d\vec{x}^2], \quad \eta = e^{-t}, \quad (3.2)$$

где конформное время варьируется от  $\eta = +\infty$  на бесконечности в прошлом ( $t = -\infty$ ) до  $\eta = 0$  на бесконечности в будущем ( $t = +\infty$ ). Радиус пространства де Ситтера положим единицей.

Вследствие того, что в наших координатах пространственная часть является плоской, скалярные моды можно выразить в терминах плоских волн следующим образом:  $\phi_p(\eta, \vec{x}) = \eta^{(D-1)/2} h(p\eta) e^{-i\vec{p}\vec{x}}$ , где  $h(p\eta)$  функции Бесселя порядка  $\nu = \sqrt{(\frac{D-1}{2})^2 - m^2}$ . Все функции Бесселя таких порядков ведут себя следующим образом:

$$h(p\eta) = \begin{cases} A \frac{e^{ip\eta}}{\sqrt{p\eta}} + B \frac{e^{-ip\eta}}{\sqrt{p\eta}}, & p\eta \gg |\nu| \\ C (p\eta)^\nu + D (p\eta)^{-\nu}, & p\eta \ll |\nu|. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь  $A, B, C, D$  — некоторые комплексные константы, которые фиксируются каноническими коммутационными соотношениями.

При  $t \rightarrow -\infty$  физический импульс частиц  $p\eta$  стремится к бесконечности и все гармоники асимптотически ведут себя как плоские волны в плоском пространстве. Это происходит, потому что высокоэнергетичные моды нечувствительны к относительно небольшой кривизне пространства. Мы можем сказать, что при  $t \rightarrow -\infty$  внешнее гравитационное поле эффективно отсутствует.

С другой стороны, низкоэнергетичные моды (3.3) ведут себя совершенно отлично от плоских. Грубо говоря, такое отличие и является причиной сильной инфракрасных поправок к корреляционным функциям в пространстве де Ситтера.

### 3.2 Формализм Швингера-Келдыша

Действие (3.1) определяет теорию с нестационарной метрикой (3.2). Поэтому пертурбативное разложение корреляционных функций конструируется из трех пропагаторов [67] (см. также [64], [68], [74]). Два из них — это стандартные запаздывающий

и опережающий пропагаторы. Эти пропагаторы не зависят от выбранного пространства Фока свободной теории.

$$D_0^{\frac{R}{A}}(\eta_1, \vec{x}_1; \eta_2, \vec{x}_2) = \pm \theta(\mp \Delta \eta_{12}) \langle [\phi(\eta_1, \vec{x}_1), \phi(\eta_2, \vec{x}_2)] \rangle, \quad \Delta \eta_{12} = \eta_1 - \eta_2, \quad (3.4)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор. Келдышевский пропагатор — это «вакуумное» ожидание от антикоммутатора:

$$D_0^K(\eta_1, \vec{x}_1; \eta_2, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} \langle \{\phi(\eta_1, \vec{x}_1), \phi(\eta_2, \vec{x}_2)\} \rangle. \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что келдышевский пропагатор зависит от выбранного нами вакуума.

В наших координатах пространство обладает трансляционной инвариантностью  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$ . Мы будем квантовать нашу теорию только там, где эта инвариантность не нарушена. В частности, это означает, что все пропагаторы зависят только от разницы векторов.  $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ . Поэтому удобно сделать преобразование Фурье всех величин:

$$D_0^{K,R,A}(p|\eta_1, \eta_2) \equiv \int d^{D-1}x e^{-i\vec{p}\vec{x}} D_0^{K,R,A}(\eta_1, \vec{x}; \eta_2, 0). \quad (3.6)$$

Такое частичное преобразование Фурье также поможет учитывать в отдельности вклады от мод с разными физическими импульсами.

Преобразование Фурье от древесных запаздывающего и опережающего пропагаторов [74]:

$$D_0^{\frac{R}{A}}(p|\eta_1, \eta_2) = \pm \theta(\mp \Delta \eta_{12}) 2(\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} \text{Im}[h(p\eta_1)h^*(p\eta_2)]. \quad (3.7)$$

Если начальное состояние  $|\Psi\rangle$  «уважает» пространственную трансляционную инвариантность, то древесный келдышевский пропагатор может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} & D_0^K(p|\eta_1, \eta_2) = \\ & = (\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} \left[ \left( \frac{1}{2} + \langle \Psi, a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}} \Psi \rangle \right) h(p\eta_1)h^*(p\eta_2) + \langle \Psi, a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} \Psi \rangle h(p\eta_1)h(p\eta_2) + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В основном состоянии  $a_{\vec{p}}|\Psi\rangle = 0$  выражение выше упрощается до

$$D_0^K(p|\eta_1, \eta_2) = (\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} \text{Re}[h(p\eta_1)h^*(p\eta_2)]. \quad (3.9)$$

В случае, когда масса ненулевая, существует однопараметрическое семейство вакуумов, известных как  $\alpha$ -вакуумы ([75, 76, 77]), сохраняющих при квантовании инвариантность пространства де Ситтера. Во всех этих случаях  $D_0^K$  зависит только от инвариантного геодезического расстояния между двумя точками. (В то время как на древесном уровне это происходит для  $D_0^{R,A}$  при произвольных состояниях  $|\Psi\rangle$ ).

### 3.3 Общее обсуждение петлевых поправок к пропагаторам

Обсудим петлевые поправки к келдышевским пропагаторам  $D^K(p|\eta_1, \eta_2)$ , выбрав в качестве начального состояния вакуум Банча-Дэвиса. Причина по которой уделяется внимание только келдышевскому пропагатору состоит в том, что именно он определяет состояние теории и показывает зависимость  $n_p$  и  $\kappa_p$  от времени. Более того, вскоре мы увидим, что только он и получает сильные инфракрасные поправки.

Несложно показать, что массивная теория  $\lambda\phi^4$  не получает никаких растущих поправок к пропагаторам в первой петле ( $\sim \lambda$ ). Тем не менее, на двухпетельном уровне ( $\sim \lambda^2$ ) такие вклады в  $D^K$  возникают. Двухпетлевая диаграмма, содержащая нужные нам вклады — «sunset»-диаграмма:

$$\begin{aligned} \Delta_2 D^K(p|\eta_1, \eta_2) = & \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}\vec{q}_2}{(2\pi)^{D-1}} \iint_{+\infty}^0 \frac{d\eta_3 d\eta_4}{(\eta_3 \eta_4)^D} \times \\ & \times \left[ 3 D_0^K(p|\eta_1, \eta_3) D_0^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \right. \\ & - \frac{1}{4} D_0^K(p|\eta_1, \eta_3) D_0^A(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^A(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\ & - \frac{3}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^A(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) + \\ & + D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^K(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\ & - \frac{3}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^R(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^R(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\ & - \frac{1}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^R(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^R(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^K(p|\eta_4, \eta_2) + \\ & \left. + 3 D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^K(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^K(p|\eta_4, \eta_2) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Не будем касаться вопроса ультрафиолетовых расходимостей, но будем предполагать, что какая-то регуляризация выполнена аналогично тому, как это делается в плоском пространстве. Массу полей и константы связи будем считать равными физическим перенормированным величинам.

Ведущий инфракрасный вклад в  $\Delta_2 D^K(p|\eta_1, \eta_2)$  спрятан внутри следующего выражения [64]:

$$\Delta_2 D^K(p|\eta_1, \eta_2) \approx (\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} \left[ h(p\eta_1) h^*(p\eta_2) n_2(p\eta) + h(p\eta_1) h(p\eta_2) \kappa_2(p\eta) + c.c. \right] \quad (3.11)$$

где  $\eta = e^{-t} = \sqrt{\eta_1 \eta_2} = e^{-\frac{t_1+t_2}{2}}$  — это усредненное конформное время и

$$\begin{aligned}
n_2(p\eta) &= \frac{\lambda^2}{3} \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta_3 d\eta_4 h(p\eta_3) h^*(p\eta_4) F(p, \eta_3, \eta_4), \\
\kappa_2(p\eta) &= -\frac{2\lambda^2}{3} \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\eta_3} d\eta_3 d\eta_4 h^*(p\eta_3) h^*(p\eta_4) F(p, \eta_3, \eta_4), \\
F(p, \eta_3, \eta_4) &= \int \frac{d^{D-1}q_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}q_2}{(2\pi)^{D-1}} (\eta_3\eta_4)^{D-2} \times \\
&\times h(q_1\eta_4) h^*(q_1\eta_3) h(q_2\eta_4) h^*(q_2\eta_3) h(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| \eta_4) h^*(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| \eta_3), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

где индекс 2 в  $n_2$  и  $\kappa_2$  означает вклад из второй петли.

В выводе выражения для  $\Delta_2 D^K$  из (3.7), (3.9) и (3.10) в пределе  $p\sqrt{\eta_1\eta_2} \rightarrow 0$  и  $\eta_1/\eta_2 = const$ , было пренебрежено разностью между  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Оба времени были заменены на среднее конформное время  $\eta$  в аргументе функции Хевисайда  $\theta$  (см. обоснование более подробно [64]).

Стоит отметить, что характер двухпетлевых поправок к запаздывающему и опережающему пропагаторам не зависит ни от выбора гармоник, ни от масс полей.

Двухпетлевой вклад в  $D^R$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 D^R(p|\eta_1, \eta_2) &= \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}_1}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}_2}{(2\pi)^{D-1}} \iint_{+\infty}^0 \frac{d\eta_3 d\eta_4}{(\eta_3 \eta_4)^D} \times \\
&\times \left[ 3 D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^K(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^R(p|\eta_4, \eta_2) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^R(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^R(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^R(p|\eta_4, \eta_2) \right]. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Здесь пределы интегрирования таковы, что  $\eta_1 > \eta_3 > \eta_4 > \eta_2$ . В результате интеграл (3.13) не содержит растущих поправок при фиксированных  $\eta_1/\eta_2$ . Ситуация с опережающим пропагатором аналогична.

Поправки к вершинам будут обсуждены отдельно при выборе конкретных гармоник.

### 3.4 Поправка к пропагаторам, главная серия

Начнем изучения со случая  $\frac{D-1}{2} < m$ . Сделаем следующую замену переменных:  $\vec{q}_i$  на  $\vec{l}_i = \vec{q}_i\eta_3$  и  $\eta_4$  to  $v = \frac{\eta_3}{\eta_4}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Теперь разложим наши гармоники  $h(p\eta_{3,4}) \approx A_+(p\eta_{3,4})^{i\mu} + A_-(p\eta_{3,4})^{-i\mu}$  при  $p\eta_{3,4} \rightarrow 0$  под интегралами, где  $A_{\pm}$  — некоторые, зависящие от массы, комплексные константы. После этого мы пренебрегаем  $p$  по сравнению

с  $q_{1,2,3}$  в правой части уравнений (3.12) и интегрируем по  $\eta_3$ . Наибольший инфракрасный вклад приходит из интегралов  $\int_{\mu/p}^{\eta} \frac{d\eta_3}{\eta_3} h(p\eta_3) h^*(p\eta_3 v)$  и  $\int_{\mu/p}^{\eta} \frac{d\eta_3}{\eta_3} h^*(p\eta_3) h^*(p\eta_3 v)$ , где гармоники разложены в ряд Тейлора. Результат следующий:

$$\begin{aligned} n_{p\eta} &\approx -\frac{\lambda^2 \log(p\eta/\mu)}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int_{\infty}^0 dv v^{D-2} \int d^{D-1} l_1 d^{D-1} l_2 d^{D-1} l_3 \delta^{(D-1)}(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3) \times \\ &\quad \times h^*(l_1) h(l_1 v) h^*(l_2) h(l_2 v) h^*(l_3) h(l_3 v) [|A_+|^2 v^{-i\mu} + |A_-|^2 v^{+i\mu}], \\ k_{p\eta} &\approx \frac{2\lambda^2 \log(p\eta/\mu)}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \int_{\infty}^1 dv v^{D-2} \int d^{D-1} l_1 d^{D-1} l_2 d^{D-1} l_3 \delta^{(D-1)}(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3) \times \\ &\quad \times h^*(l_1) h(l_1 v) h^*(l_2) h(l_2 v) h^*(l_3) h(l_3 v) A_+ A_- [v^{i\mu} + v^{-i\mu}], \quad l_{1,2,3} = \left| \vec{l}_{1,2,3} \right|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Нижний предел интегрирования по  $\eta_3$  обрезан по  $\mu$ , потому что при  $p\eta \gg \mu$  интегралы по  $d^{D-1} l_i$ ,  $d\eta_3$ , и  $dv$  сходятся благодаря быстрым осцилляциям  $h(x)$ , в то время как нас интересуют только инфракрасные вклады.

Такие сильные логарифмические вклады в  $D^k$  происходят благодаря рождению частиц в пространстве де Ситтера.

В будущем мы увидим, что при определенном выборе гармоник, а именно — аутгармоник Джоста ( $h(p\eta_{3,4}) \approx A(p\eta_{3,4})^{i\mu}$  при  $\eta \rightarrow 0$ ), лидирующие вклады к пропагатору удастся просуммировать во всех порядках. Это удастся сделать за счет того, что при таком выборе гармоник растущие поправки получает только  $n_p$ .

### 3.5 Дополнительная серия

В этом разделе изучим двухпетлевую поправку в случае дополнительной серии, т.е. при  $0 < \nu < (D-1)/2$ . Гармоники в таком случае пропорциональны функциям Ганкеля:  $h(x) \propto H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + iY_{\nu}(x)$ ; При  $p\eta \rightarrow \infty$  они ведут себя как  $h(p\eta) \sim \frac{e^{i p\eta}}{\sqrt{p\eta}}$  и представляют из себя плоские волны. Эти гармоники диагонализуют гамильтониан на бесконечности в прошлом. С другой стороны, при  $p\eta \rightarrow 0$  они ведут себя как  $h(p\eta) \approx A_- (p\eta)^{-\nu} + i A_+ (p\eta)^{\nu} + B (p\eta)^{-\nu+2}$  где  $A_{\pm}$  и  $B$  — действительные константы. Будем удерживать слагаемое  $B x^{-\nu+2}$ , т.к. именно оно будет доминировать над  $A_+ x^{\nu}$ , при  $x \rightarrow 0$ , если  $\nu > 1$ . Член при  $A_+$  также важен, как мы увидим далее.

В отличие от главной серии, функция  $F(p, \eta_3, \eta_4)$  в (3.11) может содержать существенные вклады при  $p \rightarrow 0$ . Для того, чтобы оценить эту функцию, разделим область интегрирования на 4 региона: регион, где  $|\vec{q}_{1,2}| \lesssim |\vec{p}|$ , другой — где  $|\vec{q}_{1,2}| \gtrsim |\vec{p}|$  и два других, где  $|\vec{q}_1| \lesssim |\vec{p}| \lesssim |\vec{q}_2|$  или  $|\vec{q}_2| \lesssim |\vec{p}| \lesssim |\vec{q}_1|$ .

Чтобы оценить вклад в  $F(p, \eta_3, \eta_4)$  от первого региона мы можем приблизить  $|\vec{q}_{1,2} - \vec{p}| \approx p$ , а затем воспользоваться тем, что в инфракрасном пределе  $p \rightarrow 0$ . Следовательно, можно сделать разложение Тейлора для всех гармоник в выражении для  $F(p, \eta_3, \eta_4)$ . Тогда вклад в  $F(p, \eta_3, \eta_4)$  из первого региона,  $|\vec{q}_{1,2}| \lesssim |\vec{p}|$ , такой:

$$\begin{aligned}
F_{(1)}(p, \eta_3, \eta_4) &= \\
&= \int_{|q_1|, |q_2| < |p|} \frac{d^{D-1}q_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}q_2}{(2\pi)^{D-1}} (\eta_3\eta_4)^{D-2} h(q_1\eta_4)h^*(q_1\eta_3)h(q_2\eta_4)h^*(q_2\eta_3)h(p\eta_4)h^*(p\eta_3) \sim \\
&\sim \int_{|q_1|, |q_2| < |p|} d^{D-1}q_1 d^{D-1}q_2 q_1^{-2\nu} q_2^{-2\nu} p^{-2\nu} (\eta_3\eta_4)^{D-2-3\nu} \sim (\eta_3\eta_4)^{D-2-3\nu} p^{2(D-1-3\nu)}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Во второй области (где  $q_{1,2} \geq p$ ) наибольший инфракрасный вклад в  $F(p, \eta_3, \eta_4)$  приходит из  $q_{1,2} \gg p$ . Снова можно разложить все гармоники в ряд Тейлора и получить:

$$F_{(2)}(p, \eta_3, \eta_4) \sim \int_{|q_1|, |q_2| > |p|} d^{D-1}q_1 d^{D-1}q_2 q_1^{-2\nu} q_2^{-2\nu} (|\vec{q}_1 + \vec{q}_2|)^{-2\nu} (\eta_3\eta_4)^{D-2-3\nu}$$

Наконец, оценка двух оставшихся вкладов дает похожий результат:

$$F_{(3)}(p, \eta_3, \eta_4) \sim \int_{|\vec{q}_1| < |\vec{p}|} d^{D-1}\vec{q}_1 \int_{|\vec{p}| < |\vec{q}_2|} d^{D-1}\vec{q}_2 q_1^{-2\nu} q_2^{-4\nu} (\eta_3\eta_4)^{D-2-3\nu} \sim F_{(4)}(p, \eta_3, \eta_4). \quad (3.16)$$

Следовательно, при  $D - 1 - 3\nu < 0$  возникает большой инфракрасный вклад в  $F(p, \eta_3, \eta_4)$ , приходящий из регионов, где либо  $q_1$  или  $q_2$  либо оба импульса меньше, чем  $p$ .

В итоге  $n$  и  $\kappa$  получают большие инфракрасные поправки, приходящие из интегралов по  $q_{1,2}$  в областях  $p < q_{1,2}$  и  $q_{1,2} < p$ . В этом состоит одно из отличий между дополнительной и главной серией, где инфракрасные поправки приходят только из области  $|\vec{q}_{1,2}| \gg |\vec{p}|$ .

Ключевая разница состоит в том, что в главной серии  $n_2$  и  $\kappa_2$  получает логарифмические поправки, в то время как здесь они степенные:

$$\begin{aligned}
n_2(p\eta) &\approx \frac{\lambda^2}{3} |A_-|^2 (p\eta)^{-2\nu} \int \frac{d^{D-1}q_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 d\eta_3 d\eta_4 (\eta_3\eta_4)^{D-2-\nu} \times \\
&\quad \times h(q_1\eta_4)h^*(q_1\eta_3)h(q_2\eta_4)h^*(q_2\eta_3)h(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| \eta_4)h^*(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| \eta_3), \\
\kappa_2(p\eta) &\approx -\frac{2\lambda^2}{3} \lambda^2 (A_-^*)^2 (p\eta)^{-2\nu} \int \frac{d^{D-1}q_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}q_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 d\eta_3 d\eta_4 (\eta_3\eta_4)^{D-2-\nu} \times \\
&\quad \times h(q_1\eta_4)h^*(q_1\eta_3)h(q_2\eta_4)h^*(q_2\eta_3)h(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| \eta_4)h^*(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| \eta_3), \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Эти выражения получены из (3.11) заменой переменных  $q \rightarrow q\eta$ ,  $\eta_{3,4} \rightarrow \eta_{3,4}/\eta$ , пренебрегая  $p$  по сравнению с  $q_{1,2}$  и раскладывая  $h(p\eta_{3,4})$  по  $p\eta_{3,4}$ . Однако после подстановки (3.17) в  $\Delta_2 D^K$  (3.11) и раскладывая  $h(p\eta_{1,2})$  в нуле, эти лидирующие поправки сокращаются! Более того, наибольший инфракрасный вклад приходящий из  $B x^{-\nu+2}$  в выражении для  $h(x)$  тоже исчезает из окончательного выражения для  $\Delta_2 D^K$ .

Наибольший инфракрасный вклад в  $\Delta_2 D^K$  приходит из второстепенных вкладов в  $n$  and  $\kappa$ . Чтобы получить его, нужно выразить все гармоники в (3.11) в терминах функций Бесселя  $J_\nu$  и  $Y_\nu$ . Затем, в одной из четырех гармоник  $h [h(p\eta_{1,2})$  и  $h(p\eta_{3,4})]$  нужно выделить  $J_\nu \sim x^\nu$  при  $x \rightarrow 0$ , в то время как в трех других —  $Y_\nu \sim x^{-\nu}$  при  $x \rightarrow 0$ . Соответствующее выражение не сокращается и дает наибольший вклад в  $\Delta_2 D^K$ .

Делая замену переменных  $u = p\sqrt{\eta_3\eta_4}$  и  $v = \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_4}}$ , можно безболезненно увеличить расширить область интегрирования по  $v$  от бесконечности до нуля. Интеграл останется конечным, а префакторы, которые будут найдены ниже будут лишь немного изменены за счет высокоэнергетичных вкладов.

Наконец, раскладывая  $h(p\eta_{3,4})$  и интегрируя по  $u$  от  $\nu$  до  $p\eta$ , получаем:

$$\Delta_2 D^K(p|\eta_1, \eta_2) \approx \frac{8 A_-^3 A_+}{3(2\pi)^{2(D-1)}} \frac{\lambda^2 \log(p\eta/\nu) \eta^{D-1}}{(p\eta)^{2\nu}} \times \left\{ \int_1^\infty dv v^{-D} G(v) \left( -\frac{1}{2\nu} v^{2\nu} + \frac{1}{v^{2\nu}} \right) - \int_0^1 dv v^{-D} G(v) \left( \frac{1}{2\nu} v^{-2\nu} + v^{2\nu} \right) \right\}, \quad (3.18)$$

где

$$G(v) = \int \int \frac{d^{D-1}q_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}q_2}{(2\pi)^{D-1}} h(q_1 v^2) h^*(q_1) h(q_2 v^2) h^*(q_2) h(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2| v^2) h^*(|\vec{q}_1 + \vec{q}_2|) \quad (3.19)$$

Хотя  $\lambda$  мала, петлевой вклад становится сравнимым с древесным со временем. При  $p\eta \rightarrow 0$  сумма древесного вклада и вклада от второй петли в кельдышевский пропагатор такая:

$$D_0^K + \Delta_2 D^K \approx \eta^{D-1} / (p\eta)^{2\nu} \left[ a + b \lambda^2 \log \frac{p\eta}{\nu} \right], \quad (3.20)$$

где константы  $a$  и  $b$  могут быть вычислены из выражения выше.

Стоит отметить, что при  $D - 1 - 3\nu < 0$ , инфракрасный вклад в  $n_2$  и  $\kappa_2$  имеет следующий вид:

$$n_2(p\eta) \propto \lambda^2 (p\eta)^{D-1-6\nu}, \quad \kappa_2(p\eta) \propto \lambda^2 (p\eta)^{D-1-6\nu}. \quad (3.21)$$

Однако после подстановки этих ведущих вкладов (3.21) в  $\Delta_2 D^K$  они сокращаются, и главную роль играют второстепенные члены, которые дают логарифмическую, а не степенную поправку.

### 3.6 Поправки к вершинам

Для вершин более удобно использовать нестационарную диаграммную технику до келдышевского поворота (например, см. [64]). Тогда однопетлевая поправка (приходящая из диаграммы-«рыбы») для вершин:

$$\begin{aligned} \lambda^{--}(\eta_1, \eta_2, p_1, p_2, p_3, p_4) &= (-i\lambda)^2 (\eta_1 \eta_2)^{D-1} \delta^{(D-1)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \int \frac{d^{D-1}q}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ &\times \left\{ \theta(\eta_1 - \eta_2) h(|\vec{q} - \vec{p}_1| \eta_1) h^*(|\vec{q} - \vec{p}_1| \eta_2) + \theta(\eta_2 - \eta_1) h(|\vec{q} - \vec{p}_1| \eta_2) h^*(|\vec{q} - \vec{p}_1| \eta_1) \right\} \times \\ &\times \left\{ \theta(\eta_2 - \eta_1) h(|\vec{p}_2 + \vec{q}| \eta_2) h^*(|\vec{p}_2 + \vec{q}| \eta_1) + \theta(\eta_1 - \eta_2) h(|\vec{p}_2 + \vec{q}| \eta_1) h^*(|\vec{p}_2 + \vec{q}| \eta_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь индексы “+” и “-” ассоциированы с двумя внутренними вершинами в однопетлевой диаграмме, выражающей поправку к древесным вершинам.

Ситуация с другими вершинами ( $\lambda^{+-}$ ,  $\lambda^{-+}$  and  $\lambda^{++}$ ) устроена аналогично.

Хотелось бы проверить, содержит ли выражение (3.22) большие поправки в пределе  $p_i \eta_{1,2} \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Легко увидеть, что в случае с главной серией существенных поправок не возникает. Сконцентрируемся на случае, когда главную роль играет дополнительная серия.

Как и в случае с келдышевским пропагатором, мы разобьем область интегрирования по внутренним (петлевым) импульсам  $\vec{q}$  на две части. В первой —  $q \geq (p_1 p_2 p_3 p_4)^{1/4}$ . Чтобы оценить  $\lambda^{--}$  в этой области, заметим, что наибольший вклад приходит  $q \sim (p_1 p_2 p_3 p_4)^{1/4} \rightarrow 0$ . Поэтому, раскладывая в ряд Тейлора, все гармоники около нуля, мы получим вклад из первой области:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \lambda^{--}(\eta_1, \eta_2, p_1, p_2, p_3, p_4) &\sim \\ &\sim (-i\lambda)^2 (\eta_1 \eta_2)^{D-1-2\nu} \delta^{(D-1)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \int_{|q| > \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}} d^{D-1}q q^{-4\nu}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Это выражение немало при  $D - 1 - 4\nu < 0$ . Напротив, при  $D - 1 - 4\nu > 0$ , интеграл в (3.23) сходится в интересующем нас инфракрасном пределе.

Чтобы оценить поправку к вершине из области интегрирования, где  $q \leq (p_1 p_2 p_3 p_4)^{1/4}$ , можно просто пренебречь  $q$  по сравнению с  $p_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_2 \lambda^{--}(\eta_1, \eta_2, p_1, p_2, p_3, p_4) &\sim \\ &\sim (-i\lambda)^2 (\eta_1 \eta_2)^{D-1-2\nu} (p_1 p_2)^{-2\nu} \delta^{(D-1)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \int_{|q| < \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}} d^{D-1}q. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Видим, что также, если  $D - 1 - 4\nu > 0$ , это выражение не содержит значительного вклада. Однако если  $D - 1 - 4\nu < 0$ , то вершины испытывают сильные инфракрасные поправки, похожие на те, что наблюдаются в (3.23).

### 3.7 Суммирование ведущих вкладов во всех петлях, общее обсуждение

Мы видим, что, выбрав вакуум Банча-Дэвиса, петлевые эффекты могут стать большими ( $\sim \lambda^2 \log(p\eta)$ ), несмотря на то, что константа связи  $\lambda^2$  может быть очень маленькой.

Главное, что нужно извлечь из этих вычислений, — это то, что петлевые поправки не подавлены по сравнению с древесными вкладами в пропагаторы и вершины даже в случае массивных полей. Поэтому, чтобы понять, как устроена физика в пространстве де Ситтера, следует попытаться просуммировать все петлевые поправки.

Для того, чтобы просуммировать поправки от всех петель, требуется решить систему уравнений Дайсона-Швингера. Будем суммировать только лидирующие вклады  $\lambda^2 \log(p\eta)$  и пренебрегать второстепенными, такими как  $\lambda^4 \log(p\eta)$  и  $\lambda^2 \log(\eta_1/\eta_2)$  и т.д.

Как было показано ранее, запаздывающий и опережающий пропагаторы не получают больших инфракрасных поправок из первой и второй петель. Поправки могут прийти только из более высоких порядков. Это означает, что поправки к  $D^{R,A}$  подавлены по сравнению с  $D^K$ . Т.к. хотелось бы просуммировать только ведущие вклады, можно везде в качестве выражения для  $D^{R,A}$  использовать их древесные значения.

Тем не менее, стоит отметить, что в случае с дополнительной серией, как показано в предыдущем пункте, могут возникнуть инфракрасные поправки к вершинам. Чтобы избежать этих сложностей, будем рассматривать поля только с массой  $m > \frac{\sqrt{3}}{4}(D - 1)$ : в этом случае вершины не получают существенных поправок.

Уравнение Дайсона-Швингера сводится к интегро-дифференциальному уравнению исключительно на пропагатор Келдыша:

$$\begin{aligned}
D^K(p|\eta_1, \eta_2) &\approx D_0^K(p|\eta_1, \eta_2) + \frac{\lambda^2}{6} \int \frac{d^{D-1}\vec{q}_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}\vec{q}_2}{(2\pi)^{D-1}} \iint_{+\infty}^0 \frac{d\eta_3 d\eta_4}{(\eta_3 \eta_4)^D} \times \\
&\times \left[ 3 D_0^K(p|\eta_1, \eta_3) D^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \right. \\
&- \frac{1}{4} D_0^K(p|\eta_1, \eta_3) D_0^A(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^A(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\
&- \frac{3}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^A(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^A(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) + \\
&+ D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D^K(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\
&- \frac{3}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D^K(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^R(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^R(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D_0^A(p|\eta_4, \eta_2) - \\
&- \frac{1}{4} D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D_0^R(q_2|\eta_3, \eta_4) D_0^R(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D^K(p|\eta_4, \eta_2) + \\
&\left. + 3 D_0^R(p|\eta_1, \eta_3) D_0^R(q_1|\eta_3, \eta_4) D^K(q_2|\eta_3, \eta_4) D^K(|\vec{p} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2| |\eta_3, \eta_4) D^K(p|\eta_4, \eta_2) \right]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Формально это уравнение выглядит также, как и уравнение (3.10). Разница состоит в том, что в его правой части фигурирует точный келдышевский пропагатор и древесное приближение к  $D_0^R$  and  $D_0^A$ .

### 3.8 Суммирование ведущих вкладов в случае главной серии

Требуется решить уравнение (3.25) в инфракрасном пределе  $p\eta \lesssim \nu$ , где в качестве гармоник, как обсуждалось выше, взяты функции Джоста. Тогда существенные инфракрасные вклады получает только  $n_p$ . Все это возможно только при  $m > (D-1)/2$ . В этом пределе гармоники  $h$  осциллируют в инфракрасном пределе. Вследствие этих осцилляций, очевидна разность масштабов временной зависимости гармоник и плотности числа частиц. Выразим

$$\begin{aligned}
D^K(p|\eta_1, \eta_2) &\approx \eta^{D-1} h(p\eta_1) h^*(p\eta_2) \left[ \frac{1}{2} + n_e(p\eta) \right] + c.c., \\
&\eta = \sqrt{\eta_1 \eta_2}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

где  $n_e$  — это точное (пересуммированное) значение  $n$ .

Тогда, подставляя в уравнение (3.25), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{n_p(\eta) - n_p(\eta_*)}{\log(\eta) - \log(\eta_*)} &\rightarrow \frac{dn_{p\eta}}{d\log(p\eta)} = -\frac{\lambda^2 |A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{\infty}^0 dv v^{D-2} \\
&\left\{ 3\mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h^*(l_1)h^*(l_2)h \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| \right) h(l_1v)h(l_2v)h^* \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| v \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[ (1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} \right] \\
&+ 3\mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h^*(l_1)h(l_2)h \left( \left| \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \right| \right) h(l_1v)h^*(l_2v)h^* \left( \left| \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \right| v \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ (1 + n_{p\eta})n_{l_1}(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 - \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 - \vec{l}_2|} \right] \\
&+ \mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h^*(l_1)h^*(l_2)h^* \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| \right) h(l_1v)h(l_2v)h \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| v \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ (1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) \right] \\
&+ \mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h(l_1)h(l_2)h \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| \right) h^*(l_1v)h^*(l_2v)h^* \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| v \right) \right] \times \\
&\quad \times \left. \left[ (1 + n_{p\eta})(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}n_{l_1}n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} \right] \right\}. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

В процессе вывода этого уравнения было пренебрежено  $p$  по сравнению с  $q_{1,2,3}$ . Также была сделана замена переменных  $\vec{l}_{1,2,3} = \vec{q}_{1,2,3}\eta$ . Было также предположено, что функция  $n_{k\eta}$  гораздо более медленная функция времени, чем  $h(k\eta)$ .

Полученное уравнение имеет тип кинетического, но распределение не планковское, потому что законы сохранения энергии нарушаются в пространстве де Ситтrea.

Если система стартовала из бесконечности в прошлом с некоторым небольшим возмущением плотности числа частиц. После поворота Боголюбова к гармоникам Джоста, получатся некоторые начальные значения  $n_p$  and  $k_p$ . При этом, если  $k_p$  достаточно мала, то ее значение постепенно релаксирует до нуля, в то время, как  $n_p$  может взорваться.

Теперь, если начальное значение  $n_p$  после поворота к гармоникам Джоста гораздо меньше единицы, то можно использовать следующие приближения:

$$\begin{aligned}
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} &\approx 0 \\
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 - \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 - \vec{l}_2|} &\approx n_{l_1} \\
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) &\approx -n_{p\eta} \\
(1 + n_{p\eta})(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|}) - n_{p\eta}n_{l_1}n_{l_2}n_{|\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} &\approx 1. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Из-за быстрых осцилляций гармоник  $h(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  интегралы в правой части уравнения (3.27) набираются прит  $l_i \sim \mu$ . при этом  $p\eta \ll \mu$ . Более того, разумно предположить, что  $n_{l_i \sim 1} \ll n_{p\eta}$  в ситуации, когда начальное возмущения плотности числа частиц мало. Следовательно, можно пренебречь вторым слагаемым в (3.27) по сравнению с третьим и четвертым.

Тогда уравнение (3.27) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dn_{p\eta}}{d \log(p\eta)} &\approx \Gamma_1 n_{p\eta} - \Gamma_2, \quad \text{where} \\
\Gamma_1 &= \frac{\lambda^2 |A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{\infty}^0 dv v^{D-2} \times \\
&\times \mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h^*(l_1) h^*(l_2) h^* \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| \right) h(l_1 v) h(l_2 v) h \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| v \right) \right], \\
\Gamma_2 &= \frac{\lambda^2 |A|^2}{6} \int \frac{d^{D-1}l_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{\infty}^0 dv v^{D-2} \times \\
&\times \mathbb{R} \left[ v^{i\mu} h(l_1) h(l_2) h \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| \right) h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h^* \left( \left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| v \right) \right]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — вероятности распада и рождения частиц, соответственно, если придерживаться кинетической интерпретации.

Полученное уравнение (3.29) имеет решение со стационарным распределением  $n_{p\eta} = \Gamma_2/\Gamma_1$ , которое отвечает тому, что рождение (появление) частиц компенсируется их распадом (исчезновением).

Полученное решение самосогласовано при достаточно больших  $\mu$ , потому что в таком случае  $\Gamma_2/\Gamma_1 \approx e^{-3\pi\mu} \ll 1$ . Заметим, что равновесное распределение  $n \approx e^{-3\pi\mu}$  не совсем похоже на распределение Гиббонса-Хокинга. Оно выглядит, скорее, как Больцмановское, только «температура» зависит от степени потенциала самодействия. Например, равновесное распределение для теории  $\phi^3$  —  $n \approx e^{-2\pi\mu}$ .

Итак, было получено, что результат суммирования инфракрасных вкладов может привести к конечной двухточечной корреляционной функции.

Но что, если в качестве начальных данных взять достаточно сильное возмущение на вакуумом? Оказывается, что можно получить сингулярное решение.

Предположим, что в результате рождения частиц гравитационным полем, плотность частиц с  $p\eta \ll \mu$  стала большой по сравнению с единицей. Естественно предположить, что для низкоимпульсных гармоник, плотность очень медленно меняется от аргумента. Тогда, предполагая, что  $n(p\eta) \approx n(q_{1,2,3}\eta)$  для  $p\eta \ll \mu$  и  $q_{1,2,3}\eta \ll \mu$ .

Тогда, сделав следующие приближения:

$$\begin{aligned}
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}(1 + n_{l_3}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})n_{l_3} &\approx 0 \\
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}(1 + n_{l_2})(1 + n_{l_3}) - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})n_{l_2}n_{l_3} &\approx 2n_{p\eta}^3 \\
(1 + n_{p\eta})n_{l_1}n_{l_2}n_{l_3} - n_{p\eta}(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{l_3}) &\approx -2n_{p\eta}^3 \\
(1 + n_{p\eta})(1 + n_{l_1})(1 + n_{l_2})(1 + n_{l_3}) - n_{p\eta}n_{l_1}n_{l_2}n_{l_3} &\approx 4n_{p\eta}^3 \tag{3.30}
\end{aligned}$$

кинетическое уравнение сводится к следующему.

$$\begin{aligned}
& \frac{dn_{p\eta}}{d \log(p\eta)} \approx -\bar{\Gamma} n_{p\eta}^3, \quad \text{where} \\
\bar{\Gamma} = & \frac{\lambda^2 |A|^2}{3} \int^{|l_1| < \mu} \frac{d^{D-1} l_1}{(2\pi)^{D-1}} \int^{|l_2| < \mu} \frac{d^{D-1} l_2}{(2\pi)^{D-1}} \int_{\infty}^0 dv v^{D-2} \\
& \left\{ 3 |A|^2 A \mathbb{R} \left[ \left( \frac{v l_2 |\vec{l}_1 - \vec{l}_2|}{l_1} \right)^{i\mu} h(l_1 v) h^*(l_2 v) h^* \left( |\vec{l}_1 - \vec{l}_2| v \right) \right] \right. \\
& - (A^*)^3 \mathbb{R} \left[ \left( \frac{v}{l_1 l_2 |\vec{l}_1 + \vec{l}_2|} \right)^{i\mu} h(l_1 v) h(l_2 v) h \left( |\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v \right) \right] \\
& \left. + 2 A^3 \mathbb{R} \left[ \left( v l_1 l_2 |\vec{l}_1 + \vec{l}_2| \right)^{i\mu} h^*(l_1 v) h^*(l_2 v) h^* \left( |\vec{l}_1 + \vec{l}_2| v \right) \right] \right\}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Заметим,  $\bar{\Gamma}$  не зависит от  $p$ . Это уравнение имеет решение

$$n_{p\eta} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \bar{\Gamma} \log(\eta/\eta_*)}}, \tag{3.32}$$

где  $\eta_* = \frac{\mu}{p} e^{-\frac{C}{2\bar{\Gamma}}}$  и  $C$  — константа интегрирования, зависящая от начальных данных. Полученное решение справедливо при  $\mu/p = \eta_* > \eta > \eta_*$ .

Таким образом получается сингулярное решение рассматриваемого кинетического уравнения, которое отвечает взрывному рождению частиц за конечное время.

В этом случае келдышевский пропагатор «взрывается» за конечное собственное время. И среднее значение тензора энергии-импульса тоже сингулярно. Это означает, что обратной реакцией со стороны гравитации нельзя пренебрегать.

### 3.9 Суммирование ведущих вкладов в случае дополнительной серии

Требуется решить уравнение (3.25) в инфракрасном пределе  $p\eta \lesssim \nu$ , где гармоники ведут себя как  $h(p\eta) = A_- (p\eta)^{-\nu} + i A_+ (p\eta)^{\nu}$ . В этом пределе получаем

$$D_0^{\frac{R}{A}}(p | \eta_1, \eta_2) = \mp \theta(\mp \Delta \eta_{12}) 2 A_- A_+ (\eta_1 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}} \left[ \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^{\nu} - \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^{\nu} \right], \quad p\eta_{1,2} \rightarrow 0. \tag{3.33}$$

Будем использовать тот же анзац для келдышевского пропагатора, что и в предыдущем разделе для главной серии [64]:

$$D^K(p|\eta_1, \eta_2) \approx \eta^{D-1} \left\{ h(p\eta_1) h^*(p\eta_2) \left[ \frac{1}{2} + n_e(p\eta) \right] + h(p\eta_1) h(p\eta_2) \kappa_e(p\eta) \right\} + c.c.,$$

$$\eta = \sqrt{\eta_1 \eta_2},$$
(3.34)

где подпись  $e$  под  $n$ ,  $\kappa$  и  $\kappa^*$  означает точный (просуммированный) вклад.

В отличие от главной серии, этот анзац решает (3.25) только в случае, когда все физические импульсы меньше, чем  $\nu$ . Но только эта область значений физических импульсов и вносит ведущий вклад в интегралы (3.25).

Удерживая только ведущие вклады и подставляя анзац (3.34), получаем следующее выражение для келдышевского пропагатора:

$$D^K(p|\eta_1, \eta_2) \approx A_-^2 \eta^{D-1} \frac{N(p\eta)}{(p\eta)^{2\nu}},$$
(3.35)

где  $N(p\eta) = 1 + 2n_e(p\eta) + \kappa_e(p\eta) + \kappa_e^*(p\eta)$ . Мы предполагаем, что начальные значения не содержат  $\kappa$  и  $\kappa^*$ , но могут содержать  $n$ .

Стоит отметить, что подставляя в правую часть (3.25) древесное значение  $N(p\eta) = 1$ , можно воспроизвести двухпетлевой результат для  $D^K$ .

Теперь можно подставить (3.33) и (3.35) в правую часть (3.25). Главный вклад придет из первых двух и последних двух слагаемых (3.25). Другие слагаемые дадут выражения, подавленные более высокими степенями  $p\eta \rightarrow 0$ . Также сделаем замену переменных  $u = p\sqrt{\eta_1\eta_2}$ ,  $v = \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_4}}$ , and  $\vec{l}_i = \vec{p}_i\sqrt{\eta_3\eta_4}$ . В итоге, получим:

$$N(p\eta) \approx N(P_0) - \frac{\lambda^2}{3} A_-^6 A_+^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{p\eta} \frac{du}{u} [N(u) + N(P_0)] \int_{\frac{1}{\nu}}^{\nu} \frac{dv}{v} \int_{p\eta < |\vec{l}_{1,2}| < \nu} \frac{d^{D-1}\vec{l}_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d^{D-1}\vec{l}_2}{(2\pi)^{D-1}} \times$$

$$\times \left[ \theta(v-1) \frac{1}{v^{2\nu}} - \theta(1-v) v^{2\nu} \right] \left\{ 3A_-^2 \frac{N(l_1)}{l_1^{2\nu}} \frac{N(l_2)}{l_2^{2\nu}} \left[ v^{2\nu} - \frac{1}{v^{2\nu}} \right] - A_+^2 \left[ v^{2\nu} - \frac{1}{v^{2\nu}} \right]^3 \right\} \quad (3.36)$$

где  $N(P_0)$  — начальное значение  $N(p\eta)$  аи  $P_0 \sim \nu \gg p\eta$ . В (3.36) было пренебрежено  $p$  по сравнению с  $q_i$ ; это возможно при ограничении  $D - 1 - 4\nu > 0$ .

Уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$N(p\eta) - N(P_0) \approx - \int_{\frac{1}{\nu}}^{p\eta} \frac{du}{u} [N(u) + N(P_0)] \left[ \Gamma_1 \left( \int_{p\eta}^{\nu} dl l^{D-2-2\nu} N(l) \right)^2 - \Gamma_2 \right], \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{\lambda^2 A_-^8 A_+^2 S_{D-2}^2}{(2\pi)^{2(D-1)}} \int_{\frac{1}{\nu}}^{\nu} \frac{dv}{v} \left[ \theta(v-1) \frac{1}{v^{2\nu}} - \theta(1-v) v^{2\nu} \right] \left[ v^{2\nu} - \frac{1}{v^{2\nu}} \right] > 0, \\ \Gamma_2 &= \frac{\lambda^2 A_-^6 A_+^4 S_{D-2}^2}{3 (2\pi)^{2(D-1)}} \int_{\frac{1}{\nu}}^{\nu} \frac{dv}{v} \left[ \theta(v-1) v^{-2\nu} - \theta(1-v) v^{2\nu} \right] \left[ v^{2\nu} - v^{-2\nu} \right]^3 > 0.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Здесь  $S_{D-2}$  — это площадь  $(D-2)$ -мерной сферы. Уравнение выше может быть приведено к интегро-дифференциальному, если продифференцировать обе части по  $\log(p\eta)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N(p\eta)}{\partial \log\left(\frac{p\eta}{\nu}\right)} &\approx - [N(p\eta) + N(P_0)] \left[ \Gamma_1 \left( \int_{p\eta}^{\nu} dl l^{D-2-2\nu} N(l) \right)^2 - \Gamma_2 \right] + \\ &+ 2\Gamma_1 N(p\eta) (p\eta)^{D-1-2\nu} \int_{\nu}^{p\eta} \frac{du}{u} [N(u) + N(P_0)] \int_{p\eta}^{\nu} dl l^{D-2-2\nu} N(l).\end{aligned}\tag{3.39}$$

В отличие от случая с главной серией, у этого уравнения нет явной кинетической интерпретации. Это связано с тем, что в этом случае гармоники не осциллируют на бесконечности в будущем. Поэтому мы не можем пренебречь временной зависимостью  $N$  по сравнению с зависимостью гармоник:  $N(p\eta)$  просто не является медленной функцией. Тем не менее, решение этого уравнения дает суммирование ведущих поправок из всех петель (для рассмотренных начальных значений).

В пределе  $p\eta \ll \nu$  рассмотрим

$$N(p\eta) = C(p\eta)^\alpha\tag{3.40}$$

где  $C$  — константа интегрирования, которая зависит от начальных условий. Так как  $p\eta \ll P_0 \sim \nu$  для  $\alpha > 0$  имеем  $N(p\eta) \ll N(P_0)$ , откуда легко увидеть, что (3.40) не решает (3.37). Но при  $\alpha < 0$  функция  $N(p\eta) \gg N(P_0)$ . Подставляя это выражение в (3.37) и пренебрегая  $N(P_0)$  по сравнению с  $N$ , получаем:

$$\alpha \approx -\Gamma_1 C^2 \left[ \frac{\nu^{(D-1-2\nu+\alpha)} - (p\eta)^{(D-1-2\nu+\alpha)}}{D-1-2\nu+\alpha} \right]^2 + \Gamma_2.\tag{3.41}$$

Если  $D-1-2\nu+\alpha > 0$  and  $p\eta \ll \nu$ , то в правой части этого уравнения можно пренебречь зависимостью от  $p\eta$  и  $\alpha$  является константой, как и должно быть. Это решение справедливо при

$$\frac{C\nu^{(D-1-2\nu+\alpha)}}{D-1-2\nu+\alpha} > \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}}.\tag{3.42}$$

Для такого решения получаем для пропагатора  $D^K(p|\eta_1, \eta_2) \approx \frac{A^2 C^2}{p^{D-1}} (p\eta)^{D-1-2\nu+\alpha}$ . Келдышевский пропагатор «взрывается» только при  $D - 1 - 2\nu + \alpha < 0$ , но этого не может случиться для решения такого типа.

Более того, разумеется, есть статическое решение  $\alpha = 0$ ,  $N(p\eta) = N(P_0) = C = \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \frac{D-1-2\nu}{\nu^{D-1-2\nu}}}$ .

Тем не менее, кроме стабильных решений уравнения (3.37) существуют также и сингулярные (взрывающиеся) решения. Рассмотрим

$$N(p\eta) = \frac{C}{(p\eta - p\eta_*)^\alpha}, \quad (3.43)$$

где  $C$ ,  $0 < \eta_* < \eta$  и  $\alpha > 0$  — некоторые действительные константы, которые могут зависеть от начальных условий. Предполагаем, что такое поведение для  $N(p\eta)$  возможно в пределе, когда  $\eta$  очень близко к  $\eta_*$ . После подстановки такого решения в (3.37) получаем следующее соотношение между  $C$ ,  $\eta_*$  и  $\alpha$ :

$$\frac{1}{(p\eta - p\eta_*)^\alpha} \approx \frac{\Gamma_1 C^2 (p\eta_*)^{D-1-2\nu}}{(\alpha - 1) (p\eta - p\eta_*)^{3(\alpha-1)}}. \quad (3.44)$$

Это уравнение устанавливает, что  $\alpha = 3/2$  и соотношение между  $C$  и  $\eta_*$ . В этом случае келдышевский пропагатор «взрывается» за конечное собственное время. И среднее значение тензора энергии-импульса тоже сингулярно. Это означает, что обратной реакцией со стороны гравитации нельзя пренебрегать. Это тема для отдельного изучения.

## Список литературы

- [1] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, New J. Phys. **9**, 11 (2007) [arXiv:gr-qc/0612068].
- [2] E. Mottola, Phys. Rev. D **33**, 1616 (1986).
- [3] E. Mottola, Phys. Rev. D **33**, 2136 (1986).
- [4] P. Mazur and E. Mottola, Nucl. Phys. B **278**, 694 (1986).
- [5] P. R. Anderson, C. Molina-Paris, E. Mottola, Phys. Rev. **D80**, 084005 (2009). [arXiv:0907.0823 [gr-qc]].
- [6] E. Mottola, [arXiv:1008.5006 [gr-qc]].
- [7] D. Marolf, I. A. Morrison and M. Srednicki, “Perturbative S-matrix for massive scalar fields in global de Sitter space,” arXiv:1209.6039 [hep-th].

- [8] D. Marolf and I. A. Morrison, Phys. Rev. D **82**, 105032 (2010) [arXiv:1006.0035 [gr-qc]].
- [9] D. Marolf and I. A. Morrison, Gen. Rel. Grav. **43**, 3497 (2011) [arXiv:1104.4343 [gr-qc]].
- [10] A. Higuchi, D. Marolf, I. A. Morrison, Phys. Rev. **D83**, 084029 (2011). [arXiv:1012.3415 [gr-qc]].
- [11] D. Marolf and I. A. Morrison, Phys. Rev. D **84**, 044040 (2011) [arXiv:1010.5327 [gr-qc]].
- [12] S. Hollands, Commun. Math. Phys. **319**, 1 (2013) [arXiv:1010.5367 [gr-qc]].
- [13] S. Hollands, Annales Henri Poincare **13**, 1039 (2012) [arXiv:1105.1996 [gr-qc]].
- [14] A. D. Dolgov, M. B. Einhorn and V. I. Zakharov, Phys. Rev. D **52**, 717 (1995) [arXiv:gr-qc/9403056].
- [15] A. D. Dolgov, M. B. Einhorn and V. I. Zakharov, Acta Phys. Polon. B **26**, 65 (1995) [arXiv:gr-qc/9405026].
- [16] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **797**, 199 (2008) [arXiv:0709.2899 [hep-th]].
- [17] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **834**, 316 (2010) [arXiv:0912.5503 [hep-th]].
- [18] A. Higuchi, Class. Quant. Grav. **26**, 072001 (2009) [arXiv:0809.1255 [gr-qc]].
- [19] A. Higuchi and Y. C. Lee, Class. Quant. Grav. **26**, 135019 (2009) [arXiv:0903.3881 [gr-qc]].
- [20] E. Alvarez and R. Vidal, JHEP **0910**, 045 (2009) [arXiv:0907.2375 [hep-th]].
- [21] E. Alvarez and R. Vidal, JCAP **1011**, 043 (2010) [arXiv:1004.4867 [hep-th]].
- [22] C. P. Burgess, R. Holman, L. Leblond and S. Shandera, JCAP **1010**, 017 (2010) [arXiv:1005.3551 [hep-th]].
- [23] C. P. Burgess, L. Leblond, R. Holman and S. Shandera, JCAP **1003**, 033 (2010) [arXiv:0912.1608 [hep-th]].
- [24] S. B. Giddings, M. S. Sloth, JCAP **1007**, 015 (2010). [arXiv:1005.3287 [hep-th]].
- [25] S. B. Giddings, M. S. Sloth, JCAP **1101**, 023 (2011). [arXiv:1005.1056 [hep-th]].
- [26] A. Riotto, M. S. Sloth, JCAP **0804**, 030 (2008). [arXiv:0801.1845 [hep-ph]].

- [27] V. K. Onemli, R. P. Woodard, *Class. Quant. Grav.* **19**, 4607 (2002). [gr-qc/0204065].
- [28] V. K. Onemli, R. P. Woodard, *Phys. Rev.* **D70**, 107301 (2004). [gr-qc/0406098].
- [29] E. O. Kahya, V. K. Onemli, *Phys. Rev.* **D76**, 043512 (2007). [gr-qc/0612026].
- [30] E. O. Kahya, V. K. Onemli, R. P. Woodard, *Phys. Rev.* **D81**, 023508 (2010). [arXiv:0904.4811 [gr-qc]].
- [31] N. C. Tsamis and R. P. Woodard, *Nucl. Phys. B* **724**, 295 (2005) doi:10.1016/j.nuclphysb.2005.06.031 [gr-qc/0505115].
- [32] D. L. Lóp. Nacir, F. D. Mazzitelli and L. G. Trombetta, “The Hartree approximation in curved spacetimes revisited I: the effective potential in de Sitter,” arXiv:1309.0864 [hep-th].
- [33] W. Xue, K. Dasgupta, R. Brandenberger, *Phys. Rev.* **D83**, 083520 (2011). [arXiv:1103.0285 [hep-th]].
- [34] R. P. Woodard, *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, no. 09, 1430020 (2014) doi:10.1142/S0218271814300201 [arXiv:1407.4748 [gr-qc]].
- [35] B. Garbrecht, G. Rigopoulos and Y. Zhu, *Phys. Rev. D* **89**, 063506 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.063506 [arXiv:1310.0367 [hep-th]].
- [36] D. Boyanovsky, *New J. Phys.* **17**, no. 6, 063017 (2015) doi:10.1088/1367-2630/17/6/063017 [arXiv:1503.00156 [hep-ph]].
- [37] D. Boyanovsky, *Phys. Rev. D* **92**, no. 2, 023527 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.023527 [arXiv:1506.07395 [astro-ph.CO]].
- [38] L. Lello, D. Boyanovsky and R. Holman, *JHEP* **1404**, 055 (2014) doi:10.1007/JHEP04(2014)055 [arXiv:1305.2441 [astro-ph.CO]].
- [39] D. Benedetti, *J. Stat. Mech.* **1501**, P01002 (2015) doi:10.1088/1742-5468/2015/01/P01002 [arXiv:1403.6712 [cond-mat.stat-mech]].
- [40] D. Boyanovsky and L. Lello, *New J. Phys.* **16**, 063050 (2014) doi:10.1088/1367-2630/16/6/063050 [arXiv:1403.6366 [hep-ph]].
- [41] R. Blaga, *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550062 (2015) doi:10.1142/S0217732315500625 [arXiv:1411.1902 [hep-th]].
- [42] D. Boyanovsky, *Phys. Rev. D* **93**, 043501 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.043501 [arXiv:1511.06649 [astro-ph.CO]].

- [43] D. Lopez Nacir, F. D. Mazzitelli and L. G. Trombetta, JHEP **1609**, 117 (2016) doi:10.1007/JHEP09(2016)117 [arXiv:1606.03481 [hep-th]].
- [44] V. K. Onemli, arXiv:1510.02272 [gr-qc].
- [45] R. Blaga, Phys. Rev. D **92**, no. 8, 084054 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.084054 [arXiv:1507.07251 [hep-th]].
- [46] D. Lopez Nacir, F. D. Mazzitelli and L. G. Trombetta, EPJ Web Conf. **125**, 05019 (2016) doi:10.1051/epjconf/201612505019 [arXiv:1610.09943 [hep-th]].
- [47] D. Boyanovsky, H. J. de Vega and R. Holman, Phys. Rev. D **49**, 2769 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.49.2769 [hep-ph/9310319].
- [48] H. J. de Vega and J. F. J. Salgado, Phys. Rev. D **56**, 6524 (1997) doi:10.1103/PhysRevD.56.6524 [hep-th/9701104].
- [49] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, A. Singh and M. Srednicki, Phys. Rev. D **56**, 1939 (1997) doi:10.1103/PhysRevD.56.1939 [hep-ph/9703327].
- [50] V. K. Onemli, Phys. Rev. D **91**, 103537 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.103537 [arXiv:1501.05852 [gr-qc]].
- [51] V. K. Onemli, Phys. Rev. D **89**, 083537 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.083537 [arXiv:1312.6409 [astro-ph.CO]].
- [52] F. Gautier and J. Serreau, Phys. Rev. D **92**, no. 10, 105035 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.105035 [arXiv:1509.05546 [hep-th]].
- [53] M. Guilleux and J. Serreau, Phys. Rev. D **92**, no. 8, 084010 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.084010 [arXiv:1506.06183 [hep-th]].
- [54] J. Serreau, Phys. Lett. B **730**, 271 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2014.01.058 [arXiv:1306.3846 [hep-th]].
- [55] F. Gautier and J. Serreau, Phys. Lett. B **727**, 541 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.10.072 [arXiv:1305.5705 [hep-th]].
- [56] M. Guilleux and J. Serreau, arXiv:1611.08106 [gr-qc].
- [57] J. Serreau and R. Parentani, Phys. Rev. D **87**, 085012 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.085012 [arXiv:1302.3262 [hep-th]].
- [58] D. Krotov, A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B849**, 410-432 (2011). [arXiv:1012.2107 [hep-th]].

- [59] A. M. Polyakov, “Infrared instability of the de Sitter space,” arXiv:1209.4135 [hep-th].
- [60] E. T. Akhmedov, JHEP **1201**, 066 (2012) [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [61] E. T. Akhmedov and P. .Burda, Phys. Rev. D **86**, 044031 (2012) [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [62] E. T. Akhmedov, Phys. Rev. D **87**, 044049 (2013) [arXiv:1209.4448 [hep-th]].
- [63] E. T. Akhmedov, F. K. Popov and V. M. Slepukhin, Phys. Rev. D **88**, 024021 (2013) [arXiv:1303.1068 [hep-th]].
- [64] E. T. Akhmedov, International Journal of Modern Physics D, Vol. 23, No. **1**, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [65] E. T. Akhmedov, A. V. Sadofyev, Phys. Lett. B **712**, 138 (2012) [arXiv:1201.3471 [hep-th]].
- [66] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50**, 6357 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.50.6357 [astro-ph/9407016].
- [67] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [68] A.Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems”, arXiv:cond-mat/0412296; Bibliographic Code: 2004cond.mat.12296K.
- [69] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, JHEP **1409**, 071 (2014) doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [70] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, JHEP **1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085 [arXiv:1412.1554 [hep-th]].
- [71] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93**, no. 2, 024029 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].
- [72] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, Ann. Inst. Henri Poincaré A **9**, 109 (1968).
- [73] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
- [74] M. van der Meulen, J. Smit, JCAP **0711**, 023 (2007). [arXiv:0707.0842 [hep-th]].
- [75] C. Schomblond and P. Spindel, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **25**, 67 (1976).
- [76] B. Allen, “Vacuum States In De Sitter Space,” Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985).

- [77] E. Mottola, Phys. Rev. D **31**, 754 (1985).
- [78] B. Allen and A. Folacci, Phys. Rev. D **35**, 3771 (1987).  
doi:10.1103/PhysRevD.35.3771
- [79] J. Bros, J. P. Gazeau and U. Moschella, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 1746.
- [80] J. Bros and U. Moschella, [gr-qc/9511019].
- [81] J. Bros, H. Epstein and U. Moschella, Commun. Math. Phys. **196**, 535 (1998)  
doi:10.1007/s002200050435 [gr-qc/9801099].
- [82] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That* Princeton University Press, (Princeton) 2000
- [83] J. Faraut, “Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe” in Lect. Notes in Math. **497**, Springer-Verlag, Berlin (1975).
- [84] Molčanov V.F.: “Harmonic analysis on a hyperboloid of one sheet”, Soviet. Math. Dokl. **7**, 1553-1556 (1966)
- [85] J. Bros, H. Epstein and U. Moschella, Lett. Math. Phys. **93**, 203 (2010)  
doi:10.1007/s11005-010-0406-4 [arXiv:1003.1396 [hep-th]].
- [86] H. Epstein and U. Moschella, Commun. Math. Phys. **336**, no. 1, 381 (2015)  
doi:10.1007/s00220-015-2308-x [arXiv:1403.3319 [hep-th]].
- [87] D. P. Jatkar, L. Leblond and A. Rajaraman, Phys. Rev. D **85**, 024047 (2012)  
[arXiv:1107.3513 [hep-th]].
- [88] U. Moschella, arXiv:1210.4815 [hep-th].
- [89] J. Bros, H. Epstein, M. Gaudin, U. Moschella and V. Pasquier, Commun. Math. Phys. **295**, 261 (2010) doi:10.1007/s00220-009-0875-4 [arXiv:0901.4223 [hep-th]].
- [90] J. Bros, H. Epstein and U. Moschella, Annales Henri Poincaré **11**, 611 (2010)  
doi:10.1007/s00023-010-0042-7 [arXiv:0812.3513 [hep-th]].
- [91] U. Moschella, AIP Conf. Proc. **910**, 396 (2007). doi:10.1063/1.2752488
- [92] J. Bros, H. Epstein and U. Moschella, JCAP **0802**, 003 (2008) doi:10.1088/1475-7516/2008/02/003 [hep-th/0612184].
- [93] A. Youssef and D. Kreimer, arXiv:1301.3205 [gr-qc].