ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Квантовая теория безмассового скалярного поля при наличии неидеального движущегося зеркала

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнила:
студентка 421 группы
Акопян Лианна Ашотовна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный
2018

Содержание

1 Введение

С 70-х годов прошлого века известно, что концепция частиц (равно как и математические аспекты их описания) при обобщении на случай пространств с произвольной метрикой или пространств Минковского при наличии сильных или нестационарных полей сталкивается со значительными трудностями. Поскольку именно такие пространства составляют главный интерес исследования космологии и теоретической астрофизики, разработка формализма для описания правильного физического поведения полей в таких системах остается актуальной задачей. Основная проблема "частичного" описания заключается в сложности корректного определения начального состояния, по которому можно будет судить о наличии или отсутствии частиц. Расчеты показывают, что отклик, а значит, и физические свойства, начинают зависеть от движения детектора. Кроме того, понятие частиц носит глобальный характер, т.е. для их введения существенно поведение поля во всём пространстве-времени. Лишенным подобных недостатков и физически осмысленным является описание квантовой теории поля в терминах тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ - локальной величины, компоненты которой, усредненные по квантовым состояниям, отвечают за поток энергии и импульса. По тому, тривиальны или нет квантовые средние компонент тензора энергии-импульса, можно судить о наличии излучения [1] - [5], [8].

Нестационарности и сильные внешние поля при учете квантовых эффектов приводят к интересным явлениям, например к рождению частиц (см. [7] и ссылки там). Физические свойства скалярного поля при наличии сильных внешних электромагнитных [10] или гравитационных [11] полей хорошо изучены. Введение нетривиальностей в теорию может быть осуществлено различными способами, например через искривление метрики (пример: пространство де Ситтера [9], [8]) или через граничные и краевые условия для полей [2], [3], [4]. Частным случаем граничных условий являются идеальные движущиеся зеркала, полностью отражающие падающие на них кванты поля. Детальное изучение таких систем было недавно проведено в работах [1], [5] для безмассового и массивного скалярного полей в двумерном пространстве Минковского соответственно. Было показано, что из-за идеальности зеркала (т.е. того, что моды с любыми частотами полностью от него отражаются) в коммутационных соотношениях возникают лишние граничные члены. В работе [5] также показано, что рассмотрение неидеального покоящегося зеркала не обладает этим недостатком: коммутационное соотношение для мод и сопряженных моментов имеет правильный вид.

Данная работа посвящена изучению поведения скалярного поля в двумерном пространстве Минковского при наличии неидеального (т.е. пропускающего высокочастотные кванты) движущегося по произвольной траектории зеркала, моделируемого дельта-потенциалом. Расчет вакуумного среднего потока энергии позволяет обнаружить излучение от зеркала, движущегося с ускорением.

В разделах 2-4 найдены моды и приведен расчет коммутационного соотношения и гамильтониана для случая неподвижного зеркала. В разделе 5 найдены моды для зеркала, движущегося по произвольной траектории через обобщение мод зеркала, движущегося равномерно. В разделе 6 приведен расчет смешанной компоненты тензора энергии-импульса для найденных мод движущегося произвольным образом зеркала.

2 Моды для неподвижного зеркала

Рассмотрим скалярное поле в 1+1-мерном пространстве Минковского, которое находится в потенциале дельта-барьера, т.е. удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' + \alpha\,\delta\,(x)\;\varphi(t,x) = 0 \tag{1}$$

После нахождения решений этого уравнения будет показано, что дельта-потенциал моделирует неидеальное покоящееся зеркало, которое частично отражает, а частично пропускает волны. При этом α задает коэффициенты отражения и прохождения, а аргумент дельта-функции отвечает за движение барьера вдоль оси OX. В данном случае зеркало вечно покоится ($z(t) \equiv 0$).

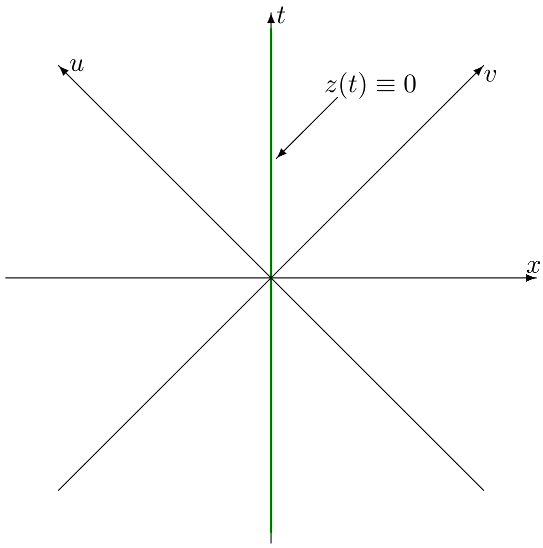

Рис. 2.1: Траектория покоящегося зеркала.

Совершим Фурье-преобразование поля по времени $\varphi(t,x) = \int_0^{+\infty} d\omega \left\{A_\omega h(\omega,x)e^{-i\omega t} + c.c.\right\}$:

$$(-\omega^2 - \partial_x^2)h = -\alpha\delta(x)h,$$

тогда уравнение (1) перепишется через условия сшивки:

$$h'' + \omega^2 h = 0; \quad h(+0) = h(-0) = h(0); \quad h'(+0) - h'(-0) = \alpha h(0).$$

При квантовании при $h(k,x)$ будет стоять оператор a_k уничтожения кванта с энергией $\omega = |k|$, а при $h^*(k,x)$ - рождения a_k^+ кванта с такой же энергией.

Нужные нам моды состоят из распространяющихся волн, которые при $x = 0$ частично отражаются, а частично проходят. Запишем для них:

$$h_\rightarrow = h_k(k>0,x) = \left(b_\rightarrow e^{ikx} + c_\rightarrow e^{-ikx}\right)\theta(-x) + d_\rightarrow e^{ikx}\theta(x)$$

- моды, распространяющаяся слева направо, гармоника с противоположным направлением движения выглядит следующим образом:

$$h_\leftarrow = h_{-k}(k<0,x) = d_\leftarrow e^{ikx}\theta(-x) + \left(c_\leftarrow e^{-ikx} + b_\leftarrow e^{ikx}\right)\theta(x).$$

Запишем условия сшивки и получим следующие уравнения для коэффициентов (функции от k):

$$\begin{cases} d_\rightarrow = b_\rightarrow + c_\rightarrow \\ ikd_\rightarrow - ik(b_\rightarrow - c_\rightarrow) = \alpha d_\rightarrow \end{cases} \qquad \begin{cases} b_\leftarrow + c_\leftarrow = d_\leftarrow \\ ik(b_\leftarrow - c_\leftarrow) - ikd_\leftarrow = \alpha d_\leftarrow \end{cases}$$

Решение этих условий дает следующие выражения для коэффициентов прохождения и отражения:

$$\begin{cases} d_{\rightarrow} = \frac{2ik}{2ik-\alpha} A_k \\ c_{\rightarrow} = \frac{\alpha}{2ik-\alpha} A_k \end{cases} \qquad \begin{cases} d_{\leftarrow} = \frac{2ik}{2ik+\alpha} A_k \\ c_{\leftarrow} = \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} A_k \end{cases}$$

Тогда моды целиком выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} A_k h(k,x) = A_k[\theta(k)h_{\rightarrow} + \theta(-k)h_{\leftarrow}] = \\ = A_k\theta(k)\left[\left(e^{ikx} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}e^{-ikx}\right)\theta(-x) + \frac{2ik}{2ik-\alpha}e^{ikx}\theta(x)\right] + \\ + A_k\theta(-k)\left[\left(e^{ikx} - \frac{\alpha}{2ik+\alpha}e^{-ikx}\right)\theta(x) + \frac{2ik}{2ik+\alpha}e^{ikx}\theta(-x)\right] = \\ = A_k e^{ikx} + A_k\left[\theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(-x) + e^{ikx}\theta(x)\right) + \theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(x) + e^{ikx}\theta(-x)\right)\right]. \qquad (2) \end{gathered}$$

То есть получаем следующее выражение для квантованного поля:

$$\varphi(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi}\left\{A_k e^{-i|k|t}h(k,x)\hat{a}_k + h.c.\right\} = \int \frac{dk}{2\pi}\left\{A_k e^{-i|k|t}[\theta(k)h_{\rightarrow} + \theta(-k)h_{\leftarrow}]\hat{a}_k + h.c.\right\},$$

где $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^+$ - операторы рождения и уничтожения гармоник, соответственно, для которых выполняются канонические коммутационные соотношения: $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = 2\pi\delta(k-k'), \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] = 0$.
Заметим, что при $\alpha \to 0$ и $k \to \infty$ гармоники переходят в свободные ЭМ волны, т.е. волны с большим импульсом проходят сквозь зеркало, не испытывая никакого отражения. А полученные в пределе $\alpha \to \infty$ моды решают задачу об идеальном зеркале [1].

3 Коммутационное соотношение для неподвижного зеркала

Зафиксируем стандартную нормировку $A_k = \frac{1}{\sqrt{2|k|}}$ и проверим выполнение коммутационного соотношения на поле и сопряженный импульс $[\varphi(t,x), \partial_t\varphi(t,y)] = i\delta(x-y)$ (с учетом коммутационных соотношений на операторы). Используем запись для поля в виде (2):

$$h(k,x) = e^{ikx} + \theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(-x) + e^{ikx}\theta(x)\right) + \theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(x) + e^{ikx}\theta(-x)\right);$$

$$h^*(k',y) = e^{-ik'y} + \theta(k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{ik'y}\theta(-y) + e^{-ik'y}\theta(y)\right) + \theta(-k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{ik'y}\theta(y) + e^{-ik'y}\theta(-y)\right);$$

$$[\varphi(t,x), \pi(t,y)] = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\{h(k,x)h^*(k,y) + h(k,y)h^*(k,x)\} = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left\{e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}\right\} +$$

$$+\int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\Bigg[\theta(k)\Bigg\{\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik(x+y)}(\theta(-y)+\theta(-x)) + e^{ik(x-y)}\theta(y) + e^{ik(y-x)}\theta(x)\right) +$$

$$+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ik(x+y)}(\theta(-x)+\theta(-y)) + e^{ik(x-y)}\theta(x) + e^{ik(y-x)}\theta(y)\right)\Bigg\} +$$

$$+\theta(-k)\Bigg\{\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ik(x+y)}(\theta(x)+\theta(y)) + e^{ik(x-y)}\theta(-x) + e^{ik(y-x)}\theta(-y)\right) +$$

$$+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{ik(x+y)}(\theta(x)+\theta(y)) + e^{ik(x-y)}\theta(-y) + e^{ik(y-x)}\theta(-x)\right)\Bigg\} +$$

$$+\theta(k)\frac{\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\left(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\right)(\theta(-x)\theta(-y) + \theta(x)\theta(y)) + \left(e^{ik(x+y)} + e^{-ik(x+y)}\right)(\theta(x)\theta(-y) + \theta(-x)\theta(y))\right) +$$

$$+\theta(-k)\frac{\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\left(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\right)(\theta(-x)\theta(-y) + \theta(x)\theta(y)) + \left(e^{ik(x+y)} + e^{-ik(x+y)}\right)(\theta(x)\theta(-y) + \theta(-x)\theta(y))\right)\Bigg] =$$

$$= \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\Bigg[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik(x+y)}(\theta(-y)+\theta(-x)) + e^{-ik(x+y)}(\theta(x)+\theta(y)) + e^{ik(x-y)}(\theta(y)+\theta(-x)) + e^{ik(y-x)}(\theta(x)+\theta(-y))\right) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\left(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\right)\theta(xy) + \left(e^{ik(x+y)} + e^{-ik(x+y)}\right)\theta(-xy)\right)\Bigg] + \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left\{e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}\right\} =$$

$$= \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\Bigg[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik(x+y)}(\theta(-y)+\theta(-x)) + e^{-ik(x+y)}(\theta(x)+\theta(y)) + e^{ik(x-y)}(\theta(y)+\theta(-x)) + e^{ik(y-x)}(\theta(x)+\theta(-y))\right) +$$

$$+\frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(e^{ik(x-y)}\theta(xy) + e^{ik(x+y)}\theta(-xy)\right)\Bigg] + i\delta(x-y).$$

Покажем, что интеграл в последнем выражении равен 0 для любых значений x и y. Для этого рассмотрим 4 случая.

1. В случае $x>0, y>0$ интеграл имеет вид:

$$\int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(2e^{-ik(x+y)} + e^{ik(x-y)} + e^{ik(y-x)} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}e^{ik(x-y)}\right) = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{-ik(x+y)} +\right.$$

$$+\int\frac{dk}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{2ik-\alpha} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\right]e^{ik(x-y)} = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{-ik(x+y)} = 0,$$

здесь в нужном месте была произведена замена k на $-k$. Конечный интеграл равен нулю, поскольку при данных значениях x и y контур замыкается снизу, а полюс находится сверху. Аналогичные вычисления проводятся и в остальных случаях.

2. В случае $x>0, y<0$ интеграл имеет вид:

$$\int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ik(x+y)} + e^{ik(x+y)} + 2e^{ik(y-x)} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}e^{ik(x+y)}\right) = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{-ik(x-y)} +\right.$$

$$+\int\frac{dk}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{2ik-\alpha} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\right]e^{ik(x+y)} = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{-ik(x-y)} = 0,$$

3. В случае $x < 0, y > 0$ интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ik(x+y)} + e^{ik(x+y)} + 2e^{ik(x-y)} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}e^{ik(x+y)}\right) = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{ik(x-y)} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{dk}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{2ik-\alpha} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\right]e^{ik(x+y)} = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{ik(x-y)} = 0, \right.$$

4. В случае $x < 0, y < 0$ интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(2e^{ik(x+y)} + e^{ik(x-y)} + e^{ik(y-x)} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}e^{ik(x-y)}\right) = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{ik(x+y)} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{dk}{2\pi}\left[\frac{\alpha}{2ik-\alpha} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\right]e^{ik(x-y)} = \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-2\alpha}{2ik+\alpha}e^{ik(x+y)} = 0. \right.$$

Таким образом, получаем, что каноническое коммутационное соотношение для поля и сопряженного момента выполняется.

4 Гамильтониан для неподвижного зеркала

Уравнение движения (1) возникает из вариации следующего действия: $S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{\alpha}{2}\delta(x)\varphi^2\right]$.
Получим гамильтониан теории из лагранжиана:
$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi)} = \partial_t\varphi; \quad \mathcal{H} = \pi\partial_t\varphi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\partial_x\varphi)^2) + \frac{\alpha}{2}\delta(x)\varphi^2; \quad H = \int dx\mathcal{H}$
и упростим выражение для гамильтониана с помощью уравнений движения (1):

$$\ddot{\varphi} \,-\, \varphi'' \,+\, \alpha\,\delta\,(x)\;\varphi(t,x) = 0;$$

$$-1/2\varphi'' = -1/2\ddot{\varphi} \; - 1/2\,\alpha\,\delta\,(x)\;\varphi(t,x) = 0;$$

$$\int dx(\varphi')^2 = \varphi'\varphi\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int dx\varphi''\varphi = -\int dx\varphi''\varphi;$$

$$H = \int dx\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\varphi')^2) + \frac{\alpha}{2}\delta(x)\varphi^2\right] = \int dx\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi}\varphi)\right].$$

Выпишем все необходимые для расчета компоненты поля и его производных:

$$\varphi(t,x) = \int\frac{dk}{2\pi}A_k\left\{e^{-i|k|t}h(k,x)\hat{a}_k + e^{i|k|t}h^*(k,x)\hat{a}_k^+\right\};$$

$$\ddot{\varphi}(t,x) = \int\frac{dk'}{2\pi}A_{k'}|k'|^2\left\{-e^{-i|k'|t}h(k',x)\hat{a}_{k'} - e^{i|k'|t}h^*(k',x)\hat{a}_{k'}^+\right\};$$

$$\dot{\varphi}(t,x) = \int\frac{dk}{2\pi}A_k i|k|\left\{-e^{-i|k|t}h(k,x)\hat{a}_k + e^{i|k|t}h^*(k,x)\hat{a}_k^+\right\};$$

и подставим их в гамильтониан:

$$H = \int dx\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi}\varphi)\right] =$$

$$= \int dx\int\frac{dk}{2\pi}\int\frac{dk'}{4\pi}\frac{1}{2\sqrt{|kk'|}}\Bigg\{(|k'|^2 - |k||k'|)\Big[e^{-i(|k|+|k'|)t}h(k',x)h(k,x)\hat{a}_k\hat{a}_{k'} + e^{i(|k|+|k'|)t}h^*(k',x)h^*(k,x)\hat{a}_k^+\hat{a}_{k'}^+\Big] +$$

$$+(|k'|^2 + |k'||k|)\left[e^{-i(|k|-|k'|)t}h^*(k',x)h(k,x)\hat{a}_k\hat{a}_{k'}^+ + e^{i(|k|-|k'|)t}h(k',x)h^*(k,x)\hat{a}_k^+\hat{a}_{k'}\right]\Bigg\},$$

где найденные в предыдущем пункте моды выглядят следующим образом:

$$h(k,x) = e^{ikx} + \theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(-x) + e^{ikx}\theta(x)\right) + \theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-ikx}\theta(x) + e^{ikx}\theta(-x)\right);$$

$$h(k',x) = e^{ik'x} + \theta(k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{-ik'x}\theta(-x) + e^{ik'x}\theta(x)\right) + \theta(-k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{-ik'x}\theta(x) + e^{ik'x}\theta(-x)\right);$$

$$h^*(k,x) = e^{-ikx} + \theta(k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ikx}\theta(-x) + e^{-ikx}\theta(x)\right) + \theta(-k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{ikx}\theta(x) + e^{-ikx}\theta(-x)\right);$$

$$h^*(k',x) = e^{-ik'x} + \theta(k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{ik'x}\theta(-x) + e^{-ik'x}\theta(x)\right) + \theta(-k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{ik'x}\theta(x) + e^{-ik'x}\theta(-x)\right);$$

и мы ниже воспользуемся следующей формулой:

$$\int_0^{+\infty} e^{ikx}dx = \pi\delta(k) + P\left(\frac{i}{k}\right) = \frac{i}{k+i\epsilon}.$$

Подставляем всё в гамильтониан и считаем 4 слагаемых по-отдельности.
а) Член при $a_k a_{k'}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h(k,x)h(k',x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\Big[e^{i(k+k')x} + \theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-i(k-k')x}\theta(-x) + e^{i(k+k')x}\theta(x)\right) +$$

$$+\theta(k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{i(k-k')x}\theta(-x) + e^{i(k+k')x}\theta(x)\right) + \theta(k)\theta(k')\frac{\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)}\left[e^{-i(k+k')x}\theta(-x) + e^{i(k+k')x}\theta(x)\right] +$$

$$+\theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-i(k-k')x}\theta(x) + e^{i(k+k')x}\theta(-x)\right) + \theta(-k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{i(k-k')x}\theta(x) + e^{i(k+k')x}\theta(-x)\right) +$$

$$+\theta(-k)\theta(-k')\frac{\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)}\left[e^{-i(k+k')x}\theta(x)+e^{i(k+k')x}\theta(-x)\right]+$$

$$+\theta(k)\theta(-k')\frac{\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)}\left[e^{-i(k-k')x}\theta(-x)+e^{i(k-k')x}\theta(x)\right]+$$

$$+\theta(-k)\theta(k')\frac{\alpha^2}{(\alpha-2ik')(2ik+\alpha)}\left[e^{i(k-k')x}\theta(-x)+e^{-i(k-k')x}\theta(x)\right]\Bigg]=$$

$$=\int_0^\infty dx\Bigg[e^{i(k+k')x}+\theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{i(k-k')x}+e^{i(k+k')x}\right)+$$

$$+\theta(k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{-i(k-k')x}+e^{i(k+k')x}\right)+\theta(k)\theta(k')\frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)}e^{i(k+k')x}+$$

$$+\theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{-i(k-k')x}+e^{-i(k+k')x}\right)+\theta(-k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{i(k-k')x}+e^{-i(k+k')x}\right)+$$

$$+\theta(-k)\theta(-k')\frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)}e^{-i(k+k')x}+$$

$$+\theta(k)\theta(-k')\frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)}e^{i(k-k')x}+\theta(-k)\theta(k')\frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik')(2ik+\alpha)}e^{-i(k-k')x}\Bigg]=$$

[члены с дельта-функцией опускаем, поскольку они дадут нуль при интегрировании с функцией $|k'|^2-|k||k'|$]

$$=\theta(k)\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\theta(k')\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+$$

$$+\theta(k)\theta(k')\frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)}\frac{i}{k+k'}+\theta(-k)\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+$$

$$+\theta(-k')\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\theta(-k)\theta(-k')\frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)}\frac{-i}{k+k'}+$$

$$+\theta(k)\theta(-k')\frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)}\frac{i}{k-k'}+\theta(-k)\theta(k')\frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik')(2ik+\alpha)}\frac{-i}{k-k'}\equiv 0.$$

Покажем, что последнее тождество верно для всех значений k и k':

1) Случай $\quad k>0, k'>0:$

$$\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)}\frac{i}{k+k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'-\alpha)-k'(2ik-\alpha)+\alpha(k-k')]=0;$$

2) Случай $\quad k>0, k'<0:$

$$\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{-2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'+\alpha)}\frac{i}{k-k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik-\alpha)(2ik'+\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'+\alpha)-k'(2ik-\alpha)-\alpha(k+k')]=0;$$

3) Случай $\quad k<0, k'>0:$

$$\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'-\alpha)}\frac{i}{k-k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik+\alpha)(2ik'-\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'-\alpha)-k'(2ik+\alpha)+\alpha(k+k')]=0;$$

4) Случай $\quad k<0, k'<0:$

$$\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)}\frac{-i}{k+k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'+\alpha)-k'(2ik+\alpha)-\alpha(k-k')]=0.$$

Имеем таким образом, что подынтегральное выражение тождественно равно 0 и член с $a_k a_{k'}$ в гамильтониане отсутствует.

b) Член при $a_k^+ a_{k'}^+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h^*(k,x) h^*(k',x) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx h(k,x) h(k',x) \right\}^* = 0.$$

Следовательно, внедиагональные члены в гамильтониане равны нулю.

Перейдем к обсуждению диагональных вкладов в гамильтониан.

c) Член при $a_k a_{k'}^+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h(k,x) h^*(k',x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} + \int_{-\infty}^{\infty} dx \Big[\theta(k) \frac{\alpha}{2ik-\alpha} \left(e^{-i(k+k')x}\theta(-x) + e^{i(k-k')x}\theta(x) \right) +$$

$$+\theta(k') \frac{-\alpha}{2ik'+\alpha} \left(e^{i(k+k')x}\theta(-x) + e^{i(k-k')x}\theta(x) \right) + \theta(k)\theta(k') \frac{\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)} \left[e^{-i(k-k')x}\theta(-x) + e^{i(k-k')x}\theta(x) \right] +$$

$$+\theta(-k) \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} \left(e^{-i(k+k')x}\theta(x) + e^{i(k-k')x}\theta(-x) \right) + \theta(-k') \frac{\alpha}{2ik'-\alpha} \left(e^{i(k+k')x}\theta(x) + e^{i(k-k')x}\theta(-x) \right) +$$

$$+\theta(-k)\theta(-k') \frac{\alpha^2}{(2ik+\alpha)(\alpha-2ik')} \left[e^{-i(k-k')x}\theta(x) + e^{i(k-k')x}\theta(-x) \right] +$$

$$+\theta(k)\theta(-k') \frac{\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)} \left[e^{-i(k+k')x}\theta(-x) + e^{i(k+k')x}\theta(x) \right] +$$

$$+\theta(-k)\theta(k') \frac{\alpha^2}{(\alpha+2ik')(2ik+\alpha)} \left[e^{i(k+k')x}\theta(-x) + e^{-i(k+k')x}\theta(x) \right] \Big] =$$

$$= 2\pi\delta(k-k') + \int_0^{\infty} dx \Big[\theta(k) \frac{\alpha}{2ik-\alpha} \left(e^{i(k+k')x} + e^{i(k-k')x} \right) +$$

$$+\theta(k') \frac{-\alpha}{2ik'+\alpha} \left(e^{-i(k+k')x} + e^{i(k-k')x} \right) + \theta(k)\theta(k') \frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)} e^{i(k-k')x} +$$

$$+\theta(-k) \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} \left(e^{-i(k+k')x} + e^{-i(k-k')x} \right) + \theta(-k') \frac{\alpha}{2ik'-\alpha} \left(e^{i(k+k')x} + e^{-i(k-k')x} \right) +$$

$$+\theta(-k)\theta(-k') \frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(\alpha-2ik')} e^{-i(k-k')x} +$$

$$+\theta(k)\theta(-k') \frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)} e^{i(k+k')x} + \theta(-k)\theta(k') \frac{2\alpha^2}{(\alpha+2ik')(2ik+\alpha)} e^{-i(k+k')x} \Big] =$$

$$= 2\pi\delta(k-k') + \int_0^{\infty} dx \Big[\frac{2\pi\alpha}{2ik-\alpha} + \frac{-2\pi\alpha}{2ik+\alpha} + \frac{4\pi\alpha^2}{4k^2+\alpha^2} + \theta(k) \frac{\alpha}{2ik-\alpha} \left(\frac{i}{k+k'} + \frac{i}{k-k'} \right) +$$

$$+\theta(k') \frac{-\alpha}{2ik'+\alpha} \left(\frac{-i}{k+k'} + \frac{i}{k-k'} \right) + \theta(k)\theta(k') \frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)} \frac{i}{k-k'} +$$

$$+\theta(-k) \frac{-\alpha}{2ik+\alpha} \left(\frac{-i}{k+k'} + \frac{-i}{k-k'} \right) + \theta(-k') \frac{\alpha}{2ik'-\alpha} \left(\frac{i}{k+k'} + \frac{-i}{k-k'} \right) +$$

$$+\theta(-k)\theta(-k') \frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(\alpha-2ik')} \frac{-i}{k-k'} +$$

$$+\theta(k)\theta(-k') \frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)} \frac{i}{k+k'} + \theta(-k)\theta(k') \frac{2\alpha^2}{(\alpha+2ik')(2ik+\alpha)} \frac{-i}{k+k'} \Big].$$

Так же, как и для уже посчитанных внедиагональных компонент, покажем, что в последнем выражении остается только член с $\delta(k-k')$:

1) Случай $\quad k>0, k'>0:$

$$\frac{\alpha}{2ik-\alpha} \left(\frac{i}{k-k'} + \frac{i}{k+k'} \right) + \frac{-\alpha}{2ik'+\alpha} \left(\frac{i}{k-k'} + \frac{-i}{k+k'} \right) + \frac{2\alpha^2}{(\alpha-2ik)(2ik'+\alpha)} \frac{i}{k-k'} =$$

$$= \frac{2i\alpha}{(2ik-\alpha)(2ik'+\alpha)(k^2-k'^2)} [k(2ik'+\alpha) - k'(2ik-\alpha) - \alpha(k+k')] = 0;$$

2) Случай $\quad k>0, k'<0:$

$$\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{2\alpha^2}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)}\frac{i}{k+k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik-\alpha)(2ik'-\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'-\alpha)-k'(2ik-\alpha)+\alpha(k-k')]=0;$$

3) Случай $\quad k<0, k'>0:$

$$\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(\frac{i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)}\frac{-i}{k+k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik+\alpha)(2ik'+\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'+\alpha)-k'(2ik+\alpha)-\alpha(k-k')]=0;$$

4) Случай $\quad k<0, k'<0:$

$$\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{-i}{k+k'}\right)+\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(\frac{-i}{k-k'}+\frac{i}{k+k'}\right)+\frac{-2\alpha^2}{(2ik+\alpha)(2ik'-\alpha)}\frac{-i}{k-k'}=$$

$$=\frac{2i\alpha}{(2ik+\alpha)(2ik'-\alpha)(k^2-k'^2)}[k(2ik'-\alpha)-k'(2ik+\alpha)+\alpha(k+k')]=0.$$

d) Член при $a_k^+a_{k'}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxh^*(k,x)h(k',x)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}dxh(k,x)h^*(k',x)\right\}^*=(2\pi\delta(k-k'))^*=2\pi\delta(k-k').$$

Значит, гамильтониан теории имеет стандартный вид и равен $H=\int\frac{dk}{2\pi}\frac{|k|}{2}\left[\hat{a}_k\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+\hat{a}_k\right].$

5 Моды для движущегося зеркала

5.1 Моды для зеркала, движущегося с постоянной скоростью

Для удобства в дальнейшем перепишем найденные в пункте (2) моды в переменных $u = t - x,\ v = t + x$ (т.е. $t = \frac{u+v}{2},\ x = \frac{v-u}{2}$). Обозначим $g(k,t,x) = e^{-i|k|t}h(k,x)$, тогда поле запишется в виде:

$$\varphi(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi}\left\{A_k e^{-i|k|t}h(k,x)\hat{a}_k + h.c.\right\} = \int \frac{dk}{2\pi}\left\{A_k g(k,t,x)\hat{a}_k + h.c.\right\};$$

а моды в новых координатах будут иметь вид:

$$g_0(k,u,v) = \theta(k)\Big\{e^{-iku} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\theta[-x]e^{-ikv} + \theta[x]e^{-iku}\right)\Big\} +$$
$$+\,\theta(-k)\Big\{e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\theta[-x]e^{ikv} + \theta[x]e^{iku}\right)\Big\}. \qquad (3)$$

В этом пункте получим моды для зеркала, движущегося с постоянной скоростью $-\beta$, т.е решающие уравнение:

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' + \alpha\,\delta\,(x+\beta t)\,\varphi(t,x) = 0. \qquad (4)$$

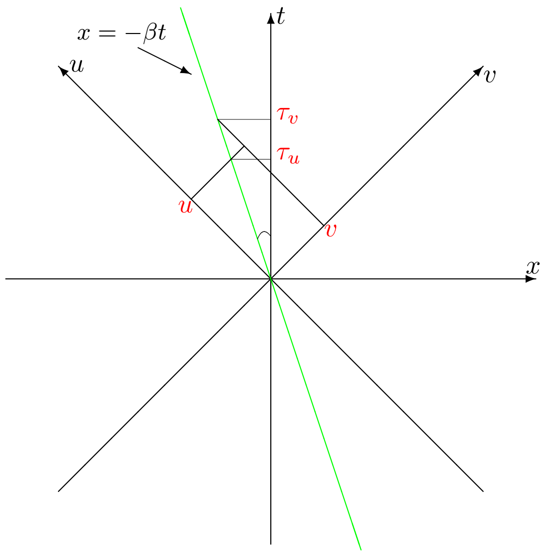

Рис. 5.1: Движущееся с постоянной скоростью зеркало. Здесь $\tau_u = \frac{u}{1+\beta}$; $\tau_v = \frac{v}{1-\beta}$.

Моды в этом случае должны:

1) решать уравнение (4) (т.е. удовлетворять условиям сшивки при переходе через зеркало, а везде вне зеркала решать свободное волновое уравнение);

2) удовлетворять каноническому коммутационному соотношению (проверено в следующем пункте);

3) удовлетворять соотношению на сумму квадратов модулей коэффициентов отражения и прохождения (следует из уравнения движения);

4) в пределе $\alpha \to 0$ давать решение свободного волнового уравнения, а в пределе $\beta \to 0$ давать уже полученное решение для стоячей стенки.

Получим моды бустом Лоренца, поскольку этот способ позволяет сразу получить условия сшивки при переходе через зеркало.

Совершим лоренцев буст $x' = \frac{\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $t' = \frac{t+\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$, чтобы свести уравнение (4) к уравнению с неподвижным зеркалом (о замене переменных в дельта-функции см. Приложение (8)):

$$(\partial_t'^2 - \partial_x'^2)\varphi(t',x') = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\delta(x')\,\varphi(t',x').$$

Имеем, что $x' = 0$ - траектория зеркала, а $t' = 0$ - перпендикуляр к траектории зеркала (см. Рис. 5.1).

Условия сшивки в координатах (t',x') такие же, как и для неподвижного зеркала, но с заменой α на $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$, т.е.

$$g(+0)=g(-0)=g(0); \quad g'_{x'}(+0)-g'_{x'}(-0)=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\,g(0). \tag{5}$$

Решения в координатах (t',x') имеют уже найденный в предыдущем пункте вид:

$$g_0(k,t',x')=\theta(k)\Big\{e^{-ik(t'-x')}+\frac{\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha}\Big(\theta[-x']e^{-ik(t'+x')}+\theta[x']e^{-ik(t'-x')}\Big)\Big\}+$$

$$+\theta(-k)\Big\{e^{ik(t'+x')}+\frac{-\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha}\Big(\theta[-x']e^{ik(t'+x')}+\theta[x']e^{ik(t'-x')}\Big)\Big\}=$$

$$=\theta(k)\Big\{e^{-iku'}+\frac{\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha}\Big(\theta[-x']e^{-ikv'}+\theta[x']e^{-iku'}\Big)\Big\}+$$

$$+\theta(-k)\Big\{e^{ikv'}+\frac{-\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha}\Big(\theta[-x']e^{ikv'}+\theta[x']e^{iku'}\Big)\Big\}.$$

Вернемся к переменным (t,x), обратным бустом Лоренца: $x=\frac{x'-\beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $t=\frac{t'-\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, т.е. $u=u'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, v=v'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, и получим моды для движущегося с постоянной скоростью зеркала:

$$g_\beta(k,u,v)=\theta(k)\left[e^{-iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}+\frac{\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha}\left(e^{-ikv\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}\theta[-(x+\beta t)]+e^{-iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}\theta[x+\beta t]\right)\right]+$$

$$+\theta(-k)\left[e^{ikv\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}+\frac{-\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha}\left(e^{iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}\theta[x+\beta t]+e^{ikv\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}\theta[-(x+\beta t)]\right)\right]. \tag{6}$$

Проверим, что для них выполняются условия сшивки (5) ($\partial_{x'}=\frac{\partial_x-\beta\partial_t}{\sqrt{1-\beta^2}}$):

$$g(+0)=g(-0)=g(0)=\theta(k)\frac{2ik\sqrt{1-\beta^2}}{2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha}e^{-iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}+\theta(-k)\frac{2ik\sqrt{1-\beta^2}}{2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha}e^{iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}};$$

$$g'_{x'}(+0)-g'_{x'}(-0)=\theta(k)\frac{\alpha\,2ik\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{(2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha)\sqrt{1-\beta^2}}e^{-iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}+\theta(-k)\frac{\alpha\,2ik\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{(2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha)\sqrt{1-\beta^2}}e^{iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}=$$

$$=\theta(k)\frac{2ik\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}-\alpha}e^{-iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}+\theta(-k)\frac{2ik\alpha}{2ik\sqrt{1-\beta^2}+\alpha}e^{iku\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}g(0).$$

Таким образом, найденные моды удолетворяют условиям сшивки, а значит, решают уравнение (4). Однако коэффициенты мод (6) зависят от скорости зеркала, поэтому напрямую обобщить их на движущееся по произвольной траектории зеркало не получится. В связи с этим заменим в полученных модах k на $k'=k\sqrt{1-\beta^2}$, тогда моды будут иметь следующий вид:

$$g_\beta(k',u,v)=\theta(k')\left[e^{\frac{-ik'u}{1+\beta}}+\frac{\alpha}{2ik'-\alpha}\left(e^{\frac{-ik'v}{1-\beta}}\theta[-(x+\beta t)]+e^{\frac{-ik'u}{1+\beta}}\theta[x+\beta t]\right)\right]+$$

$$+\theta(-k')\left[e^{\frac{ik'v}{1-\beta}}+\frac{-\alpha}{2ik'+\alpha}\left(e^{\frac{ik'u}{1+\beta}}\theta[x+\beta t]+e^{\frac{ik'v}{1-\beta}}\theta[-(x+\beta t)]\right)\right]; \tag{7}$$

а условия сшивки станут такими:

$$g(+0)=g(-0)=g(0); \quad (\partial_x-\beta\partial_t)(g|_{+0}-g|_{-0})=\alpha g(0). \tag{8}$$

Отметим, что данные моды переходят в гармоники для неподвижного зеркала при стремлении скорости зеркала к нулю, как и должно быть.

5.2 Моды для движущегося произвольным образом зеркала

Моды для зеркала, движущегося по произвольной мировой линии, решают следующее уравнение ($z(t)$ - некоторая времениподобная кривая, траектория зеркала):

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' + \alpha \, \delta \left(x - z(t) \right) \, \varphi(t, x) = 0 \tag{9}$$

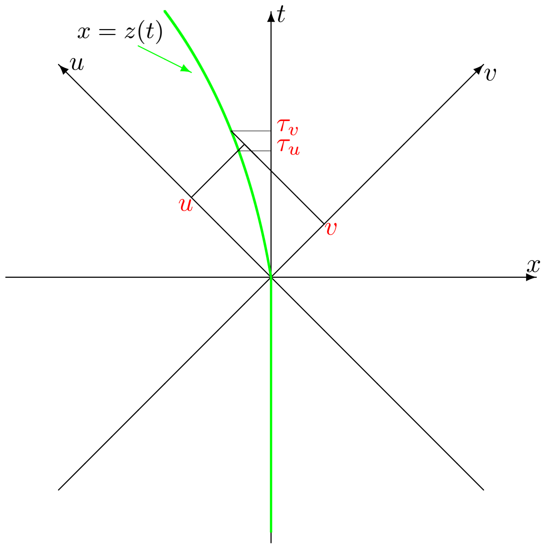

Рис. 5.2: Движущееся по произвольной траектории зеркало. Здесь τ_u решает уравнение $\tau_u - z(\tau_u) = u$, а τ_v - уравнение $\tau_v + z(\tau_v) = v$.

Моды в этом случае могут быть найдены аналогично модам для идеального зеркала рассмотрением ломаной траектории, которая в пределе дает нужную кривую [1]. Однако мы, сравнивая решения из [1] - [4], полученные для различных траекторий идеального зеркала, по аналогии обобщим моды для движущегося с постоянной скоростью зеркала и покажем, что они решают уравнение (9):

$$g_\beta(k, u, v) = \theta(k) \left[e^{-ik\tau_u} + \frac{\alpha}{2ik - \alpha} \left(e^{-ik\tau_v} \theta[-(x - z(t))] + e^{-ik\tau_u} \theta[x - z(t)] \right) \right] +$$

$$+ \theta(-k) \left[e^{ik\tau_v} + \frac{-\alpha}{2ik + \alpha} \left(e^{ik\tau_u} \theta[x - z(t)] + e^{ik\tau_v} \theta[-(x - z(t))] \right) \right],$$

где $\tau_u - z(\tau_u) = u; \quad \tau_v + z(\tau_v) = v; \quad \tau_v' = \frac{1}{1 - \beta(\tau_v)}; \quad \tau_u' = \frac{1}{1 + \beta(\tau_u)}$.

Полученные моды - решения, если везде вне зеркала они решают свободное волновое уравнение, а при переходе через зеркало в направлении, перпендикулярном движению зеркала в каждой его точке, для них выполнены условия сшивки. В первом можно убедиться непосредственно, а второе доказывается проверкой соотношений (8) аналогично предыдущему пункту. Геометрический смысл полученных функций τ_u и τ_v показан на Рис. 5.2. Заметим, что моды снова в пределе $\alpha \to \infty$ решают задачу о движущемся по траектории $z(t)$ идеальном зеркале. Таким образом, моды для зеркала, движущегося по произвольной траектории, найдены. Проверка коммутационного соотношения и подсчет вакуумного среднего потока энергии для них приведены в следующем разделе.

6 Исследование мод в случае зеркала, движущегося по произвольной траектории

6.1 Коммутационное соотношение

Для найденных гармоник произвольным образом движущегося зеркала посчитаем коммутационное соотношение (как обычно, $[a_k, a^+_{k'}] = 2\pi\delta(k-k')$, $[a^+_k, a^+_{k'}] = [a_k, a_{k'}] = 0$). Для этого сначала перепишем коммутатор через найденные в предыдущем разделе моды:

$$\varphi(t,x) = \int \frac{dk}{2\pi} A_k \left\{ g(k,t,x)\hat{a}_k + g^*(k,t,x)\hat{a}^+_k \right\};$$

$$\pi(t,y) = \partial_t\varphi(t,y) = \int \frac{dk'}{2\pi} A_{k'} \left\{ \partial_t g(k',t,y)\hat{a}_{k'} + \partial_t g^*(k',t,y)\hat{a}^+_{k'} \right\};$$

$$[\varphi(t,x), \pi(t,y)] = \int \frac{dk}{2\pi} A^2_k [g(k,t,x)\partial_t g^*(k,t,y) - g^*(k,t,x)\partial_t g(k,t,y)];$$

Теперь выпишем моды и все необходимые для расчета его производные:

$$g(k,u^x,v^x) = \theta(k)\left[e^{-ik\tau^x_u} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ik\tau^x_v}\theta[-(x-z(t))] + e^{-ik\tau^x_u}\theta[x-z(t)]\right)\right] +$$

$$+\theta(-k)\left[e^{ik\tau^x_v} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik\tau^x_u}\theta[x-z(t)] + e^{ik\tau^x_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$\partial_t g^*(k,u^y,v^y) = ik\theta(k)\left[\frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{ik\tau^y_u} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{ik\tau^y_v}\theta[-(y-z(t))] + \frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{ik\tau^y_u}\theta[y-z(t)]\right)\right] +$$

$$+i(-k)\theta(-k)\left[\frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{-ik\tau^y_v} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{-ik\tau^y_u}\theta[y-z(t)] + \frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{-ik\tau^y_v}\theta[-(y-z(t))]\right)\right];$$

$$-\partial_t g(k,u^y,v^y) = ik\theta(k)\left[\frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{-ik\tau^y_u} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{-ik\tau^y_v}\theta[-(y-z(t))] + \frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{-ik\tau^y_u}\theta[y-z(t)]\right)\right] +$$

$$+i(-k)\theta(-k)\left[\frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{ik\tau^y_v} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta(\tau^y_u)}e^{ik\tau^y_u}\theta[y-z(t)] + \frac{1}{1-\beta(\tau^y_v)}e^{ik\tau^y_v}\theta[-(y-z(t))]\right)\right];$$

$$g^*(k,u^x,v^x) = \theta(k)\left[e^{ik\tau^x_u} + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik\tau^x_v}\theta[-(x-z(t))] + e^{ik\tau^x_u}\theta[x-z(t)]\right)\right] +$$

$$+\theta(-k)\left[e^{-ik\tau^x_v} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ik\tau^x_u}\theta[x-z(t)] + e^{-ik\tau^x_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

И, наконец, подставим перечисленные компоненты поля и производных в выражение для коммутатора. Вычисление же проведем аналогично случаю коммутатора для неподвижного зеркала (т.е. рассмотрим 4 случая положений точек (t,x) и (t,y), $z(t)$ - фиксировано при данном t).

1. Случай $x, y > z(t)$.

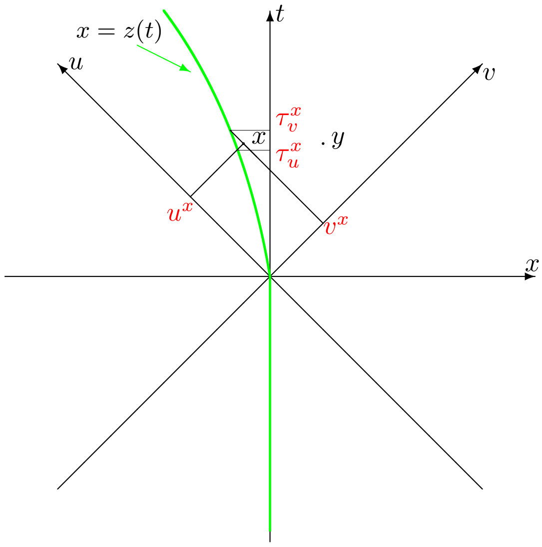

Рис. 6.1: Произвольная мировая линия зеркала, случай 1. Разница $\tau_v^x - \tau_u^y$ положительна для любых событий с равными временами t.

$$[\varphi(t,x),\pi(t,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{4k^2}{4k^2+\alpha^2}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_u^y-\tau_u^x)} + \frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_v^y-\tau_v^x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_u^x-\tau_v^y)} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_v^x-\tau_u^y)} + \frac{\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_u^y-\tau_u^x)}\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}\delta[\tau_u^y-\tau_u^x] + \frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}\delta[\tau_v^y-\tau_v^x]\right] +$$

$$+ \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_u^x-\tau_v^y)} + \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_v^x-\tau_u^y)} = i\delta(x-y).$$

Последние два интеграла в коммутаторе зануляются по следующей причине. Поскольку время t рассматриваемых событий одинаково, для τ_u и τ_v выполнены следующие неравенства (непосредственно следуют из Рис. 6.1):

$$\tau_u^x < \tau_v^y, \quad \tau_u^y < \tau_v^y; \quad \Longrightarrow$$

в интеграле $\int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_u^x-\tau_v^y)}$ замыкать контур нужно снизу, а единственный полюс подынтегрального выражения находится сверху. Аналогично в интеграле $\int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_v^x-\tau_u^y)}$ контур замыкается сверху, а полюс - снизу. Аналогично первому случаю вычисляются три других.

2. Случай $x, y < z(t)$.

$$[\varphi(t,x),\pi(t,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\frac{4k^2}{4k^2+\alpha^2}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_v^y-\tau_v^x)} + \frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik(\tau_u^y-\tau_u^x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{-ik(\tau_u^x-\tau_v^y)} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{-ik(\tau_v^x-\tau_u^y)} + \frac{\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_v^y-\tau_v^x)}\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}\delta[\tau_u^y-\tau_u^x] + \frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}\delta[\tau_v^y-\tau_v^x]\right] +$$

$$+ \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{-ik(\tau_u^x-\tau_v^y)} + \int \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{-ik(\tau_v^x-\tau_u^y)} = i\delta(x-y).$$

В этом случае для любых $(x,\, y)$ $\tau_u^{x,y} - \tau_v^{x,y} > 0$.

3. Случай $x < z(t), \quad y > z(t)$.

$$[\varphi(t,x),\pi(t,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\left(e^{-ik\tau_u^x} + \frac{\alpha}{2ik-\alpha}e^{-ik\tau_v^x}\right)\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}\frac{2ik}{2ik+\alpha}e^{ik\tau_u^y} + \right.$$

$$+\frac{2ik}{2ik+\alpha}e^{-ik\tau_u^y}\left(\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{-ik\tau_v^y}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{-ik\tau_u^y}\right)=$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}\delta[\tau_u^y-\tau_u^x]+\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}\delta[\tau_v^y-\tau_v^x]\right]+$$

$$+\int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left[\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_v^x-\tau_v^y)}+\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{-ik(\tau_u^x-\tau_u^y)}\right]=i\delta(x-y).$$

В этом случае $\tau_v^x<\tau_v^y$ и $\tau_u^x>\tau_u^y$.

4. Случай $x>z(t),\quad y<z(t)$.

$$[\varphi(t,x),\pi(t,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\left[\left(e^{ik\tau_v^x}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}e^{ik\tau_u^x}\right)\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}\frac{2ik}{2ik-\alpha}e^{-ik\tau_v^y}+\right.$$

$$\left.+\frac{2ik}{2ik-\alpha}e^{-ik\tau_u^x}\left(\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{ik\tau_u^y}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik\tau_v^y}\right)\right]=$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}\delta[\tau_u^y-\tau_u^x]+\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}\delta[\tau_v^y-\tau_v^x]\right]+$$

$$+\int\frac{dk}{2\pi}\frac{i}{2}\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left[\frac{1}{1-\beta(\tau_v^y)}e^{ik(\tau_v^x-\tau_v^y)}+\frac{1}{1+\beta(\tau_u^y)}e^{-ik(\tau_u^x-\tau_u^y)}\right]=i\delta(x-y).$$

В этом случае $\tau_v^x>\tau_v^y$ и $\tau_u^x<\tau_u^y$.

Таким образом, получаем, что каноническое коммутационное соотношение для поля и сопряженного момента для движущегося по произвольной траектории неидеального зеркала выполняется.

6.2 Вакуумное среднее смешанной компоненты тензора энергии-импульса

Для расчета вакуумного среднего потока энергии снова выпишем все необходимые компоненты:

$$g(k,u^x,v^x)=\theta(k)\left[e^{-ik\tau_u^x}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ik\tau_v^x}\theta[-(x-z(t))]+e^{-ik\tau_u^x}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+\theta(-k)\left[e^{ik\tau_v^x}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik\tau_u^x}\theta[x-z(t)]+e^{ik\tau_v^x}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$g^*(k,u^x,v^x)=\theta(k)\left[e^{ik\tau_u^x}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(e^{ik\tau_v^x}\theta[-(x-z(t))]+e^{ik\tau_u^x}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+\theta(-k)\left[e^{-ik\tau_v^x}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(e^{-ik\tau_u^x}\theta[x-z(t)]+e^{-ik\tau_v^x}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$\partial_t g(k,u,v)=-ik\theta(k)\left[\tau_u'e^{-ik\tau_u}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_v'e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]+\tau_u'e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+ik\theta(-k)\left[\tau_v'e^{ik\tau_v}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_u'e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]+\tau_v'e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$\partial_x g^*(k,u,v)=-ik\theta(k)\left[\tau_u'e^{ik\tau_u}+\frac{\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_v'e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]-\tau_u'e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+i(-k)\theta(-k)\left[\tau_v'e^{-ik\tau_v}+\frac{-\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_u'e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]-\tau_v'e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$\partial_x g(k,u,v)=ik\theta(k)\left[\tau_u'e^{-ik\tau_u}+\frac{-\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_v'e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]-\tau_u'e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+ik\theta(-k)\left[\tau_v'e^{ik\tau_v}+\frac{\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_u'e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]-\tau_v'e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right];$$

$$\partial_t g^*(k,u,v)=ik\theta(k)\left[\tau_u'e^{ik\tau_u}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_v'e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]+\tau_u'e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]+$$

$$+i(-k)\theta(-k)\left[\tau_v' e^{-ik\tau_v}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_u' e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]+\tau_v' e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right].$$

Запишем поле через моды и учтем, что среднее импульса, которое мы хотим посчитать, может быть расходящейся величиной. Для устранения расходимостей и расчета среднего могут быть использованы различные методы регуляризации, которые, вообще говоря, должны давать одни и те же результаты. Здесь, следуя [4], воспользуемся методом раздвижки точек ($\langle 0|a_k\, a_{k'}^+|0\rangle = 2\pi\delta(k-k')$):

$$\langle T_{tx}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\langle \partial_t\varphi(t,x)\partial_x\varphi(t+i\epsilon,x)+\partial_x\varphi(t,x)\partial_t\varphi(t+i\epsilon,x)\rangle =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\int\frac{dk}{2\pi}\frac{dk'}{2\pi}A_kA_{k'}\langle\partial_t[g_ka_k+g_k^*a_k^+](t,x)\partial_x[g_{k'}a_{k'}+g_{k'}^*a_{k'}^+](t+i\epsilon,x)+$$

$$+\partial_x[g_ka_k+g_k^*a_k^+](t,x)\partial_t[g_{k'}a_{k'}+g_{k'}^*a_{k'}^+](t+i\epsilon,x)\rangle =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}A_k^2[\partial_tg_k(t,x)\partial_xg_k^*(t+i\epsilon,x)+\partial_xg_k(t,x)\partial_tg_k^*(t+i\epsilon,x)] =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}(-k)\theta(k)\Bigg\{\left[\tau_u' e^{-ik\tau_u}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_v' e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]+\tau_u' e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_{u+i\epsilon}' e^{ik\tau_{u+i\epsilon}}+\frac{\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_{v+i\epsilon}' e^{ik\tau_{v+i\epsilon}}\theta[-(x-z(t+i\epsilon))]-\tau_{u+i\epsilon}' e^{ik\tau_{u+i\epsilon}}\theta[x-z(t+i\epsilon)]\right)\right]+$$

$$+\left[\tau_u' e^{-ik\tau_u}+\frac{-\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_v' e^{-ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]-\tau_u' e^{-ik\tau_u}\theta[x-z(t)]\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_{u+i\epsilon}' e^{ik\tau_{u+i\epsilon}}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_{v+i\epsilon}' e^{ik\tau_{v+i\epsilon}}\theta[-(x-z(t+i\epsilon))]+\tau_{u+i\epsilon}' e^{ik\tau_{u+i\epsilon}}\theta[x-z(t+i\epsilon)]\right)\right]\Bigg\}+$$

$$+(-k)\theta(-k)\Bigg\{\left[\tau_v' e^{ik\tau_v}+\frac{-\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_u' e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]+\tau_v' e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_{v+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{v+i\epsilon}}+\frac{-\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_{u+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{u+i\epsilon}}\theta[x-z(t+i\epsilon)]-\tau_{v+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{v+i\epsilon}}\theta[-(x-z(t+i\epsilon))]\right)\right]+$$

$$+\left[\tau_v' e^{ik\tau_v}+\frac{\alpha}{2ik+\alpha}\left(\tau_u' e^{ik\tau_u}\theta[x-z(t)]-\tau_v' e^{ik\tau_v}\theta[-(x-z(t))]\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_{v+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{v+i\epsilon}}+\frac{\alpha}{2ik-\alpha}\left(\tau_{u+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{u+i\epsilon}}\theta[x-z(t+i\epsilon)]+\tau_{v+i\epsilon}' e^{-ik\tau_{v+i\epsilon}}\theta[-(x-z(t+i\epsilon))]\right)\right]\Bigg\} =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}(-k)\Bigg[\theta(k)\Bigg\{2\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}+$$

$$+\frac{2\alpha}{2ik-\alpha}\left(\cancel{\tau_{u+i\epsilon}'\tau_v' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]}+\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]\right)+$$

$$+\frac{2\alpha}{2ik+\alpha}\left(\cancel{\tau_{v+i\epsilon}\tau_u' e^{ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[-(x-z(t))]}-\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]\right)+$$

$$+\frac{-2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]-\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]\right)\Bigg\}+$$

$$+\theta(-k)\Bigg\{2\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}+\frac{2\alpha}{2ik-\alpha}\left(\cancel{\tau_{u+i\epsilon}'\tau_v' e^{-ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[x-z(t)]}+\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]\right)+$$

$$+\frac{2\alpha}{2ik+\alpha}\left(\cancel{\tau_{v+i\epsilon}'\tau_u' e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]}-\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]\right)+$$

$$+\frac{-2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{-ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]-\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]\right)\Bigg\}\Bigg] =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}(-k)\Bigg[\theta(k)\Bigg\{2\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}+$$

$$+\frac{-2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\tau_{v+i\epsilon}'\tau_v' e^{ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]+\tau_{u+i\epsilon}'\tau_u' e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]\right)\Bigg\}+$$

$$+\theta(-k)\Bigg\{2\tau'_{v+i\epsilon}\tau'_v e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}+\frac{-2\alpha^2}{4k^2+\alpha^2}\left(\tau'_{u+i\epsilon}\tau'_u e^{-ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\theta[x-z(t)]+\tau'_{v+i\epsilon}\tau'_v e^{-ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}\theta[-(x-z(t))]\right)\Bigg\}\Bigg]=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}k\Bigg\{\tau'_{v+i\epsilon}\tau'_v e^{ik(\tau_{v+i\epsilon}-\tau_v)}-\tau'_{u+i\epsilon}\tau'_u e^{ik(\tau_{u+i\epsilon}-\tau_u)}\Bigg\}=I \tag{10}$$

Полученные в выражении для вакуумного среднего интегралы в точности совпадают с интегралом, возникающим в соответствующем вычислении в работах [1] - [3]. Повторим уже полученный результат ($f(w)$ - некоторая функция переменной w).

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}kf'(w+i\epsilon)f'(w)e^{ik[f(w+i\epsilon)-f(w)]}=\frac{-f'(w+i\epsilon)f'(w)}{2\pi[f(w+i\epsilon)-f(w)]^2}=$$

$$=\frac{-\left(f'(w)+f''(w)i\epsilon+\frac{f'''(w)}{2}(-\epsilon^2)+o(\epsilon^2)\right)f'(w)}{2\pi\left[f'(w)i\epsilon+\frac{f''(w)}{2}(-\epsilon^2)+\frac{f'''(w)}{6}(-i\epsilon^3)+o(\epsilon^3)+o(\epsilon^2)\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\epsilon^2}\left(1+\frac{f''(w)}{f'(w)}i\epsilon+\frac{f'''(w)}{2f'(w)}(-\epsilon^2)+o(\epsilon^2)\right)\left(1-\frac{f''(w)}{f'(w)}i\epsilon+\frac{f'''(w)}{3f'(w)}\epsilon^2+\frac{3}{4}\left(\frac{f''(w)}{f'(w)}\right)^2(-\epsilon^2)+o(\epsilon^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\epsilon^2}+\frac{1}{12\pi}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{f''(w)}{f'(w)}\right)^2-\frac{f'''(w)}{f'(w)}\right].$$

Следовательно, вакуумное среднее импульса конечно и равно:

$$I=\frac{1}{12\pi}\left[\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{\tau''_v}{\tau'_v}\right)^2-\left(\frac{\tau''_u}{\tau'_u}\right)^2\right\}-\left\{\frac{\tau'''_v}{\tau'_v}-\frac{\tau'''_u}{\tau'_u}\right\}\right].$$

Тривиальным следствием полученной формулы является исчезновение потока энергии для неподвижного и движущегося с постоянной скоростью зеркал. Аналогично работам [1] - [3] можно переписать T_{tx} в терминах скорости зеркала и ее производных. Однако в отличие от случая идеального зеркала, при движении неидельного зеркала с постоянным ускорением поток энергии не зануляется. Также стоит отметить, что следствием данной формулы является то, что излучение от движущегося с ускорением зеркала не зависит от коэффициента пропускания α, а зависит лишь от движения зеркала.

7 Заключение

В данной работе были выполнены следующие шаги:

- найдены моды разложения скалярного поля в случае зеркала, движущегося по произвольной траектории;
- для найденных мод проверено выполнение коммутационного соотношения на поле и сопряженный импульс;
- посчитано вакуумное среднее смешанной компоненты тензора энергии-импульса

$$\langle T_{tx}\rangle = \frac{1}{12\pi}\left[\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{\tau_v''}{\tau_v'}\right)^2 - \left(\frac{\tau_u''}{\tau_u'}\right)^2\right\} - \left\{\frac{\tau_v'''}{\tau_v'} - \frac{\tau_u'''}{\tau_u'}\right\}\right]$$

  и показано, что оно не равно нулю, если зеркало движется ускоренно, т.е. ускоренное зеркало излучает частицы.

Следствием расчетов является то, что в случае неидеального зеркала отсутствуют проблемы, возникающие в задаче идеального зеркала, а значит, полученные результаты имеют более осмысленную физическую интерпретацию. В дальнейшем планируется рассмотрение конкретных примеров движения неидеального зеркала, а также развитие теории с взаимодействием $\lambda\varphi^4$.

8 Приложение: замена переменных в обобщенных функциях

Поскольку в нашей задаче повсеместно возникают обобщенные функции - функционалы, действующие на пространстве пробных функций, в данном разделе мы попробуем привести корректные определения для этих функций, встречающихся и в уравнениях, и в модах. Везде ниже $f(u,v)$ - некоторая пробная функция.
Обобщенную функцию $\delta(x)$ определим в координатах u, v так:

$$\langle\delta(x), f(u,v)\rangle = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} f(u,v) =$$

$$= \lim_{2\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv\ 2\frac{2\epsilon}{(v-u)^2+4\epsilon^2} f(u,v) = \langle 2\delta(v-u), f(u,v)\rangle.$$

Функция $\theta[\pm x]$, возникающая в модах для неподвижного зеркала, - обобщенная функция, действующая на пробные по правилу ($\theta[0]=\frac{1}{2}$):

$$\langle\theta[\pm x], f(u,v)\rangle = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{1}{1+e^{\mp 2kx}} f(u,v) = \lim_{\frac{k}{2}\to+\infty}\int\int dudv\ \frac{1}{1+e^{\mp k(v-u)}} f(u,v) = \langle\theta[v-u], f(u,v)\rangle.$$

Дельта-функция в случае движущегося с постоянной скоростью зеркала определена следующим образом ($\gamma = \frac{1-\beta}{1+\beta}$):

$$\langle\delta(x+\beta t), f(u,v)\rangle = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\epsilon}{(x+\beta t)^2+\epsilon^2} f(u,v) =$$

$$= \lim_{2\epsilon\to+0}\int\int du\, dv\ 2\frac{2\epsilon}{((1+\beta)v-(1-\beta)u)^2+4\epsilon^2} f(u,v) = \langle 2\delta((1+\beta)v-(1-\beta)u), f(u,v)\rangle =$$

$$= \lim_{\frac{2\epsilon}{1+\beta}\to+0}\int\int du\, dv\ 2(1+\beta)\frac{\frac{2\epsilon}{1+\beta}}{(v-\gamma u)^2+(\frac{4\epsilon^2}{(1+\beta)^2}} f(u,v) = \langle\frac{2}{1+\beta}\delta(v-\gamma u), f(u,v)\rangle.$$

В общем случае можно показать, что замена переменных в дельта-функции совершается стандартным образом: $\delta[\phi(x)] = \sum_i \frac{\delta[x-x^i]}{|\phi'(x^i)|}$, где x_i - как обычно нули функции $\phi(x)$.
Функция Хевисайда преобразуется еще проще (в координаты (u, v)):

$$\langle\theta[\pm(x+\beta t)], f(u,v)\rangle = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{1}{1+e^{\mp 2k(x+\beta t)}} f(u,v) =$$

$$= \lim_{k/2\to\infty} \int\int du\, dv\, \frac{1}{1+e^{\mp k((1+\beta)v-(1-\beta)u)}} f(u,v) = \langle \theta[\pm((1+\beta)v-(1-\beta)u)], f(u,v)\rangle =$$
$$= \lim_{(1+\beta)k/2\to+\infty} \int\int du\, dv\, \frac{1}{1+e^{\mp k(1+\beta)(v-\gamma u)}} f(u,v) = \langle \theta[\pm(v-\gamma u)], f(u,v)\rangle.$$

Аналогично обобщается определение тета- и дельта-функций для произвольной траектории.

Интересно посмотреть, что дает операция дифференцирования в пространстве обобщенных функций:

$$\langle \partial_u\partial_v \varphi(u), f(u,v)\rangle = \int\int du\, dv\, \varphi(u)\partial_u\partial_v\, f(u,v) \overset{\text{дважды по частям}}{=} 0 = \langle \partial_u\partial_v\varphi(v), f(u,v)\rangle;$$

$$\langle \partial_u\partial_v(\theta[x]\varphi(u)), f(u,v)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} du\varphi(u) \int_u^{+\infty} dv\, \partial_v\partial_u\, f(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\varphi(u)\partial_u\, f(u,v)\Big|_u^{+\infty} =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} du\varphi(u)\partial_u\, f(u,v=u) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\varphi'(u)\, f(u,v=u) = \langle \delta(v-u)\varphi'(u), f(u,v)\rangle = \langle \frac{1}{2}\delta(x)\varphi'(u), f(u,v)\rangle;$$
$$\langle \partial_u\partial_v(\theta[-x]\varphi(v)), f(u,v)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dv\varphi(v) \int_v^{+\infty} du\, \partial_u\partial_v\, f(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv\varphi(v)\partial_v\, f(u,v)\Big|_v^{+\infty} =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} dv\varphi(v)\partial_v\, f(u=v,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv\varphi'(v)\, f(u=v,v) = \langle \delta(v-u)\varphi'(v), f(u,v)\rangle = \langle \frac{1}{2}\delta(x)\varphi'(v), f(u,v)\rangle.$$

Т.е. имеем, что результат "честного" дифференцирования обобщенных функций совпадает с результатом их формального дифференцирования:

$$\partial_u\partial_v\varphi(u) = \partial_u\partial_v\varphi(v) = 0;$$
$$\partial_u\partial_v(\theta[x]\varphi(u)) = \frac{1}{2}\delta(x)\varphi'(u);$$
$$\partial_u\partial_v(\theta[-x]\varphi(v)) = \frac{1}{2}\delta(x)\varphi'(v).$$

Список литературы

[1] E. T. Akhmedov and S. O. Alexeev, Phys. Rev. D **96** (2017) no.6, 065001 doi:10.1103/PhysRevD.96.065001 [arXiv:1707.02242 [hep-th]].

[2] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, doi:10.1017/CBO9780511622632

[3] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. Roy. Soc. Lond. A **348** (1976) 393.
P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. Roy. Soc. Lond. A **356** (1977) 237. doi:10.1098/rspa.1977.0130

[4] B. S. DeWitt, Phys. Rept. **19** (1975) 295. doi:10.1016/0370-1573(75)90051-4

[5] L. Astrahantsev and O. Diatlyk, arXiv:1805.00549 [hep-th].

[6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Avalon Publishing, 1995.

[7] E. T. Akhmedov and D. Singleton, Int. J. Mod. Phys. A **22** (2007) 4797 doi:10.1142/S0217751X07037081 [hep-ph/0610391].

[8] E. T. Akhmedov, Int. J. Mod. Phys. D **23** (2014) 1430001 doi:10.1142/S0218271814300018 [arXiv:1309.2557 [hep-th]].

[9] E. T. Akhmedov and F. Bascone, Phys. Rev. D **97** (2018) no.4, 045013 doi:10.1103/PhysRevD.97.045013 [arXiv:1710.06118 [hep-th]].

[10] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, JHEP **1409** (2014) 071 doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].

[11] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93** (2016) no.2, 024029 doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].