Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Замкнутые гамильтоновы и бильярдные траектории

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Выполнила:

студентка 321 группы

Шарипова Анастасия Валерьевна

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук

Шарыгин Георгий Игоревич

Москва 2017

Содержание

1 Введение

За последние годы симплектическая геометрия привлекает все большее и большее внимание математиков. Она изучает симплектические многообразия, гладкие многообразия вместе с заданной на них внешней дифференциальной замкнутой невырожденной 2-формой, которые встречаются главным образом при изучении гамильтоновых систем классической механики. Определение симплектического многообразия похоже на определение риманова, но тем не менее между ними есть большие различия: римановы многообразия могут быть локально устроены по-разному, в то время как, согласно теореме Дарбу, локальная структура симплектического многообразия всегда эквивалентна стандартной симплектической структуре евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

Несмотря на это, можно рассматривать вопросы на стыке этих двух геометрий. Так в своей статье [15] 2000 года французский математик Клод Витербо попытался связать симплектический способ измерения размера, так называемую симплектическую емкость, с метрическим понятием выпуклости тела, кстати используя при этом симплектический объем. Главным результатом его статьи является доказательство изопериметрического неравенства, связывающего симплектическую емкость с n-мерным объемом, в некоторых частных случаях. Но в общем случае это неравенство остается только гипотезой.

В данной работе имеется некий обзор на тему симплектической емкости, ее конкретного примера и способов ее оценки, в частности, использование бильярдных траекторий.

Результатом работы является рассмотрение частных примеров и доказательства для них изопериметрического неравенства.

2 Обзор

2.1 Симплектическая геометрия

Введем некоторые основные определения симплектической геометрии. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q$ – 2n-мерное евклидово пространство с координатами (p, q). Пусть

$$\omega_{st} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

— стандартная симплектическая структура на нем, которая является, очевидно, замкнутой и невырожденной 2-формой, то есть $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$ является симплектическим многообразием. Помимо этого, обозначим через $g_{st} = (\cdot, \cdot)$ стандартное скалярное (внутреннее) произведение векторов в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Вводя комплексную структуру, имеем следующее соотношение $\omega_{st}(x, Jy) = g_{st}(x, y)$, где J — стандартная комплексная структура

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, J^2 = -I,$$

(I - единичная матрица $n \times n$). Симплектоморфизмом будем называть диффеоморфизм, сохраняющий симплектическую структуру, то есть такой диффеоморфизм ϕ, что $\phi^*\omega_{st} = \omega_{st}$. Симплектическая емкость это, грубо говоря, симплектический размер тела, а точнее дадим

Определение 2.1 *Симплектической емкостью на* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$ *называют функцию, сопоставляющую каждому множеству* $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ *неотрицательное число* $c(U)$ *т. ч.:*

- $c(U) \leqslant c(V)$, *для* $U \subseteq V$
- $c(\phi(U)) = |\alpha| c(U)$, *для* $\phi \in Diff(\mathbb{R}^{2n})$, $\phi^*\omega_{st} = \alpha\omega_{st}$
- $c(B^{2n}(r)) = c(B^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}) = \pi r^2$

где $Z^{2n}(r) = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ - симплектический цилиндр, который, очевидно, имеет бесконечный объем, но, тем не менее, конечную симплектическую емкость. Из свойств симплектической емкости, можно заметить, что шар большего радиуса нельзя симплектически вложить в этот цилиндр. Возникает вопрос, существует ли вообще такая функция $c(U)$, удовлетворяющая этим трем свойствам, ответ на который утвердительный. Одну из таких емкостей и самую первую придумал Михаил Громов [10]. Она вводится как квадрат симплектического радиуса множества, умноженный на π:

Определение 2.2
- *Симплектическая емкость Громова множества* $U \subset \mathbb{R}^{2n}$*:*
  $c_B(U) := sup\{\pi r^2 | \exists\ \phi \in Symp(\mathbb{R}^{2n}), \phi(B^{2n}(r)) \subset U\}$
- *Цилиндрическая емкость:*
  $c^Z(U) := inf\{\pi r^2 | \exists\ \phi \in Symp(\mathbb{R}^{2n}), \phi(U) \subset Z^{2n}(r)\}$

Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют всем перечисленным выше свойствам, а именно, используя теорему Громова о несжимаемости, то есть что шар нельзя симлектически вложить в цилиндр меньшего радиуса, получим необходимые свойства. Кроме того, для любой симплектической емкости выполнено следующее неравенство $c_B(U) \leqslant c(U) \leqslant c^Z(U)$.

В настоящее время уже существует множество разных симплектических емкостей, но мы в этой работе будем рассматривать только симплектическую емкость Экланда—Хофера—Цендера $c_{EHZ}(U)$, которая определяется, в случае выпуклого тела, как наименьшая симплектическая площадь замкнутой характеристики на границе этого тела, где под характеристикой мы понимаем кривую γ, чья скорость $\dot{\gamma}$ принадлежит $ker(\omega|_{T_p\partial X})$, то есть $\dot{\gamma} \in T_p\partial X$, $\omega(\dot{\gamma}, x) = 0$ для любого $x \in T_p\partial X$. В дальнейшем будем обозначать емкость Экланда—Хофера—Цендера просто $c(U)$, поскольку рассматривать будем только ее и путаницы не возникнет.

Гипотеза Витербо, которая является главной целью данной работы, гласит, что для любого выпуклого тела $X \subset \mathbb{R}^{2n}$ выполнено следующее неравенство:

$$Vol(X) \geqslant \frac{c(X)^n}{n!}$$

Выше сказанное эквивалентно следующей более наглядной формулировке: пусть у нас есть выпуклая собственная (стремящаяся к бесконечности на бесконечности) функция Гамильтона и тело $X = \{H \leqslant E\}$ при некотором значении E, тогда в гипотезе мы хотим сравнить объем этого тела X с наименьшим действием на замкнутых гамильтоновых траекториях, лежащих на границе X. Заметим, что использование понятий гамильтоновой механики может упростить рассмотрение некоторых частных случаев и в принципе подсказать нам эти случаи.

Рассмотрим более подробно некоторые понятия гамильтоновой динамики. Пусть у нас есть ограниченное связное открытое множество $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, и определяющей функцией для U будем называть любую неотрицательную функцию $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ такую, что $\partial U = F^{-1}(1)$, $U = F^{-1}([0,1])$, и 1 — ее регулярное значение, то есть $\vec{\nabla} F \neq 0$ на $F^{-1}(1)$. Соответствующее этой функции гамильтоново векторное поле:

$$X_F(x) = \dot{x} = J\vec{\nabla}F(x) \text{ и } i_{X_F}\omega = -dF$$

Тогда орбиты на границе ∂U это решения системы уравнений $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\dot{\vec{p}} \end{cases}$ и они одинаковые для всех определяющих функций данного множества U, так как для любых двух определяющих функций F и H будем иметь $\vec{\nabla}F || \vec{\nabla}H$. Эти решения мы и назвали замкнутыми характеристиками. Действие T-периодической характеристики l мы определяем как

$$A(l) = \int_\gamma \lambda = \int_\gamma pdq = \frac{1}{2}\int_0^T (p\dot{q}dt - \dot{p}qdt) = \frac{1}{2}\int_0^T \langle -J\dot{l}(t), l(t)\rangle dt$$

где $d\lambda = \omega_{st}$ и оно является симплектическим инвариантом: $A(l) = A(\phi(l))$ для любого симплектоморфизма ϕ. Как мы уже раньше упомянули, емкость Экланда—Хофера—Цендера определяется как:

$$c(K) = \min\{|A(l)| : l - \text{замкнутая характеристика на границе } \partial K\}$$

Существование замкнутых траекторий — периодических орбит — не является очевидным вопросом в общем случае для произвольного множества. Несколько математиков (Вейнстейн(1978), Рабинович и т.д.) доказали этот факт для определенного класса гамильтонианов, используя вариационные методы. Также Фрэнк Кларк в своей статье [8] (1979) доказал очень изящно, используя преобразование Лежандра, следующую теорему:

Теорема 2.1 *Пусть $H^{-1}(c)$ — граница компактного строго выпуклого множества, содержащего 0 в своей внутренности, и пусть $\vec{\nabla} H \neq 0$ на $H^{-1}(c)$. Тогда, для некоторого $T > 0$, на $H^{-1}(c)$ существует периодическое решение с периодом T системы канонических уравнений Гамильтона.*

В своем доказательстве Кларк минимизировал действие, полученное после преобразования Лежандра, считая «площадь», ограниченную кривой, постоянной, то есть по сути решал изопериметрическую задачу. Его идеей можно воспользоваться хотя бы для поиска периодических траекторий в тех случаях, когда они не очевидны.

Другой интересный подход к этому вопросу развил также Кларк в своей статье [9] (1982), где он ставит вопрос более узко — например, существует ли замкнутая траектория, переводящая какую-нибудь точку на поверхности в ей симметричную. В этой статье он использует понятие симплектической матрицы — матрица называется симплектической, если $M^T J M = J$, где J, как и раньше, стандартная комплексная структура. Из определения непосредственно вытекает, что линейное преобразование M является симплектическим, симплектические матрицы образуют группу $Sp(2n, \mathbb{R})$ и $\det M = 1$. Учитывая все это, Кларк доказал следующую теорему.

Теорема 2.2 *Пусть S — выпуклая энергетическая поверхность и M — симплектическая матрица. Тогда для некоторой точки $s \in S$, существует орбита на S, переводящая s в Ms. Имеется в виду, что S — граница компактного выпуклого множества в $\mathbb{R}^{2n}$, содержащего 0 в своей внутренности.*

В частности, из этой теоремы непосредственно следует, что Ms будет также лежать на поверхности S. Кроме того, выбрав $M = I$, получается доказательство существования замкнутой орбиты, а в случае $M = -I$, орбиты, проходящей через симметричные точки. Более того, если $MS = S$, то существует орбита C, такая что $MC = C$, а при условии конечности порядка M, будет существовать замкнутая траектория с таким свойством.

Другим интересным подходом в этой области является работа Ярона Островера и Шири Артштейн-Авидан [3], связанная с неравенством типа Брунна—Минковского для симплектической емкости. Классическая формулировка неравенства Брунна—Минковского гласит, что для любых двух выпуклых тел K и $T \subset \mathbb{R}^{2n}$:

$$(Vol(K+T))^{1/n} \geqslant (Vol(K))^{1/n} + (Vol(T))^{1/n}$$

где Vol — n-мерный объем (мера Лебега), а $K+T = \{x+y : x \in K, y \in T\}$ — сумма Минковского двух тел. Главным результатом их работы явлеется следующая теорема:

Теорема 2.3 *Пусть c – емкость Экланда—Хофера—Цендера. Тогда для любого n и любых двух компактных выпуклых тел K и $T \subset \mathbb{R}^{2n}$ выполнено неравенство:*

$$c(K+T)^{1/2} \geqslant c(K)^{1/2} + c(T)^{1/2}$$

Главным в их работе является истолкование идеи Ф. Кларка, а именно представление емкости как минимума определенного функционала

$$c(K)^{1/2} = \pi \min \frac{1}{2}\pi \int h(z(t))dt$$

и предьявление взаимнооднозначного соответствия между критическими точками этого функционала и замкнутыми характеристиками на границе K.

Сразу из вышесказанного можно сделать вывод, что для выпуклого тела X, если взять ему симметричное $-X$ и учесть $c(X) = c(-X)$, выполняется следующее неравенство

$$c(X + (-X)) \geqslant 4c(X)$$

Таким образом, симплектическую емкость любого выпуклого тела можно оценить сверху емкостью центрально симметричного тела, и это побуждает нас в первую очередь изучать вопросы про центрально симметричные тела, что и сделано в этой работе.

2.2 Бильярды

Теперь рассмотрим математические бильярды геометрии Минковского. На самом деле, симплектическая емкость Экланда—Хофера—Цендера тесно связана с минимальной длиной периодических бильярдных траекторий. Мы будем рассматривать бильярды в выпуклых гладких телах $K \subset \mathbb{R}^n$

Определение 2.3 *Замкнутой (K,T)-бильярдной траекторией называют образ кусочно-гладкого отображения $\gamma : S^1 \to \partial(K \times T)$ такой, что для любого $t \notin B_\gamma := \{t \in S^1 | \gamma(t) \in \partial K \times \partial T\}$ выполнено $\dot\gamma(t) = dY(\gamma(t))$ для некоторой константы d и векторного поля*

$$Y(q,p) = \begin{cases} (-\vec\nabla g_T(p), 0), & \text{если } (q,p) \in int(K) \times \partial T; \\ (0, \vec\nabla g_K(q)), & \text{если } (q,p) \in \partial K \times int(T). \end{cases}$$

Более того, для любого $t \in B_\gamma$ левая и правая производная от $\gamma(t)$ существует и равна

$$\dot\gamma(t) \in \{\alpha(-\vec\nabla g_T(p), 0) + \beta(0, \vec\nabla g_K(q)) | \alpha, \beta \geqslant 0, (\alpha, \beta) \neq (0,0)\}$$

где $g_T(x) = \inf\{r | x \in rT\}$, для симметричных тел $g_T(x) = \|x\|_T$. Можно представлять себе, что K это бильярдный стол, а T отвечает за динамику на K.

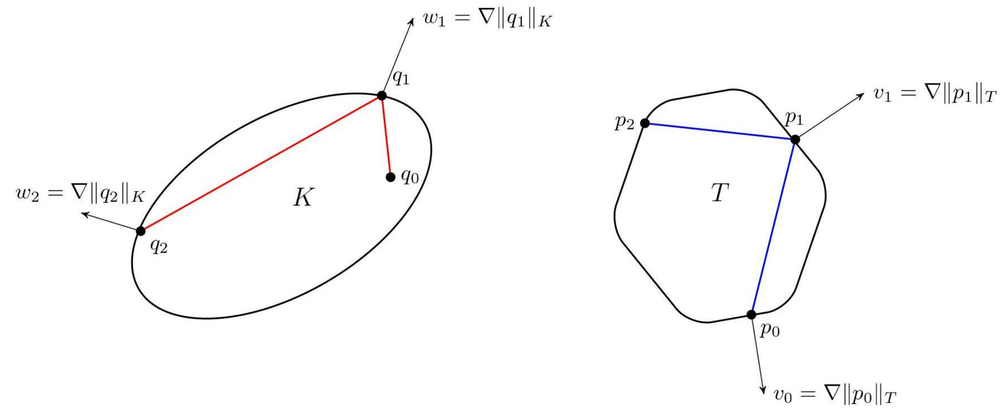

Рис. 1: Бильярдная траектория

Определение 2.4 *Замкнутая (K,T)-бильярдная траектория γ называется собственной, если множество $B_\gamma := \{t \in S^1 | \gamma(t) \in \partial K \times \partial T\}$ конечно. В случае же, когда $B_\gamma = S^1$, то есть γ путешествует исключительно по $\partial K \times \partial T$, траекторию называют скользящей.*

В собственной бильярдной траектории мы будем перемещаться, следуя потоку векторного поля Y: начиная движение из (q_0, p_0), идем по $K \times \partial T$ в точку (q_1, p_0) по направлению противоположному нормали $\vec\nabla g_T(p_0)$ к ∂T в точке p_0, затем, достигнув ∂K идем из (q_1, p_0) в (q_1, p_1) по нормали $\vec\nabla g_K(q_1)$ к ∂K в q_1 и так далее. Такой закон отражения является обобщением классического закона отражения, который имеет место, когда T — евклидовый шар единичного радиуса. В работе [2] доказано следующее важное утверждение:

Теорема 2.4 *Пусть K и T два гладких строго выпуклых тела. Тогда емкость Экланда—Хофера—Цендера $c_{EHZ}(K \times T)$ равна длине кратчайшей периодической T-бильярдной траектории в K.*

где длина подразумевается по отношению к норме $\|u\|_T = h_T(u) = sup\{\langle x, u \rangle; x \in T\}$. Таким образом, бильярды это еще один подход и удобный способ изучать симплектическую емкость тела, если мы можем легко найти в нем кратчайшую бильярдную траекторию.

3 Основная часть

3.1 Применение бильярда

Начнем обсуждение основной части работы с применения бильярдов для поиска симплектической емкости. В обзоре мы уже показали связь между симплектической емкостью и бильярдными траекториями, сославшись на теорему 2.4 . Здесь же докажем теорему на оценку бильярдной траектории в центрально-симметричном выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^n$, T считаем также центрально-симметричным . Введем обозначение $\xi_T(K)$ как длину кратчайшей замкнутой T-бильярдной траектории в теле K и, помимо этого, определим множество

$$P_m(K) = \{(q_1, ..., q_m) : \{q_1, ..., q_m\} \notin \alpha K + t, \alpha \in (0, 1), t \in V\}$$

то есть, мы берём замкнутые ломаные, которые нельзя накрыть меньшей сдвинутой копией K.

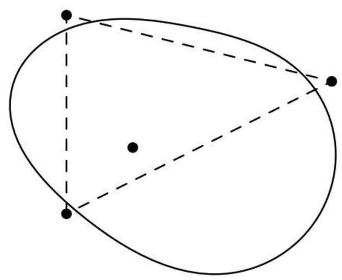

Рис. 2: Элемент из $P_3(K)$

Среди всех таких ломаных хотим найти с минимальной T-длиной. В работе [7] доказана следующая

Теорема 3.1 *Для любых гладких выпуклых тел K и $T \subset \mathbb{R}^n$, длина наименьшей замкнутой бильярдной траектории в K с нормой $\|\cdot\|_T$ равна*

$$\xi_T(K) = \min_{m \geqslant 1} \min_{P \in P_m(K)} l_T(P)$$

причем минимум достигается при $m \leqslant n + 1$

Заметим, что длина ломаной P_m определяется следующим образом

$$l_T(q_1, ..., q_m) = \sum_{i=1}^{m} \|q_{i+1} - q_i\|_T$$

Теперь не сложно показать следующий важный результат

Теорема 3.2 *Пусть K — центрально-симметричное выпуклое тело, а T — его полярное ($T = K^o := \{p \in \mathbb{R}^n | \langle p, q\rangle \leqslant 1 \forall q \in K\}$). Тогда длина кратчайшей T-бильярдной траектории $\xi_T(K) = 4$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\xi_T(K) \geqslant 4$. Используя тот факт, что

$$\xi_T(K) = \min_{m \geqslant 1} \min_{P \in P_m(K)} l_T(P)$$

можем заключить, что достаточно доказать, что любую ломаную с длиной меньше 4, можно покрыть открытым шаром радиуса 1, так как K является единичным шаром по отношению к норме $\| \cdot \|_T = \sup_{p \in T} \langle p, \cdot \rangle$. Докажем этот факт от противного. Пусть это не так и нашу ломаную P, длина которой < 4, нельзя покрыть открытым единичным шаром. Тогда разделим нашу ломаную на две равные по длине части с помощью точек X и $Y \in P$, и пусть O - середина отрезка XY. Тогда для любой точки $Z \in P$ по неравенству треугольника верно следующее неравенство

$$\|ZX\| + \|ZY\| < 2$$

Кроме того, рассмотрев треугольник XZY и его «медиану» ZO, можно написать, что

$$\|ZO\| \leqslant \frac{1}{2}(\|ZX\| + \|ZY\|) < 1$$

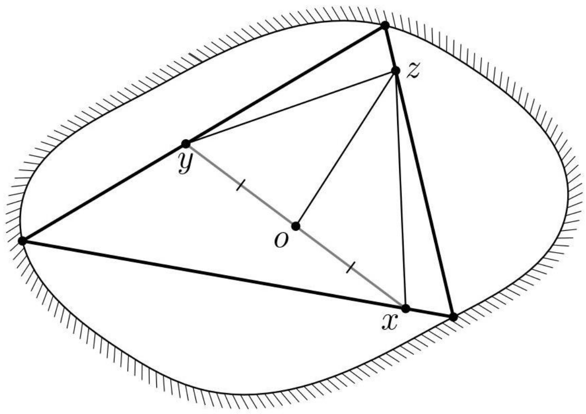

Рис. 3: Геометрическое пояснение

Следовательно, наша ломаная покрывается открытым единичным шаром с центром в точке O и не является бильярдной траекторией.
Нетрудно понять, что равенство выполняется, если взять траекторию $[x, -x]$ с $x \in \partial K$
■
Доказав теорему 3.2 и получив точное выражение для емкости $c(K \times T) = 4$, мы свели неравенство Витербо к следующему неравенству ($T = K^o$)

$$Vol(K \times K^o) \geqslant \frac{4^n}{n!}$$

для любого центрально симметричного тела в $\mathbb{R}^n$ и его полярного, что является знаменитой гипотезой Малера (1939) [12], которую Малер доказал лишь для $n = 2$, а для $n \geqslant 3$ вопрос остается по сей день открытым. Таким образом, решив гипотезу Витербо, мы бы решили одновременно и гипотезу Малера.

3.2 Простые случаи

Теперь рассмотрим более механический подход, когда наше тело задается функцией Гамильтона. Неравенство Витербо очевидно для шара, когда оно переходит в равенство:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|p_i|^2 + |q_i|^2) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \vec{p} = \dot{\vec{q}} \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = \vec{q} = -\dot{\vec{p}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_k = p_k \\ \dot{p}_k = -q_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_k = A_k e^{it} + B_k e^{-it} \\ p_k = i(A_k e^{it} - B_k e^{-it}) \end{cases}$$

при t = 0 получаем $1 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + q_k^2 = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2 + 2A_kB_k - A_k^2 - B_k^2 + 2A_kB_k = \sum_{k=1}^{n} 4A_kB_k$

$$c = \int_\gamma p dq = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma p_k dq_k = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} p_k^2 dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} dt(-A_k^2 e^{2it} - B_k^2 e^{-2it} + 2A_kB_k) =$$

$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n} 2A_kB_k = \pi$$

$$c(B^{2n}) = \pi$$

$$Vol(B^{2n}) = \frac{\pi^n}{n!R^{2n}} = /R = 1/ = \frac{\pi^n}{n!} = \frac{c^n}{n!}$$

И гипотезу Витербо можно переформулировать следующим образом:

$$\frac{c(X)}{c(B^{2n}(1))} \leqslant \left(\frac{Vol(X)}{Vol(B^{2n}(1))}\right)^{1/n}$$

или другими словами: из тел данного объема шар имеет максимальную симплектическую емкость. Для емкости Громова, выражающейся через симплектический радиус, гипотеза Витербо верна, так как сводится к сравнению шаров. Тогда для доказательства справедливости гипотезы, например, было бы достаточно доказать совпадения всех симплектических емкостей на выпуклых телах. Но эта задача пока нам не под силу.

Следует заметить, что последнее неравенство удалось доказать с точностью до некоторой константы A_0 для любого выпуклого тела и любой симплектической емкости в работе [5].

В двумерном случае ($n = 1$) $c(X) =$ площадь, которую обходит кривая, то есть получается равенство: $Vol(X) = c(X)^1/1!$

В случае осциллятора $H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + f_i^2 q_i^2$ с частотами f_i гипотеза несложно проверяется и $c(X)$ будет достигаться на орбите с наибольшей частотой. На самом деле, любая квадратичная, положительно определенная функция Гамильтона симплектически эквивалентна гамильтониану гармонического осциллятора, и поэтому неравенство Витербо выполняется для любого эллипсоида $E = \{w \in \mathbb{R}^{2n} | \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij}w_iw_j \leqslant 1\}$.

Для произвольного тела не так просто найти характеристики, поэтому мы ограничимся случаем, который исходит из классической механики, а именно когда Гамильтониан можно разделить на кинетическую и потенциальную энергии:

$$H(p,q) = T(p) + V(q)$$

При этом можно даже ограничиться стандартной кинетической энергией $T(p) = \frac{|p|^2}{2}$, но мы сначала рассмотрим ее чуть в более общем смысле. А именно покажем, что для некоторого типа функций неравенство Витербо становится справедливым. Предположим, что в тела $T \leqslant 1$ и $V \leqslant 1$ можно вписать шар, с точностью до расширения, который будет касаться их в одном и том же направлении. Переходя на язык координат, мы можем сформулировать и доказать следующий результат.

Теорема 3.3 *Пусть $T(x) = F_1(x)$ и $V(x) = F_2(x)$ являются собственными, четными, 2-однородными функциями, кроме того существует вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $F_i(x) \leqslant \alpha_i|x|^2$ и $F_i(x_0) = \alpha_i|x_0|$. Тогда неравенство Витербо выполняется для множества $\{T(p) + V(q) \leqslant E\}$*

Доказательство. Покажем сначала, что такая оценка существует для собственной, четной, 2-однородной функции $F(x)$. Четность и 2-однородность означают, что $F(tx) = t^2F(x)$ для любого t и $F(0) = 0$, а собственность(стремление к бесконечности на бесконечности), что для любого $x \neq 0$ существует α такое, что $F(\alpha x) > 0$ и следовательно для любого $x \neq 0, F(x) > 0$. На ограниченном множестве можем записать
$$\begin{cases} F(x) \leqslant \alpha|x|^2 \\ F(x_0) = \alpha|x_0|^2, \text{для некоторого } x_0 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(tx) = t^2F(x) \leqslant \alpha t^2|x|^2 = \alpha|tx|^2 \\ F(tx_0) = t^2F(x_0) = \alpha t^2|x_0|^2 = \alpha|tx_0|^2 \end{cases}$$
то есть для любого $x \in \mathbb{R}^n, F(x) \leqslant \alpha|x|^2$ и $F(x_0) = \alpha|x_0|^2$. В условии теоремы мы предполагаем, что для функций $T(x)$ и $V(x)$ этот вектор x_0 одинаковый, то есть $T(x) \leqslant \alpha|x|^2$, $T(x_0) = \alpha|x_0|^2$, $V(x) \leqslant \beta|x|^2$, $V(x_0) = \beta|x_0|^2$.

Рассмотрим в таком случае новый гамильтониан $H'(p,q) = \alpha|p|^2 + \beta|q|^2$ и для старого тогда выполняется неравенство: $H(p,q) = T(p) + V(q) \leqslant \alpha|p|^2 + \beta|q|^2 = H'(p,q)$. Определив тело $X = \{H(p,q) \leqslant 1\}$ и тело $X' = \{H'(p,q) \leqslant 1\}$, получаем

$$H(p,q) \leqslant H'(p,q) \Rightarrow X \supseteq X'$$

Пусть P — подпространство $\mathbb{R}^{2n}$, натянутое на векторы$(x_0, 0)$ и $(0, x_0)$, $dimP = 2$ и на нем $H = H'$. Кроме того, заметим, что на этом подпространстве отношение H/H' принимает max, поэтому $d(\frac{H}{H'}) = \frac{dHH' - HdH'}{H'^2} = 0 \Rightarrow dH = dH'$ на P. Из этого можно сделать вывод, что любая траектория движения для H', лежащая на P, будет также траекторией движения для H.

Пусть $C = P \cap \partial X' = \{H = H' = 1\} = \{H' = H = 1\} = P \cap \partial X$, тогда C является замкнутой траекторией для H', на которой действие минимально , поскольку это можно представлять себе как пересечение шара (осциллятор с одинаковыми частотами) с плоскостью, натянутой на соответствующие друг другу координату и импульс, а следовательно C является траекторией и для H, и

$$c(X) \leqslant c(X')$$

Но из свойства (монотонности) симплектической емкости $X' \subseteq X \Rightarrow c(X') \leqslant c(X)$

$$\Rightarrow c(X') = c(X)$$

$$Vol(X) \geqslant Vol(X') = \frac{c(X')^n}{n!} = \frac{c(X)^n}{n!},$$

так как для шара имеем равенство в неравенстве Витербо. То есть мы доказали справедливость неравенства в этом случае. ■

Теорема 3.1 применяется, например, к системам, в которых кинетическая энергия имеет стандартный вид $T(p) = \frac{|p|^2}{2}$, а $V(q)$ — собственная, четная, 2-однородная.

Существует и другой подход в этой области, а именно, предположить, что гамильтониан разделяется на сумму гамильтонианов, каждый из которых собственный, зависит от своей пары (координата, импульс) и имеет единственный минимум,

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p_i, q_i)$$

Для этого случая неравенство Витербо тоже выполняется и было доказано в работе [11].

Но вернемся к случаю раздельной кинетической и потенциальной энергии. Рассмотрим гамильтониан следующего вида

$$H(p, q) = \|p\|_*^2 + \|q\|^2,$$

где берется любая (симметричная) норма и ей дуальная. В этом случае выпуклое тело

$$X = \{(p, q) : \|p\|_*^2 + \|q\|^2 \leqslant 1\}$$

называют l_2-суммой $K^o \oplus_2 K$, где K — единичный шар в норме $\|\cdot\|$, а K^o — его полярное, единичный шар в норме $\|\cdot\|_*$. Тогда можно выбрать любое направление координат $q_0 \in \partial K$ и соответствующий ей импульс $p_0 = \frac{\partial \|q\|}{\partial q}|_{q=q_0} \in \partial K^o$ (движение в K^o будет осуществляться вдоль направления p_0 и аналогично в K вдоль q_0). Тогда, очевидно, пересечение ∂X с плоскостью, натянутой на q_0 и p_0, будет замкнутой гамильтоновой траекторией (подход аналогичен теореме 3.3), и действие на ней как и в осцилляторе равняется π. Единственное, что мы не знаем, это то, имеют ли такие траектории минимальное действие, или есть какие-то другие с меньшим чем π. Предположим, что меньших нет и $c(X) = \pi$. Неравенство Витербо в этом случае выглядит так

$$Vol(X) \geqslant \frac{\pi^n}{n!}.$$

Для любой 1-однородной нормы в $\mathbb{R}^m$ можем написать следующее выражение

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x\|^\alpha} dx = Vol\{x : \|x\| \leqslant 1\} \cdot \Gamma(m/\alpha + 1)$$

и тогда имеем с одной стороны

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\|p\|_*^2 - \|q\|^2} dpdq = Vol(K^o \oplus_2 K) \cdot n!$$

так как $m = 2n, \alpha = 2, \Gamma(n+1) = n!$. С другой стороны

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\|p\|_*^2 - \|q\|^2} dpdq = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|q\|^2} dq \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|p\|_*^2} dp = Vol(K) \cdot (n/2)! \cdot Vol(K^o) \cdot (n/2)!$$

И получаем формулу

$$\binom{n}{n/2} Vol(K^o \oplus_2 K) = Vol(K) \cdot Vol(K^o),$$

которая с учетом неравенства Витербо дает

$$Vol(K) \cdot Vol(K^o) \geqslant \binom{n}{n/2} \frac{\pi^n}{n!} = \frac{\pi^n}{((n/2)!)^2}$$

что является неравенством Бляшке-Сантало [6, 14] в обратную сторону, и в общем случае неверно. Таким образом, либо гипотеза Витербо не верна, либо у гамильтониана $H(p,q) = \|p\|_*^2 + \|q\|^2$ есть более быстрые, чем наивные осцилляционные, траектории.

Вернемся к интегралу от экспоненты $\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-H(p,q)} dpdq$, мы уже поняли, что оценка объема множества $\{H(p,q) \leqslant E\}$ с 2-однородным гамильтонианом сводится к оценке этого интеграла. Тогда сформулируем следующую гипотезу: если для выпуклого, 2-однородного гамильтониана с минимумом в нуле нет траекторий периода меньше 1, то интеграл будет не менее 1.

4 Литература

Список литературы

[1] A. Akopyan, A. Balitskiy, R. Karasev, and A. Sharipova. Elementary approach to closed billiard trajectories in asymmetric normed spaces. 2014.

[2] Artstein-Avidan, S., Ostrover Y. Bounds for Minkowski billiard trajectories in convex bodies, Intern. Math. Res. Not. (IMRN) (2012) doi:10.1093/imrn/rns216.

[3] Artstein-Avidan, S., Ostrover Y. Brunn-Minkowski inequality for symplectic ca- pacities of convex domains, Int. Math. Res. Not. Vol. 2008, no. rnn044, (2008).

[4] S. Artstein-Avidan, R. Karasev, and Y. Ostrover. From symplectic measurements to the Mahler conjecture. Duke Mathematical Journal, 163(11):2003–2022, 2014.

[5] Artstein-Avidan, S., Milman, V., Ostrover, Y. The M-ellipsoid, symplectic capacities and volume, Comment. Math. Helv. 83, (2008) no.2, 359–369.

[6] W. Blaschke. u ber affine geometrie vii: Neue extremeigenschaften von ellipse und ellipsoid. Ber. Verh. S achs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl, 69:306–318, 1917.

[7] Daniel Bezdek and Karoly Bezdek, Shortest billiard trajectories, Geom. Dedicata 141 (2009), 197–206, DOI 10.1007/s10711-009-9353-6. MR2520072 (2010h:52009)

[8] F. Clarke. A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. Proc. Amer. Math. Soc., 76:186–188, 1979.

[9] F. Clarke. On Hamiltonian flows and symplectic transformations. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 20, No. 3, May 1982

[10] Gromov, M. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 307–347.

[11] D. Hermann. Non-equivalence of symplectic capacities for open sets with restricted contact type boundary. 1998. Pr epublication d'Orsay, available online at u-psud.fr.

[12] K. Mahler. Ein U bertragungsprinzip fu r konvexe K orper. Casopis pro P estov an ı Matematiky a Fysiky, 68:93–102, 1939.

[13] McDuff, D., Salamon, D. Introduction to Symplectic Topology, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[14] L. A. Santal o. Un invariante afin para los cuerpos convexos de espacio de n dimensiones. Portugal. Math, 8:155–161, 1949.

[15] C. Viterbo. Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry. J. Amer. Math. Soc., 13(2):411–431, 2000.