Институт теоретической и экспериментальной физики

Московский физико-технический институт (Государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и теории поля

Пикалов Арсений Борисович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Неоднородные решения в двумерных $CP(N)$ и $O(N)$ нелинейных сигма моделях

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Горский Александр Сергеевич

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Нелинейная $CP(N-1)$ сигма-модель была впервые рассмотрена и решена в [1, 2, 3]. Эта модель обладает многими особенностями, делающими ее похожими на четырехмерную неабелеву калибровочную теорию. В $CP(N-1)$ происходит динамическая генерация массы за счет размерной трансмутации, модель является асимптотически свободной. В классической теории имеются инстантонные решения. За счет однопетлевой поправки калибровочное $U(1)$ поле в $CP(N-1)$ модели становится динамическим и вызывает конфайнмент. Также связь между калибровочной теорией и сигма-моделью проявляется в том, что $CP(N-1)$ модель является низкоэнергетическим эффективным действием для ориентационных модулей неабелевой струны [5, 6, 7, 8]. В случае $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных теорий этот факт позволяет установить точное соответствие между спектрами теорий. В несуперсимметричном случае мы ожидаем, что решения в двумерной теории также могут иметь интерпретацию с точки зрения четырехмерной теории.

Недавно было обнаружено [12], что в $CP(N-1)$ модели, рассматриваемой в пределе больших N, имеются неоднородные решения, в которых скалярное поле имеет ненулевое вакуумное среднее в конечной области пространства. В дальнейшем мы будем называть такие решения солитонами. Ключевым наблюдением, приведшим к обнаружению этого решения, стало соответствие между сигма-моделью и моделью Гросса-Неве. Точнее, было показано, что фермионные моды модели Гросса-Неве на фоне неоднородного билинейного фермионного конденсата $\sigma \sim \langle\bar{\psi}\psi\rangle$ могут быть определенным образом отображены на бозонные моды в соответствующем неоднородном решении. При этом фермионный конденсат является суперпотенциалом для бозонного поля в смысле суперсимметричной квантовой механики, то есть выполняется соотношение $\lambda = \sigma^2 + \partial_x \sigma$. Неоднородные состояния фермионного конденсата давно известны и хорошо изучены [9, 10, 11]. Простейшим из таких состояний является кинк, интерполирующий между двумя вакуумами модели Гросса-Неве. С помощью соответствия из кинка получается односолитонное решение в сигма-модели.

В данной работе мы изучаем некоторые особенности неоднородных решений в $CP(N-1)$ сигма-модели. Следуя идеям статью [9], мы получаем односолитонное решение с помощью анализа резольвенты. Затем мы вычисляем энергию этого решения через эффективное действие и с помощью усреднения тензора энергии-импульса. Неожиданно оказывается, что эта энергия отрицательна. В связи с этим возникает вопрос о основном состоянии $CP(N-1)$ модели. Мы анализируем периодическое состояние, которое получается по соответствию из кристалла кинков в модели Гросса-Неве [14], в качестве возможного основного состояния. Однако рассмотрение этого решения несколько затруднено из-за инфракрасных расходимостей. Не вполне ясно, существует ли механизм сокращения подобных расходимостей, и можно ли рассматривать периодическое решение для системы бесконечного размера. Однако формально мы можем вычислить энергию периодического решения, и она окажется ниже, чем для однородного решения.

Рассматривая $CP(N-1)$ модель, мы не учитываем существования в ней калибровочного поля. Поэтому аналогичные рассуждения справедливы и для $O(N)$ нелинейной сигма-модели. Обзор этой модели содержится, например, в [4]. При этом во многих аспектах $O(N)$ модель (при $N>3$, так как $O(3)$ и $CP(1)$ модели эквивалентны) существенно отличается от $CP(N-1)$ модели. Например, в $O(N)$ модели отсутствуют инстантоны. Мы проводим анализ этих двух моделей параллельно. Таким образом мы показываем, что различия между $CP(N-1)$ и $O(N)$ не имеют отношения к проблеме неоднородных решений.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем $CP(N-1)$ и $O(N)$ модели в пределе больших N, выводим седловое уравнение и анализируем возможные поправки к нему, а также приводим запись седлового уравнения через резольвенту. Часть 3 посвящена анализу односолитонного решения: сначала мы получаем это решение с помощью подходящего анзаца для резольвенты, а затем вычисляем его энергию различными способами. После этого кратко обсуждается модификация этого решения в суперсимметричной версии теорий. В части 4 рассматривается периодическое решение. Сначала проверяется его самосогласованность и обнаруживается проблема инфракрасных расходимостей, а затем вычисляется его энергия.

Данная работа основана на статье [16].

2 Седловое уравнение

2.1 Приближение больших N

Лагранжиан $O(N)$ нелинейной сигма-модели в пространстве Минковского

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left(\left(\partial_\mu n_a\right)^2 - \lambda\left(\left(n_a\right)^2 - 1\right)\right). \tag{1}$$

В этой модели имеется N вещественных полей n_a, лагранжев множитель λ обеспечивает выполнение ограничения $n_a n_a = 1$. Функциональный интеграл по полям n_a гауссов, поэтому он может быть вычислен в общем виде

$$\begin{gathered} Z = \int \mathcal{D}n_a \mathcal{D}\lambda \exp\left(iS\right) = \int \mathcal{D}n_a \mathcal{D}\lambda \exp\left(i \int d^2x \mathcal{L}\right) = \\ = \int \mathcal{D}\lambda \det{}^{-N/2}\left(-\partial^2 - \lambda\right) \exp\left(\frac{i}{2g^2} \int d^2x \lambda\right) = \int \mathcal{D}\lambda \exp\left(iS_{eff}\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Таким образом, мы получили эффективное действие

$$S_{eff} = \frac{iN}{2} tr \log\left(-\partial^2 - \lambda\right) + \frac{1}{2g^2} \int d^2x \lambda. \tag{3}$$

Иногда удобно использовать другую нормировку полей n_a, при которой ограничение имеет вид $n_a n_a = r$, где постоянная r связана с константой связи g^2 соотношением

$$r = 1/g^2.$$

Большую часть вычислений мы будем проводить в евклидовом пространстве. Соответственно формулы примут вид:

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left(\left(\partial_\mu n_a\right)^2 + \lambda\left(\left(n_a\right)^2 - r\right)\right), \tag{4}$$

$$Z = \int \mathcal{D}n_a \mathcal{D}\lambda \exp\left(-S\right) = \int \mathcal{D}\lambda \exp\left(-S_{eff}\right), \tag{5}$$

$$S_{eff} = \frac{N}{2} tr \log\left(-\partial^2 + \lambda\right) - \frac{1}{2} \int d^2x \lambda r. \tag{6}$$

Функциональный интеграл по λ не может быть взят в общем случае, поэтому мы будем работать в приближении больших N и воспользуемся методом перевала. Варьируя эффективное действие и предполагая, что поле λ не зависит от координат, находим уравнение для седловой точки

$$\frac{N}{2} tr \frac{1}{-\partial^2 + \lambda} - \frac{1}{2} \int d^2x r = 0,$$

из которого получаем, обозначая $\lambda = m^2$

$$r = N \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{N}{4\pi} \log\left(\frac{\Lambda_{uv}^2}{m^2}\right), \tag{7}$$

где Λ_{uv} — значение импульса, на котором происходит ультрафиолетовое обрезание. Таким образом, в $O(N)$ модели происходит динамическая генерация массы частиц через размерную трансмутацию.

В дальнейшем мы будем интересоваться более общими седловыми точками, для которых не только поле λ, но и одна из компонент поля n принимает ненулевое значение. Для того, чтобы получить соответствующее евклидово эффективное действие, мы выполним функциональное интегрирование по всем компонентам поля n_a, кроме первой $n_1 = n$. Тогда получим эффективное действие, зависящее от полей λ и n:

$$S_{eff} = \frac{N}{2} tr \log\left(-\partial^2 + \lambda\right) + \frac{1}{2} \int d^2x \left(\left(\partial n\right)^2 + \lambda n^2 - r\lambda\right).$$

Так как мы используем предел больших N, различием между N и $N-1$ в коэффициенте перед следом можно пренебречь. Варьируя эффективное действие по полю λ получим седловое уравнение

$$NTr \frac{\delta\lambda(x)}{-\partial^2 + \lambda} + \int dx dt \left(n^2 - r\right) \delta\lambda(x) = 0.$$

Раскрыв выражение для следа оператора и предполагая, что поля в седловой точке не зависят от времени, находим

$$\frac{N}{2\pi} \int d\omega \langle x| \frac{1}{-\partial_x^2 + \omega^2 + \lambda} |x\rangle + n^2(x) - r = 0. \tag{8}$$

Варьирование по полю n дает уравнение

$$\left(\partial_x^2 - \lambda(x)\right) n(x) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь нелинейную $CP\left(N-1\right)$ сигма-модель. Лагранжиан $CP\left(N-1\right)$ модели в пространстве Минковского

$$\mathcal{L}=\frac{1}{g^2}\left(D_\mu n_a\right)^*\left(D_\mu n_a\right)-\frac{\lambda}{g^2}\left(n_a^*n_a-1\right), \tag{10}$$

где $n_a,\ a=1,\ldots,N$ - комплексные скалярные поля, λ - Лагранжев множитель, который обеспечивает выполнение ограничения $|n|^2=1$. Ковариантная производная определяется как $D_\mu=\partial_\mu+iA_\mu$, где A_μ - вспомогательное калибровочное поле, которое при рассмотрении классической теории может быть выражено через поля n_a с помощью уравнений движения. Наличие вспомогательных полей λ и A_μ превращает пространство состояний классической теории в комплексное проективное пространство, отождествляя различные n_a, которые отличаются друг от друга на постоянный множитель. Соответствующий лагранжиан в евклидовом пространстве и после перемасштабирования полей:

$$\mathcal{L}=\left(D_\mu n_a\right)^*\left(D_\mu n_a\right)+\lambda\left(n_a^*n_a-r\right).$$

Эффективное действие получим аналогично случаю $O\left(N\right)$ модели, интегрируя по всем полям n_a кроме $n_1=n$:

$$S_{eff}=NTr\log\left(-D_x^2-D_t^2+\lambda\left(x\right)\right)+\int d^2x\left(|Dn|^2+\lambda\left(|n|^2-r\right)\right) \tag{11}$$

Как и в случае $O\left(N\right)$ модели, происходит размерная трансмутация, причем соотношение между константой связи и массой частиц дается той же формулой (7). Разлагая эффективное действие до второго порядка по калибровочному полю можно убедиться, что оно приобретает кинетический член и становится динамическим. В дальнейших вычислениях мы предполагаем, что для седловой точки $A_\mu=0$, и что поле n вещественно. После этого можно заменить в эффективном действии все ковариантные производные на обычные и опустить знаки модуля. После этого эффективное действие для $CP\left(N-1\right)$ модели будет отличаться от эффективного действия для $O\left(N\right)$ модели только общим множителем 2, а значит седловые точки для обоих эффективных действий будут совпадать. При решении седлового уравнения мы можем, не ограничивая общности, считать что рассматривается $CP\left(N-1\right)$ модель.

2.2 Учет перекрестного $n\lambda$ члена

В этом разделе мы произведем более аккуратное вычисление эффективного действия для $O\left(N\right)$ модели. Мы разобьем все поля на классическую и квантовую составляющую и выполним функциональное интегрирование по квантовым составляющим всех полей в гауссовом приближении. В результате мы получим поправки к эффективному действию, не учтенные в предыдущем разделе. Однако эти поправки подавлены малым множителем $1/N$, поэтому во всех последующих разделах мы не будем их учитывать. Аналогичные соображения верны и для $CP\left(N-1\right)$ модели.

Статистическая сумма задается выражением

$$Z=\int DnD\lambda\exp\left\{-S\right\}, \tag{12}$$

где в действие (4) мы подставляем

$$n=n_{cl}+n_q,\ n_{cl}=\left(n_0,\,0,\ldots,\,0\right), \tag{13}$$

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_q. \tag{14}$$

После этого действие запишется как

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\left[\left(\partial n_0\right)^2+\lambda_0\left(n_0^2-r\right)+\left(\partial n_q\right)^2+\left(\lambda_0+\lambda_q\right)n_q^2+2n_0\lambda_q n_{1q}\right]. \tag{15}$$

После интегрирования по всем компонентам поля n_q, кроме первой, получим промежуточную форму эффективного действия

$$S_{eff}^{(1)}=\frac{N-1}{2}tr\log\left(-\partial^2+\lambda_0+\lambda_q\right)+\frac{1}{2}\int d^2x\left(\left(\partial n_0\right)^2+\lambda_0\left(n_0^2-r\right)+n_1\left(-\partial^2+\lambda_0\right)n_1+2n_0\lambda_q n_1\right). \tag{16}$$

Для учета перекрестного члена λn мы сдвигаем переменную функционального интегрирования и сводим задачу к вычислению гауссова интеграла по полям n_1 и λ:

$$n_1 \to n_1 + \chi, \ \chi = -\frac{1}{-\partial^2 + \lambda} n_0 \lambda_q, \tag{17}$$

$$n_1 \left(-\partial^2 + \lambda_0\right) n_1 + 2 n_0 \lambda_q n_1 \to n_1 \left(-\partial^2 + \lambda_0\right) n_1 - n_0 \lambda_q \frac{1}{-\partial^2 + \lambda_0} n_0 \lambda_q .$$

Интегрирование по n_1 тривиально. Однако действие для λ содержит нетривиальный интегральный оператор K с ядром $K(x, y)$. Это ядро может быть выражено через функцию Грина для поля n, взаимодействующего с классическим полем λ_0:

$$G(x, y) = \langle x | \frac{1}{-\partial^2 + \lambda_0} | y \rangle . \tag{18}$$

При этом вклад в оператор K дает как интегрирование по полю n_1, так и разложение следа логарифма оператора по λ_q до второго порядка:

$$S^{(2)}_{eff} = \frac{N}{2} tr \log \left(-\partial^2 + \lambda_0\right) - \frac{N}{4} tr \left(\frac{1}{-\partial^2 + \lambda_0} \lambda_q\right)^2 + \frac{1}{2} \int d^2x \left((\partial n_0)^2 + \lambda_0 \left(n_0^2 - r\right) - n_0 \lambda_q \frac{1}{-\partial^2 + \lambda_0} n_0 \lambda_q \right) . \tag{19}$$

Эффективное действие для λ_{q} в квадратичном приближении

$$S_\lambda = -\frac{N}{4} \int d^2x d^2y G(x, y) G(y, x) \lambda_q(x) \lambda_q(y) - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \lambda_q(x) \lambda_q(y) n_0(x) n_0(y) G(x, y) , \tag{20}$$

$$S_\lambda = -\frac{1}{2} \int d^2x d^2y \lambda_q(x) \lambda_q(y) K(x, y) ,$$

где ядро выражается как

$$K(x, y) = \frac{N}{2} G(x, y)^2 + n_0(x) n_0(y) G(x, y) . \tag{21}$$

Окончательный ответ для эффективного действия

$$S_{eff} = \frac{N}{2} tr \log \left(-\partial^2 + \lambda_0\right) + \frac{1}{2} tr \log K + \frac{1}{2} \int d^2x \left((\partial n_0)^2 + \lambda_0 \left(n_0^2 - r\right) \right) . \tag{22}$$

Как мы увидим в дальнейшем, для седловых точек выполнено соотношение $n^2 \sim N$, поэтому вклад оператора K — единственный член в эффективном действии, не содержащий большого множителя N. Таким образом, этот вклад можно рассматривать как малую добавку и в лидирующем приближении по $1/N$ пользоваться седловым уравнением в виде соотношений (8) и (9).

2.3 Резольвента

Для удобства решения седлового уравнения введем резольвенту [9]:

$$R_\omega = \langle x | \frac{1}{-\partial_x^2 + \omega^2 + \lambda} | x \rangle .$$

В случае однородного решения на плоскости $n = 0$ и $\lambda = m^2$

$$r = \frac{N}{(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{1}{k^2 + \omega^2 + \lambda} = \frac{N}{4\pi} \int d\omega \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + m^2}} .$$

С помощью этих соотношений можно записать седловое уравнение (8) в виде

$$n^2(x) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 + m^2}} - R_\omega(x) \right] . \tag{23}$$

Это уравнение уже не содержит расходимостей.

Мы можем использовать его для нахождения неоднородных решений. Основная идея метода состоит в использовании того факта, что резольвента R_ω удовлетворяет уравнению Гельфанда-Дикого:

$$-2 R_\omega \partial_x^2 R_\omega + (\partial_x R_\omega)^2 + 4 \left(\omega^2 + \lambda(x)\right) R_\omega^2 = 1 \tag{24}$$

Если мы используем это уравнение на R_ω, уравнение (9) и предложим некоторый анзац, связывающий резольвенту с полем n, мы получим дифференциальное уравнение на n с параметром ω. Это уравнение должно выполняться для всех значений ω, что возможно только при правильно выбранном анзаце.

3 Односолитонное решение

В данном разделе мы получим односолитонное решение, которое недавно было получено в [12] с помощью связи между $CP\left(N-1\right)$ моделью и моделью Гросса-Неве, с помощью метода резольвенты. Также мы убедимся в самосогласованности этого решения путем непосредственного вычисления следа в уравнении(8). После этого мы займемся вычислением энергии этого решения. Наконец, мы рассмотрим односолитонное решение в суперсимметричном расширении теории.

3.1 Решение седлового уравнения

Будем искать решение для резольвенты в виде

$$R_\omega = a\left(\omega\right) + b\left(\omega\right) n^2\left(x\right). \tag{25}$$

Это простейший анзац, совместимый с седловым уравнением (23). Действительно, член, пропорциональный n^2, нужен чтобы получить n^2 в левой части, а не зависящее от координаты слагаемое нужно для сокращения ультрафиолетовой расходимости. Естественно предположить, что это слагаемое имеет вид

$$a\left(\omega\right) = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2+m^2}}, \tag{26}$$

однако сначала мы рассмотрим уравнение без этого предположения. После подстановки выражения для резольвенты (25) и соотношения между полями n и λ (9) в уравнение Гельфанда-Дикого (24) мы получим следующее соотношение, которое должно выполняться тождественно по частоте ω.

$$4a\left(a+bn^2\right)\partial_x^2 n + 4\omega^2 n\left(a+bn^2\right)^2 - 4abn\left(\partial_x n\right)^2 = n. \tag{27}$$

Если мы будем искать b в виде $b = Ca/\omega^2$, где C - некоторая константа, и воспользуемся (26), уравнение (27) можно будет свести к равенству нулю некоторого многочлена относительно ω^2. Приравняв нулю коэффициенты этого уравнения, мы получим следующие уравнения на поле n:

$$n\partial_x^2 n + Cn^4 - \left(\partial_x n\right)^2 = 0, \tag{28}$$

$$\partial_x^2 n + 2Cn^3 = m^2 n. \tag{29}$$

Несмотря на то, что для одной неизвестной функции имеется два уравнения, у этой системы есть решения. Действительно, умножив обе части уравнения (29) на n и проинтегрировав, можно получить соотношение

$$\left(\partial_x n\right)^2 = n^2\left(m^2 - Cn^2\right),$$

верное в предположении, что поле n обращается в 0 на бесконечности. Теперь с помощью подстановки полученного соотношения в уравнение (28) можно показать, что оно сводится к уравнению (29):

$$\partial_x^2 n = \frac{\left(\partial_x n\right)^2}{n} - Cn^3 = m^2 n - 2Cn^3.$$

Если константа $C > 0$, решение полученного уравнения, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$n\left(x\right) = \frac{m}{\sqrt{C}}\frac{1}{\cosh\left(m\left(x-x_0\right)\right)},$$

где x_0 - координата центра солитона. Соответствующее выражение для множителя Лагранжа:

$$\lambda\left(x\right) = m^2\left(1 - \frac{2}{\cosh^2\left(m\left(x-x_0\right)\right)}\right). \tag{30}$$

Полученное решение совпадает с найденным в [12]. Далее мы будем считать, что центр солитона находится в начале координат, $x_0 = 0$ Заметим, что подстановка полученного результата для резольвенты в седловое уравнение (23) приводит к расходящемуся интегралу:

$$n^2 = n^2\left(-\frac{N}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2}\frac{C}{\sqrt{m^2+\omega^2}}\right).$$

Расходимость связана с тем, что мы не учли наличия у n полей нулевой моды на фоне рассматриваемого решения, поэтому приведенный вывод является формальным.

3.2 Проверка самосогласованности

Проверим, односолитонное решение действительно удовлетворяет уравнению (30) при помощи непосредственного суммирования по модам. Спектр шредингеровского оператора с потенциалом (30) состоит из нулевой моды и непрерывного спектра, начинающегося с собственного значения $\omega^2 = m^2$. Собственные функции могут быть найдены с помощью суперсимметричной квантовой механики:

$$\left(-\partial_x^2 + \lambda\left(x\right)\right) f_k\left(x\right) = \omega^2\left(k\right) f_k\left(x\right), \, \omega^2\left(k\right) = m^2 + k^2,$$

$$f_k\left(x\right) = \frac{-ik + m \tanh mx}{\sqrt{m^2 + k^2}} \exp\left(ikx\right).$$

Эти функции нормированы на дельта-функцию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f_k\left(x\right) f_{k'}^*\left(x\right) = 2\pi\delta\left(k - k'\right).$$

Тогда седловое уравнение запишется как

$$n^2\left(x\right) = r - N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle x| \frac{1}{-\partial_x^2 + \lambda\left(x\right) + \omega^2} |x\rangle =$$

$$= r - N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\left|f_k\left(x\right)\right|^2}{\omega^2 + k^2 + m^2} = N \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} - N \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk}{2\pi} \frac{\left|f_k\left(x\right)\right|^2}{2\sqrt{k^2 + m^2}}$$

Здесь мы использовали разложение единичного оператора по собственным состояниям

$$1 = \int \frac{dk}{2\pi} |k\rangle\langle k| + |n\rangle\langle n|$$

и явно исключили нулевую моду $|n\rangle$ из суммирования. Значение r взято из седлового уравнения для однородного решения с ультрафиолетовым обрезанием Λ. Таким образом мы получаем:

$$n^2\left(x\right) = \frac{N}{4\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \frac{m^2\left(1 - \tanh^2 mx\right)}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\cosh^2 mx}.$$

Последний интеграл не содержит расходимости, поэтому можно устремить параметр обрезания Λ в бесконечность и получить выражение для $n\left(x\right)$ с правильной нормировкой.

3.3 Энергия солитона

В данной секции мы вычислим энергию односолитонного решения в $CP\left(N-1\right)$ модели несколькими способами. Наиболее простой способ вычисления состоит в применении результата работы [13]. В этой работе было получено, что плотность энергии для не зависящей от времени конфигурации полей имеет вид

$$\varepsilon_1\left(x\right) = \varepsilon_0 + \frac{N}{2\pi}\lambda\left(x\right), \, \partial_x\varepsilon_0 = 0. \tag{31}$$

Заметим, что эта формула согласуется с результатом [4] о вкладе конформной аномалии в плотность энергии. Вычитая отсюда аналогичное выражение для однородного решения, получаем плотность энергии солитона

$$\varepsilon\left(x\right) = \varepsilon_1\left(x\right) - \varepsilon_{vac}\left(x\right) = const + \frac{N}{2\pi}\left(\lambda\left(x\right) - m^2\right). \tag{32}$$

Поскольку неоднородность в односолитонном решении локализована вблизи начала координат, естественно предположить, что плотность энергии на бесконечности такая же, как и для однородного решения. Следовательно, $const = 0$. Интегрируя выражение для плотности энергии с учетом выражения (30) получим энергию солитона

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varepsilon\left(x\right) = -\frac{Nm^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\cosh^2 mx} = -\frac{2Nm}{\pi} \tag{33}$$

Мы получили, что в действительности энергия односолитонного решения отрицательна, то есть энергия неоднородного состояния ниже энергии однородного состояния. Чтобы убедиться в том, что приведенное выше вычисление правильно, мы вычислим энергию солитона еще двумя способами. Во-первых, мы вычислим значение эффективного действия для солитона. Во-вторых мы вычислим среднее от тензора энергии-импульса по односолитонному решению. Полученные результаты полностью согласуются с формулами (32) и (33).

Для $O(N)$ модели результаты практически не отличаются для результатов в $CP(N-1)$ модели. Поскольку мы не рассматриваем влияние калибровочного поля на солитон, единственное различие между моделями состоит в том, что в $O(N)$ модели мы рассматриваем вещественные поля. Соответственно, число степеней свободы уменьшается в 2 раза, и для энергии солитона получается выражение

$$E = -\frac{Nm}{\pi}.$$

3.3.1 Регуляризация Паули-Вилларса для эффективного действия

В этом разделе мы получим выражение для энергии односолитонного решения, используя соотношение между значением евклидова эффективного действия и энергией состояния

$$S = E \cdot T = NTr \log\left(-\partial_x^2 - \partial_t^2 + \lambda(x)\right) + \int d^2x \left((\partial n)^2 + \lambda\left(n^2 - r\right)\right)$$

где мы рассматриваем поля с периодом по (евклидову) времени, равном T, и считаем время T большим. Мы будем вычислять разность энергий однородного и односолитонного решений. Детерминанты для этих двух решений различны, так как односолитонный потенциал λ, не меняя спектра по сравнению с однородным решением за исключением добавления нулевых мод, меняет плотность состояний. Заметим, однако, что если бы мы регуляризовали выражение для эффективного действия с помощью обрезания, мы бы получили нулевое значение энергии солитона. Однако в энергию может также давать вклад конформная аномалия. Для ее аккуратного вычисления мы используем регуляризацию Паули-Вилларса.

Регуляризацию Паули-Вилларса осуществим следующим образом. Введем дополнительные частицы с массами m_i где $i = 0, \ldots, I$ и константы C_i удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{i=0}^{I} C_i = \sum_{i=0}^{I} C_i m_i^2 = 0,\ C_0 = 1,\ m_0 = 0. \tag{34}$$

Для рассматриваемого вычисления достаточно взять $I = 2$. Соответствующие выражения для констант:

$$C_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2 - m_2^2},\ C_2 = -\frac{m_1^2}{m_1^2 - m_2^2}. \tag{35}$$

В конце вычисления мы устремим вспомогательные константы m_i в бесконечность при $i = 1, \ldots, I$. Регуляризованное действие имеет вид

$$S = N\sum_{i=0}^{I} C_i Tr \log\left(-\partial^2 + m_i^2 + \lambda\right) + \int d^2x \left((\partial n)^2 + \lambda\left(n^2 - r\right)\right).$$

Константа r должна также должна быть выражена через массы регуляторных полей m_i. Для этого мы используем седловое уравнение для однородного решения $\lambda = m^2$. В пространстве большого объема V оно запишется как

$$r \cdot V = \sum_{i=0}^{I} C_i Tr \frac{1}{-\partial^2 + m_i^2 + m^2} = V \cdot \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \sum_{i=0}^{I} C_i \frac{1}{k^2 + m_i^2 + m^2},$$

откуда находим ответ

$$r = -\frac{N}{4\pi} \sum_{i=0}^{I} C_i \log\left(m^2 + m_i^2\right). \tag{36}$$

Теперь займемся непосредственным вычислением энергии. Легко показать, что члены с полем n в действии не дают вклада в энергию, так как n пропорционально нулевой моде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left((\partial_x n)^2 + \lambda n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx n \left(-\partial_x^2 n + \lambda n\right) = 0.$$

Таким образом, энергия односолитонного решения

$$E_1 = N\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_n\sum_{i=0}^{I}C_i\log\left(\omega^2+\omega_n^2+m_i^2\right)-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\lambda r.$$

Здесь мы формально записали логарифм детерминанта как сумму по собственным значениям ω_n^2 оператора $-\partial_x^2+\lambda$, рассматриваемого в пространстве большого, но конечного размера L. Аналогичное решение может быть написано и для энергии однородного решения E_{vac}, для которого $\lambda = m^2$ и собственные значения равны ω_{0n}^2. Вычитая эту энергию из энергии односолитонного решения мы получим

$$E = E_1 - E_{vac} = N\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_{i=0}^{I}C_i\log\left(\omega^2+m_i^2\right)+N\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\sum_n\sum_{i=0}^{I}C_i\log\frac{\omega^2+\omega_n^2+m_i^2}{\omega^2+\omega_{0n}^2+m_i^2}-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left(\lambda-m^2\right)r$$

Здесь первое слагаемое представляет собой вклад нулевой моды, а второе - вклад непрерывного спектра.

Для вычислений мы используем значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\log\left(1+\frac{a^2}{\omega^2}\right)=a$$

и проинтегрируем по частоте ωв первом и втором членах. Также выполним интегрирование по координате в третьем члене и получим выражение

$$E = N\sum_{i=0}^{I}C_i m_i + N\sum_n\sum_{i=0}^{I}C_i\left(\sqrt{\omega_n^2+m_i^2}-\sqrt{\omega_{0n}^2+m_i^2}\right)+4mr.$$

Суммирование по собственным значениям заменим на интегрирование по импульсам с соответствующим изменением плотности состояний

$$\sum_n \to \int dk\rho\left(k\right),\, \omega_n^2 \to k^2+m^2.$$

Здесь разность плотностей состояний односолитонного и однородного решения в непрерывном спектре имеет вид

$$\rho\left(k\right)=\frac{1}{\pi}\frac{d\delta\left(k\right)}{dk}=-\frac{2m}{\pi\left(k^2+m^2\right)}. \tag{37}$$

Здесь $\delta\left(k\right)=\pi-2\arctan\frac{k}{m}$ — фазовый сдвиг для собственной функции с соответствующим значением k. Нормировка выбрана таким образом, что интегрирование должна производиться только по положительным значениям импульса. Выражение для энергии преобразуется в

$$E = N\sum_{i=0}^{I}C_i m_i - \frac{2Nm}{\pi}\int_0^{+\infty}dk\sum_{i=0}^{I}C_i\frac{\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}{k^2+m^2}+4mr.$$

Входящий в это выражение интеграл равен

$$\int dk\frac{\sqrt{k^2+m^2+M^2}}{k^2+m^2}=\frac{M}{m}\arctan\frac{Mk}{m\sqrt{k^2+m^2+M^2}}+\log\left(k+\sqrt{k^2+m^2+M^2}\right).$$

Используя это выражение, преобразуем формулу для энергии

$$E = N\sum_{i=0}^{I}C_i m_i - \frac{2Nm}{\pi}\left[\sum_{i=1}^{I}C_i\frac{m_i}{m}\arctan\frac{m_i}{m}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{I}C_i\log\left(m^2+m_i^2\right)\right]+4mr.$$

После подстановки значения r мы получим, предполагая что $m_i \gg m$ и воспользовавшись разложением $\arctan\left(m_i/m\right)=\pi/2-m/m_i$, следующий результат:

$$E = N\sum_{i=0}^{I}C_i m_i - \frac{2Nm}{\pi}\sum_{i=1}^{I}C_i\frac{m_i}{m}\frac{\pi}{2}+\frac{2Nm}{\pi}\sum_{i=1}^{I}C_i+\frac{Nm}{\pi}\sum_{i=0}^{I}C_i\log\left(m^2+m_i^2\right)-\frac{Nm}{\pi}\sum_{i=0}^{I}C_i\log\left(m^2+m_i^2\right).$$

В силу определения констант C сумма в третьем члене равна $\sum_{i=1}^{I}C_i=-C_0=-1$.Все члены, за исключением третьего, сокращаются, и мы воспроизводим результат (33) для энергии односолитонного состояния.

3.3.2 Тензор энергии-импульса

В этом разделе мы вычислим среднее от тензора энергии-импульса для односолитонного решения. Мы покажем, что компонента θ_{00} тензора энергии-импульса совпадает с плотностью энергии (32). Мы рассмотрим каноническое квантование полей n на фоне неоднородного поля λ, используя точные выражения для мод в неоднородном потенциале. Аналогично вычислению эффективного действия, мы используем регуляризацию Паули-Вилларса, которая дает правильное выражение для конформной аномалии. Вычисления будут производиться в пространстве с сигнатурой Минковского.

Выражение для тензора энергии-импульса для регуляторного поля с массой m_i имеет вид

$$\theta^i_{\mu\nu} = \partial_\mu n_i \partial_\nu n_i^* + \partial_\mu n_i \partial_\nu^* n_i - g_{\mu\nu} \left(|\partial n_i|^2 - \lambda \left(|n_i|^2 - r \right) - m_i^2 |n|^2 \right).$$

В частности, тензор энергии-импульса для самого поля n получается отсюда при $m_i = 0$. Компоненты регуляризованного тензора энергии-импульса имеют вид

$$\theta_{00} = \sum C_i \left(|\partial_t n_i|^2 + |\partial_x n_i|^2 + \lambda |n_i|^2 + m_i^2 |n_i|^2 \right) - \lambda r,$$
$$\theta_{11} = \sum C_i \left(|\partial_t n_i|^2 + |\partial_x n_i|^2 - \lambda |n_i|^2 - m_i^2 |n_i|^2 \right) + \lambda r.$$

Здесь константы C_i даются выражениями (35).

Мы рассматриваем поле λ как классическое

$$\lambda = m^2 \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 mx} \right)$$

и предполагаем, что у поля n есть классическая компонента, квадрат которой равен

$$n_{cl}^2 = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\cosh^2 mx}.$$

Тогда моды для поля n равны

$$f_k = \frac{-ik + m \tanh mx}{\sqrt{k^2 + m^2}} \exp(ikx), \ \psi_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\cosh mx}, \ \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Квантование поля n и регуляторных полей n_i несколько отличаются. Поле n имеет классическую составляющую, пропорциональную нулевой моде, а член с оператором рождения нулевой моды отсутствует. У регуляторных полей нет классической составляющей, но есть мода с энергией m_i, пропорциональная нулевой моде поля n. Во всех формулах ниже нумерующий компоненты поля n индекс опущен. Индекс $i = 0, 1, 2$ нумерует регуляторный поля, причем $n_0 = n$. Выпишем явно разложение полей по модам:

$$n(x, t) = n_{cl}(x) + \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k f_k(x) \exp(-i\omega_k t) + b_k^\dagger f_k^*(x) \exp(i\omega_k t) \right), \tag{38}$$

$$\begin{aligned} n_i = & \frac{1}{\sqrt{2m_i}} \left(A \exp(-im_i t) + B^\dagger \exp(im_i t) \right) \psi_0(x) + \\ & + \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k,i}}} \left(a_{k,i} f_k(x) \exp(-i\omega_{k,i} t) + b_{k,i}^\dagger f_k^*(x) \exp(i\omega_{k,i} t) \right). \end{aligned} \tag{39}$$

Частоты для вспомогательных полей

$$\omega_{k,i} = \sqrt{k^2 + m^2 + m_i^2}. \tag{40}$$

Канонические коммутационные соотношения изменяются за счет нулевой моды:

$$\left[n^a(x, t), \partial_t n^{b*}(y, t) \right] = i \left(\delta(x - y) - \psi_0(x) \psi_0(y) \right) \delta^{ab}. \tag{41}$$

Для регуляторных полей дополнительного вклада в коммутационные соотношения нет:

$$\left[n_i^a(x, t), \partial_t n_i^{b*}(y, t) \right] = i\delta(x - y) \delta^{ab}. \tag{42}$$

Мы будем производить усреднение по состоянию, которое аннулируется операторами уничтожения a_k, A и b_k, B:

$$\langle n\left(x_1,t_1\right) n^*\left(x_2,t_2\right)\rangle = n_{cl}\left(x\right) n_{cl}\left(y\right) + N\int \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{k^2+m^2}}\exp\left(i\omega_k\left(t_1-t_2\right)\right) f_k^*\left(x_1\right) f_k\left(x_2\right), \tag{43}$$

$$\langle n_i\left(x_1,t_1\right) n_i^*\left(x_2,t_2\right)\rangle = N\frac{\psi_0\left(x\right)\psi_0\left(y\right)}{2m_i}\exp\left(im_i\left(t_1-t_2\right)\right)+N\int \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}\exp\left(i\omega_{k,\,i}\left(t_1-t_2\right)\right) f_k^*\left(x_1\right) f_k\left(x_2\right). \tag{44}$$

Выражение для регуляризованного квадрата поля:

$$\sum_i C_i \langle \left|n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = n_{cl}^2\left(x\right) + N\int\frac{dk}{2\pi}\sum_i \frac{\left|f_k\left(x\right)\right|^2}{2\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}} + N\psi_0\left(x\right)^2\sum_i\frac{C_i}{2m_i} = r$$

Это соотношение эквивалентно седловому уравнению. Благодаря нему члены с r в выражении для тензора энергии-импульса сокращаются.

Прямое вычисление дает следующие выражения для средних:

$$\sum_i C_i m_i^2 \langle \left|n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = N\int\frac{dk}{2\pi}\sum_i\frac{m_i^2\left|f_k\left(x\right)\right|^2}{2\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}} + N\psi_0\left(x\right)^2\sum_i\frac{C_i m_i}{2}, \tag{45}$$

$$\sum_i C_i \langle \left|\partial_x n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = \left(\partial_x n_{cl}\left(x\right)\right)^2 + N\int\frac{dk}{2\pi}\sum_i\frac{\left|\partial_x f_k\left(x\right)\right|^2}{2\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}} + N\psi_0\left(x\right)^2\sum_i\frac{C_i}{2m_i}, \tag{46}$$

$$\sum_i C_i \langle \left|\partial_t n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = N\int\frac{dk}{4\pi}\sum_i C_i\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}\left|f_k\left(x\right)\right|^2 + N\psi_0\left(x\right)^2\sum_i\frac{C_i m_i}{2}. \tag{47}$$

Здесь квадраты мод и их производных равны соответственно:

$$\left|f_k\left(x\right)\right|^2 = \frac{k^2+m^2\tanh^2 mx}{k^2+m^2} = 1-\frac{m^2}{k^2+m^2}\frac{1}{\cosh^2 mx}, \tag{48}$$

$$\left|\partial_x f_k\left(x\right)\right|^2 = k^2 + \frac{m^2}{\cosh^2 mx} + \frac{m^4}{k^2+m^2}\left(\frac{1}{\cosh^4 mx}-\frac{1}{\cosh^2 mx}\right). \tag{49}$$

Мы отдельно вычислим вклад с массами регуляторных полей

$$\sum_i C_i m_i^2 \langle \left|n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = N\int\frac{dk}{2\pi}\sum_i\frac{C_i m_i^2}{2\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}+N\frac{m^2}{\cosh^2 mx}\left(-\int\frac{dk}{4\pi}\sum_i\frac{C_i m_i^2}{\left(k^2+m^2\right)\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}+\sum_i\frac{C_i m_i}{4m}\right). \tag{50}$$

Первый член этой формулы воспроизводит результат для однородного решения. Теперь рассмотрим вклад с производными полей:

$$\sum_i C_i \langle \left|\partial_x n_i\left(x\right)\right|^2 + \left|\partial_t n_i\left(x\right)\right|^2\rangle = N\frac{m^2}{\cosh^2 mx}\left(\int\frac{dk}{4\pi}\sum C_i\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}-\frac{\sqrt{k^2+m^2+m_i^2}}{k^2+m^2}\right)+\sum_i\frac{C_i m_i}{4m}\right). \tag{51}$$

Заметим, что вклад от производной классической составляющей поля сокращается с сходящейся частью интеграла для квадрата пространственной производной поля. Это вклад от третьего члена в выражении (49), который содержит достаточно большую степень импульса в знаменателе и не требует регуляризации.

Все интегралы в формулах (50) и (51) берутся элементарно, вычисление полностью аналогично вычислению для эффективного действия. Мы находим, что вклады в неоднородную часть тензора энергии-импульса от члена с производными полей (51) и вклад от члена с массами регуляторных полей (50) равны. Поэтому неоднородный вклад присутствует в плотности энергии и сокращается в плотности потока импульса.

Окончательный ответ для плотности энергии согласуется с другими методами вычисления:

$$\langle\theta_{00}\rangle = \frac{Nm^2}{4\pi} - \frac{N}{\pi}\frac{m^2}{\cosh^2 mx} = \frac{Nm^2}{4\pi} + \frac{N}{2\pi}\left(\lambda - m^2\right).$$

Другие компоненты тензора энергии-импульса такие же, как и для однородного состояния:

$$\langle\theta_{11}\rangle = -\frac{Nm^2}{4\pi},\ \langle\theta_{01}\rangle = 0.$$

3.4 Суперсимметричные модели

3.4.1 $O(N)$ модель

Рассмотрим суперсимметричную $O(N)$ сигма модель в пространстве Минковского. Ее лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left((\partial_\mu n_a)^2 + \bar{\psi}_a i\hat{\partial}\psi_a + \frac{1}{4}\left(\bar{\psi}_a\psi_a\right)^2\right)$$

получается из лагранжиана $O(N)$ модели добавлением майорановских фермионов ψ_a в фундаментальном представлении группы $O(N)$. Здесь $\hat{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$, а матрицы Дирака выберем в виде $\gamma^0 = \sigma_2,\ \gamma^1 = i\sigma_3,\ \gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma_1$. Имеются ограничения $n_a n_a = 1$ и $n_a\psi_a = 0$. Удобно переписать действие, введя лагранжевы множитель λ и χ, а также вспомогательное поле, пропорциональное фермионному конденсату $\sigma \sim \bar{\psi}\psi$. Соответствующий лагранжиан запишется как

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left((\partial_\mu n_a)^2 + \bar{\psi}_a\left(i\hat{\partial} - \sigma\right)\psi_a - \sigma^2 - \lambda\left((n_a)^2 - 1\right) - \bar{\chi}\psi_a n_a - \bar{\psi}_a\chi n_a\right).$$

Для того, чтобы получить эффективное действие, проинтегрируем по всем полям n_a кроме $n_1 = n$, и по всем фермионным полям. Начнем с интегрирования по ψ_a ,произведем замену переменных

$$\psi_a \to \psi_a + \phi_a,\ \phi_a = \left(i\hat{\partial} - \sigma\right)^{-1}\chi n_a.$$

После этой замены члены в действии, линейные по ψ_a, сократятся, однако появится дополнительный член $\bar{\chi}\left(i\hat{\partial} - \sigma\right)^{-1}\chi n_a n_a = \bar{\chi}\left(i\hat{\partial} - \sigma\right)^{-1}\chi$.После этого можно выполнить интегрирование по χ. Вклад в эффективное действие от интегрирование по полям ψ_a и χ равен

$$-\frac{iN}{2}Tr\log\left(i\hat{\partial} - \sigma\right) + \frac{i}{2}Tr\log\left(i\hat{\partial} - \sigma\right).$$

Таким образом, поле χ уменьшает эффективное число степеней свободы 1. Интегрирование бозонных полей производится аналогично чисто бозонной теории. Окончательно получаем следующее выражение для эффективного действия:

$$S_{eff} = \frac{iN}{2}Tr\log\left(-\partial^2 - \lambda\right) - \frac{iN}{2}Tr\log\left(i\hat{\partial} - \sigma\right) + \frac{1}{2g^2}\int d^2x\left((\partial n)^2 - \lambda n^2 + \lambda - \sigma^2\right). \qquad (52)$$

Заметим, что это действие можно переписать в несколько другом виде, который также встречается в литературе. Перед интегрированием по n^a мы можем использовать ограничение $n^a n_a = 1$ и добавить множитель $n_a n^a$ перед σ членом в лагранжиане:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left((\partial_\mu n^a)^2 + \bar{\psi}_a\left(i\hat{\partial} - \sigma\right)\psi_a - \sigma^2 n_a n_a - D\left((n_a)^2 - 1\right) - \bar{\chi}\psi_a n_a - \bar{\psi}_a\chi n_a\right),$$

где мы переименовали лагранжев множитель λ и обозначили его D. Тогда массы и бозонов, и фермионов определяются вакуумным средним одного и того же поля σ, для однородного решения $D = 0$, что соответствует ненарушенной суперсимметрии. Эффективное действие в этих обозначениях:

$$S_{eff} = \frac{iN}{2}Tr\log\left(-\partial^2 - D - \sigma^2\right) - \frac{iN}{2}Tr\log\left(i\hat{\partial} - \sigma\right) + \frac{1}{2g^2}\int d^2x\left((\partial n)^2 - \left(\sigma^2 + D\right)n^2 + D\right). \qquad (53)$$

Из рассмотрения первой формы эффективного действия (52) следует, что фермионная часть модели в точности совпадает с моделью Гросса-Неве. Поскольку мы рассматриваем майорановские фермионы, число степеней свободы в 2 раза меньше, чем в модели Гросса-Неве с дираковскими фермионами, рассмотренной в [9, 10].

Из тождества $\gamma^5 \left(i\hat{\partial} - \sigma\right) \gamma^5 = -\left(i\hat{\partial} + \sigma\right)$ можно получить следующее соотношение между детерминантами, как это показано в работе [10]:

$$Tr \log \left(i\hat{\partial} - \sigma\right) = \frac{1}{2} Tr \log \left(-\left(i\hat{\partial} - \sigma\right)\left(i\hat{\partial} + \sigma\right)\right) = \frac{1}{2} Tr \log \left(\partial^2 + \sigma^2 - i\gamma^\mu \partial_\mu \sigma\right).$$

Если поле σ не зависит от времени, мы получаем:

$$Tr \log \left(i\hat{\partial} - \sigma\right) = \frac{1}{2} Tr \log \left(\partial^2 + \sigma^2 + \partial_x \sigma\right) + \frac{1}{2} Tr \log \left(\partial^2 + \sigma^2 - \partial_x \sigma\right). \tag{54}$$

Если в модели Гросса-Неве имеется неоднородное решение $\sigma(x)$ седлового уравнения, следующего из эффективного действия (52) или (53), соответствующее решение в $O(N)$ модели имеет вид $\lambda = \sigma^2 \pm \partial_x \sigma$. В терминах поля D это означает $D = \pm \partial_x \sigma$. Для определенности мы положим $\lambda = \sigma^2 - \partial_x \sigma$. Таким образом эффективное действие для такого решения

$$S_{eff} = \frac{iN}{4} Tr \log \left(-\partial^2 + \partial_x \sigma - \sigma^2\right) - \frac{iN}{4} Tr \log \left(-\partial^2 - \sigma^2 - \partial_x \sigma\right) + \frac{1}{2g^2} \int d^2 x D$$

Здесь мы использовали тот факт, что n пропорционально нулевой моде и что общий знак выражения под знаком логарифма несущественен. Простейшие неоднородное решение в модели Гросса-Неве — это кинк

$$\sigma = m \tanh mx. \tag{55}$$

Это решение ведет к λ в виде (30). Для этого решения $\sigma^2 + \partial_x \sigma = m^2$,поэтому соответствующий детерминант совпадает с детерминантом для однородного решения и не дает вклада в энергию солитона $E = -S_{eff}/T$. . Этот факт согласуется с тем, что энергия солитона в модели Гросса-Неве ($E = Nm/2\pi$ вместо результата $E = Nm/\pi$ работы [9] из-за того, что рассматриваются майорановские фермионы) вдвое меньше по модулю, чем энергия солитона в $O(N)$ модели. Разность в знаках энергии можно формально объяснить разностью знаков для бозонных и фермионных детерминантов в эффективном действии.

Мы получили, что в суперсимметричной модели могут существовать неоднородные решения, которые совпадают с солитонами из $O(N)$ модели в бозонном секторе, и с кинком из модели Гросса-Неве в фермионном секторе. При этом вклад в энергию от бозонного сектора вдвое больше, чем от фермионного, поэтому полная энергия отрицательна, как и в чисто бозонном случае.

3.4.2 $CP(N)$ модель

Рассмотрим теперь суперсимметричную $CP(N)$ модель. Рассмотрение будет полностью аналогично случаю $O(N)$ модели. Суперсимметричная модификация лагранжиана (10):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left((D_\mu n_a)^* (D_\mu n_a) + \bar{\psi}_a i\hat{D} \psi_a + \frac{1}{4} \left(\bar{\psi}_a \psi_a\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\bar{\psi}_a i\gamma^5 \psi_a\right)^2 \right),$$

где ψ_a — дираковские спиноры. Ограничения имеют вид: $n_a^* n_a = 1$, $n_a^* \psi_a = 0$. Мы вводим лагранжевы множители λ и χ и вспомогательные поля σ и π, после этого лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left((D_\mu n_a)^* (D^\mu n^a) + \bar{\psi}_a \left(i\hat{D} - \sigma - i\gamma^5 \pi\right) \psi_a - \sigma^2 - \pi^2 - \lambda \left(n_a^* n_a - 1\right) - \bar{\chi} \psi_a n_a^* - \bar{\psi}_a \chi n_a \right).$$

Соответствующее эффективное действие (мы опять не учитываем калибровочное поле и считаем, что $A_\mu = 0$):

$$S_{eff} = iNTr \log \left(-\partial^2 - \lambda\right) - iNTr \log \left(i\hat{D} - \sigma - i\gamma^5 \pi\right) + \frac{1}{g^2} \int d^2 x \left(|\partial n|^2 - \lambda |n|^2 + \lambda - \sigma^2 - \pi^2 \right).$$

Теперь фермионная часть действия соответствует киральной модели Гросса-Неве. Эта модель обладает непрерывной $U(1)$ киральной симметрией, которая спонтанно нарушается в пределе больших N. В этой модели отсутствуют топологически нетривиальные решения, однако, имеется неоднородное решения, формально совпадающее с кинком модели Гросса-Неве (55). Для этого решения $\pi = 0$, и это решение стабильно за счет связанных фермионов.Детали этого решения обсуждаются в работе [11]. Это решение соответствует солитону в бозонной части теория, соответствие дается теми же формулами, что и в случае $O(N)$ модели.

4 Периодическое решение

4.1 Седловое уравнение

В данном разделе мы проверим самосогласованность периодического решения. Окажется, что на плоскости в выражении для n^2 содержится инфракрасная расходимость, которую можно регуляризовать, например, рассматривая решение на окружности большой длины. В данном вычислении мы действуем аналогично рассмотрению периодического решения в модели Гросса-Неве [14] и используем некоторые результаты работы [15]. Обозначения для эллиптических функций и эллиптических интегралов стандартные.

Мы будем записывать решение в виде $\lambda = \sigma^2 - \partial_x \sigma$, где

$$\sigma = \nu m \frac{sn\,(mx;\,\nu)\,cn\,(mx;\,\nu)}{dn\,(mx;\nu)} \tag{56}$$

— периодический фермионный конденсат в модели Гросса-Неве. Это выражение можно преобразовать к несколько другому виду

$$\sigma = m\frac{2\sqrt{\nu_1}}{1+\sqrt{\nu_1}} sn\left(\frac{2mx}{1+\sqrt{\nu_1}};\ \nu_1\right), \tag{57}$$

где параметры эллиптических функций связаны как

$$\nu = \frac{4\sqrt{\nu_1}}{\left(1+\sqrt{\nu_1}\right)^2}. \tag{58}$$

В дальнейших вычислениях мы будем использовать выражение 56. Заметим, что решения $\lambda = \sigma^2 \pm \partial_x \sigma$ отличаются друг от друга только сдвигом на половину периода, поэтому нам достаточно рассмотреть только одно из них. С помощью стандартных формул для эллиптических функций находим

$$\lambda = m^2 \nu \left(2sn^2\,(mx) - 1\right). \tag{59}$$

Требуется вычислить собственные функции дифференциального оператора$-\partial_x^2 + \lambda$ и подставить их в седловое уравнение

$$n^2 = r - N\sum \frac{|f_n\,(x)|^2}{2\omega_k} = r - N\int \frac{dk}{2\pi}\frac{|f_k|^2}{2\omega_k}. \tag{60}$$

Для краткости в дальнейших вычислениях мы будем опускать параметр ν эллиптических функций.

Для оператора $-\partial_y^2 + 2\nu sn^2 y$ (где мы используем безразмерную переменную $y = mx$) собственные функции имеют вид

$$f\,(y) = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(y+\alpha)}{2K},\,q\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi y}{2K},\,q\right)} \exp\left(-yZ\,(\alpha)\right),\ q = \exp\left(-\pi K'/K\right), \tag{61}$$

$$\left(-\partial_y^2 + 2\nu sn^2 y\right) f = \mathcal{E} f.$$

Здесь параметр $\alpha = K + i\eta$ для нижней зоны с собственными значениями $\nu \le \mathcal{E} \le 1$ и $\alpha = i\eta$ для верхней зоны с $\mathcal{E} \ge 1+\nu$. Собственные значения выражаются через параметр α следующим образом:

$$\mathcal{E} = \nu + \omega^2/m^2 = dn^2\alpha + \nu. \tag{62}$$

Для рассматриваемых значений параметров функция $Z\,(\alpha)$принимает чисто мнимые значения и не влияет на абсолютное значение собственной функции. Используя тождества для произведений тете-функций, находим, что квадрат модуля собственной функции равен

$$|f\,(x)| = N^2\left(1 - \frac{cn^2 mx}{cn^2\alpha}\right)$$

Для определения нормировочной постоянной N мы используем условие

$$\int dx f_{k_1}\,(x)\, f^*_{k_2}\,(x) = 2\pi\delta\,(k_1 - k_2)\,.$$

Согласно теореме Блоха собственная функция в периодическом потенциале может быть представлена в виде произведения периодической функции и чисто экспоненциального множителя:

$$f_k(x) = u_k(x)\exp(ikx)\,,\ u_k(x+L) = u_k(x)\,,\ L = 2K/m.$$

Условие нормировки можно переписать как

$$\int dx u_{k_1}(x)\, u^*_{k_2}(x)\exp(ik_1x - ik_2x) = 2\pi\delta(k_1 - k_2)\,.$$

Мы рассмотрим случай $k_1 = k_2$ и используем связь значения дельта-функции в нуле и размера рассматриваемой системы $2\pi\delta(0) = L_1$, где мы предполагаем, что функции определены на окружности длины L_1. Тогда мы находим

$$\int dx\, |u_k|^2 = \int dx\, |f_k|^2 = L_1.$$

Значит, среднее значение собственной функции должно быть равно 1:

$$N^2 \int_0^{2K/m} \left(1 - \frac{cn^2 mx}{cn^2\alpha}\right) dx = \frac{2K}{m}.$$

Получаем окончательный ответ для нормировочного множителя:

$$N^2 = \frac{\nu K cn^2\alpha}{\nu K cn^2\alpha - E + (1-\nu)\,K}.$$

Эллиптические функции от параметра α могут быть выражены через энергию ω. Тогда нормированные собственные функции

$$|f_k|^2 = \frac{\omega^2/m^2 - dn^2 mx}{\omega^2/m^2 - E(\nu)/K(\nu)}. \tag{63}$$

Заметим, что для верхней зоны числитель и знаменатель отрицательны. В седловом уравнении удобнее интегрировать по энергии ω, а не по импульсу k. Соответствующая замена переменных осуществляется с помощью формул

$$\frac{1}{m}\frac{dk}{d\mathcal{E}} = \frac{\nu + E/K - \mathcal{E}}{\sqrt{(1-\mathcal{E})(\mathcal{E}-\nu)(1+\nu-\mathcal{E})}},$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{E/K - z^2}{\sqrt{(1-\nu-z^2)(1-z^2)}},\ z = \omega/m. \tag{64}$$

Седловое уравнение запишем в виде

$$n^2 = r - \frac{N}{2\pi}\int \frac{dz}{z}\left|\frac{dk}{d\omega}\right| |f_k|^2\,,$$

где интегрирование производится по обеим зонам. Неперенормированная константа связи может быть выражена через однородное решение седлового уравнения

$$r = N\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{k^2+\Lambda^2}} = \frac{N}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2+\Lambda^2}} = \frac{N}{2\pi}\log\frac{m}{\Lambda} + \frac{N}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}}. \tag{65}$$

Здесь Λ — масса частиц для однородного решения, которая, вообще говоря, не совпадает с параметром m периодического решения. Мы произведем замену переменной интегрирования $\omega = \sqrt{k^2+m^2}$ и $z = \omega/m$, после чего получим

$$r = \frac{N}{2\pi}\log\frac{m}{\Lambda} + \frac{N}{2\pi}\int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Тогда седловое уравнение примет вид

$$n^2 = \frac{N}{2\pi}\log\frac{m}{\Lambda} + \frac{N}{2\pi}\int_1^\infty dz\left\{\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{1}{z}\frac{z^2 - dn^2 mx}{\sqrt{(z^2-1+\nu)(z^2-1)}}\right\} -$$

$$- \frac{N}{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-\nu}}\frac{dz}{z}\frac{dn^2 mx - z^2}{\sqrt{(1-\nu-z^2)(1-z^2)}} = \frac{N}{2\pi}\left(a + b\cdot dn^2 mx\right). \tag{66}$$

Здесь мы отделили члены, пропорциональные нулевой моде потенциала λ

$$\psi_0 \sim dn\,(mx)$$

и не зависящие от координат вклады. В силу второго седлового уравнения

$$\left(-\partial_x^2 + \lambda\right) n = 0$$

n должно быть пропорционально нулевой моде. Тогда постоянный вклад $a = 0$, это условие фиксирует параметр m. Из выражений выше мы находим

$$a = \log\frac{m}{\Lambda} + \int_1^\infty dz \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{z}{\sqrt{(z^2-1+\nu)(z^2-1)}} \right\} + \int_0^{\sqrt{1-\nu}} dz \frac{z}{\sqrt{(1-\nu-z^2)(1-z^2)}},$$

$$b = \int_1^\infty \frac{dz}{z} \frac{1}{\sqrt{(z^2-1+\nu)(z^2-1)}} - \int_0^{\sqrt{1-\nu}} \frac{dz}{z} \frac{1}{\sqrt{(1-\nu-z^2)(1-z^2)}}.$$

Все интегралы в приведенных выше выражениях выражаются через элементарные функции. Второй интеграл в выражении для b содержит инфракрасную расходимость. Для ее регуляризации мы вводим малый параметр инфракрасного обрезания $\epsilon = \omega_{min}/m$. Физически он соответствует рассмотрению системы на окружности большого, но конечного размера L_1 и отбрасыванию вклада нулевой моды в седловое уравнение. Связь между этими параметрами имеет вид

$$k_{min} = \frac{2\pi}{L_1},\ \omega_{min} = k_{min}\frac{d\omega}{dk}(\omega=0) = \frac{2\pi}{L_1}\sqrt{1-\nu}\frac{K}{E}.$$

Значения коэффициентов

$$a = \log\frac{m}{\Lambda} + \log\left(1+\sqrt{1-\nu}\right),$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{1-\nu}} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2\sqrt{1-\nu}}\epsilon\right).$$

Из условия $a = 0$ находим

$$m = \frac{\Lambda}{1+\sqrt{1-\nu}}. \tag{67}$$

Здесь мы можем использовать другую форму записи для фермионного конденсата (57) и соответствующий параметр эллиптической функции (58). В новых терминах полученные результаты запишутся как

$$\Lambda = \frac{2m}{1+\sqrt{\nu_1}},$$

$$\sigma = \sqrt{\nu_1}\Lambda sn\,(\Lambda x)\,.$$

4.2 Плотность энергии

4.2.1 Эффективное действие

Теперь мы вычислим плотность энергии для периодического решения. Аналогично случаю односолитонного решения, мы начнем с вычисления эффективного действия с помощью регуляризации Паули-Вилларса. В следующем разделе мы рассмотрим тензор энергии-импульса.

Средняя плотность энергии выражается через эффективное евклидово действие как

$$\epsilon = \frac{1}{TL}S_{eff} = N\int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{dk}{2\pi}\sum_i C_i \log\left(\omega^2+\omega_k^2+m_i^2\right) - r\langle\lambda\rangle$$

Здесь мы ввели размер системы L, который предполагается большим. Индекс i нумерует регуляторные поля, угловые скобки обозначают усреднение по пространственному периоду. Используя формулу (59) находим

$$\langle\lambda\rangle = m^2\left(2 - 2\frac{E(\nu)}{K(\nu)} - \nu\right).$$

Также выполним интегрирование по частотам ω, тогда получим.

$$\epsilon = N \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{\mathrm{i}} C_i \sqrt{\omega_k^2 + m_i^2} - r\langle\lambda\rangle$$

Далее мы воспользуемся формулой (64) для перехода к интегрированию по значениям энергии и выражением (36) для константы связи через массы регуляторных полей, с учетом того, что теперь вместо массы m в эту формулу должна входить масса для однородного решения Λ, связанная с ней соотношением (67):

$$r = -\frac{N}{4\pi} \sum_i C_i \log\left(\Lambda^2 + m_i^2\right).$$

Для удобства мы введем новую переменную интегрирования $z = \omega_k/m$ и обозначения $a_i = m_i/m$. Тогда интегралы для плотности энергии можно выписать явно:

$$\begin{aligned}\epsilon = {} & \frac{Nm^2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\nu}} dz \sum_i C_i \frac{\left(E(\nu)/K(\nu) - z^2\right)\sqrt{z^2+a_i^2}}{\sqrt{(1-z^2)(1-\nu-z^2)}} + \\ & + \frac{Nm^2}{\pi} \int_1^{\infty} dz \sum_i C_i \frac{\left(z^2 - E(\nu)/K(\nu)\right)\sqrt{z^2+a_i^2}}{\sqrt{(1-z^2)(1-1-z^2)}} + \\ & + \frac{Nm^2}{4\pi}\left(2 - 2\frac{E(\nu)}{K(\nu)} - \nu\right) \sum_i C_i \log\left(\Lambda^2 + m_i^2\right).\end{aligned}$$

В отличие от случая односолитонного решения интегралы здесь сводятся к эллиптическим интегралам общего вида, поэтому выписать для них явные выражения при произвольных значениях параметров a_i затруднительно. Однако для наших целей достаточно знать только асимптотику этих интегралов при больших a_i. Эту асимптотику нельзя вычислить с помощью непосредственного разложения подынтегральных выражений по малому параметру$1/a_i$:

$$\sqrt{z^2 + a_i^2} = a_i + \frac{z^2}{2a_i}, \tag{68}$$

Так как каждый следующий член разложения содержит более высокую степень переменной интегрирования, и соответствующие интегралы расходятся. Чтобы справиться с этой проблемой, мы вычтем из другого множителя в подынтегральном выражении лидирующие члены его асимптотики при больших z:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}} = \left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}} - \frac{1}{z} - \frac{1-\nu}{2z^3}\right) + \frac{1}{z} + \frac{1-\nu}{2z^3}. \tag{69}$$

Теперь в интегралах, в которых останется вклад в скобках, подынтегральная функция быстрее убывает при больших z, что дает возможности использовать разложение(68), поскольку оно приводит к сходящимся интегралам. Мы заинтересованы в пределе $a_i \to \infty$, поэтому член с z^2/a_i исчезает, и мы можем в соответствующем вкладе заменить $\sqrt{z^2+a_i^2} = a_i$. Интегралы же, которые содержат члены из(69) вне скобок, сводятся к элементарным функциям, как и интегралы с $a_i = 0$, поэтому могут быть вычислены точно.

Теперь мы можем приступить к непосредственному вычислению плотности энергии. Члены с $i = 0$ нужно рассматривать отдельно. Члены, в которых разложение (68) приводит к сходящимся интегралам, дают только вклад, пропорциональный $\sum C_i m_i$. Все такие вклады должны сократиться в окончательном ответе, так как он не должен зависеть от регуляторных полей, за исключением квадратичного по ним вклада. С учетом этих замечаний преобразуем выражение для плотности энергии к виду

$$\begin{gathered}\tfrac{\pi}{Nm^2}\epsilon = \tfrac{1}{4}\left(2 - 2\tfrac{E}{K} - \nu\right)\textstyle\sum_i C_i \log\left(\Lambda^2 + m_i^2\right) + \int_0^{\sqrt{1-\nu}} dz \tfrac{\left(E/K - z^2\right)}{\sqrt{(1-z^2)(1-\nu_1-z^2)}} \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2} + \\ \int_1^{\infty} \tfrac{z^2 dz}{\sqrt{z^2-1}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}} - \tfrac{1}{z} - \tfrac{1-\nu}{2z^3}\right) \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2} + \left(-\tfrac{E}{K}\right) \int_1^{\infty} \tfrac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}} - \tfrac{1}{z}\right) \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2} + \\ \int_1^{\infty} \tfrac{z dz}{\sqrt{z^2-1}} \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2} + \left(\tfrac{1-\nu}{2} - \tfrac{E}{K}\right) \int_1^{\infty} \tfrac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2}.\end{gathered}$$

Нам потребуются следующие интегралы:

$$\begin{gathered}\int_1^{\infty} \tfrac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} \textstyle\sum_i C_i \sqrt{z^2+a_i^2} = 1 + \tfrac{\pi}{2} \textstyle\sum_i C_i a_i - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i C_i \log\left(1 + a_i^2\right) = \\ = 1 + \tfrac{\pi}{2} \textstyle\sum_i C_i a_i - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i C_i \log\left(m^2 + m_i^2\right),\end{gathered}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{zdz}{\sqrt{z^2-1}}\sum_i C_i\sqrt{z^2+a_i^2}=-\frac{1}{4}\sum_i C_i\left(a_i^2+1\right)\log\left(1+a_i^2\right)=-\frac{1}{4}\sum_i C_i a_i^2\log a_i^2-\frac{1}{4}\sum_i C_i\log a_i^2+\frac{1}{4}.$$

Отдельно вычислим различные вклады в энергию

$$\begin{gathered}\int_0^{\sqrt{1-\nu}}dz\frac{\left(E/K-z^2\right)}{\sqrt{(1-z^2)(1-\nu-z^2)}}\sum_i C_i\sqrt{z^2+a_i^2}=\int_0^{\sqrt{1-\nu}}dz\frac{\left(E/K-z^2\right)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\nu-z^2)}}+\\+\sum_{i=1,2}C_ia_i\int_0^{\sqrt{1-\nu}}dz\frac{\left(E/K-z^2\right)}{\sqrt{(1-z^2)(1-\nu-z^2)}}=\\=\sum_{i=1,2}C_ia_i\left(E\left(1-\nu\right)-K\left(1-\nu\right)\left(1-\frac{E(\nu)}{K(\nu)}\right)\right)+\frac{E(\nu)}{K(\nu)}\log\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{\sqrt{\nu}}+\frac{\sqrt{1-\nu}}{2}-\frac{2-\nu}{2}\log\frac{\sqrt{\nu}}{1-\sqrt{1-\nu}},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\int_1^{\infty}\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}-\frac{1-\nu}{2z^3}\right)\sum_i C_i\sqrt{z^2+a_i^2}=\int_1^{\infty}\frac{z^3dz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}-\frac{1-\nu}{2z^3}\right)+\\+\sum_{i=1,2}C_ia_i\int_1^{\infty}\frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}-\frac{1-\nu}{2z^3}\right)=\\=\sum_{i=1,2}C_ia_i\left(K\left(1-\nu\right)-E\left(1-\nu\right)-\frac{\pi(1-\nu)}{4}\right)+\frac{2-\nu}{4}\log\frac{1}{\nu}-\frac{1-\nu}{4},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\int_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}\right)\sum_i C_i\sqrt{z^2+a_i^2}=\int_1^{\infty}\frac{zdz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}\right)+\\+\sum_{i=1,2}C_ia_i\int_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\nu}}-\frac{1}{z}\right)=\sum_{i=1,2}C_ia_i\left(K\left(1-\nu\right)-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\frac{1}{\nu}.\end{gathered}$$

Убедимся, что коэффициент перед суммой $\sum C_ia_i$ в выражении для $\pi\epsilon/Nm^2$ обращается в нуль:

$$\begin{gathered}\left(K\left(1-\nu\right)-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{E(\nu)}{K(\nu)}\right)+K\left(1-\nu\right)-E\left(1-\nu\right)-\frac{\pi(1-\nu)}{4}+\\+E\left(1-\nu\right)-K\left(1-\nu\right)\left(1-\frac{E(\nu)}{K(\nu)}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\nu}{2}-\frac{E(\nu)}{K(\nu)}\right)=0.\end{gathered}$$

Теперь мы можем выписать выражение для плотности энергии. Мы опускаем член с квадратичной расходимостью. В этих формулах параметр эллиптических интегралов E и K всегда равен ν.

$$\begin{gathered}\frac{\pi}{Nm^2}\epsilon=\frac{E}{K}\log\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{\sqrt{\nu}}+\frac{\sqrt{1-\nu}}{2}-\frac{2-\nu}{2}\log\frac{\sqrt{\nu}}{1-\sqrt{1-\nu}}+\frac{2-\nu}{4}\log\frac{1}{\nu}-\\-\frac{1-\nu}{4}-\frac{E}{2K}\log\frac{1}{\nu}-\frac{1}{4}\sum_i C_i\log\frac{m_i^2}{m^2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1-\nu}{2}-\frac{E}{K}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}C_i\log\frac{m_i^2}{m^2}\right)+\\+\frac{1}{4}\left(2-\nu-\frac{2E}{K}\right)\sum_{i=1,2}C_i\log\frac{m_i^2}{\Lambda^2}.\end{gathered}$$

После некоторых алгебраических преобразований и сокращений, используя соотношение $\sum_{i=1,2}C_i=-1$ и связь между параметрами Λ и m мы получаем

$$\epsilon=\frac{N\Lambda^2}{4\pi}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\nu}\right)^2}\left(2-\nu+2\sqrt{1-\nu}-\frac{4E\left(\nu\right)}{K\left(\nu\right)}\right),$$

$$\epsilon=\frac{N\Lambda^2}{4\pi}\left(1-\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\nu}}\right)^2\frac{E\left(\nu\right)}{K\left(\nu\right)}\right)=\frac{N\Lambda^2}{4\pi}-\frac{E\left(\nu\right)}{K\left(\nu\right)}\frac{Nm^2}{\pi}. \tag{70}$$

Таким образом, энергия периодического решения монотонно возрастает с 0 до $N\Lambda^2/4\pi$ когда параметр ν изменяется 0 до 1.Энергия минимальна для однородного решения с $\lambda=0$.

4.2.2 Тензор энергии-импульса

В этом разделе мы рассмотрим свойства тензора энергии-импульса для периодического решения. Для вычисления вклада от производных мод по координате требуются нетривиальные свойства тета-функций, поэтому мы вычислим только часть вкладов в тензор энергии-импульса, а остальные вклады восстановим из общих соображений. Таким образом мы можем подтвердить, что зависимость плотности энергии от координаты действительно дается формулой (32).

С учетом сокращения среднего квадрата поля n и члена с константой связи, средние компоненты тензора энергии-импульса:

$$\langle\theta_{00}\rangle = \sum_i C_i \left(|\partial_t n_i|^2 + |\partial_x n_i|^2\right) + \sum C_i m_i^2 |n_i|^2 ,$$

$$\langle\theta_{11}\rangle = \sum_i C_i \left(|\partial_t n_i|^2 + |\partial_x n_i|^2\right) - \sum C_i m_i^2 |n_i|^2 .$$

Мы вычислим вклад от членов, с квадратами масс регуляторных полей:

$$\sum_i C_i m_i^2 |n_i|^2 = N \int \frac{dk}{2\pi} \sum_i \frac{C_i m_i^2}{2\sqrt{\omega_k^2 + m_i^2}} |f_k|^2 = \frac{N}{2\pi}\left(\alpha + \beta dn^2 mx\right),$$

где квадраты мод даются формулой (63). Аналогично вычислению для односолитонного решения мы отделяем зависящую от координат часть и вычисляем соответствующие коэффициенты:

$$\alpha = \int_1^\infty dz \sum_i \frac{C_i m_i^2 z^2}{\sqrt{(z^2 + a_i^2)(z^2 - 1)(z^2 - 1 + \nu)}} - \int_0^{\sqrt{1-\nu}} dz \sum_i \frac{C_i m_i^2 z^2}{\sqrt{(z^2 + a_i^2)(z^2 - 1)(z^2 - 1 + \nu)}},$$

$$\beta = -\int_1^\infty dz \sum_i \frac{C_i m_i^2}{\sqrt{(z^2 + a_i^2)(z^2 - 1)(z^2 - 1 + \nu)}} + \int_0^{\sqrt{1-\nu}} dz \sum_i \frac{C_i m_i^2}{\sqrt{(z^2 + a_i^2)(z^2 - 1)(z^2 - 1 + \nu)}}.$$

Нас интересует только зависимость от координаты, поэтому достаточно вычислить только коэффициент β. Интегралы вычисляются аналогично вычислению для эффективного действия. Получаем

$$\beta = -m^2.$$

Из-за сохранения условия тензора энергии-импульса $\partial_\mu \theta_{\mu\nu} = 0$ и его независимости от времени следует $\partial_x \langle\theta_{11}\rangle = 0$, то есть $\langle\theta_{11}\rangle = const$. Это означает, что в выражении для $\langle\theta_{11}\rangle$ зависимость от координаты во вкладе с производными сокращается с зависимостью от координаты во вкладе с квадратами масс. Значит, вклад с производными должен иметь вид

$$\sum_i C_i \left(|\partial_t n_i|^2 + |\partial_x n_i|^2\right) = \frac{N}{2\pi}\left(\alpha_1 + \beta dn^2 mx\right)$$

с тем же самым коэффициентом β, но другим коэффициентом α_1. Тогда плотность энергии имеет вид

$$\epsilon(x) = \langle\theta_{00}\rangle = -\frac{Nm^2}{\pi} dn^2 mx + const,$$

где $const$ не зависит от координаты. Этот результат согласуется с формулой

$$\epsilon(x) = \frac{N}{2\pi}\lambda(x) + const$$

Значение постоянной в этой формуле может быть определено с помощью выражение для средней плотности энергии (70). Окончательно находим плотность энергии

$$\epsilon(x) = \frac{N}{2\pi}\lambda(x) - \frac{N\Lambda^2}{4\pi}\left(\frac{1 - \sqrt{1-\nu}}{1 + \sqrt{1-\nu}}\right).$$

5 Заключение

В данной работе мы рассмотрели неоднородные решения $CP(N-1)$ и $O(N)$ неоднородных сигма-моделях. Мы обнаружили, что энергия таких решений ниже, чем для однородного решения. Мы также изучили периодические решения и обнаружили, что их энергия также ниже, чем для однородного решения. При этом минимальной энергией обладает решение с нулевой массой, которое является предельным случаем периодического решения. Во всех этих решениях присутствуют инфракрасные расходимости. Возможно, из-за этого периодические решения можно рассматривать только после пространственной компактификации теории. При этом вопрос об основном состоянии теории на плоскости остается открытым.

Остается большое число нерешенных вопросов, касающихся односолитонного решения. Например, неясно, обладает ли оно топологическим зарядом. Соответствующий ему кинк в модели Гросса-Неве топологически нетривиален, однако наивные попытки отобразить топологический заряд кинка в сигма-модель не ведут к разумному ответу. С этим вопросом тесно связан вопрос о возможности распада однородного состояния с образованием односолитонного. В суперсимметричной теории представляет интерес вопрос о том, является ли солитон BPS-состоянием.

Автор выражает благодарность Горскому Александру Сергеевичу, за предложение данной задачи и многочисленные обсуждения.

Список литературы

[1] H. Eichenherr, SU(N) invariant non-linear σ model, Ph.D. thesis, 1978, Nucl. Phys. B146 (1978) 215. DOI: 10.1016/0550-3213(78)90439-X

[2] A. D'Adda, M. Luscher, and P. Di Vecchia. "A 1/N Expandable Series of Nonlinear Sigma Models with Instantons". In: Nucl. Phys. B146 (1978), pp. 63–76. DOI: 10.1016/0550-3213(78)90432-7

[3] Edward Witten. Instantons, the Quark Model, and the 1/n Expansion. Nuclear Physics B149 (1979) 285-320. DOI: 10.1016/0550-3213(79)90243-8

[4] V.A. Novikov, Mikhail A. Shifman, A.I. Vainshtein, Valentin I. Zakharov. Two-Dimensional Sigma Models: Modeling Nonperturbative Effects of Quantum Chromodynamics. Phys.Rept. 116 (1984) 103. DOI: 10.1016/0370-1573(84)90021-8

[5] Roberto Auzzi, Stefano Bolognesi, Jarah Evslin, Kenichi Konishi, Alexei Yung. "NonAbelian superconductors: Vortices and confinement in N=2 SQCD". In: Nucl.Phys. B673 (2003) 187-216. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.09.029. [arXiv:hep-th/0307287].

[6] M. Shifman, A. Yung. "NonAbelian string junctions as confined monopoles". In: Phys.Rev. D70 (2004) 045004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.045004. [arXiv:hep-th/0403149].

[7] Amihay Hanany, David Tong. "Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics". In: JHEP 0404 (2004) 066. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/04/066. [arXiv:hep-th/0403158]

[8] A. Gorsky, M. Shifman, A. Yung. "Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling ". In: Phys.Rev. D71 (2005) 045010. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.045010. [arXiv:hep-th/0412082].

[9] Joshua Feinberg. On kinks in the Gross-Neveu model. In: Phys.Rev. D51 (1995) 4503-4511. DOI: 10.1103/PhysRevD.51.4503. arXiv hep-th/9408120.

[10] Joshua Feinberg. All about the static fermion bags in the Gross-Neveu model. In: Annals Phys. 309 (2004) 166-231. DOI: 10.1016/j.aop.2003.08.004. arXiv:hep-th/0305240

[11] Joshua Feinberg, A. Zee. Dynamical generation of extended objects in a (1+1)-dimensional chiral field theory: Nonperturbative Dirac operator resolvent analysis. In: Phys.Rev. D56 (1997) 5050-5065. DOI: 10.1103/PhysRevD.56.5050. arXiv: cond-mat/9603173

[12] Muneto Nitta, Ryosuke Yoshi. Self-Consistent Exact Solutions of Inhomogeneous Condensates in Quantum CP(N−1) Model. JHEP 1712 (2017) 145. DOI:10.1007/JHEP12(2017)145. arXiv:1707.03207 [hep-th].

[13] Alessandro Betti, Stefano Bolognesi, Sven Bjarke Gudnason, Kenichi Konishi, Keisuke Ohashi. Large-N CP(N-1) sigma model on a finite interval and the renormalized string energy. arXiv:1708.08805 [hep-th]

[14] Michael Thies. Analytical solution of the Gross-Neveu model at finite density. in Phys.Rev. D69 (2004) 067703. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.067703. hep-th/0308164

[15] Hui Li, Dimitri Kusnezov, Francesco Iachello. Group Theoretical Properties and Band Structure of the Lame Hamiltonian.DOI: 10.1088/0305-4470/33/36/310 arXiv:solv-int/9912006

[16] A. Gorsky, A. Pikalov, A. Vainshtein, не опубликована