

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

Инфракрасные зависимости киральных эффектов

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:

студент 121 группы
Авдошкин Александр Сергеевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., Захаров В.И.

Долгопрудный
2017

Содержание

1	Введение	3
2	Свободные фермионы	7
2.1	Киральный химический потенциал	7
2.2	Вычисление индуцированного тока	8
2.3	Аксиальная аномалия и сохранение энергии	9
2.4	Уравнение Дирака	11
2.5	Термодинамический потенциал	13
2.6	Киральный эффект разделения	15
3	Кинетическая теория	16
3.1	Монополь Берри	16
3.2	Уравнения движения	17
3.3	Неабелева фаза Берри для массивного дираковского фермиона	18
4	Голография	20
4.1	Описание модели	20
4.2	КЭР при конечной массе кварка	22
5	Киральные эффекты в пионной среде	25
5.1	Основное состояние	25
5.2	Член Весс-Зумино-Виттена	27
5.3	Обсуждение	29

1 Введение

Киральные среды активно исследовались в течении последних лет. Интерес к этой теме вызван тем, что киральные среды дают новый пример макроскопического проявления квантовых эффектов, а именно квантовых аномалий. Аналогично сверхтекучести и сверхпроводимости киральные среды допускают бездиссипативные транспортные явления. Наиболее известный пример такого кирального транспорта - это киральный магнитный эффект (КМЭ), который заключается в течении электрического тока вдоль внешнего магнитного поля в кирально-асимметричной среде

$$\mathbf{j}^{(el)} = \sigma_M \mu_5 \mathbf{B}, \text{ где } \sigma_M = C_{anom} \quad (1)$$

где μ_5 - это киральный химический потенциал, сопряженный к (сохраняющемуся) аксиальному заряду, \mathbf{B} - магнитное поле, а C_{anom} - это коэффициент, определяющий киральную аномалию, $C_{anom} \equiv e^2/(2\pi^2)$ для одного вейлевского спинора заряда e .

Рассмотрим диссипацию, вызванную аномальным транспортом, на примере КМЭ. Из анализа T -четности Ур.(1) видно, что этот транспорт значительно отличается от обычной омовской проводимости $\mathbf{j}^{(el)} = \sigma \mathbf{E}$ [1]. Действительно, электрический ток и электрическое поле имеют разную четность по отношению к обращению времени (T -четность). Таким образом, электрическая проводимость σ с необходимостью меняет знак при обращении времени, что запрещено соотношением Онзагера. Этот результат отражает необратимость диссипативного производства энтропии электрическим током. В свою очередь, магнитное поле имеет ту же T -четность, что и электрический ток, приводя к T -четной проводимости σ_M . В этом случае второй закон термодинамики говорит, что данный эффект не может приводить к производству энтропии.

Помимо кирального магнитного эффекта существуют и другие примеры аномального транспорта. Традиционно рассматривается отклик аксиального \mathbf{J}_5 и векторного \mathbf{J} токов на внешнее магнитное поле \mathbf{B} и локальную скорость движения среды \mathbf{v} . Соответствующие выражения для одного безмассового фермиона Дирака имеют вид [2]

$$\mathbf{J} = \frac{\mu_5}{2\pi^2} \mathbf{B} + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2} \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_5 = \frac{\mu}{2\pi^2} \mathbf{B} + \left(\frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6} \right) \boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

Помимо КМЭ и кирального эффекта разделения (КЭР) (первые члены

первой и второй строки соответственно), пропорциональных магнитному полю, здесь появляются также так называемые вихревые эффекты, пропорциональные локальной угловой скорости вращения среды $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$.

Существует множество систем, где аномальный транспорт может приводить к новым наблюдаемым эффектам. Среди прочего стоит выделить следующие примеры: P-нечетные эффекты в термальном излучении вращающихся черных дыр [3], отрицательное магнитное сопротивление в топологических системах физики твердого тела (дираковские и вейлевские полуметаллы) [4], возможные механизмы генерации магнитного поля в космологической плазме [5, 6], аномальные вклады в P- и PC-нечетные наблюдаемые величины на экспериментах по соударению тяжелых ионов [7].

На данный момент эффекты аномального транспорта наблюдались экспериментально лишь в контексте физики твердого тела. Так, в дираковском полуметалле, пентателлоруриде циркония $ZrTe_5$, зависимость сопротивления от направления и величины магнитного поля может быть объяснена лишь присутствием кирального магнитного эффекта [4].

Стоит заметить, что значительные усилия также прилагаются для поиска следов аномальных эффектов на экспериментах по соударению тяжелых ионов. Здесь киральная асимметрия может генерироваться случайно в каждом отдельном событии как следствие топологических свойств вакуума КХД. Экспериментально это приводит к угловым неоднородностям адронного спектра. Но, так как флуктуации кирального заряда имеют разный знак в каждом столкновении и усредняются в ноль, лишь корреляции могут быть исследованы количественно. После первых публикаций коллаборации STAR [8, 9], которые качественно согласуются с предсказаниями КМЭ, велся активный поиск проявлений КМЭ и КЭР несколькими крупными коллаборациями, которые изучают столкновения тяжелых ионов, включая STAR [10, 11, 12, 13], PHENIX [14] и ALICE [15].

Во всех вышеописанных примерах аномальный транспорт проявлялся в системах, где возбуждениями являются киральные фермионы. Но в сильно взаимодействующих теориях, таких как КХД, спектр может не содержать свободных фермионов из-за непертурбативных эффектов невылетания цвета (конфайнмент). Тем не менее, согласно принципу согласованности 'т Хоофта, аномалия должна проявляться независимо от масштаба энергий. Так, в фазе де-конфайнмента несохранение аксиального заряда связано с реализацией аномалии на свободных кварках, в то время как в фазе конфайнмента аномалия реализуется через легкие псевдоголдстоуновские возбуждения — пи-мезоны [16]. Так как кираль-

ные эффекты тесно связаны с аномалией, существует вопрос о их реализации в фазе конфайнмента, что обсуждалось в [17, 18]. В этом подходе киральные эффекты, как и аномалия, связаны с добавкой к эффективному действию, называемой членом Весса-Зумино-Витенна [19].

Неперенормируемость аномалии и ее топологическая природа приводят к универсальности аномального транспорта, который сохраняет свою форму даже при переходе между предельными режимами теории — сильная/слабая связь, сильное/слабое поле. Так, в свободном газе дираковских фермионов аномальные проводимости могут быть получены с использованием формулы Кубо для слабых внешних полей [20]. В пределе сильного магнитного поля киральные эффекты получают суммирование по уровням Ландау приводя к тем же результатам, что и в случае слабого поля [21]. Соответствующие проводимости сохраняют ту же форму и в случае сильновзаимодействующей теории, что может быть проверено на примере теории $N=4$ SYM с использованием голографической дуальности. Наконец, киральные эффекты оказываются фиксированы коэффициентом аномалии в гидродинамическом пределе [22], что демонстрирует их глубокую связь с аномалией и значительную степень универсальности.

Несмотря на описанную выше устойчивость по отношению к изменению параметров теории, киральные эффекты могут существенно модифицироваться, в частности, за счет взаимодействия фермионов с калибровочным полем [23, 24, 25] и при изменении ИК свойств системы [18, 26, 27]. Так, при изменении соотношения между размером системы, массой элементарных возбуждений, температурой, химическим потенциалом и величиной внешних полей (включая электрическое) может нарушиться видимая универсальность аномального транспорта.

В данной работе мы сосредоточимся на изучении кирального эффекта разделения в пионной среде (в фазе конфайнмента). Мы рассмотрим пионную среду при конечном химическом потенциале, нулевой температуре и при ненулевой массе u и d кварков во внешнем магнитном поле. Зависимость аксиального тока КЭР от массы в фазе конфайнмента — оригинальный результат автора и является основным результатом данного диплома.

В главе 2 данной работы приведен вывод КМЭ и КЭР для свободных фермионов при конечной массе. Этот вывод следует содержанию [21, 28]. В главе 3 мы приведем необходимый формализм для изучения КЭР при помощи кинетического уравнения в случае конечной массы частиц. Традиционно кинетическая теория для киральных фермионов основывается на введении монополя Берри в импульсном пространстве

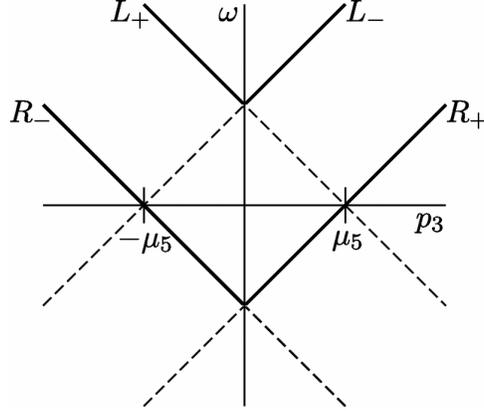


Рис. 1: Спектр безмассовых фермионов Дирака с правой и левой киральностью в присутствии кирального химического потенциала μ_5 . Нижний индекс \pm обозначает собственное значение z-компоненты спина. Киральный химический потенциал приводит к ненулевой плотности правокиральных частиц и левокиральных античастиц.

[29]. Для включения в рассмотрение массы фермиона необходимо увеличить число степеней свободы и ввести неабелеву фазу Берри [30]. Далее, в главе 4, мы рассмотрим вывод КЭР в фазе плавления мезонов при помощи голографического соответствия, следуя [31].

Вышеописанные подходы приводят к сходному поведению КЭР в зависимости от массы. Соответствующий транспортный коэффициент монотонно убывает с ростом массы исчезая при достаточно большем значении. В то же время количественный характер этой зависимости зависит от масштаба энергии. Например, в фазе свободных кварков КЭР исчезает при химических потенциалах меньших массы кварка, а в фазе конфайнмента - при химических потенциалах меньших массы пиона. В главе 5 мы изучим зависимость КЭР от массы пионов в терминах эффективной теории поля. Наконец, в последней главе данного текста мы перейдем к обсуждению оригинальных результатов, полученных в главе 5.

2 Свободные фермионы

2.1 Киральный химический потенциал

Переходы, меняющие топологический заряд, могут приводить к асимметрии между количеством правых и левых кварков вследствие аксиальной аномалии. Для изучения эффекта такой асимметрии вводится киральный химический потенциал μ_5 . Этот химический потенциал сопряжен с плотностью разницы числа правых и левых фермионов. В терминах лагранжевой плотности такая система описывается добавлением следующего члена

$$\mu_5 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi. \quad (4)$$

Энергетический спектр свободного уравнения Дирака в присутствии кирального химического потенциала для безмассового фермиона имеет вид (где мы для простоты положили $p_x = p_y = 0$),

$$\omega_{R\pm} = \pm p_z - \mu_5, \quad (5)$$

$$\omega_{L\pm} = \mp p_z + \mu_5. \quad (6)$$

Здесь \pm отвечает спину в z -направлении, и R, L - киральности. p_z обозначает импульс в z -направлении. Данный энергетический спектр изображен на Рис. 1. Заметим, что в безмассовом пределе можно разделить моды правой и левой киральности. Также нужно заметить, что p_z должно быть положительно для R_+ и L_- мод для того, чтобы киральность оставалась положительной для R_+ и отрицательной для L_- соответственно, и отрицательно для R_- и L_+ мод (см. Рис. 1). Если киральный химический потенциал положителен, то некоторые правые моды и левые антимоды будут заполнены. Таким образом создается совокупная киральность.

Эффект конечного топологического заряда можно имитировать эффективным тета-углом, который зависит от рассматриваемого элемента пространства-времени. (см., например, [32, 33, 34]). Можно добавить к лагранжиану следующий член,

$$\frac{g^2}{32\pi^2} \theta(x, t) F_a^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^a. \quad (7)$$

Выполняя аксиальное $U(1)$ преобразование этот член можно превратить в фермионный вклад

$$\frac{1}{2N_f} \partial_\mu \theta \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (8)$$

Отождествляя это с Ур. (4), мы видим, что $\mu_5 = \partial_0\theta/2N_f$. Мы также можем отождествить μ_5 с временной компонентой аксиального векторного поля A_μ^5 . Эффективный тета-угол приводит к разнице скоростей превращения левых частиц в правые и правых в левые. Киральный химический потенциал, однако, более статическая величина, он равен энергии, необходимой для добавления кварка на правую поверхность Ферми или для удаления кварка с левой поверхности Ферми. Он описывает разницу между числом правых и левых фермионов. Применение эффективного тета-угла для описания спонтанных \mathcal{P} и \mathcal{CP} -нарушающих процессов широко освещено в литературе (см., например, [32, 33, 34, 35]).

Также необходимо отметить, что киральный химический потенциал не имеет проблемы знака, а именно фермионный детерминант с μ_5 вещественен и положителен. В евклидовом пространстве-времени фермионный детерминант имеет следующий вид

$$\det\mathcal{M}(\mu_5) \equiv \det(\not{D} + \mu_5\gamma_E^0\gamma^5 + m), \quad (9)$$

где $\not{D} = \gamma_E^\mu D_\mu$. Здесь мы выбрали представление, в котором все γ_E матрицы эрмитовы, $\gamma_E^0 = \gamma^0$, $\gamma_E^i = i\gamma^i$. Поскольку \not{D} и $\gamma_E^0\gamma^5$ антиэрмитовы, собственные значения $\mathcal{M}(\mu_5)$ имеют форму $i\lambda_n + m$, где $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Поскольку γ_5 антикоммутирует с $\not{D} + \mu_5\gamma_E^0\gamma^5$, все собственные значения образуют пары, т.е., если $i\lambda_n + m$ - это собственное значение, то так же и $-i\lambda_n + m$. Поскольку детерминант это произведение всех собственных значений, мы видим, что детерминант - это произведение $\lambda_n^2 + m^2$ по всем n . Поэтому детерминант вещественен и положительно полуопределен. Это позволяет производить решеточные симуляции кирально асимметричных систем. Решеточное КХД может симулировать киральный магнитный эффект, вводя пространственно зависимую фазу линковых переменных, что отвечает магнитному полю.

2.2 Вычисление индуцированного тока

В этом разделе мы покажем, что, если приложить к системе с киральной асимметрией внешнее магнитное поле, то возникнет электрический ток вдоль него. Мы приведем три различные вычисления КМЭ, поскольку они проливают свет на разные стороны эффекта. Сначала мы выведем ток, отвечающий КМЭ, из закона сохранения энергии. Затем мы изучим решения уравнения Дирака и получим ток, как сумму вкладов отдельных возбуждений. После этого мы перейдем к рассмотрению термодинамического потенциала во внешнем магнитном поле. Вычисления

ограничиваются рассмотрением фермиона с зарядом e без цвета и аромата.

Введем обозначения. Мы выбираем сигнатуру метрики $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и киральное представление для гамма-матриц

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ и $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ - кватернионный базис. Используя это соглашение, возможно записать фермионное поле в виде правых и левых компонент $\psi = (\phi_L, \phi_R)^T$. Мы определяем правый и левый химические потенциалы как $\mu_R = \mu + \mu_5$ и $\mu_L = \mu - \mu_5$. Здесь μ обозначает кварковый химический потенциал, который для трех цветов ($N_c = 3$) равен трети барионного химического потенциала.

Полный ток равен пространственному интегралу от плотности тока

$$J^\mu = \int d^3x j^\mu(x). \quad (11)$$

Которая, в свою очередь, имеет вид

$$j^\mu(x) = e \langle \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \rangle. \quad (12)$$

Здесь ожидание вычисляется по термодинамическому ансамблю. Плотность тока может быть записана в терминах левого и правого спиноров

$$j^\mu(x) = e \langle \phi_R^\dagger(x) \sigma^\mu \phi_R(x) \rangle + e \langle \phi_L^\dagger(x) \bar{\sigma}^\mu \phi_L(x) \rangle. \quad (13)$$

2.3 Аксиальная аномалия и сохранение энергии

Самый простой способ получить верное выражение для тока - это использовать аргумент Нильсона и Ниномии о сохранении энергии [36]. Рассмотрим ситуацию с электрическим полем \mathbf{E} и магнитным полем \mathbf{B} в присутствии кирального химического потенциала. В этом случае электромагнитная аномалия говорит, что скорость изменения киральности равна пространственному интегралу от $e^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} / 2\pi^2$. У этого соотношения имеется интуитивный вывод [36], который мы приводим ниже.

Рассмотрим фермионы с положительным зарядом e во внешнем магнитном поле \mathbf{B} . Фермионы занимают уровни Ландау так, что их движение в поперечной (к полю \mathbf{B}) плоскости будет ограничено. Фермионы могут, однако, двигаться по или против направления \mathbf{B} ; поскольку спины

фермионов предпочитают выстраиваться по магнитному полю, движение параллельное \mathbf{B} отвечает правым фермионам, а антипараллельное \mathbf{B} – левым фермионам.

Присутствие электрического поля \mathbf{E} , параллельного \mathbf{B} , вызывает изменение киральности (см. [37] для обсуждения ускорения частиц космическими струнами). Энергия правых фермионов, двигающихся по электрическому полю под действием силы Лоренца, растет линейно со временем, тем самым увеличивая фермиевский импульс

$$p_F^R = eEt. \quad (14)$$

Аналогично, для левых зарядов фермиевский импульс будет уменьшаться, как $p_F^L = -p_F^R$; это отвечает производству левых античастиц с зарядом $-e$. Поэтому частицы с положительным зарядом будут двигаться по полю, а античастицы с отрицательным зарядом - против поля. Таким образом, создается электрический ток по направлению \mathbf{E} .

Плотность правых фермионов равна произведению плотности продольного фазового пространства $dn/dz = p_F^R/2\pi$ на плотность уровней Ландау в поперечном направлении $d^2n/dx dy = eB/2\pi$,

$$\frac{p_F^R}{2\pi} \cdot \frac{eB}{2\pi} = \frac{e^2}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} t. \quad (15)$$

То же самое выражение дает плотность и левых фермионных состояний; поэтому, скорость изменения киральности $N_5 = N_R - N_L$ на единицу объема и единицу времени дается

$$\frac{d^4 N_5}{dt d^3 x} = \frac{e^2}{2\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (16)$$

Тем самым, мы воспроизвели общее соотношение аномалии для электромагнитного поля.

Рассмотрим соотношение сохранения энергии связанное с изменением киральности. Для превращения левого фермиона в правый фермион необходимо удалить частицу с левой Ферми сферы и добавить ее на правую Ферми-сферу. Энергетическая стоимость этой процедуры $\mu_R - \mu_L = 2\mu_5$ от $\mu_5 dN_5$. Таким образом, умножая эту энергию на скорость изменения киральности, мы находим сколько энергии нужно в единицу времени. У этой энергии должен быть источник, он равен мощности работы, совершаемой током. Эта мощность равна произведению тока на электрическое поле. Так, мы находим [36]

$$\int d^3 x \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mu_5 \frac{dN_5}{dt} = \frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} \int d^3 x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (17)$$

Мы можем выбрать \mathbf{E} в направлении \mathbf{B} в этом выражении. Тогда, беря предел $\mathbf{E} \rightarrow 0$, мы находим

$$\mathbf{J} = \frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} \int d^3x \mathbf{B}. \quad (18)$$

Этот вывод явно демонстрирует, что не только аксиальная аномалия КХД играет роль в киральном магнитном эффекте, но также и электромагнитная аксиальная аномалия. Аномалия КХД обеспечивает киральности, а электромагнитная - ток. В ящике с периодическими граничными условиями число уровней Ландау является целым числом. Это приводит к квантованию тока, как мы увидим в следующем микроскопическом выводе.

2.4 Уравнение Дирака

В этой главе мы вычислим индуцированный ток, решая уравнение Дирака во внешнем магнитном поле и в присутствии кирального химического потенциала. Мы выбираем магнитное поле в z -направлении,

$$\mathbf{B} = B(x, y) \mathbf{e}_z. \quad (19)$$

Уравнение Дирака на таком фоне принимает вид

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m + \mu\gamma^0 + \mu_5\gamma^0\gamma^5) \psi(x) = 0. \quad (20)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Для нашего выбора магнитного поля, данного в Ур. (19), единственные отличные от нуля компоненты A_μ - это $\mu = 1, 2$. Более того, A_μ будет зависеть только от x и y . Точная форма A_μ не важна для нашего вычисления.

Мы вычисляем полный ток в z -направлении, даваемый Ур. (11), начиная с Ур. (13). Для продолжения нужно разложить поля через операторы рождения и уничтожения с различными импульсами. Как показано явно в [38], единственный не исчезающий вклад в

$$\int d^3x \langle \phi_{R,L}^\dagger(x) \sigma^3 \phi_{R,L}(x) \rangle \quad (21)$$

приходит из поперечных нулевых мод, т.е. мод, для которых $p_x = p_y = 0$. Причина в том, что все ненулевые моды имеют спиновое вырождение по энергии, которое приводит к сокращению ожиданий σ_z [38, 39]. Поперечные же нулевые моды, в свою очередь, не вырождены. Обозначим количество нулевых мод, собственных для σ_z , как N_\pm . Можно показать,

что разница $N_+ - N_-$ равна индексу двумерного оператора дираковского гамильтониана в присутствии магнитного поля. [39]. Этот индекс может быть выражен в терминах полного потока Φ . Вывод можно найти в [38, 39]

$$N_+ - N_- = \left\lfloor \frac{e}{2\pi} \Phi \right\rfloor. \quad (22)$$

Здесь мы ввели функцию целой части $\lfloor x \rfloor$. Поток равен интегралу магнитного поля по поперечной плоскости,

$$\Phi = \int d^2x B(x, y). \quad (23)$$

Подчеркнем, что квантуется именно число нулевых мод, а не поток магнитного поля.

Теперь мы можем вычислим полный ток. Он равен сумме плотностей поперечных нулевых мод, взвешенных вырождением спина $\pm N_{\pm}$. Для правых мод находим

$$\int d^3x \langle \phi_{R\pm}^\dagger \sigma_3 \phi_{R\pm} \rangle = \pm N_{\pm} L_z \int_0^\infty \frac{dp_3}{2\pi} \left[n(p_3 - \mu_R) - n(p_3 + \mu_R) \right] = \pm N_{\pm} \frac{L_z \mu_R}{2\pi}. \quad (24)$$

Здесь L_z обозначает длину системы в z -направлении, и $n(\omega) = [\exp(\omega/T) + 1]^{-1}$ - это распределение Ферми-Дирака. Два распределения Ферми-Дирака в Ур. (24) отвечают правым частицам и античастицам соответственно. Перед вкладом античастиц стоит знак минус, поскольку $\phi^\dagger \phi$ - это плотность числа частиц минус плотность числа античастиц. Температурная зависимости выпала из Ур. (24) без приближений. Напомним, как мы объясняли в Рис. 1, что p_3 пробегает только положительные значения для $R+$, и только отрицательные для $R-$. Аналогично, для левых частиц мы находим

$$\int d^3x \langle \phi_{L\pm}^\dagger \sigma_3 \phi_{L\pm} \rangle = \pm N_{\pm} L_z \int_0^\infty \frac{dp_3}{2\pi} \left[n(p_3 - \mu_L) - n(p_3 + \mu_L) \right] = \pm N_{\pm} \frac{L_z \mu_L}{2\pi}. \quad (25)$$

Вычисляя спиновые суммы и вычитая вклад левых частиц из вклада правых, мы находим полный ток

$$J = e \left\lfloor \frac{e\Phi}{2\pi} \right\rfloor \frac{L_z \mu_5}{\pi}. \quad (26)$$

Результат не зависит от температуры и плотности.

Этот вывод может быть выполнен в более общем случае с массивными фермионами. Вычисление становится сложнее, но конечный результат оказывается независимым от массы. В следующем выводе мы включим массу и покажем эту независимость. Так же будет понятна нечувствительность результата к температуре и плотности.

2.5 Термодинамический потенциал

В этой главе мы вычислим ток в однородном магнитном поле, используя термодинамический потенциал. В присутствии кирального химического потенциала термодинамический потенциал имеет вид

$$\Omega = \frac{|eB|}{2\pi} \sum_{s=\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{2\pi} \left[\omega_{p,s} + T \sum_{\pm} \log(1 + e^{-\beta(\omega_{p,s} \pm \mu)}) \right], \quad (27)$$

где n - это сумма по уровням Ландау, s - это сумма по спинам, а дисперсионное соотношение дается

$$\omega_{p,s}^2 = \left[\text{sgn}(p_3)(p_3^2 + 2|eB|n)^{1/2} + s\mu_5 \right]^2 + m^2. \quad (28)$$

Первый член в квадратных скобках может быть записан как $p_3(1 + 2|eB|n/p_3^2)^{1/2}$ без функции знака. Константа $\alpha_{n,s}$ гарантирует, что низший уровень Ландау содержит только одну спиновую компоненту

$$\alpha_{n,s} = \begin{cases} 1 & n > 0, \\ \delta_{s+} & n = 0, \quad eB > 0, \\ \delta_{s-} & n = 0, \quad eB < 0. \end{cases} \quad (29)$$

Заметим также, что фазовое пространство, связанное с уровнями Ландау, квантуется в ящике с периодичными граничными условиями. Мы опускаем это, чтобы избежать неприятных обозначений типа $\frac{|eL_x L_y B/2\pi|}{L_x L_y}$ в фазовом множителе.

Мы вводим постоянное калибровочное поле A_3 . Плотность тока - это производная термодинамического потенциала по A_3 при $A_3 = 0$,

$$j_3 = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial A_3} \right|_{A_3=0}. \quad (30)$$

Термодинамический потенциал по прежнему дается Ур. (27), но дисперсионное соотношение Ур. (28) модифицируется заменой p_3 на $p_3 + eA_3$. Чтобы регуляризовать ультрафиолетовые расходимости термодинамического потенциала, мы вводим ультрафиолетовое обрезание по импульсу Λ в интеграле по p_3 . Более того, мы вводим обрезание N в сумме по уровням Ландау. После введения этих регуляризаций мы можем протащить производные по A_3 через сумму и интеграл. Мы используем тот факт, что

$$\frac{\partial}{\partial A_3} = e \frac{d}{dp_3}, \quad (31)$$

при действии на произвольную функцию $\omega_{p,s}$. В результате мы находим следующее выражение для плотности тока

$$j_3 = e \frac{|eB|}{2\pi} \sum_{s=\pm} \sum_{n=0}^N \alpha_{n,s} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp_3}{2\pi} \frac{d}{dp_3} \left[\omega_{p,s} + T \sum_{\pm} \log(1 + e^{-\beta(\omega_{p,s} \pm \mu)}) \right], \quad (32)$$

где $\omega_{p,s}$ дается Ур. (28), поскольку мы использовали тот факт, что A_3 нужно положить нулем после взятия производной. После суммирования по спинам вклад в интеграл от уровней Ландау с $n > 0$ - это нечетная функция p_3 . По этой причине только нижний уровень Ландау, содержащий лишь одну компоненту спина, дает вклад в ток. В итоге для $eB > 0$ мы находим

$$j_3 = e \frac{|eB|}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp_3}{2\pi} \frac{d}{dp_3} \left[\omega_{p,+} + T \sum_{\pm} \log(1 + e^{-\beta(\omega_{p,+} \pm \mu)}) \right], \quad (33)$$

где

$$\omega_{p,\pm}^2 = (p_3 \pm \mu_5)^2 + m^2. \quad (34)$$

Для $eB < 0$ нужно заменить $\omega_{p,+}$ на $\omega_{p,-}$ в Ур. (33). Поскольку интегранд - это полная производная, интеграл легко вычисляется. Средняя часть (логарифмический член) выпадает, поскольку он стремится к нулю вместе с $p_3 \rightarrow \pm\infty$. Остается поверхностный член, и он равен

$$\begin{aligned} j_3 &= e \frac{|eB|}{4\pi^2} [\omega_{p,\pm}(p_3 = \Lambda) - \omega_{p,\pm}(p_3 = -\Lambda)] \\ &= e \frac{|eB|}{4\pi^2} [(\Lambda \pm \mu_5) - (\Lambda \mp \mu_5)] = \frac{e^2 \mu_5}{2\pi^2} B, \end{aligned} \quad (35)$$

где использовано, что \pm отвечает знаку eB . Тот факт, что ток дается поверхностным членом связан с тем, что он дается электромагнитной аномалией.

Умножая плотность тока Ур. (35) на объем, можно найти, что полный ток Ур. (26). Преимущество данного вывода в том, что здесь явно то, что ток приходит из поверхностного интеграла по бесконечно большим импульсам, где инфракрасные эффекты массы, температуры и μ иррелевантны. В то же время присутствуют проблемы, связанные с введением химического потенциала по несохраняющемуся заряду. Некоторые из них обсуждались в [40, 41].

2.6 Киральные эффект разделения

Аналогично предыдущему разделу для аксиального тока можно записать

$$J = e \left[\frac{e\Phi}{2\pi} \right] \frac{L_z \mu_5}{\pi}. \quad (36)$$

$$J_5^3 = (N_+ - N_-) \frac{1}{L} \sum_{p_3} (n((p_3^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}) + n(-(p_3^2 + m^2)^{\frac{1}{2}})) = \quad (37)$$

$$= \frac{e\Phi}{2\pi} n_m(T, \mu) \quad (38)$$

$$n_m(T, \mu) = \int \frac{dp_3}{2\pi} (n((p_3^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}) + n(-(p_3^2 + m^2)^{\frac{1}{2}})) \quad (39)$$

Здесь $n_m(T, \mu)$ - это плотность одномерных двухкомпонентных фермионов массы m при конечной температуре и химическом потенциале μ . Таким образом, итоговый результат Ур. (37) имеет топологическую природу, поскольку для каждого значения T и μ он чувствителен только к полному магнитному потоку и не зависит от деталей распределения магнитного поля.

Рассмотрим несколько пределов для Ур. (37). Прежде всего, в безмассовом пределе $m \rightarrow 0$ и $n(T, \mu) = \frac{\mu}{\pi}$, что приводит нас к

$$J_5^3 = \frac{e\mu}{2\pi^2} \Phi \quad (40)$$

Заметим, что в этом пределе результат не зависит от температуры, что является частным примером утверждения, сделанного выше. В случае

произвольной массы и нулевой температуры $n(0, \mu) = \sqrt{\mu^2 - m^2}/\pi$ и, следовательно,

$$J_5^3 = \frac{e\sqrt{\mu^2 - m^2}}{2\pi^2} \Phi \quad (41)$$

Стоит отметить, что в нерелятивистском пределе полученный ток соответствует плотности спина. В случае однородного магнитного поля результат следует из того факта, что все уровни Ландау, кроме нулевого уровня, дважды вырождены по отношению к спину. При массе больше химического потенциала в системе не остается частиц и, естественным образом, поляризационный ток стремится к нулю. Аналогичные результаты в других фазах будут получены в следующих главах.

3 Кинетическая теория

Кинетическое уравнение описывает движение частиц в режиме, где столкновения частиц достаточно редки, и движение между столкновениями можно считать классическим. В терминах функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ уравнение имеет вид

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = C[f]. \quad (42)$$

Можно думать об "облаке" частиц, каждая из которых двигается по своей классической траектории $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$. В результате распределение эволюционирует во времени таким образом, что, если следовать за локальным объемом занятым частицами вдоль траектории, число частиц в нем может меняться лишь за счет столкновений.

Столкновения не нужны для вывода киральных эффектов, поэтому мы будем опускать их здесь.

Киральные эффекты связаны с киральной аномалией, но из описания ясно, что число частиц в фазовом объеме *не меняется*. Решением этого противоречия, как мы увидим, является монополь Берри.

3.1 Монополь Берри

Можно показать, что классическое действие для частицы со спиральностью $+1$ имеет вид

$$I = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - |\mathbf{p}| - \mathbf{a}_p \cdot \dot{\mathbf{p}}) dt. \quad (43)$$

где \mathbf{a}_p определяется из соотношения $\mathbf{b} = \nabla_p \times \mathbf{a}_p$,

$$\mathbf{b} = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2|\mathbf{p}|^2}, \quad \text{где} \quad \hat{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (44)$$

Классическое, или адиабатическое, описание ломается, когда два собственных значения гамильтониана вырождаются, т.е. $\mathbf{p} = 0$. Как мы увидим, эта точка является источником для квантовой аномалии.

3.2 Уравнения движения

Несложно включить взаимодействие классической частицы в Ур. (43) со внешним электромагнитным полем, заданным скалярным и векторными потенциалами Φ и \mathbf{A} . Варьируя полученное действие

$$I = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \Phi - |\mathbf{p}| - \mathbf{a}_p \cdot \dot{\mathbf{p}}) dt, \quad (45)$$

мы получаем желаемые уравнения движения [42]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{b}; \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}. \quad (47)$$

Без потока Берри \mathbf{b} эти уравнения похожи на уравнения для скорости безмассовой частицы и силы Лоренца. Без электромагнитного поля кривизна Берри \mathbf{b} уходит из уравнений, так как $\dot{\mathbf{p}} = 0$.

Подставляя Ур. (47) в Ур. (46) и выражая $\dot{\mathbf{x}}$, находим:

$$\sqrt{G} \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{E} \times \mathbf{b} + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b}); \quad (48)$$

$$\sqrt{G} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{E} + \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} + \mathbf{b}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (49)$$

Здесь $G = (1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{B})^2$ - это детерминант 6×6 матрицы коэффициентов уравнения Ур. (46), (47) для $\dot{\mathbf{x}}$ и $\dot{\mathbf{p}}$. Подставляя в Ур. (42), мы можем найти желаемое кинетическое уравнение для функции распределения таких частиц в фазовом пространстве.

Плотность тока дается выражением

$$\mathbf{j} = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G} f \dot{\mathbf{x}}, \quad \text{где} \quad \int_{\mathbf{p}} \equiv \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (50)$$

Подставляя Ур. (48) в Ур. (50), мы находим

$$\mathbf{j} = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G} f \dot{\mathbf{x}} = \int_{\mathbf{p}} f \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{E} \times \int_{\mathbf{p}} f \mathbf{b} + \mathbf{B} \int_{\mathbf{p}} f(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b}). \quad (51)$$

Первый член отвечает обычному току, а второй аномальному Холловскому току. Оба эти вклада исчезают в равновесии. Последний же член дает желаемое выражение для КМЭ/КЭР.

Используя обозначение $E = |\mathbf{p}|$ и надчеркивание для обозначения усреднения по направлениям вектора $\hat{\mathbf{p}}$, мы можем написать

$$\mathbf{j} = \mathbf{B} \int_{\mathbf{p}} f(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{B}}{4\pi^2} \int_0^\infty \overline{f(E, \hat{\mathbf{p}})} dE. \quad (52)$$

Это уравнение воспроизводит известные значения для КМЭ и КЭР при подстановке равновесного значения $f(E)$.

3.3 Неабелева фаза Берри для массивного дираковского фермиона

Для рассмотрения массивного фермиона нужно добавить дополнительные степени свободы, отвечающие ориентации спина частицы. Спиновое пространство рассматривается как независимое от обычных координат. Ориентация спина описывается проекциями на 3 оси s^a , которые в каждый момент времени выбираются так, что ось z направлена по импульсу частицы. На эти три проекции имеется одно соотношение $s^2 = s_a s_a = \frac{1}{4}$. Также для удобства обозначений вводится $s_0 = \frac{1}{2}$.

Дополненные уравнения движения, учитывающие новые степени свободы принимают следующую форму

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}_{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times s_a \boldsymbol{\Omega}^a \\ \dot{\mathbf{p}} &= e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}, \\ \dot{s}_a &= \epsilon_{abc}(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathcal{A}^b) s_c, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0 &= -\frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{\sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad \mathcal{A}^1 = \frac{m}{E_p |\mathbf{p}|} \mathbf{e}_\phi, \\ \mathcal{A}^2 &= -\frac{m}{E_p |\mathbf{p}|} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathcal{A}^3 = -\frac{1}{|\mathbf{p}|} \cot \theta \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \quad (54)$$

где ϕ и θ это сферические углы $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, а \mathbf{e}_ϕ и \mathbf{e}_θ - соответствующие единичные векторы. Заметим, что $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \hat{\mathbf{p}}$. Здесь подразумевается $a = 0, 1, 2, 3$ и $a, b, c = 1, 2, 3$ в первой и последней строчке соответственно, также мы ввели $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \equiv \nabla_{\mathbf{p}} E_p = \mathbf{p}/E_p$, ϵ_{abc} - это абсолютно антисимметричный тензор, нормированный на $\epsilon_{123} = 1$. Можно заметить, что $\dot{s}_a s_a = d(s_a^2)/dt = 0$, поэтому $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ постоянно во времени.

В отсутствии внешних электромагнитных полей \mathbf{p} и s_a - это интегралы движения. Кривизна Берри в Ур. (53) имеет вид

$$\begin{aligned}\Omega^0 &\equiv \nabla_{\mathbf{p}} \times \mathcal{A}^0, \\ \Omega^a &\equiv \nabla_{\mathbf{p}} \times \mathcal{A}^a - \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \mathcal{A}^b \times \mathcal{A}^c.\end{aligned}\quad (55)$$

Для связности Берри Ур. (54) можно получить

$$\begin{aligned}\Omega^0 &= \mathbf{0}, \quad \Omega^1 = \frac{m}{E_p^3} \mathbf{e}_\theta, \\ \Omega^2 &= \frac{m}{E_p^3} \mathbf{e}_\phi, \quad \Omega^3 = \frac{1}{E_p^2} \hat{\mathbf{p}}.\end{aligned}\quad (56)$$

Мы видим, что компонента $a = 0$ не появляется в первом уравнении движения из-за нулевой Ω^0 .

Первые два уравнения Ур. (53) могут быть приведены в более удобную форму

$$\begin{aligned}\sqrt{\gamma} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}_{\mathbf{p}} + e \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + e \mathbf{B} (\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \\ \sqrt{\gamma} \dot{\mathbf{p}} &= e \mathbf{E} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times e \mathbf{B} + e^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega},\end{aligned}\quad (57)$$

где мы определили $\boldsymbol{\Omega} \equiv s_a \Omega^a$ ($a = 1, 2, 3$) и $\sqrt{\gamma} = (1 + e \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B})$ как мера фазового пространства.

Ур. (57) имеет двойственную симметрию при замене

$$\dot{\mathbf{x}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \leftrightarrow e \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\Omega} \leftrightarrow e \mathbf{B}.\quad (58)$$

Поскольку фазовое пространство расширено за счет спинового вектора s_a , распределение также должно зависеть от него $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})$. Уравнение Больцмана принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{s}_a \frac{\partial f}{\partial s_a} = 0.\quad (59)$$

Инвариантный элемент фазового объема

$$d\Gamma = \sqrt{\gamma} \frac{1}{(2\pi)^3 S_0} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p} d^2 \mathbf{s}.\quad (60)$$

Поскольку $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1/4$, есть только две независимые переменные, поэтому мы добавляем соответствующую дельта-функцию $\delta(s^2 - s_a s_a)$ в интеграл по фазовому пространству и обозначаем $d^2 \mathbf{s} \equiv d^3 \mathbf{s} \delta(s^2 -$

$s_a s_a$). Заметем, что $S_0 = \pi$ - это нормировочная константа, которая приходит из условия $S_0^{-1} \int d^2 \mathbf{s} = 1$. Мы определяем $n(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ как плотность фермионного числа и ток фермионного числа соответственно

$$\begin{aligned} n(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^2 \mathbf{s}}{(2\pi)^3 S_0} \sqrt{\gamma} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s}), \\ \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^2 \mathbf{s}}{(2\pi)^3 S_0} \sqrt{\gamma} \dot{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (61)$$

Аналогично вводятся плотности и токи спина

$$\begin{aligned} n^a(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^2 \mathbf{s}}{(2\pi)^3 S_0} \sqrt{\gamma} s^a f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s}), \\ \mathbf{J}^a(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^2 \mathbf{s}}{(2\pi)^3 S_0} \sqrt{\gamma} s^a \dot{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (62)$$

При нулевой массе фермиона функция распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ превращается в сумму двух дельта-функций при $s_3 = \pm 1$, которые отвечают распределениям правых и левых частиц. Соответственно аналогично предыдущему разделу воспроизводятся формулы для КМЭ и КЭР

$$J = \frac{e\mu_5}{2\pi^2} B \quad (63)$$

$$J_5 = \frac{e\sqrt{\mu^2 - m^2}}{2\pi^2} B \quad (64)$$

Данный подход должен позволить вычислить значение КЭР и КМЭ при конечной массе фермиона. Тем не менее эта задаче не была решена в литературе и мы оставляем ее для дальнейшего изучения.

4 Голография

4.1 Описание модели

В [31] для изучения конечной массы кварка на эффект кирального разделения была изучена D3/D7 голографическая модель. Фон состоит из N_c D3 бран и N_f D7 бран. В пределы пробы $N_f \ll N_c$ фон дается просто черной D3 браной, а обратная реакция от D7 браны подавлена. D3/D7 модель дуальна $\mathcal{N} = 4$ теории Супер Янга-Миллса(SYM) с $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплетом, которые преобразуется в присоединенном и фундаментальном представлениях $SU(N_c)$ калибровочной группы соответственно.

По аналогии с QCD мы будем называть $\mathcal{N} = 4$ поля глюонами, а $\mathcal{N} = 2$ поля кварками.

Фон черной D3 браны имеет вид [43]:

$$ds^2 = -\frac{r_0^2}{2} \frac{f^2}{H} \rho^2 dt^2 + \frac{r_0^2}{2} H \rho^2 dx^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\Omega_3^2, \quad (65)$$

где

$$f = 1 - \frac{1}{\rho^4}, \quad H = 1 + \frac{1}{\rho^4}. \quad (66)$$

Температура глюонной плазмы $T = \frac{r_0}{\pi}$.

Мы кладем радиус AdS $L = 1$. Его можно восстановить введя размерности. Мы также явно факторизуем S_5 в S_3 и две дополнительные угловые координаты θ и ϕ . В теории также присутствует поле нетривиальное поле Рамона-Рамона

$$C_4 = \left(\frac{r_0^2}{2} \rho^2 H \right)^2 dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \cos^4 \theta d\phi \wedge d\Omega_3. \quad (67)$$

D7 браны имеют общие пространственные координаты с D3 бранами. К тому же они занимают x_4 - x_7 координаты параметризованные координатами S_3 . Их положение в плоскости x_8 - x_9 может быть параметризовано радиусом $\rho \sin \theta$ и полярным углом ϕ . Вращательная симметрия в плоскости x_8 - x_9 отвечает $U(1)_R$ симметрии в дуальной теории.

D7 брана имеет дополнительную $U(1)_B$ симметрию во внутренних калибровочных полях. Мы будем использовать $U(1)_R$ и $U(1)_B$ симметрии как аксиальную и векторную соответственно.

Нас интересует состояние теории поля при конечной температурой и химическим потенциалом μ_q , а также фоновым магнитным полем \tilde{B} . Поэтому мы вводим объемное калибровочное поле $A_t(\rho)$ и $\tilde{F}_{xy} = \tilde{B}$.

Функция вложения $\theta(\rho)$ D7 браны в D3 брану определяется минимизацией действия включающего член Дирака-Борна-Инфельда и член Весса-Зумино-Виттена

$$\begin{aligned} S_{D7} &= S_{DBI} + S_{WZ}, \\ S_{DBI} &= -N_f T_{D7} \int d^8 \xi \sqrt{-\det \left(g_{ab} + 2\pi\alpha' \tilde{F}_{ab} \right)}, \\ S_{WZ} &= \frac{1}{2} N_f T_{D7} (2\pi\alpha')^2 \int P[C_4] \wedge \tilde{F} \wedge \tilde{F}. \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь T_{D7} - это натяжение D7 браны. g_{ab} и \tilde{F}_{ab} - это индуцированная метрика и тензор Максвелла в объеме соответственно. Если ввести следующие определения

$$B = \frac{2\pi\alpha'}{r_0^2}\tilde{B}, \quad A_t = \frac{2\pi\alpha'}{r_0}\tilde{A}_t, \quad \mathcal{N} = N_f T_{D7} 2\pi^2 = \frac{N_f N_c \lambda}{(2\pi)^4},$$

то действие можно упростить:

$$S_{DBI} = -\frac{\mathcal{N}}{2\pi^2} \int d^8\xi \sqrt{-\det(g_{ab} + F_{ab})}, \quad S_{WZ} = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{N} \int P[C_4] \wedge F \wedge F.$$

Асимптотическое поведение θ имеет вид

$$\sin \theta = \frac{m}{\rho} + \frac{c}{\rho^3} + \dots. \quad (69)$$

Появившиеся коэффициенты связаны с голой массой кварка M_q и кварковым конденсатом $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ [43]:

$$M_q = \frac{r_0 m}{2\pi\alpha'}, \quad \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -2\pi\alpha' \mathcal{N} r_0^3 c. \quad (70)$$

Аналогично асимптотическое поведение A_t определяет безразмерный кварковый химический потенциал μ и плотность n :

$$A_t = \mu - \frac{n}{\rho^2} + \dots, \quad (71)$$

где физическая кварковый химический потенциал и плотность числа частиц имеют вид $\mu_q = \frac{r_0 \mu}{2\pi\alpha'}$ и $n_q = 4\pi\alpha' \mathcal{N} r_0^3 n$.

Фазовая диаграмма этой системы была получена в [44, 45, 46, 47, 48]. Есть два возможных вложения D7 браны, где она пересекает/не пересекает горизонты черной дыры, которые отвечают фазе плавления мезонов/ мезонной фазе [49]. Мы сосредоточимся на фазе плавления мезонов для изучения КЭР в КГП.

4.2 КЭР при конечной массе кварка

Мы рассматриваем флуктуации функции вложения ϕ в вышеописанном фоне. Часть квадратичного действия, которая содержит ϕ , может быть записана в следующей форме

$$S = \mathcal{N} \int d^5x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-G} G^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) - \mathcal{N} \kappa \int d^5x \Omega \epsilon^{MNPQR} F_{MN} F_{PQ} \partial_R \phi, \quad (72)$$

где $M = t, x_1, x_2, x_3, \rho$. Для вычисления КЭР нам нужно

$$\Omega = \cos^4 \theta, \quad \kappa = \frac{1}{8}. \quad (73)$$

Сейчас нам не нужна явная форма G^{MN} . Аксиальный ток определяется в [50] как

$$J_R^\mu = \int d\rho \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi}. \quad (74)$$

Используя уравнения движения для ϕ , мы получаем следующее уравнение несохранения аксиального тока

$$\partial_\mu J_R^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\rho \phi} \Big|_{\rho=\rho_h}^\infty = 0. \quad (75)$$

Мы отождествляем J_R с аксиальным током. Несохранение J_R следует из двух граничных членов в интегрировании. Граничный член при $\rho = \infty$ связан с аксиальной аномалией.

Заметим, что множитель r_0^4 следует из размерности \mathcal{L} . Поступая так, мы выбрали r_0 чтобы задать единицы измерения и работать с безразмерными координатами t, x_1, x_2, x_3 , i.e. $\partial_\mu \rightarrow r_0 \partial_\mu$.

Сочетая с Ур. (69), мы получаем $E = \frac{2\pi\alpha'}{r_0^2} \tilde{E}$ и, таким образом, $\mathcal{N}EBr_0^4 = \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \tilde{E} \tilde{B}$ соответствует члену аномалии. Таким образом член O_η отвечает массовому члену $iM_q \bar{\psi} \gamma^5 \psi$. Другой массивный член на горизонте $\rho = \rho_h$ - это артефакт выбранной нами модели. Его наличие связано с нашей реализацией аксиальной симметрии: поскольку мы используем $U(1)_R$ симметрию для аксиальной симметрии, глюонная плазма имеется также и аксиальный заряд. Граничный член на горизонте отвечает за обмен между кварками (фундаментальной материей) и глюонами (присоединенной материей). Этот член действительно отличен от нуля в известных примерах [50, 51]. Однако, мы изучаем КЭР и корреляторы в статическом пределе. Мы утверждаем, что вышеупомянутый артефакт в них отсутствует, так как обмен зарядом невозможен в статическом пределе. Это может быть проверено явно

Теперь мы переходим к вычислению КЭР, то есть аксиального тока J_R^3 . Замечая, что фоновое значение $\phi = 0$, получаем

$$J_R^3 = \mathcal{N} r_0^3 \int_{\rho_h}^\infty d\rho \cos^4 \theta A'_t B. \quad (76)$$

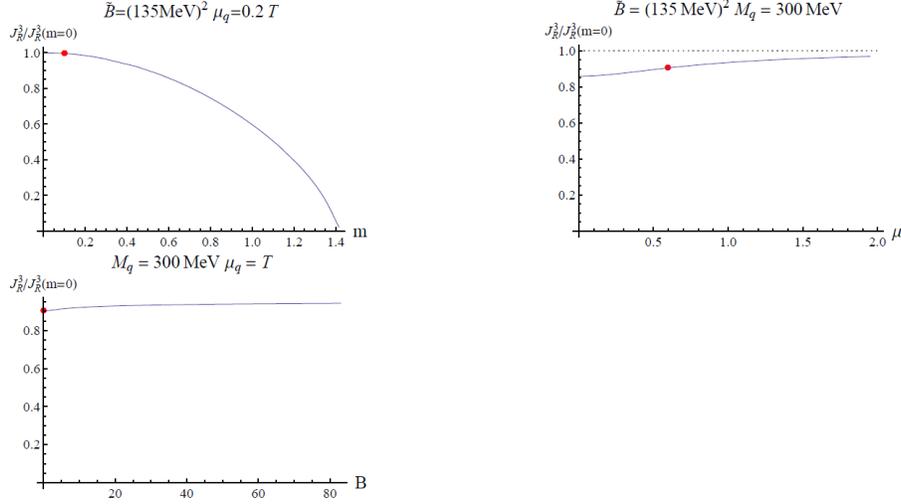


Рис. 2: Нормализованное значение J_R^3 как функция m, μ и B . Температура КЭП $T = 300$ MeV.

Подчеркнем, что если бы мы положили $\phi = 0$ в самом начале, КЭР ток оказался бы нулем.

Случай $m = 0$ тривиален. В этом случае функция вложения это $\theta = 0$. J_R^3 может быть вычислено точно

$$J_R^3 = \mathcal{N} r_0^3 \int_{\rho_h}^{\infty} A_t' B = \mathcal{N} r_0^3 \mu B = \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \mu_q \tilde{B}. \quad (77)$$

Это стандартное значение КЭР, которое целиком фиксируется аномалией. Поправки к стандартному КЭР существуют для $m \neq 0$. В этом случае функция вложения θ и калибровочный потенциал A_t известны только численно. Соответствующий J_R^3 может быть получен численным интегрированием. Мы изображаем зависимость от m, μ и B на рис. 2. Для перехода к физическим единицам мы используем

$$r_0 = \pi T, \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (78)$$

с феноменологически определяемыми константой связи и температурой.

Заметим, что масса кварка подавляет КЭР. Химический потенциал и магнитное поле оба усиливают его.

5 Киральные эффекты в пионной среде

До настоящей работы изучение киральных эффектов в фазе конфайнмента концентрировалось на транспорте связанном с присутствием кирального химического потенциала. В литературе присутствуют два способа его введения. В [52] рассматривался аксиальный химический потенциал как временная производная коэффициента тета-члена. В свою очередь в работе [18] использовался конденсат пионного поля с временной зависимостью. Оба эти подхода дали согласующиеся результаты для КМЭ.

5.1 Основное состояние

В пределе безмассовых легких кварков КХД обладает $SU(2)_R \times SU(2)_L$ симметрией. Вакуумное состояние сохраняет только диагональную подгруппу $SU(2)_{R+L}$. Это дает базис для построения эффективной теории. Эта эффективная теория носит название киральной теории возмущений и она применима, когда химические потенциалы малы. Если киральная симметрия явно нарушена массами фермионов, соответствующий член также добавляется к эффективному лагранжиану. Для начала можно рассмотреть лагранжиан в низшем порядке по градиентам

$$\mathcal{L}_0 = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} [D_\mu U D^\mu U^\dagger] + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} \text{Re tr} [U] \quad (79)$$

Здесь U - это $SU(2)$ матрицы, традиционно параметризуемые как $U = \exp(i\lambda_a \frac{\pi^a}{f_\pi})$.

В безмассовом пределе этот лагранжиан допускает векторную и аксиальную симметрии

$$U \rightarrow_V e^{i\epsilon_V Q} U e^{-i\epsilon_V Q} \quad (80)$$

$$U \rightarrow_A e^{-i\epsilon_A Q_5} U e^{-i\epsilon_A Q_5}. \quad (81)$$

Соответствующие нетеровы токи в этих терминах выражаются как

$$\begin{aligned} j_{aV}^\mu &= -i \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\lambda_a [U, \partial^\mu U^\dagger]) = \\ &= -i \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\lambda_a [U, \frac{\delta U}{\delta \pi^a}]) \partial^\mu \pi^a \equiv E_{ab}^V \partial^\mu \pi^a \end{aligned} \quad (82)$$

$$j_{aA}^\mu = -i \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\lambda_a \{U, \partial^\mu U^\dagger\}) \equiv E_{ab}^A \partial^\mu \pi^a \quad (83)$$

Для изучения термодинамики этой системы нам удобно перейти к гамильтонову описанию. Причиной для этого служит тот факт, что заряд, по которому мы хотим ввести химический потенциал, линеен по временным градиентам. Это усложняет связь между гамильтоновым и лагранжевым описаниями. По этой причине мы будем пользоваться гамильтоновым описанием как более фундаментальным в термодинамике [53].

В первую очередь мы находим канонические импульсы Π_a , сопряженные пионным степеням свободы π^a

$$\begin{aligned}\Pi_a &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \pi^a} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \pi^a} \dot{U}^\dagger + \dot{U} \frac{\delta U^\dagger}{\delta \pi^a} \right) = \\ &= \frac{f_\pi^2}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \pi^a} \frac{\partial U^\dagger}{\partial \pi^b} \right) \dot{\pi}^b \equiv M_{ab} \dot{\pi}^b,\end{aligned}\quad (84)$$

где для дальнейшего удобства мы определили $M_{ab} = \frac{f_\pi^2}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial \pi^a} \frac{\partial U^\dagger}{\partial \pi^b} \right)$. Выражая производные в лагранжиане Ур.(79) через импульсы, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \Pi_a \dot{\pi}^a - \frac{1}{2} M_{ab} \vec{\nabla} \pi^a \vec{\nabla} \pi^b = \\ &= \frac{1}{2} M^{ab} \Pi_a \Pi_b - \frac{1}{2} M_{ab} \vec{\nabla} \pi^a \vec{\nabla} \pi^b + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} \text{Re tr} [U],\end{aligned}\quad (85)$$

где M^{ab} обозначает матрицу обратную к M_{ab} . Гамильтониан

$$\begin{aligned}H_0 &= \Pi_a \dot{\pi}^a - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2} M^{ab} \Pi_a \Pi_b + \frac{1}{2} M_{ab} \vec{\nabla} \pi^a \vec{\nabla} \pi^b - \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} \text{Re tr} [U]\end{aligned}\quad (86)$$

Закончив построение гамильтониана, мы вводим в систему химический потенциал. Для этого мы определяем $H_{eff} = H_0 - \mu_V^a N_{Va}$, где

$$N_{Va} = j_{Va}^0 = E_{ab}^V M^{bc} \Pi_c \quad (87)$$

Вакуумное состояние определяется минимизацией H_{eff} как по значениям поля, так и по каноническим импульсам.

$$H_{eff} = H_0 - \mu_V^a E_{ab}^V M^{bc} \Pi_c \quad (88)$$

Минимизируя по импульсам, получаем

$$M^{ab}\Pi_b = \mu_V^b E_{bc}^V M^{ca} \rightarrow \Pi_a = \mu_V^b E_{ba}^V \quad (89)$$

Записывая E_{ba}^V явно, имеем

$$\vec{\Pi} = \sin(\sqrt{\pi^a \pi^a} / f_\pi) \vec{\mu} \times \frac{\vec{\pi}}{(\vec{\pi})^2} \quad (90)$$

$$\dot{\pi}^a = \epsilon^{abc} \pi^b \mu^c \quad (91)$$

Подставляя это обратно в Ур.(88), имеем

$$H_{eff} = -\mu_V^a \mu_V^b P_{ab} \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\pi^a \pi^a}}{f_\pi}\right) - m_\pi^2 f_\pi^2 \cos\left(\frac{\sqrt{\pi^a \pi^a}}{f_\pi}\right),$$

где P_{ab} - это проектор на подпространство ортогональное π^a .

Этот потенциал минимизируется значениями π^a , ортогональными к μ^a и удовлетворяющими $\cos \frac{|\vec{\pi}|}{f_\pi} = 1$, если $|\vec{\mu}_V| < m_\pi$, и $\cos \frac{|\vec{\pi}|}{f_\pi} = \frac{m_\pi^2}{\mu_V^2}$ в противном случае. Поэтому мы имеем две фазы, разделенные фазовым переходом второго рода.

5.2 Член Весс-Зумино-Виттена

Как эффективное действие Ур.(79) получает поправки в старших порядках по градиентам. Поскольку мы заинтересованы как в аксиальном, так и в векторном токах, нам следует включить источники для обоих в действие. Член, ответственный за киральные эффекты, а также и за киральную аномалию, называется членом Весс-Зумино-Виттена. Физически этот член соответствует процессу распада пиона в два фотона $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Необходимое выражение для двух ароматов было получено в [54]. Далее мы разделяем вклады, содержащие пионные степени свободы U (обозначенное как \mathcal{L}_{WZW}), и контактные вклады, которые зависят только от внешних полей (обозначенное как \mathcal{L}_P)

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WZW} + \mathcal{L}_P \\
\mathcal{L}_0 &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[D_\mu U D^\mu U^\dagger \right] + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2} \text{Re tr} [U] \\
\mathcal{L}_{WZW} &= -\frac{N_c}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \text{tr} \left[U^\dagger \hat{r}_\mu U \hat{l}_\nu - \hat{r}_\mu \hat{l}_\nu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \Sigma_\mu (U^\dagger \hat{r}_\nu U + \hat{l}_\nu) \right] \text{tr} [v_{\rho\sigma}] + \frac{2}{3} \text{tr} [\Sigma_\mu \Sigma_\nu \Sigma_\rho] \text{tr} [v_\sigma] \right\} \\
\mathcal{L}_P &= \frac{N_c}{8N_f \pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left\{ \text{tr} \left[v_\mu \left(\partial_\nu v_\lambda - \frac{2i}{3} v_\nu v_\lambda \right) \right] \partial_\rho \theta + \right. \\
&\quad \left. \text{tr} [a_\mu (D_\nu a)_{\nu\lambda}] \left(\frac{4}{3} \text{tr} [a_\rho] + \partial_\rho \theta \right) \right\} - \\
&\quad - \frac{N_c}{12N_f^2 \pi^2} \text{tr} [a_\mu] \text{tr} [\partial_\nu a_\lambda] \partial_\rho \theta,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_\mu U &= \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu + \frac{i}{2} D_\mu \theta U, \\
\Sigma_\alpha &= U^\dagger \partial_\alpha U, r_\mu = v_\mu + a_\mu, l_\mu = v_\mu - a_\mu, \\
(D_\nu a)_{\mu\nu} &= \partial_\mu a_\nu - i 2[v_\mu, a_\nu], D_\mu \theta = \partial_\mu \theta + 2 \text{tr} [a_\mu]
\end{aligned} \tag{92}$$

Мы получаем следующие выражение для аксиального тока:

$$J_B^\mu |_{WZW} = 0 \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
J_a^\mu |_{WZW} &= \\
&= -\frac{N_c}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [U^\dagger \lambda_a U \hat{v}_\nu + U^\dagger \hat{v}_\nu U \lambda_a - \\
&\quad - 2\sigma_a \hat{v}_\nu - i \Sigma_\nu (U^\dagger \lambda_a U - \lambda_a)] \text{tr} v_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{94}$$

Теперь мы вычисляем ожидания аксиального тока в основном состоянии. Для определенности мы выбираем химический потенциал вдоль третьей оси (изоспиновый химический потенциал).

В этом основное состояние имеет вид $U = \frac{m^2}{\mu_V^2} + i \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\mu_V}\right)^4} \sigma_1$, $\dot{\pi}^a = \epsilon^{abc} \frac{\pi^b}{f_\pi} \mu^c$. Подставляя это в формулу, получаем

$$\mathbf{J}_5 = \frac{N_c}{24\pi^2} \left(\mu_V - \frac{m^4}{\mu_V^3} \right) \mathbf{B} \tag{95}$$

где \mathbf{B} - это внешнее магнитное поле.

5.3 Обсуждение

Выше был получен киральный эффект разделения в пионной среде в гамильтоновом подходе. Качественно массовая зависимость схожа с результатом, полученным для свободных фермионов, а также и результатом полученным в голографии. Киральный эффект разделения монотонно уменьшается с ростом массы и исчезает, когда масса превосходит химический потенциал. В случае пионной среды это связано с исчезновением пионного конденсата при данных соотношениях массы и химического потенциала [55]. Сходное поведение наблюдается для свободных фермионов при маленьких значениях химического потенциала, где коэффициент КЭР дается плотностью одномерных нулевых мод, отвечающих низшему уровню Ландау. Масса пионов определяется массой легких кварков и дается соотношением Гелл-Мана-Оакеса-Реннера $m_\pi^2 = (m_u + m_d) \frac{\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle}{f_\pi^2}$ [56]. Выражение Ур.(95) не есть результат из свободной теории выраженный в терминах эффективной теории, а в действительности другое значение. Это дает новый пример неуниверсальности киральных транспортных коэффициентов. Ранее известные примеры связаны с температурной зависимостью определенных эффектов [18]. В то же время можно видеть, что при маленьких значениях массы лидирующие поправки к значению транспортного коэффициента имеют один порядок по исходной массе кварка. Квадратичная зависимость поправки для свободных фермионов отвечает четвертой степени в формуле Ур.(95). Это говорит о согласовании порядков теории возмущений в разных фазах КХД.

Список литературы

- [1] Anomalies and time reversal invariance in relativistic hydrodynamics: the second order and higher dimensional formulations, D. E. Kharzeev, H.-U. Yee, Phys. Rev. D84 (2011) 045025, e-Print: arXiv:1105.6360 [hep-th].
- [2] Relativistic Hydrodynamics with General Anomalous Charges Yasha Neiman, Yaron Oz, JHEP 1103 (2011) 023 e-Print: arXiv:1011.5107 [hep-th]
The Chiral magnetic effect in hydrodynamical approach A.V.

- Sadofyev, M.V. Isachenkov Phys.Lett. B697 (2011) 404-406 e-Print: arXiv:1010.1550 [hep-th]
- [3] Parity Nonconservation and Rotating Black Holes A. Vilenkin Phys. Rev. Lett. 41, 1575
- [4] Observation of the chiral magnetic effect in ZrTe₅ Qiang Li, Dmitri E. Kharzeev, Cheng Zhang, Yuan Huang, I. Pletikosic, A.V. Fedorov, R.D. Zhong, J.A. Schneeloch, G.D. Gu, T. Valla Nature Phys. 12 (2016) 550-554 e-Print: arXiv:1412.6543 [cond-mat.str-el]
- [5] Macroscopic Parity Violating Effects: Neutrino Fluxes From Rotating Black Holes And In Rotating Thermal Radiation A. Vilenkin Phys.Rev. D20 (1979) 1807-1812
- [6] Primordial magnetic fields, right-handed electrons, and the Abelian anomaly M. Joyce, Mikhail E. Shaposhnikov Phys.Rev.Lett. 79 (1997) 1193-1196 e-Print: astro-ph/9703005
- [7] Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions—A status report D.E. Kharzeev, J. Liao, S.A. Voloshin, G. Wang Prog.Part.Nucl.Phys. 88 (2016) e-Print: arXiv:1511.04050
- [8] Observation of charge-dependent azimuthal correlations and possible local strong parity violation in heavy ion collisions STAR Collaboration (B.I. Abelev (Illinois U., Chicago) et al.) Phys.Rev. C81 (2010) 054908 e-Print: arXiv:0909.1717 [nucl-ex]
- [9] Azimuthal Charged-Particle Correlations and Possible Local Strong Parity Violation STAR Collaboration (B.I. Abelev (Illinois U., Chicago) et al.) Phys.Rev.Lett. 103 (2009) 251601 e-Print: arXiv:0909.1739 [nucl-ex]
- [10] L. Adamczyk et al. (STAR Collaboration), Phys. Rev. C 88 (2013) 064911.
- [11] Beam-energy dependence of charge separation along the magnetic field in Au+Au collisions at RHIC STAR Collaboration (L. Adamczyk (AGH-UST, Cracow) et al.) Phys.Rev.Lett. 113 (2014) 052302 e-Print: arXiv:1404.1433 [nucl-ex]
- [12] L. Adamczyk et al. (STAR Collaboration), Phys. Rev. C 89 (2014) 44908.

- [13] Gang Wang (STAR Collaboration), Nucl. Phys A 904 (2013) 248c.
- [14] N. N. Ajitanand, S. Esumi, R. A. Lacey (PHENIX Collaboration), in: Proc. of the RBRC Workshops, vol. 96 (2010) 230: “P- and CP-odd effects in hot and dense matter”.
- [15] B. I. Abelev et al. (ALICE Collaboration), Phys. Rev. Lett. 110 (2013) 021301.
- [16] Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking Gerard 't Hooft NATO Sci.Ser.B 59 (1980) 135-157
- [17] “*Anomalous Chiral Superfluidity*”, M. Lublinsky, I. Zahed, Phys.Lett. B684 (2010) 119, arXiv:0910.1373 [hep-th].
- [18] “*Temperature dependence of the chiral vortical effects*”, T. Kalaydzhyan, Phys.Rev. D89 (2014) 10, 105012, arXiv:1403.1256 [hep-th].
- [19] Global Aspects of Current Algebra Edward Witten Nucl.Phys. B223 (1983) 422-432
- [20] Equilibrium parity-violating current in a magnetic field Alexander Vilenkin Phys. Rev. D 22, 3080
- [21] Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter M. A. Metlitski, A. R. Zhitnitsky, PhysRevD.72.045011 e-Print: hep-ph/0505072.
- [22] Hydrodynamics with Triangle Anomalies, D. T. Son, P. Surowka, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 191601, e-Print: arXiv:0906.5044 [hep-th] ;
- [23] On Magnetostatics of Chiral Media Z.V. Khaidukov, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, V.I. Zakharov e-Print: arXiv:1307.0138 [hep-th]
- [24] Chiral Plasma Instabilities Yukinao Akamatsu, Naoki Yamamoto Phys.Rev.Lett. 111 (2013) 052002 e-Print: arXiv:1302.2125 [nucl-th]
- [25] Chiral conductivities and effective field theory Kristan Jensen, Pavel Kovtun, Adam Ritz JHEP 1310 (2013) 186 e-Print: arXiv:1307.3234 [hep-th]
- [26] Chiral separation and chiral magnetic effects in a slab: The role of boundaries E.V. Gorbar, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy, P.O. Sukhachov

- Phys.Rev. B92 (2015) no.24, 245440 e-Print: arXiv:1509.06769 [cond-mat.mes-hall]
- [27] Buividovich P V 2013PoSLattice2013 179 ArXiv:1309.2850
 Anomalous transport with overlap fermions P.V. Buividovich, Nucl.Phys. A925 (2014) 218-253 arXiv:1312.1843 [hep-lat]
 Spontaneous chiral symmetry breaking and the Chiral Magnetic Effect for interacting Dirac fermions with chiral imbalance P.V. Buividovich, Phys.Rev. D90 (2014) 125025 arXiv:1408.4573 [hep-th]
- [28] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A 803, 227 (2008);
 K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, Phys. Rev. D 78, 074033 (2008);
 D. Kharzeev, Phys. Lett. B 633, 260 (2006).
- [29] Berry Curvature, Triangle Anomalies, and the Chiral Magnetic Effect in Fermi Liquids, D. T. Son, N. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 181602, e-Print: arXiv:1203.2697 [cond-mat.mes-hall];
 Chiral Kinetic Theory, M.A. Stephanov, Y. Yin, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 162001, e-Print: arXiv:1207.0747 [hep-th];
 Lorentz Invariance in Chiral Kinetic Theory, J.-Y. Chen, D. T. Son, H.-U. Yee, Y. Yin, e-Print: arXiv:1404.5963 [hep-th].
- [30] Kinetic equations for massive Dirac fermions in electromagnetic field with non-Abelian Berry phase Jiunn-Wei Chen, Jin-yi Pang, Shi Pu, Qun Wang Phys.Rev. D89 (2014) no.9, 094003 e-Print: arXiv:1312.2032 [hep-th]
- [31] Quark Mass Correction to Chiral Separation Effect and Pseudoscalar Condensate Er-dong Guo, Shu Lin JHEP 1701 (2017) 111 e-Print: arXiv:1610.05886 [hep-th]
- [32] D. Kharzeev, Phys. Lett. B **633**, 260 (2006).
- [33] D. Kharzeev and A. Zhitnitsky, Nucl. Phys. A **797**, 67 (2007).
- [34] D. Kharzeev, R. D. Pisarski and M. H. G. Tytgat, Phys. Rev. Lett. **81**, 512 (1998); arXiv:hep-ph/0012012.
- [35] T. Fugleberg, I. E. Halperin and A. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **59**, 074023 (1999) R. H. Brandenberger, I. E. Halperin and A. Zhitnitsky, arXiv:hep-ph/9808471; K. Buckley, T. Fugleberg and A. Zhitnitsky,

- Phys. Rev. Lett. **84**, 4814 (2000) D. Ahrensmeier, R. Baier and M. Dirks, Phys. Lett. B **484**, 58 (2000); E. V. Shuryak and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. C **66**, 034905 (2002); A. K. Chaudhuri, Phys. Rev. C **65**, 024906 (2002); M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **92**, 201601 (2004); arXiv:hep-ph/0312225; E. Vicari and H. Panagopoulos, arXiv:0803.1593 [hep-th]; D. Boer and J. K. Boomsma, arXiv:0806.1669 [hep-ph].
- [36] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B **130**, 389 (1983).
- [37] E. Witten, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).
- [38] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2005).
- [39] Y. Aharonov and A. Casher Phys. Rev. A **19**, 2461 (1979).
- [40] Ioannis Iatrakis, Shu Lin, and Yi Yin. The anomalous transport of axial charge: topological vs non-topological fluctuations. JHEP, 09:030, 2015. Yan Wu, Defu Hou, and Hai-cang Ren. The Subtleties of the Wigner Function Formulation of the Chiral Magnetic Effect. 2016
- [41] Cancellation Of Equilibrium Parity Violating Currents A. Vilenkin Phys.Rev. D22 (1980) 3067-3079
- [42] PhysRevB.59.14915, RevModPhys.82.1959
- [43] David Mateos, Robert C. Myers, and Rowan M. Thomson. Holographic phase transitions with fundamental matter. *Phys. Rev. Lett.*, 97:091601, 2006.
- [44] David Mateos, Shunji Matsuura, Robert C. Myers, and Rowan M. Thomson. Holographic phase transitions at finite chemical potential. *JHEP*, 11:085, 2007.
- [45] Shinpei Kobayashi, David Mateos, Shunji Matsuura, Robert C. Myers, and Rowan M. Thomson. Holographic phase transitions at finite baryon density. *JHEP*, 02:016, 2007.
- [46] Veselin G. Filev, Clifford V. Johnson, R. C. Rashkov, and K. S. Viswanathan. Flavoured large N gauge theory in an external magnetic field. *JHEP*, 10:019, 2007.
- [47] Johanna Erdmenger, Rene Meyer, and Jonathan P. Shock. AdS/CFT with flavour in electric and magnetic Kalb-Ramond fields. *JHEP*, 12:091, 2007.

- [48] Nick Evans, Astrid Gebauer, Keun-Young Kim, and Maria Magou. Holographic Description of the Phase Diagram of a Chiral Symmetry Breaking Gauge Theory. *JHEP*, 03:132, 2010.
- [49] Carlos Hoyos-Badajoz, Karl Landsteiner, and Sergio Montero. Holographic meson melting. *JHEP*, 04:031, 2007.
- [50] Carlos Hoyos, Tatsuma Nishioka, and Andy O’Bannon. A Chiral Magnetic Effect from AdS/CFT with Flavor. *JHEP*, 1110:084, 2011.
- [51] Andreas Karch, Andy O’Bannon, and Ethan Thompson. The Stress-Energy Tensor of Flavor Fields from AdS/CFT. *JHEP*, 04:021, 2009.
- [52] Kenji Fukushima, Kazuya Mameda arXiv:1206.3128
Phys.Rev. D86 (2012) 071501
- [53] Statistical Physics, Volume 5 L.D. Landau, E.M. Lifshitz
- [54] Anomalies and WZW term of two flavor QCD Roland Kaiser Phys.Rev. D63 (2001) 076010
- [55] “*QCD at finite isospin density*”, D.T. Son, M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 592, hep-ph/0005225.
- [56] Behavior of Current Divergences under $SU(3) \times SU(3)$ Murray Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner Phys. Rev. 175, 2195 – Published 25 November 1968