ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учереждене
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Грассманова сигма-модель на конечном интервале

выпускная квалификационная работа бакалавра

Выполнил:
студент 483 группы
Павшинкин Дмитрий Владимирович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Горский А.С.

Долгопрудный 2018

Содержание

1 Введение

Двумерные сигма-модели представляют большой интерес по причине их сходства с четырехмерными теориями Янга-Миллса и являются удобной платформой для изучения непертурбативных эффектов [1, 2]. Впервые сигма-модели ($\mathbb{O}(N)$ и $\mathbb{C}P(N)$) были решены в [1, 3, 4] в пределе больших N (см. [5]). Было продемонстрировано наличие асимптотической свободы, динамической генерации массы в данных моделях.

$\mathbb{C}P(N)$ и грассмановы сигма-модели также оказываются теориями мирового листа единичных или множественных неабелевых струн в несуперсимметричных теориях типа КХД [6, 7] (см. [8, 9] для обзора). Соотвенственные модели на интервале отвечают неабелевым струнам, натянутым между бран, представляющих собой доменные стенки. $\mathbb{C}P(N)$ сигма-модель на интервале была рассмотрена в [10, 11, 12]. Было найдено, что решение сильно зависит от граничных условий, и для специального их выбора может происходить фазовый переход на некотором значении длины интервала.

В данной работе мы рассмотрим теорию поля на комплексном грассманиане [13]

$$\mathbb{G}_{N,M} = \frac{SU(N)}{S(U(N-M) \times U(M))}, \quad M < N \tag{1.1}$$

Это пространство является обобщением комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P(N) = \mathbb{G}_{N,1}$. Можно представлять $\mathbb{G}_{N,M}$ как набор N-мерных ортогональных друг другу векторов. В своём роде грассмановы сигма-модели являются промежуточными теориями между векторными и матричными моделями.

Мы получим эффективное действие и исследуем решение уравнений седловой точки в пределе больших N с различными граничными условиями: Дирихле-Дирихле (Д-Д), Нейман-Нейман (Н-Н), и смешанными – Дирихле-Нейман (Д-Н). Похожие исследования были проведены в [12, 11] для $\mathbb{C}P(N)$ модели. В [12] были найдены гран. условия, допускающие аналитическое решение, и было показано существование двух фаз: хиггсовская фаза с нарушенной $U(1)$ калибровочной симметрией и без массовой щели и кулоновская фаза с ненарушенной $U(1)$ симметрией и ненулевой массой полей. Мы покажем, что аналогичные результаты получаются для $\mathbb{G}_{N,M}$ модели.

2 Эффективное действие

Воспользуемся квазилинейной формулировкой модели (GLSM). Введем NM линейных полей $\varphi(x_0, x_1)$, которые можно представить в виде комплексных матриц размера $N \times M$, подчиняющихся квадратичным условиям связи $\varphi^\dagger\varphi = I_M$ и взаимодействующих со вспомогательным калибровочным полем. Единственная $SU(N)-$ инвариантная метрика на $\mathbb{G}_{N,M}$ есть $ds^2 = Tr(d\varphi d\varphi)$. Поэтому лагранжиан модели будет

$$L = Tr\Big(N/g^2(D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi - I_M)\Big) \tag{2.1}$$

где введен лагранжев множитель λ, константа связи g, ковариантная производная $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - i\varphi A_\mu$. $x \in [0, L]$, $t \in (-\infty, +\infty)$. В дальнейшем мы увидим, что λ отвечает массе полей в ненарушенной фазе. Ометим, что калиборовочные поля не являются динамическими, поскольку в лагранжиане отсутствует соответствующий кинетический член. Исключением A_μ получается нелинейная формулировка модели.

Рассмотрим статистическую сумму в евклидовом пространстве:

$$Z = \int DAD\lambda D\varphi^\dagger D\varphi \exp\Big[-\int d^2x Tr\Big(N/g^2(D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi - I_M)\Big)\Big] \tag{2.2}$$

Для дальнейших вычислений необходимо привести интеграл к гауссовому виду. Выражение в экспоненте имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Big[-\int d^2x Tr\Big(N/g^2(D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi - I_M)\Big)\Big] \\
&\quad = -\int d^2x Tr\Big(N/g^2(\partial_\mu\varphi^\dagger\partial_\mu\varphi - i\partial_\mu\varphi^\dagger\varphi A_\mu + iA_\mu^\dagger\phi^\dagger\partial_\mu\varphi + A_\mu^\dagger\varphi^\dagger\varphi A_\mu) \\
&\qquad + \lambda(\varphi^\dagger\varphi - I_M)\Big) =
\end{aligned}$$

Произведем циклические перестановки под знаком следа и учтем нулевой вклад полей на границе (из-за гран. условий). Тогда получаем

$$= -\int d^2x\big(Tr\big[\varphi^\dagger(-N/g^2\big(\partial_\mu - iA_\mu)(\partial_\mu + iA_\mu^\dagger) + \lambda\big)\varphi\big] - \lambda M\big) \tag{2.3}$$

Поэтому

$$Z = \int DAD\lambda D\varphi^\dagger D\varphi \exp\Big[-\int d^2x\Big(\varphi_{ij}\Big(-\frac{N}{g^2}D^2+\lambda\Big)_{jk}\varphi_{ki}-\lambda M\Big)\Big] \tag{2.4}$$

Теперь интеграл гауссов,и мы без труда можем его вычислить. Выделим одно поле $\varphi_{11}=\sigma$, вакуумное среднее которого мы будем исследовать, а по оставшимся $NM-1$ полям проинтегрируем. Получится эффективное действие, зависящее только от λ, A_μ и σ.

Действительно, учитывая, что

$$\int D\varphi \exp\Big[\sum_{i,j}\Big(-\int d^2x\varphi_{ij}\Big(-\frac{N}{g^2}D^2+\lambda\Big)\varphi_{ij}\Big)\Big]$$
$$\sim \Big[det\Big(-N/g^2D^2+\lambda\Big)\Big]^{-(NM-1)/2} \tag{2.5}$$

получаем

$$\widetilde{Z} = \int DAD\lambda D\sigma D\sigma^* \exp\Big[-(NM-1)Tr\ln\Big(-D^2+\frac{g^2}{N}\lambda\Big)$$
$$-\int d^2x\Big((D_\mu\sigma)^2+\lambda\frac{g^2}{N}\sigma\sigma^*-\lambda M\Big)\Big].$$

В последнем уравнении поля были перемасштабиорваны. Переобозначая λ и вводя величину $r=MN/g^2$, приходим к выражению для эффективного действия:

$$S_{eff} = (NM-1)Tr\ln\big(-D^2+\lambda\big)+\int d^2x\Big((D_\mu\sigma)^2+\lambda(|\sigma|^2-r)\Big) \tag{2.6}$$

где $D_\mu\sigma = \partial\sigma - i(A_\mu)_{11}\sigma$.

3 Уравнение седловой точки

Интеграл в статитистической сумме нельзя посчитать точно. Поэтому следует воспользоваться методом перевала в пределе больших N. Для этого будем искать седловые точки действия по λ, A_μ и σ. Рассматриваемые граничные условия не нарушают симметрию по t. Поэтому будем искать стационарные решения $\lambda = \lambda(x),\ \sigma = \sigma(x)$ и выберем калибровку $A_t = 0$ (согласно [3]). Тогда

$$Tr\ln\big(-D^2+\lambda\big) = \int dtdx\, \langle x|\ln\big(-D_x^2+\lambda\big)|x\rangle \tag{3.1}$$

Рассмотрим оператор, фигурирующий в эффективном действии

$$\Big(-\partial_x^2+\lambda(x)\Big)\psi_n(x) = E_n^2\psi_n(x) \tag{3.2}$$

где $\psi_n(x)$ действительные ортогональные функции

$$\int_0^L dx\psi_n(x)\psi_m(x) = \delta_{nm} \tag{3.3}$$

Тогда можем записать выражение для полной энергии:

$$E = (NM-1)\sum_n E_n + \int dx\Big((\partial_\mu\sigma)^2+\lambda(|\sigma|^2-r)\Big) \tag{3.4}$$

При вариации $\lambda(x) \to (x) + \delta\lambda(x)$ из (3.2) следует

$$\delta E_n^2 = \int_0^L dx\delta\lambda(x)\psi_n^2(x) \tag{3.5}$$

Поэтому, варьируя уравнение по λ, получим первое уравнение седловой точки

$$\frac{NM-1}{2}\sum_n\frac{\psi_n^2(x)}{E_n} + |\sigma(x)|^2 - r = 0. \tag{3.6}$$

Второе уравнение полчается варьированием по σ^* и является уравнением движения

$$\partial_x^2\sigma - \lambda(x)\sigma = 0. \tag{3.7}$$

Варьирование по полю A_x приводи к уравнению

$$i\frac{NM-1}{2}\sum_n \frac{\psi_n(D_x\psi_n)^* - \psi_n^* D_x\psi_n}{E_n} = i\sigma(D_x\sigma)^* - i\sigma^* D_x\sigma \qquad (3.8)$$

Положим $A_x = 0$ и σ действительным. В таком случае последнее уравнение удовлетворяется для любых $\sigma \in R$.

Отметим, что, интегрируя по всем NM полям и устремляя L к бесконечности, мы должны получить те же результаты как и в случае бесконечной плоскости (x,t). На плоскости спектр оператора непрерывен. Варьирование по λ приводит к известному уравнению щели

$$r = NM\int_0^{\Lambda_{uv}} \frac{kdk}{2\pi}\frac{1}{k^2+m^2} \qquad (3.9)$$

Таким образом, в модели имеется динамичиская генерацией массы через размерную трансмутацию

$$\Lambda^2 = \Lambda_{uv}^2 \exp\big(-4\pi/g^2\big) \qquad (3.10)$$

где масса взята равной динамичиескому масштабу: $m = \Lambda$.

4 Д-Н граничные условия

В данном разделе рассмотрим смешанные граничные условия Д-Н. Пусть $NM = 2Z+1$, $Z \in \mathbb{N}$, и, следуя [12], наложим следующие гран. условия: поле φ_{11} емеет Н-Н

$$D_x\sigma(0) = D_x\sigma(L) = 0, \qquad (4.1)$$

Z полей – Н-Д:

$$D_x\varphi_{ij}(0) = \varphi_{ij}(L) = 0, \qquad (4.2)$$

оставшиеся Z полей, наоборот, имеют Д-Н:

$$\varphi_{ij}(0) = D_x\varphi_{ij}(L) = 0. \qquad (4.3)$$

Такой выбор гран. условий явно нарушает глобальную $SU(2Z+1)$ симметрию до $SU(Z) \times SU(Z)$. В этом случае ненулевое σ, нарущающее $U(1)$ симметрию, оставляет глобальную симметрию ненарушенной. В данном разделе мы покажем существование хиггсовской фазы с $\sigma \neq 0$.

Собственные функции и собственные значения оператора (3.2), соответсвующие выбранным гран. условиям, имеют вид

для сектора Д-Н:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left[\frac{\pi x(n-1/2)}{L}\right], \quad E_n^2 = \left[\frac{\pi(n-1/2)}{L}\right]^2 + \lambda, \tag{4.4}$$

$$n = 1, 2, ...,$$

для Н-Д:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left[\frac{\pi x(n-1/2)}{L}\right], \quad E_n^2 = \left[\frac{\pi(n-1/2)}{L}\right]^2 + \lambda, \tag{4.5}$$

$$n = 1, 2, ...$$

Подаставляя эти выражения в первое уравнение седловой точки (3.6), видим, что зависимомть от x исчезает вследствие тригонометрического тождества, и σ становится константой

$$\frac{Z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(n-1/2)^2 + (\lambda^2 L/\pi)^2}} \right) + \sigma^2(x) - r = 0 \tag{4.6}$$

Поэтому второе уравнение седловой точки (3.7) сводится к

$$\sigma\lambda = 0$$

Сперва рассмотрим случай ненулевого λ и нулевого σ . Это решение не нурашет $U(1)$ симметрию. В таком случае говорят, что система находится в фазе Кулона. Уравнение (4.6) принимает следующий вид

$$\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1/2)^2+(\lambda^2L/\pi)^2}}\right)-r=0. \tag{4.7}$$

Чтобы регуляризовать этот ряд, явно выделим расходящуюся часть

$$\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1/2)^2+(\lambda 62L/\pi)^2}}-\frac{1}{n}\right)+\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-r=0 \tag{4.8}$$

и применим к ней обрезание экспонентой

$$\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{n\pi}{L\Lambda_{uv}}\right)}{n}=-\ln\left(1-\exp\left(-\frac{\pi}{L\Lambda_{uv}}\right)\right)\approx-\ln\left(\pi/L\Lambda_{uv}\right) \tag{4.9}$$

Вспомним о размерной трансмутации $\Lambda^2=\Lambda_{uv}^2\exp\left(-4\pi/g^2\right)$. Это позволяет нам выразить r через динамический масштаб модели Λ и параметр УФ обрезания Λ_{uv}

$$r=\frac{Z}{\pi}\ln\left(\Lambda_{uv}/\Lambda\right) \tag{4.10}$$

Таким образом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1/2)^2+(\lambda^2L/\pi)^2}}-\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{L\Lambda}\right) \tag{4.11}$$

Воспользуемся полученным уравнением, чтобы показать, что кулоновская фаза не может существовать для длины интервала, меньшей определенного значения. Разложим член суммы в ряд по λ^2L

$$\frac{1}{\sqrt{(n-1/2)^2+(\lambda^2L/\pi)^2}}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-4\left(\frac{\lambda^2L}{\pi}\right)^2\frac{1}{(2n-1)^3}+... \tag{4.12}$$

и вспомним определение дзета-функции Римана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^3} = \frac{7}{2}\zeta(3), \tag{4.13}$$

Тогда

$$-\frac{7}{2}\zeta(3)\left(\frac{\lambda^2 L}{\pi}\right)^2 + 2 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{\pi}{L\Lambda}\right) \tag{4.14}$$

или

$$\frac{7}{2}\zeta(3)\left(\frac{\lambda^2 L}{\pi}\right)^2 = \ln\left(\frac{e^2\Lambda L}{4\pi}\right) \tag{4.15}$$

Следовательно кулоновская фаза существует только при

$$L > \frac{4\pi}{e^2\Lambda} \tag{4.16}$$

Рассмотрим теперь решение $\sigma = const$, $\lambda = 0$, соответсвующее фазе Хиггса, потому что ненулевое σ нарушает $U(1)$ симметрию. В этом случае из первого седлового уравнения получаем

$$\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n}\right) + \sigma^2 = \frac{Z}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{L\Lambda}\right) \tag{4.17}$$

а уравнение движения (3.7) удавлетворяется тождественно. После суммирования ряда в правой части, получаем

$$\sigma^2 = \frac{N}{\pi}\ln\left(\frac{4\pi}{e^2 L\Lambda}\right) \tag{4.18}$$

Легко видеть, что хиггсовская фаза может существовать только для $L \leq \frac{4\pi}{e^2\Lambda}$. Итак, мы заключаем, что система испытывает фазовый переход первого рода на длине $L = \frac{4\pi}{e^2\Lambda}$.

5 Д-Д и Н-Н граничные условия

При другом выборе граничных условий картина фазовой структуры совершенно иная. Пусть теперь на φ_{11} также наложены Н-Н гран. условия, Z полей имеют условия Д-Д и оставшиеся Z полей – Н-Н. Покажем для таких условий существование единственной фазы с ненарушенной симметрией.

Соответсвующие собственные функции и значения оператора (3.2) будут

для Д-Д:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left[\frac{\pi x n}{L}\right], \quad E_n^2 = \left[\frac{\pi n}{L}\right]^2 + \lambda, \tag{5.1}$$
$$n = 1, 2, ...,$$

для Н-Н:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left[\frac{\pi x n}{L}\right], \quad E_n^2 = \left[\frac{\pi n}{L}\right]^2 + \lambda, \tag{5.2}$$
$$n = 0, 1, ...$$

Теперь в Н-Н секторе имеется нулевая мода $n = 0$. Подставляя (5.1) и (5.2) в уравнение (3.6), видим, что имеется сингулярность при $\lambda = 0$:

$$\frac{Z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2 - \lambda L/\pi} - \frac{1}{n}\right) + \frac{Z}{\lambda L} = \frac{Z}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{\Lambda L}\right) \tag{5.3}$$

Поэтому решение $\lambda = 0$ не допустимо, а значит, запрещено появлениен ненулевого поля σ, соответсвующего хиггсовской фазе. Осталось заметить, что кулоновская фаза существует на всем интервале длины L. Действительно, для фиксированных Λ и L, всегда найдется λ, удовлетворяющее уравнеию (5.3), поскольку левая часть, как функция от λ, может принимать все действительные значения.

Полученный результат можно было бы ождать, исходя из следующих соображений. Выбранные граничные условия явно нарушают глобальную $SU(2Z+1)$ симметрию до $SU(Z+1) \times SU(Z)$. Ненулевое σ привело бы к спонтанному нарушению новой глобальной симметрии $SU(Z+1)\times SU(Z)$ до $SU(Z) \times SU(Z)$, что вступает в противоречие с теоремой Мермина-Вагнера, запрещающей безмассовые возбужения в 2d системах с конечной температурой.

6 Заключение

В данной рабте мы представили двумерную грассманову сигма-модель $\mathbb{G}_{N,M}$ на конечном интервале в пределе больших N [14]. Для специальных граничных условий было найдено аналитическое решение уравнений седловой точки. С граничными условиями Д-Д и Н-Н решние имеет только кулоновскую фазу ($\sigma = 0$) при всех значениях длины интервала L; выбор смешанных граничные условий Дирихле-Неймана обеспечивает наличие фазового перехода: имеется фаза Кулона для $L > \frac{4\pi}{e^2\Lambda}$ и фаза Хиггса ($\sigma \neq 0$) для $L < \frac{4\pi}{e^2\Lambda}$. Отметим, что интерес представляет рассмотрение сигма-модели на пространстве флагов, где могут обнвружиться дополнительны фазы.

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields, Phys. Lett. B **59**, 79 (1975) DOI10.1016/0370-2693(75)90161-6.

[2] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Two-dimensional sigma models: Modeling nonperturbative effects of quantum chromodynamics, Phys. Rep. **116**, 103 (1984).

[3] A. D'Adda, M. Luscher, and P. Di Vecchia, A 1/N expandable series of nonlinear sigma models with instantons, Nucl. Phys. B **146**, 63 (1978).

[4] E. Witten, Instantons, the quark model, and the 1/N expansion, Nucl. Phys. B **149.2**, 285 (1979).

[5] J. Zinn–Justin, M. Moshe, Quantum field theory in the large N limit: a review, Phys. Rep. **385**, 69 (2003).

[6] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, Higgs and Coulomb/confining phases in “twisted-mass"deformed CP(N-1) model, Phys. Rev. D **73**, 065011 (2006).

[7] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, Solitons in the Higgs phase: the moduli matrix approach, J. Phys. A **39**, R315 (2006).

[8] M. Shifman and A. Yung, Supersymmetric solitons (Cambridge University Press Cambridge) (2009) doi.org/10.1017/CBO9780511575693.

[9] D. Tong, Quantum Vortex Strings: A Review, Annals Phys. **324**, 30 (2009)

[10] A. Milekhin, CP(N-1) model on finite interval in the large N limit, Phys. Rev. D **86**, 105002 (2012).

[11] S. Bolognesi, K. Konishi, and K. Ohashi, Large-N CP(N-1) sigma model on a finite interval, J. High Energy Phys. 10 (2016) 073.

[12] A. Milekhin, CPN sigma model on a finite interval revisited, Phys. Rev. D **95**, (2017) 085021

[13] A. Perelomov, Instanton-like solutions in chiral models, Physica D **4**, No. 1, 1-25 (1981)

[14] D. Pavshinkin, Grassmannian sigma model on a finite interval, Phys. Rev. D **97**, 2018 025001.