Институт теоретической и экспериментальной физики
Московский физико-технический институт (Государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Сечин Иван Андреевич

Выпускная квалификационная работа магистра

Квантовые интегрируемые цепочки с дальнодействием и их гамильтонианы

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Зотов Андрей Владимирович

Москва, 2018 год

Содержание

1 Введение

Краткий обзор.
Интегрируемые или точно решаемые модели — классические или квантовые системы с очень специфичными свойствами, которые заключаются в том, что система имеет большое число интегралов движения или сохраняющихся величин, которые в классическом случае находятся в инволюции или коммутируют в квантовом случае. Такие системы встречаются довольно редко и поэтому нахождение какого-то нового интегрируемого случая всегда является очень интересной задачей.

Существует два широких класса интегрируемых систем с большим числом степеней свободы, представители которых есть как в классическом, так и в квантовом случае: системы взаимодействующих механических частиц и системы взаимодействующих спинов (или их аналогов — волчков в классическом случае). Данная работа представляет соответствие между этими двумя типами моделей, она сопоставляет классическую систему взаимодействующих систем типа Калоджеро-Мозера с одной стороны и квантовую систему спинов, которые обменно взаимодействуют с потенциалом, зависящим от расстояния между спинами — системами типа Халдейна-Шастры и Иноземцева, с другой стороны.

Классическая интегрируемая система обычно может быть описана при помощи представления Лакса — удобного способа представления ее уравнений движения, которое представляет естественный способ нахождения сохраняющихся величин модели:

$$\dot{L}(z) = [L(z), M(z)], \quad \Rightarrow \quad \partial_t \mathrm{Tr} L^n(z) = 0.$$

Найденное в данной работе соответствие состоит в том, что коммутирующие квантовые гамильтонианы спиновых цепочек появляются как дополнительные члены в представлении Лакса классической системы, которые проявляются в случае, когда скалярные функции в описании классической системы заменяются квантовыми R-матрицами с похожими свойствами:

$$L(z) = \sum_i p_i E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \phi(z, q_{ij}) E_{ij}, \quad \longrightarrow \quad L(z) = \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes R^z(q_{ij}).$$

Квантовые степени свободы проявляются, если динамика в классической системе будет "заморожена то есть все частицы находятся в положении равновесия и не двигаются.

$$p_j = 0, \quad q_j = \frac{j}{L},$$

Гамильтонианы цепочек проявляются в таком описании как следы матриц M по первому, вспомогательному матричному пространству:

$$H_n \propto \mathrm{Tr}_{aux} M^{(n)}(z)$$

Цель данной работы состоит в том, чтобы предложить новый способ построения гамильтонианов квантовых моделей с использованием классических систем, а также в том, чтобы при помощи такого соответствия предложить естественные анизотропные обобщения цепочек с дальнодействием типа Халдейна-Шастры и Иноземцева, которые ранее не рассматривались в литературе, и построить коммутирующие гамильтонианы таких моделей.

Структура работы.
Данная работа состоит из введения, двух основных частей, заключения и двух приложений, в которых для удобства собраны используемые свойства эллиптических функций и квантовых R-матриц Бакстера–Белавина. Одна из частей посвящена классической системе Калоджеро-Мозера и ее R-матричнозначным парам Лакса, вторая часть — интегрируемым цепочкам с

дальнодействием и схеме построения гамильтонианов таких цепочек из пар Лакса системы Калоджеро-Мозера.

Основные результаты.

Главные результаты этой работы — построение первой нетривиальной пары R-матричнозначной пары Лакса для системы Калоджеро-Мозера в разделе 2:

$$L(z) = \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes R^z_{ij}(q_{ij}),$$

$$M^{(3)}(z) = -\nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (p_i + p_j) E_{ii} \otimes F^0_{ij} + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (p_i + p_j) E_{ij} \otimes F_{ij} + \nu \cdot 1 \otimes \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} p_i F^0_{ij} +$$

$$+\nu^2 \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \sum_{k\neq i,j} (R_{ik} F_{kj} - F^0_{kj} R_{ij}) + \nu^2 \sum_i E_{ii} \otimes \mathcal{M}_k - \frac{\nu^2}{3} \cdot 1 \otimes \mathcal{M}_0,$$

$$\mathcal{M}_k = \sum_{\substack{i,j\neq k \\ i\neq j}} [F^0_{ij}(q_{ij}), r_{kj}(q_{kj})], \quad \mathcal{M}_0 = \sum_k \mathcal{M}_k,$$

и описание квантовых интегрируемых цепочек с дальнодействием в разделе 3 — нахождение уже известных гамильтонианов изотропных систем Халдейна-Шастры и Иноземцева:

$$H = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{P_{ij}}{\sin^2(\pi x_{ij})},$$

$$H = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \wp(x_{ij}) P_{ij},$$

и гамильтонианов новых анизотропных обобщений этих моделей:

$$H = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{N} \frac{\cos(\pi x_{kl})(\sigma^k_1\sigma^k_1 + \sigma^k_2\sigma^l_2) + \sigma^k_3\sigma^l_3}{\sin^2(\pi x_{kl})},$$

$$H = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \sum_{a=1}^{3} J_a(x_{ij}) \sigma^i_a \sigma^j_a,$$

$$J_a(z) = \frac{\theta'_1(0)\theta_A(z)}{\theta_1(z)\theta_A(0)} \cdot (\partial_z \log\theta_A(z) - \partial_z \log\theta_1(z))$$

2 Система Калоджеро-Мозера

2.1 Основные определения, представление Лакса

Главный объект, который рассматривается в этой главе — классическая интегрируемая система Калоджеро-Мозера [4, 14, 16] — одномерная механическая система N взаимодействующих частиц, динамика которых описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 - \frac{\nu^2}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V(q_{ij}), \tag{2.1}$$

где p_i и q_i — канонические импульсы и координаты, ν — некоторый параметр, который характеризует силу взаимодействия, а также введено обозначение $q_{ij} = q_i - q_j$. Выделяется три типа потенциалов, при которых данная система является интегрируемой: наиболее общий эллиптический потенциал, который имеет вид эллиптической пи-функции Вейерштрасса, и его тригонометрическое и рациональные вырождения:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{рациональный потенциал} \\ \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, & \text{тригонометрический потенциал} \\ \wp(x), & \text{эллиптический потенциал} \end{cases} \tag{2.2}$$

В этих трех случаях система Калоджеро-Мозера допускает представление Лакса со спектральным параметром [11]. Это означает, что канонические уравнения движения системы эквивалентны одному матричному уравнению:

$$\frac{d}{dt}L(z) = [L(z), M(z)], \tag{2.3}$$

где $L(z)$ и $M(z)$ — матрицы, которые зависят от канонических переменных p_i и q_i, а также от дополнительного комплексного спектрального параметра z, по которому уравнения выполняются тождественно. Явная форма этих операторов:

$$L(z) = \sum_i p_i E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \phi(z, q_{ij}) E_{ij}, \tag{2.4}$$

$$M(z) = \sum_i d_i E_{ii} + \nu \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} f(z, q_{ij}) E_{ij}, \tag{2.5}$$

$$d_i = -\nu \sum_{k\neq i} V(q_{ik}),$$

где функция $\phi(z,u)$ является эллиптической, тригонометрической или рациональной в зависимости от вида потенциала:

$$\phi(z,u) = \begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{1}{u}, & \text{рациональный случай,} \\ \pi\cot(\pi z) + \pi\cot(\pi u), & \text{тригонометрический случай,} \\ \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+u)}{\vartheta(z)\vartheta(u)}, & \text{эллиптический случай,} \end{cases} \tag{2.6}$$

а функция $f(z,u)$ есть производная от $\phi(z,u)$ по второму аргументу. Для удобства все используемые в работе свойства эллиптических функций собраны в приложении 1. Тот факт, что уравнения Лакса, построенные по паре Лакса (2.4)–(2.5), действительно эквивалентны гамильтоновым уравнениям движения, следует из следующего соотношения на функции $\phi(z,u)$ и $f(z,u)$:

$$\phi(z,q_{12})f(z,q_{23}) - f(z,q_{12})\phi(z,q_{23}) = \phi(z,q_{13})(\wp(q) - \wp(q), \tag{2.7}$$

которое справедливо во всех трех рассматриваемых случаях и является следствием квадратичного тождества Фея на функции $\phi(z,u)$:

$$\phi(z,q_{12})\phi(w,q_{23}) = \phi(w,q_{13})\phi(z-w,q_{12}) + \phi(w-z,q_{23})\phi(z,q_{13}). \tag{2.8}$$

(подробности могут быть найдены в приложении 1).

Представление Лакса (2.3) предоставляет простой способ построения сохраняющихся величин в системе Калоджеро-Мозера — следы степеней матрицы $L(z)$ сохраняются на уравнениях движения:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}L^k(z) = k\mathrm{Tr}(L^{k-1}(z)[L(z),M(z)]) = 0, \tag{2.9}$$

Таким образом, следы $\mathrm{Tr}L^k(z)$ могут рассматриваться как производящие функции сохраняющихся величин для системы Калоджеро-Мозера, которые получаются при разложении этих следов по z. В частности, N независимых гамильтонианов системы Калоджеро-Мозера получаются как коэффициенты при z^0 в разложении следов первых N степеней оператора $L(z)$:

$$H_k = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{k}\mathrm{Tr}L^k(z)\frac{dz}{z}, \tag{2.10}$$

Первый гамильтониан, вычисленный по этой формуле, оказывается просто суммарным импульсом всех частиц:

$$H_1 = \sum_i p_i = P \tag{2.11}$$

Второй гамильтониан совпадает с исходным гамильтонианом системы (2.1):

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 - \frac{\nu^2}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\wp(q_{ij}) = H, \tag{2.12}$$

Третий гамильтониан оказывается первой нетривиальной сохраняющейся величиной:

$$H_3 = \frac{1}{3}\sum_i p_i^3 - \nu^2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} p_i\wp(q_{ij}). \tag{2.13}$$

2.2 Старшие потоки и гамильтонианы, классическая r-матрица

Классическая система N частиц называется интегрируемой по Лиувиллю, если существует N независимых сохраняющихся величин, которые находятся в инволюции (то есть попарные скобки Пуассона между гамильтонианами зануляются):

$$\{H_n, H_m\} = 0 \quad \forall 1 \leq n \leq m \leq N \tag{2.14}$$

Представление Лакса обеспечивает существование N независимых сохраняющихся величин, но для того, чтобы доказать, что эти величины находятся в инволюции, удобно ввести классическую r-матрицу данной системы. Более строго, если существует матрица $r(z,w)$ такая, что:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [r_{12}(z,w), L_1(z)] - [r_{21}(w,z), L_2(w)], \tag{2.15}$$

где нижние индексы обозначают соответствующие тензорные компоненты:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = \sum_{i,j}\sum_{k,l}\{L_{ij}(z), L_{kl}(w)\}E_{ij}\otimes E_{km},$$

$$L_1(z) = L(z)\otimes 1, \quad L_2(w) = 1\otimes L(w),$$

$$r_{12}(z,w) = \sum_{i,j,k,l} r_{ij,kl}(z,w)E_{ij}\otimes E_{kl}, \quad r_{21}(w,z) = \sum_{i,j,k,l} r_{ij,kl}(w,z)E_{kl}\otimes E_{ij},$$

то следы степеней матрицы Лакса находятся в инволюции:

$$\{\mathrm{Tr}L^n(z), \mathrm{Tr}L^m(w)\} = 0, \tag{2.16}$$

а значит, в инволюции находятся и гамильтонианы H_n (2.10).

Для системы Калоджеро-Мозера классическая r-матрица известна [20] и имеет вид:

$$r(z,w) = (E_1(z-w) + E_1(w))\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} +$$

$$+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi(z-w, q_{ij})E_{ij}\otimes E_{ji} + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\phi(w, q_{ji})E_{ii}\otimes E_{ji}. \tag{2.17}$$

где $E_1(z)$ — первая функция Эйзенштейна в эллиптическом случае, или же ее тригонометрическое или рациональное вырождение.

Построенная конструкция позволяет рассматривать каждый из гамильтонианов H_n для генерации динамики системы:

$$\frac{d}{dt_n}F(p,q) = \{H_n, F(p,q)\}, \tag{2.18}$$

причем динамика по всем потокам может быть описана с использованием представления Лакса. Оператор $L(z)$ (2.4) единый для всех потоков, а операторы $M^{(n)}(z)$ могут быть выражены при помощи классической r-матрицы системы:

$$M^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{Tr}_2(r_{12}(z,w)L_2^{n-1}(w))\frac{dw}{w}. \tag{2.19}$$

Действительно:

$$[L_1(z), M_1^{(n)}(z)] = \frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{Tr}_2[L_1(z), r_{12}(z,w)]L_2^{n-1}(w)\frac{dw}{w} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{Tr}_2\{L_1(z), L_2(w)\}L_2^{n-1}(w)\frac{dw}{w} - \frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{Tr}_2[r_{21}(w,z), L_2(w)]L_2^{n-1}(w)\frac{dw}{w} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{n}\{L_1(z), \mathrm{Tr}_2 L_2^n(w)\}\frac{dw}{w} + 0 = -\{L_1(z), H_n\} = \{H_n, L_1(z)\} = \frac{d}{dt_n}L_1(z).$$

Для гамильтонианов (2.11) — (2.13) соответствующие M-операторы имеют вид:

$$M^{(1)}(z) = E_1(z)\cdot 1, \tag{2.20}$$

$$M^{(2)}(z) = E_1(z)L(z) - \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\wp(q_{ij})E_{ii} + \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} f(z,q_{ij})E_{ij}, \tag{2.21}$$

$$M^{(3)}(z) = A(z) + \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)\wp(q_{ij})E_{ii} + \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)f(z,q_{ij})E_{ij} +$$

$$+\nu^2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\sum_{k\neq i,j}(\phi(z,q_{ik})f(z,q_{kj}) - \phi(z,q_{ij})\wp(q_{kj}))E_{ij}, \tag{2.22}$$

где $A(z)$ — матрица, которая коммутирует с $L(z)$.

2.3 R-матричнозначные пары Лакса

В работах [13] было обнаружено, что пара Лакса для системы Калоджеро-Мозера может быть обобщена путем замены эллиптической, тригонометрической или рациональной функции на соответствующую квантовую R-матрицу. Модифицированный L-оператор имеет вид:

$$L(z) = \sum_i p_i E_{ii} \otimes 1 + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes R^z_{ij}(q_{ij}), \tag{2.23}$$

где квантовая R-матрица $R^z_{ij}(q_{ij})$ действует нетривиально в i-м и j-м пространствах, что обозначается нижними индексами. Квантовая R-матрица, которая может быть использована в такой паре Лакса, должна удовлетворять довольно общим условиям унитарности и кососимметричности:

$$R^z_{ij}(q_{ij}) R^z_{ji}(q_{ji}) = \phi(z, q_{ij}) \phi(z, q_{ji}) 1 \otimes 1, \tag{2.24}$$

$$R^z_{ij}(q_{ij}) = -R^{-z}_{ji}(q_{ji}), \tag{2.25}$$

а также квадратичному соотношению — ассоциативному уравнению Янга-Бакстера:

$$R^\hbar_{12}(q_{12}) R^\eta_{23}(q_{23}) = R^\eta_{13}(q_{13}) R^{\hbar-\eta}_{12}(q_{12}) + R^{\eta-\hbar}_{23}(q_{23}) R^\hbar_{13}(q_{13}). \tag{2.26}$$

В работах [13] доказано, что совокупность этих условий на R гарантирует, что этот объект действительно является квантовой R-матрицей, то есть удовлетворяет квантовому уравнению Янга- Бакстера:

$$R^\hbar_{12}(q_{12}) R^\hbar_{13}(q_{13}) R^\hbar_{23}(q_{23}) = R^\hbar_{23}(q_{23}) R^\hbar_{13}(q_{13}) R^\hbar_{12}(q_{12}). \tag{2.27}$$

В данный L-оператор может быть подставлена произвольная квантовая R-матрица, которая удовлетворяет вышеперечисленным условиям. В частности, может быть использоваться эллиптическая R-матрица Бакстера-Белавина XYZ модели в специальной нормировке (определение и свойства этой R-матрицы приведены в приложении 2). Также могут быть использованы тригонометрическая XXZ и рациональная XXX матрицы, которые получаются вырождениями из матрицы Бакстера-Белавина.

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (2.26) является матричным и некоммутативным (в смысле того, что множители в каждом слагаемом не могут быть произвольно переставлены) аналогом тождества Фея (2.8) на функции $\phi(z, u)$, поэтому такое обобщение пары Лакса системы Калоджеро-Мозера является достаточно естественным. Тот факт, что множители в слагаемых в этом соотношении не могут быть переставлены, влияет на M-матрицы в паре Лакса, в которых появляются дополнительные по сравнению со скалярным случаем слагаемые. Для второго гамильтониана системы Калоджеро-Мозера соответствующий M-оператор в матричнозначном случае становится равен:

$$M(z) = \nu \cdot 1 \otimes \mathcal{F}^0 - \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ii} \otimes F^0_{ij}(q_{ij}) + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes F^z_{ij}(q_{ij}), \tag{2.28}$$

$$\mathcal{F}^0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F^0_{ij}(q_{ij}),$$

где F — производная R-матрицы по ее аргументу $F^z(q) = \partial_q R^z(q)$, а F^0 — значение F, Следует заметить, что для того, чтобы уравнения Лакса с матричнозначным L-оператором оставались бы справедливыми с тем же гамильтонианом, в M-операторе появляется дополнительное слагаемое вида $1 \otimes \mathcal{F}^0$, которое в скалярном случае просто пропорционально единичной матрице и коммутирует с $L(z)$. Поэтому добавление такого члена в скалярном случае является необязательным.

Оказывается, что аналогичную R-матричнозначную пару Лакса можно построить и для третьего гамильтониана системы Калоджеро-Мозера (2.13). Построение такого оператора является одним из основных результатов в этой работе. Соответствующий M-оператор будет иметь вид:

$$M^{(3)}(z) = -\nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (p_i + p_j) E_{ii} \otimes F^0_{ij} + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (p_i + p_j) E_{ij} \otimes F_{ij} + \nu \cdot 1 \otimes \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} p_i F^0_{ij} +$$
$$+\nu^2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes \sum_{k \neq i,j} (R_{ik} F_{kj} - F^0_{kj} R_{ij}) + \nu^2 \sum_i E_{ii} \otimes \mathcal{M}_k - \frac{\nu^2}{3} \cdot 1 \otimes \mathcal{M}_0,$$
$$\mathcal{M}_k = \sum_{\substack{i,j \neq k \\ i \neq j}} [F^0_{ij}(q_{ij}), r_{kj}(q_{kj})], \quad \mathcal{M}_0 = \sum_k \mathcal{M}_k$$

где r — классическая r-матрица, которая появляется как $O(1)$-член в разложении квантовой R-матрицы по степеням $\hbar$: $R = \hbar^{-1} + r + O(\hbar)$.

В данном M-операторе, как и в (2.28), появляются дополнительные слагаемые, которые не являются необходимыми в скалярном случае. В следующем разделе эти дополнительные слагаемые будут проинтерпретированы как гамильтонианы интегрируемых цепочек в некотором специальном пределе. Подробное доказательство того, что данная матрица действительно является подходящим M-оператором, приведено в следующей главе этой работы.

2.4 Проверка R-матричнозначной пары Лакса для третьего гамильтониана

В данной главе будут использоваться следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R^z_{ij}(q_{ij}), \\ F_{ij} &= F^z_{ij}(q_{ij}), \\ F^0_{ij} &= F^0_{ij}(q_{ij}), \\ r_{ij} &= r_{ij}(q_{ij}). \end{aligned}$$

Доказательство будет проведено для случая максимальной общности с использованием R-матрицы Бакстера-Белавина. Все использованные в доказательстве свойства этой матрицы приведены в приложении 2.

Утверждение.
Оператор $M_3(z)$, который определяется как:

$$M^{(3)}(z) = -\nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (p_i + p_j) E_{ii} \otimes F^0_{ij} + \nu \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (p_i + p_j) E_{ij} \otimes F_{ij} + \nu \cdot 1 \otimes \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} p_i F^0_{ij} +$$
$$+\nu^2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes \sum_{k \neq i,j} (R_{ik} F_{kj} - F^0_{kj} R_{ij}) + \nu^2 \sum_i E_{ii} \otimes \mathcal{M}_k - \frac{\nu^2}{6} \cdot 1 \otimes \mathcal{M}_0, \tag{2.29}$$
$$\mathcal{M}_k = \sum_{\substack{i,j \neq k \\ i \neq j}} [F^0_{ij}(q_{ij}), r_{kj}(q_{kj})], \quad \mathcal{M}_0 = \sum_k \mathcal{M}_k$$

для R-матричнозначного оператора $L(z)$ (2.23) обращает уравнение Лакса

$$\frac{d}{dt_3}L(z) = [L(z), M^{(3)}(z)] \tag{2.30}$$

в тождество.

Доказательство.

Для доказательства этого факта необходимо проверить, что уравнения Лакса эквивалентны гамильтоновым уравнениям движения для системы Калоджеро-Мозера с третьим гамильтонианом (2.13):

$$\frac{dp_i}{dt_3} = \nu^2 \sum_{j\neq i}(p_i + p_j)\wp'(q_{ij}),$$
$$\frac{dq_i}{dt_3} = p_i^2 - \nu^2 \sum_{j\neq i}\wp(q_{ij}).$$

В силу этих уравнений движения левая часть уравнения Лакса (2.30) может быть записана как:

$$\frac{d}{dt_3}L(z) = \sum_i \frac{dp_i}{dt_3}E_{ii}\otimes 1 + \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{dq_{ij}}{dt_3}E_{ij}\otimes F_{ij} =$$
$$= \nu^2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)\wp'(q_{ij})E_{ii}\otimes 1 + \nu\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i^2 - p_j^2)E_{ij}\otimes F_{ij} +$$
$$+\nu^3\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\sum_{k\neq i,j}(\wp(q_{jk}) - \wp(q_{ik}))E_{ij}\otimes F_{ij} \tag{2.31}$$

Правая часть уравнения (2.30) может быть представлена в виде полинома по ν:

$$[L(z), M_3(z)] = \nu\cdot A(z) + \nu^2\cdot B(z) + \nu^3\cdot C(z), \tag{2.32}$$

Каждый отдельный вклад в этом разложении может быть вычислен непосредственно. Для первой степени по ν:

$$A(z) = \Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1, \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k + p_m)E_{km}\otimes F_{km}\Big] +$$
$$+\Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1, \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k + p_m)E_{kk}\otimes F^0_{km}\Big] +$$
$$+\Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1, 1\otimes \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} p_k F^0_{km}\Big] \tag{2.33}$$

Так как диагональные матрицы коммутируют между собой, а единичная матрица коммутирует с любой матрицей, только первый коммутатор в этом выражении может дать ненулевой вклад, тогда:

$$A(z) = \sum_i\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} p_i(p_k + p_m)[E_{ii}, E_{km}]\otimes F_{km} =$$
$$= \sum_i\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} p_i(p_k+p_m)(E_{im}\delta_{ki} - E_{ki}\delta_{im})\otimes F_{km} = \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k^2 - p_m^2)E_{km}\otimes F_{km}, \tag{2.34}$$

Таким образом, член при первой степени ν в левой части уравнений Лакса совпадает с аналогичным членом в правой части.

Для второй степени по ν:

$$B(z) = \Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R_{ij}, -\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k+p_m)E_{kk}\otimes F^0_{km} + \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k+p_m)E_{km}\otimes F_{km} + 1\otimes\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} p_k F^0_{km}\Big] +$$
$$+\Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1, \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} E_{km}\otimes(R_{kn}F_{nm} - F^0_{nm}R_{km}) + \sum_k E_{kk}\otimes\mathcal{M}_k - \tfrac{1}{6}\cdot 1\otimes\mathcal{M}_0\Big] \tag{2.35}$$

Коммутаторы по отдельности: коммутатор с диагональной частью оператора $L(z)$:

$$\Big[\sum_i p_i E_{ii}\otimes 1, \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m} E_{km}\otimes(R_{kn}F_{nm} - F^0_{nm}R_{km}) + \sum_k E_{kk}\otimes\mathcal{M}_k - \tfrac{1}{6}\cdot 1\otimes\mathcal{M}_0\Big] =$$
$$= \sum_i\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m} p_i[E_{ii}, E_{km}]\otimes(R_{kn}F_{nm} - F^0_{nm}R_{km}) =$$
$$= \sum_i\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m} p_i(E_{im}\delta_{ki} - E_{ki}\delta_{im})\otimes(R_{kn}F_{nm} - F^0_{nm}R_{km}) =$$
$$= \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m}(p_k - p_m)E_{km}\otimes(R_{kn}F_{nm} - F^0_{nm}R_{km}), \tag{2.36}$$

Отдельные слагаемые коммутатора с внедиагональной частью матрицы Лакса вычисляются аналогично членам при степени ν^1:

$$\Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R_{ij}, -\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k+p_m)E_{kk}\otimes F^0_{km}\Big] =$$
$$= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)E_{ij}\otimes(F^0_{ji}R_{ij} - R_{ij}F^0_{ji}) + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\sum_{n\neq i,j}(-(p_j+p_n)E_{ij}\otimes R_{ij}F^0_{jn} + (p_i+p_n)F^0_{ni}R_{ij}),$$

$$\Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R_{ij}, \sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}(p_k+p_m)E_{km}\otimes F_{km}\Big] =$$
$$= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)E_{ii}\otimes(R_{ij}F_{ji} - F_{ij}R_{ji}) + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\sum_{n\neq i,j}((p_j+p_n)E_{ij}\otimes R_{in}F_{nj} - (p_i+p_n)E_{ij}\otimes F_{in}R_{nj}),$$

$$\Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} E_{ij}\otimes R_{ij}, 1\otimes\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}} p_k\otimes F^0_{km}\Big] =$$
$$= \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)E_{ij}\otimes[R_{ij}, F^0_{ij}] + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\sum_{n\neq i,j} E_{ij}\otimes((p_i+p_n)[R_{ij}, F^0_{in}] + (p_j+p_n)[R_{ij}, F^0_{jn}]),$$

Все диагональные по первому пространству части сокращаются при сложении этих коммутаторов в силу тождеств типа (5.50) из приложения 2 и в результате остается член:

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)E_{ii}\otimes(R_{ij}F_{ji} - F_{ij}R_{ji}), \tag{2.37}$$

который также может быть упрощен в силу того, что второй тензорный сомножитель получается дифференцированием условия унитарности на квантовую R-матрицу. Таким образом:

$$B(z)=\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(p_i+p_j)\wp'(q_{ij})E_{ii}\cdot 1, \tag{2.38}$$

а значит и ν^2-члены в левой и правой частях уравнений Лакса совпадают.

Остается проверить только ν^3-член, который в правой части уравнений Лакса представлен коммутатором:

$$\Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}E_{ij}\otimes R_{ij},\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m}E_{km}\otimes(R_{kn}F_{nm}-F^0_{nm}R_{km})+\sum_k E_{kk}\otimes(\mathcal{M}_k-\tfrac{1}{3}\mathcal{M}_0)\Big] \tag{2.39}$$

Коммутатор с первой суммой:

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}E_{ij}\otimes R_{ij},\sum_{\substack{k,m\\ k\neq m}}\sum_{n\neq k,m}E_{km}\otimes(R_{kn}F_{nm}-F^0_{nm}R_{km})\Big]=\\ &=\sum_i E_{ii}\otimes\sum_{\substack{k,n\neq i\\ k\neq n}}(R_{ik}R_{kn}F_{ni}-R_{ik}F^0_{ni}R_{ki}-R_{ik}F_{kn}R_{ni}+F^0_{kn}R_{in}R_{ni})+\\ &+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}E_{ij}\otimes\sum_{k\neq i,j}(R_{ik}R_{ki}F_{ij}-R_{ik}F^0_{ij}R_{kj}-R_{ij}F_{jk}R_{kj}+F^0_{jk}R_{ik}R_{kj})+\\ &+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}E_{ij}\otimes\sum_{\substack{k,n\neq i,j\\ k\neq n}}(R_{ik}R_{kn}F_{nj}-R_{ik}F^0_{nj}R_{kj}-R_{in}F_{nk}R_{kj}+F^0_{nk}R_{ik}R_{kj})\end{aligned}$$

Каждое из R-матричных выражений в скобках может быть упрощено в силу тождеств. Первая сумма:

$$\begin{aligned}&R_{ik}(R_{kn}F_{ni}-F^0_{ni}R_{ki}+F_{kn}R_{ni})+F^0_{kn}R_{in}R_{ni}=\\ &=-R_{ik}R_{ki}F^0_{kn}+F^0_{kn}R_{in}R_{ni}=F^0_{kn}(\wp(q_{ik})-\wp(q_{in})),\end{aligned}$$

Так как k,n — равноправные индексы суммирования, то слагаемые с отрицательным знаком в точности сократят слагаемые с положительным знаком, и в результате получится ноль.

Третья сумма — снова используется равноправность индексов суммирования и вырожденный случай ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (5.55):

$$\begin{aligned}&R_{ik}(R_{kn}F_{nj}-F^0_{nj}R_{kj}-F_{kn}R_{nj})+F^0_{nk}R_{ik}R_{kj}=\\ &=F^0_{nk}R_{ik}R_{kj}-R_{ik}R_{kj}F^0_{kn}=R_{ij}[r_{ik},F^0_{kn}]+[r_{kj},F^0_{kn}]R_{ij},\end{aligned}$$

В результате получаются слагаемые, которые по виду похожи на те, которые возникают при коммутации внедиагональной части оператора $L(z)$ с дополнительными слагаемыми, содержащими $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_k$. Длинное, но прямолинейное вычисление показывает, что эти коммутаторы в точности сократят друг друга.

Остается рассмотреть только вторую сумму:

$$\begin{aligned}&R_{ik}R_{ki}F_{ij}-R_{ik}F^0_{ij}R_{kj}-R_{ij}F_{jk}R_{kj}+F^0_{jk}R_{ik}R_{kj}=\\ &=R_{ik}R_{ki}F_{ij}-R_{ij}F_{jk}R_{kj}+(F^0_{jk}R_{ik}-R_{ik}F^0_{ij})R_{kj}=\\ &=R_{ik}R_{ki}F_{ij}-R_{ij}F_{jk}R_{kj}+R_{ij}F_{jk}R_{kj}-F_{ij}R_{jk}R_{kj}=\\ &=F_{ij}(\wp(q_{jk})-\wp(q_{ik})),\end{aligned}$$

В результате, получается, что:

$$C(z) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \sum_{k \neq i,j} (\wp(q_{jk}) - \wp(q_{ik})) E_{ij} \otimes F_{ij}, \tag{2.40}$$

а значит, что и ν^3-члены в левой и правой частях уравнений Лакса совпадают.

Таким образом, уравнения Лакса выполняются тождественно по z на уравнениях движения, что и требовалось доказать.

3 Интегрируемые цепочки с дальнодействием

3.1 Интегрируемые цепочки Халдейна-Шастры и Иноземцева

В данной главе рассматривается другой тип интегрируемых систем — квантовые интегрируемые цепочки с дальнодействием и приводятся известные в литературе результаты, относящиеся к таким цепочкам. Пространство состояний таких моделей — $\mathbb{C}^{N\otimes L}$, тензорное произведение L одинаковых пространств $\mathbb{C}^N$ спиновых состояний.

Первый пример интегрируемой цепочки с дальнодействием построен одновременно Халдейном и Шастры [9] в 1988 году как обобщение спиновой цепочки Гайзенберга с взаимодействием всех спинов со всеми и эффективно вычисляемым основным состоянием в антиферрромагнитном случае. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{P_{ij}}{\sin^2 \frac{\pi(i-j)}{L}}, \tag{3.1}$$

где P_{ij} — матрица перестановки, действующая в i-й и j-й компоненте. В случае, если рассматривается спин 1/2, матрица перестановки может быть записана через матрицы Паули как:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \otimes 1 + \sum_{a=1}^{3} \sigma_a \otimes \sigma_a\right)$$

Такое представление показывает, что система Халдейна-Шастры может рассматриваться как обобщение изотропной XXX модели на дальнодействующий случай.

Модель Халдейна-Шастры с гамильтонианом (3.1) является довольно подробно изученой, хорошо известны ее связи с конформной теорией поля, вычислением аномальных размерностей в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса в AdS/CFT соответствии, а также связь модели с янгианом, которая описывает симметрии этой модели. В литературе известны также нетривиальные операторы, которые коммутируют с гамильтонианом. Самый простой из таких операторов имеет вид:

$$H_3 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} \frac{[P_{ij}, P_{jk}]}{\sin \frac{\pi(i-j)}{L} \sin \frac{\pi(j-k)}{L} \sin \frac{\pi(k-i)}{L}}, \tag{3.2}$$

В случае, если рассматривается спин 1/2, оператор в числителе имеет вид смешанного произведения трех спиновых операторов в разных узлах. Этот оператор является единственным известным среди операторов, квадратичных по оператору перестановки, который коммутирует с гамильтонианом.

Модель Иноземцева [10] является естественным эллиптическим обобщением тригонометрической модели Халдейна-Шастры, в котором потенциал взаимодействия становится эллиптической пи-функцией Вейерштрасса:

$$H = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \wp\left(\tfrac{i-j}{L}\right), \tag{3.3}$$

Такая модель также является интегрируемой и Иноземцевым было получено большое число законов сохранения. В частности, найдено два гамильтониана, квадратичных по операторам перестановки, которые являются независимыми:

$$J_1 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} \left(E_1\left(\tfrac{i-j}{N}\right) + E_1\left(\tfrac{j-k}{N}\right) + E_1\left(\tfrac{k-i}{N}\right)\right)[P_{ij}, P_{jk}], \tag{3.4}$$

$$J_2 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} \left(2\left(E_1\left(\tfrac{i-j}{N}\right) + E_1\left(\tfrac{j-k}{N}\right) + E_1\left(\tfrac{k-i}{N}\right)\right)^3 + \wp'\left(\tfrac{i-j}{N}\right) + \wp'\left(\tfrac{j-k}{N}\right) + \wp'\left(\tfrac{k-i}{N}\right)\right)[P_{ij}, P_{jk}], \tag{3.5}$$

3.2 Получение гамильтонианов цепочек из R-матричнозначных пар Лакса

Данная глава основана на работе [19], именно она составляет главные результаты этой дипломной работы. Главное полученное соответствие связывает дополнительные члены в M-операторах матричнозначных пар Лакса (2.28) и (2.29) и гамильтонианы цепочек с дальнодействием, аналогичных (3.1) и (3.2).

Общая схема соответствия выглядит следующим образом — вначале делается так называемый "freezing trick"[18], то есть фиксируется положение всех координат в положении равновесия системы Калоджеро-Мозера $q_j = \frac{j}{L}$, а все импульсы фиксируются нулевыми $p_j = 0$, затем рассматриваются матричнозначные M-операторы и берется след по матричному вспомогательному пространству (которое в данной работе представлено первым тензорным сомножителем). Получается оператор, который действует в "квантовом"пространстве, которое остается нетривиальным из-за вхождения квантовых R-матриц в эти операторы. Полученный оператор является (обычно с точностью до несущественного численного коэффициента) гамильтонианом интегрируемой спиновой цепочки с дальнодействием. В виде формулы соответствие имеет вид:

$$H_2 \propto \mathrm{Tr}_{\mathrm{aux}} M(z) \mid_{q_j=j/L, p_j=0}, \tag{3.6}$$

$$H_3 \propto \mathrm{Tr}_{\mathrm{aux}} M^{(3)}(z) \mid_{q_j=j/L, p_j=0}, \tag{3.7}$$

(L здесь и далее обозначает число частиц в системе или число спинов в цепочке). Формулы (3.6) и (3.7) могут быть явно переписаны через r- и F^0-матрицы с использованием явного вида M-операторов:

$$H_2 \propto \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} F^0_{ij}(x_{ij}), \tag{3.8}$$

$$H_3 \propto \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} [F^0_{ij}(x_{ij}), r_{ik}(x_{ik}) + r_{jk}(x_{jk})], \tag{3.9}$$

здесь и далее используется обозначение $x_j = \frac{j}{L}$ для эквидистантных точек.

Выбор разных квантовых R-матриц отвечает разным цепочкам с дальнодействием. Ниже приводятся различные примеры полученных цепочек.

Наиболее простой выбор квантовой R-матрицы — квантовая R-матрица, пропорциональная матрице перестановке с коэффициентом в виде ϕ-функции. При таком выборе R-матрицы гамильтонианы, которые получаются из данного соответствия, совпадают с гамильтонианами моделей Халдейна-Шастры или Иноземцева, в зависимости от того, тригонометрическая или эллиптическая функция берется в качестве коэффициента пропорциональности. То, что полученные гамильтонианы коммутируют, доказано аналитическими методами.

1. Тригонометрическая R-матрица, система Халдейна-Шастры:

$$R^z(q) = \pi(\cot(\pi z) + \cot(\pi q))P, \tag{3.10}$$

Вычисленные по данной R-матрице классическая r-матрица и ее производная F^0 (классическая r-матрица понимается в несколько обобщенном смысле, так как R-матрица при $\hbar \to 0$ имеет полюс вида $P \cdot \hbar^{-1}$, а не $1 \cdot \hbar^{-1}$):

$$r(q) = \pi \cot(\pi q) P, \tag{3.11}$$

$$F^0(q) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi q)}, \tag{3.12}$$

Для такого выбора R-матрицы получаются следующие гамильтонианы:

$$H_2 = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{P_{ij}}{\sin^2(\pi x_{ij})}, \tag{3.13}$$

$$H_3 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k \neq i}} \frac{[P_{ij}, P_{jk}]}{\sin(\pi x_{ij}) \sin(\pi x_{jk}) \sin(\pi x_{ki})}, \tag{3.14}$$

которые совпадают с известными гамильтонианами модели Халдейна-Шастры (3.1) и (3.2).

2. Эллиптическая R-матрица, система Иноземцева:

$$R^z(q) = \phi(z, q) P, \tag{3.15}$$

Вычисленные по данной R-матрице классическая r-матрица и ее производная F^0:

$$r(q) = E_1(q) P, \tag{3.16}$$
$$F^0(q) = -E_2(q) P, \tag{3.17}$$

Вычисленные гамильтонианы:

$$H_2 = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_2(x_{ij}) P_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \wp(x_{ij}) P_{ij} + \text{const.} \times \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} P_{ij}, \tag{3.18}$$

$$H_3 = \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k \neq i}} E_2(x_{ij})(E_1(x_{ki}) + E_1(x_{jk}))[P_{ij}, P_{jk}], \tag{3.19}$$

Сумма всех перестановок коммутирует со всеми операторами и ее можно опустить. Тогда второй гамильтониан совпадает со вторым гамильтонианом системы Иноземцева (3.3). Третий гамильтониан есть линейная комбинация сохраняющихся величин J_1 и J_2 системы Иноземцева (3.4) и (3.5):

$$H_3 = -\frac{1}{6} \left(J_2 - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} J_1 \right). \tag{3.20}$$

Как можно заметить, в случае эллиптического потенциала соответствие не дает два независимых коммутирующих гамильтониана, а только одну конкретную линейную комбинацию. В этом смысле соответствие является неполным.

Наибольший интерес представляют результаты этой работы, которые получены путем применения этого соответствия для более сложных квантовых R-матриц, которые не пропорциональны матрице перестановки. В этом случае получаются новые интегрируемые цепочки с дальнодействием, которые обобщают системы Халдейна-Шастры и Иноземцева, являясь их анизотропными аналогами. Коммутирующие гамильтонианы для таких систем были получены только для $GL(2)$ квантовых R-матриц, проверка их коммутативности проведена численно на компьютере.

1. XXZ $GL(2)$ квантовая R-матрица, анизотропный аналог системы Халдейна-Шастры:

$$R^z(q) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\pi(\cot(\pi z) + \cot(\pi q))(1 \otimes 1 + \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \\ + \frac{\pi}{\sin(\pi z)}(1 \otimes 1 - \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \frac{\pi}{\sin(\pi q)}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2)\Big) \tag{3.21}$$

Вычисленные по данной R-матрице классическая r-матрица и ее производная F^0:

$$r(q) = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cot(\pi q)(1 \otimes 1 + \sigma_3 \otimes \sigma_3) + \frac{\pi}{\sin(\pi q)}(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2)\right), \tag{3.22}$$

$$F^0(q) = -\frac{\pi^2}{2\sin^2(\pi q)} \cdot (1 \otimes 1 + \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \cos(\pi q)(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2)), \tag{3.23}$$

Тогда из соответствия получаются следующие гамильтонианы (в их выражении сразу выбирается удобная нормировка):

$$H_2 = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{N} \frac{\cos(\pi x_{kl})(\sigma_1^k \sigma_1^k + \sigma_2^k \sigma_2^l) + \sigma_3^k \sigma_3^l}{\sin^2(\pi x_{kl})} + f(x) \cdot 1, \tag{3.24}$$

$$H_3 = \sum_{\substack{k,l,m=1 \\ k \neq l \neq m \neq k}}^{N} \frac{1}{\sin(\pi x_{kl}) \sin(\pi x_{lm}) \sin(\pi x_{mk})} \times \tag{3.25}$$

$$\times \Big(\cos(\pi x_{kl})(\sigma_1^k \sigma_2^l - \sigma_2^k \sigma_1^l)\sigma_3^m + \cos(\pi x_{lm})(\sigma_1^l \sigma_2^m - \sigma_2^l \sigma_1^m)\sigma_3^k + \cos(\pi x_{mk})(\sigma_1^m \sigma_2^k - \sigma_2^m \sigma_1^k)\sigma_3^l \Big)$$

здесь σ_i — матрицы Паули, а верхние индексы обозначают тензорный сомножитель, в котором нетривиально действует σ-матрица. Член с единичной матрицей во втором гамильтониане является несущественным и его можно опустить.

2. XYZ $GL(2)$ квантовая R-матрица Бакстера-Белавина, анизотропный аналог системы Иноземцева:

$$R^\hbar(q) = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(q)} \cdot \Big(\frac{\theta_1\left(q + \frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\hbar}{2}\right)} 1 \otimes 1 + \frac{\theta_4\left(q + \frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_4\left(\frac{\hbar}{2}\right)} \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \\ + \frac{\theta_3\left(q + \frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_3\left(\frac{\hbar}{2}\right)} \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \frac{\theta_2\left(q + \frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_2\left(\frac{\hbar}{2}\right)} \sigma_3 \otimes \sigma_3 \Big) \tag{3.26}$$

Матрицы r и F^0, соответствующие такой квантовой R-матрице, приведены в приложении 2. Второй гамильтониан, построенный по этой матрице, имеет вид (с точностью до константного члена):

$$H_2 = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \sum_{a=1}^{3} J_a(x_{ij}) \sigma_a^i \sigma_a^j, \tag{3.27}$$

где сила взаимодействия зависит от расстояния как:

$$J_a(z) = \frac{\theta_1'(0)\theta_A(z)}{\theta_1(z)\theta_A(0)} \cdot (\partial_z \log \theta_A(z) - \partial_z \log \theta_1(z))$$

(конкретное соответствие между номером тэта-функции A и компонентой спина a может быть найдено в приложении 2). Можно заметить, что этот гамильтониан, как и ожидается обычно в эллиптическом случае, является полностью анизотропным — здесь взаимодействие происходит по-разному для трех различным компонентам спина.

Третий гамильтониан имеет слишком громоздкий вид, однако по общей структуре он аналогичен гамильтониану (1) — взаимодействуют спины в трех разных узлах и по трем различным компонентам, однако в эллиптическом случае анизотропия полная — шесть возможных взаимодействий такого типа входят с разными потенциалами.

Таким образом, получены новые модели с большим числом частиц, у которых имеется дополнительный оператор, который коммутирует с гамильтонианом и включает все спиновые переменные. Хотя это и не является доказательством интегрируемости модели, но это выделяет модель среди всех возможных цепочек и может быть серьезным аргументом в пользу того, что такие системы имеют некоторую скрытую внутреннюю симметрию.

4 Заключение

Главным результатом данной работы является построение хорошего анизотропного обобщения интегрируемых спиновых цепочек с дальнодействием типа Халдейна-Шастры и Иноземцева. Построенные в работе цепочке имеют дополнительный нетривиальный закон сохранения, что, по-видимому обеспечивается скрытыми симметриями этих спиновых цепочек, которые пока не выяснены. Описание таких квантовых систем каким-либо другим способом и нахождение других нетривиальных законов сохранения является в данный момент открытым вопросом. Численные эксперименты показывают, что другие законы сохранения действительно существуют, но получить какое-либо удобное и систематическое их описание пока не удалось — построение конструкции, аналогичной рассмотренной в работе для третьего гамильтониана, является очень трудоемкой задачей, так как сложность вычислений с квантовыми R-матрицами возрастает при увеличении числа R-матричных сомножителей в произведении, что естественным образом получается при рассмотрении старших степеней оператора $L(z)$.

Проблемой является также то, что построенные анизотропные гамильтонианы коммутируют только в случае выбора $GL(2)$ квантовых R-матриц, а при увеличении ранга R-матрицы построить такие гамильтонианы удалось только в изотропном случае. Обобщение соответствия на цепочки старшего спина также является содержательной задачей.

5 Приложения

5.1 Эллиптические функции

В этом приложении собраны все необходимые определения и свойства используемых в данной работе эллиптических функций. Систематическое описание может быть найдено в [5, 15, 22].

Нечетная тэта-функция Римана на эллиптической кривой $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ определяется как:

$$\vartheta(z) = \vartheta(z \mid \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau \left(k + \tfrac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\left(z + \tfrac{1}{2}\right)\right), \tag{5.1}$$

Непосредственно из определения следуют свойства нечетности и квазипериодичности функции (5.1):

$$\vartheta(z+1) = -\vartheta(z), \tag{5.2}$$
$$\vartheta(z+\tau) = \exp\left(\pi i \tau - 2\pi i \left(z + \tfrac{1}{2}\right)\right) \cdot \vartheta(z), \tag{5.3}$$
$$\vartheta(-z) = -\vartheta(z). \tag{5.4}$$

Другие полезные эллиптические функции определяются при помощи тэта-функции — фи-функция Кронеккера и первая и вторая функции Эйзенштейна:

$$\phi(z, w) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+w)}{\vartheta(z)\vartheta(w)}, \tag{5.5}$$
$$E_1(z) = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, \tag{5.6}$$
$$E_2(z) = -E_1'(z) = -\frac{\vartheta''(z)}{\vartheta(z)} + \left(\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\right)^2. \tag{5.7}$$

ϕ-функция (5.5) симметрична по определению:

$$\phi(z, w) = \phi(w, z). \tag{5.8}$$

Вторая функция Эйзенштена может быть также определена через ее связь с дважды периодической функцией Вейерштрасса $\wp$:

$$\wp(z) = E_2(z) + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)}, \tag{5.9}$$

которая есть сумма ряда:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z - m - n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2}\right). \tag{5.10}$$

Свойства квазипериодичности (5.2) и (5.3) влекут следующие свойства определенных выше функций:

$$\phi(z+1, w) = \phi(z, w), \tag{5.11}$$
$$\phi(z+\tau, w) = \exp(2\pi i w)\phi(z, w), \tag{5.12}$$
$$E_1(z+1) = E_1(z), \tag{5.13}$$
$$E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \tag{5.14}$$
$$E_2(z+1) = E_2(z), \tag{5.15}$$
$$E_2(z+\tau) = E_2(z), \tag{5.16}$$
$$\wp(z+1) = \wp(z), \tag{5.17}$$
$$\wp(z+\tau) = \wp(z). \tag{5.18}$$

Из нечетности тэта-функции (5.4) следуют свойства функций (5.5) — (5.9) при смене знаков их аргументов:

$$\phi(-z,-w) = -\phi(z,w), \tag{5.19}$$
$$E_1(-z) = -E_1(z), \tag{5.20}$$
$$E_2(-z) = E_2(z), \tag{5.21}$$
$$\wp(-z) = \wp(z). \tag{5.22}$$

Эллиптические функции (5.5), (5.6), (5.7) и (5.9) имеют корректно определенные тригонометрические и рациональные вырождения. Тригонометрические могут быть получены пределом $\operatorname{Im}\tau \to +\infty$:

$$\phi(z,w) \to \pi(\cot \pi z + \cot \pi w), \tag{5.23}$$
$$E_1(z) \to \pi \cot \pi z, \tag{5.24}$$
$$E_2(z) \to \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \tag{5.25}$$
$$\wp(z) \to \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \tag{5.26}$$

Рациональные вырождения получаются при устремлении периода тригонометрических функций к бесконечности:

$$\phi(z,w) \to \frac{1}{z} + \frac{1}{w}, \tag{5.27}$$
$$E_1(z) \to \frac{1}{z}, \tag{5.28}$$
$$E_2(z) \to \frac{1}{z^2}, \tag{5.29}$$
$$\wp(z) \to \frac{1}{z^2}, \tag{5.30}$$

Одно из самых важных свойств этих функций — тождество Фея в роде 1:

$$\phi(z,x)\phi(w,y) = \phi(w,x+y)\phi(z-w,x) + \phi(w-z,y)\phi(z,x+y), \tag{5.31}$$

и его различные вырождения

$$\phi(z,x)\phi(w,x) = \phi(z+w,x)(E_1(z) + E_1(w) + E_1(x) - E_1(z+w+x)), \tag{5.32}$$
$$\phi(z,x)\phi(z,-x) = \wp(z) - \wp(x), \tag{5.33}$$

Кроме этого, для получения уравнений движения системы Калоджеро-Мозера необходимо соотношение, которое связывает производные ϕ-функции (5.5) с другими эллиптическими функциями (5.5) — (5.9):

$$f(z,x) = \partial_x \phi(z,x), \tag{5.34}$$
$$f(z,x) = \phi(z,x) \cdot (E_1(z+x) - E_1(x)), \tag{5.35}$$
$$\phi(z,x_1-x_2)f(z,x_2-x_3) - f(z,x_1-x_2)\phi(z,x_2-x_3) = \phi(z,x_1-x_3) \cdot (\wp(x_1-x_2) - \wp(x_2-x_3)), \tag{5.36}$$
$$f(0,x) = -E_2(x), \tag{5.37}$$

Все эти свойства остаются справедливыми, если эллиптические функции в них заменить на соответствующие им тригонометрические или рациональные вырождения.

Нечетная тэта-функция (5.1) также связана с семейство тэта-функций, которые используются при построении $GL(2)$ матрицы Бакстера-Белавина:

$$\theta_1(z) = \vartheta(z), \tag{5.38}$$

$$\theta_2(z) = -\vartheta\left(z + \frac{1}{2}\right), \tag{5.39}$$

$$\theta_3(z) = -\exp\left(\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i z\right)\vartheta\left(z + \frac{1+\tau}{2}\right), \tag{5.40}$$

$$\theta_4(z) = i\exp\left(\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i z\right)\vartheta\left(z + \frac{\tau}{2}\right). \tag{5.41}$$

5.2 Квантовые R-матрицы, матрица Бакстера-Белавина

В этом предложении определяется квантовая R-матрица Бакстера-Белавина и приводятся основные свойства квантовых R-матриц. Более подробное описание всех свойств и их сравнение с соответствующими свойствами эллиптических функций приведено в работе [13]

Квантовые R-матрицы.
Квантовые $GL(N)$ R-матрицы в фундаментальном представлении определяются как элементы $R \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$, которые удовлетворяют квантовому уравнению Янга-Бакстера [2, 23, 6, 12, 21]:

$$R^\hbar_{12}(z_{12})R^\hbar_{13}(z_{13})R^\hbar_{23}(z_{23}) = R^\hbar_{23}(z_{23})R^\hbar_{13}(z_{13})R^\hbar_{12}(z_{12}), \tag{5.42}$$

совместно с условием унитарности, которое может пониматься как условие нормировки:

$$R^\hbar_{12}(z_{12})R^\hbar_{21}(z_{21}) = \phi(\hbar, z_{12})\phi(\hbar, z_{21}) \cdot 1 \otimes 1. \tag{5.43}$$

(здесь и далее $z_{ij} = z_i - z_j$).

Все квантовые R-матрицы, которые используются в данной работе, дополнительно удовлетворяют условию кососимметричности:

$$R^\hbar_{ij}(z) = -R^{-\hbar}_{ji}(-z), \tag{5.44}$$

Квантовая R-матрица может быть разложена в ряд по степеням $\hbar$:

$$R^\hbar_{ij}(z_{ij}) = \frac{1 \otimes 1}{\hbar} + r_{ij}(z_{ij}) + \hbar m_{ij}(z_{ij}) + \mathcal{O}(\hbar^2), \tag{5.45}$$

где член $r_{ij}(z_{ij})$ называется классической r-матрицей, соответствующей данной квантовой R-матрице $R^\hbar_{ij}(z_{ij})$. Из свойства кососимметричности квантовой R-матрицы следует, что:

$$R^\hbar_{12}(z_{12}) = -R^{-\hbar}_{21}(z_{21}),$$

$$r_{12}(z_{12}) = -r_{21}(z_{21}), \tag{5.46}$$

$$m_{12}(z_{12}) = m_{21}(z_{21}). \tag{5.47}$$

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера [1, 17] выделяет специальный класс квантовых R-матриц:

$$R^\hbar_{12}(z_{12})R^\eta_{23}(z_{23}) = R^\eta_{13}(z_{13})R^{\hbar-\eta}_{12}(z_{12}) + R^{\eta-\hbar}_{23}(z_{23})R^\hbar_{13}(z_{13}), \tag{5.48}$$

Если продифференцировать уравнение (5.48) по z_2, получится соотношение, которое является основным для доказательства справедливости уравнений Лакса с матричнозначными операторами $L(z)$ и $M(z)$:

$$R^{\hbar}_{12}(z_{12})F^{\eta}_{23}(z_{23}) - F^{\hbar}_{12}(z_{12})R^{\eta}_{23}(z_{23}) = -R^{\eta}_{13}(z_{13})F^{\hbar-\eta}_{12}(z_{12}) + F^{\eta-\hbar}_{23}(z_{23})R^{\hbar}_{13}(z_{13}), \tag{5.49}$$

где $F^{\alpha}_{ij}(z_{ij}) = \partial_{z_i}R^{\alpha}_{ij}(z_{ij})$. В соотношении (5.49) нет особенности в точке $\hbar = \eta$, и в ней оно принимает вид:

$$R^{\hbar}_{12}(z_{12})F^{\hbar}_{23}(z_{23}) - F^{\hbar}_{12}(z_{12})R^{\hbar}_{23}(z_{23}) = -R^{\hbar}_{13}(z_{13})F^{0}_{12}(z_{12}) + F^{0}_{23}(z_{23})R^{\hbar}_{13}(z_{13}), \tag{5.50}$$

где $F^{0}_{ij}(z_{ij}) = F^{\alpha}_{ij}(z_{ij})\mid_{\alpha\to 0}$ корректно определена.

Если продифференцировать разложение (5.45) по z_i, то получится, что:

$$F^{\hbar}_{ij}(z_{ij}) = \partial_{z_i}r_{ij}(z_{ij}) + \hbar\partial_{z_i}m_{ij}(z_{ij}) + \mathcal{O}(\hbar^2), \tag{5.51}$$

следовательно, подставляя здесь $\hbar \to 0$, получается:

$$F^{0}_{ij}(z_{ij}) = \partial_{z_i}r_{ij}(z_{ij}). \tag{5.52}$$

Классическое уравнение Янга-Бакстера есть замкнутое соотношение на классическую r-матрицу:

$$[r_{12}(z_{12}), r_{13}(z_{13})] + [r_{12}(z_{12}), r_{23}(z_{23})] + [r_{13}(z_{13}), r_{23}(z_{23})] = 0 \tag{5.53}$$

которое получается из квантового уравнения Янга-Бакстера разложением по $\hbar$. Дифференцируя его по z_1 и принимая во внимание кососимметричность r, можно получить соотношение:

$$[F^{0}_{12}(z_{12}), r_{13}(z_{13}) + r_{23}(z_{23})] = [F^{0}_{13}(z_{13}), r_{12}(z_{12}) + r_{32}(z_{32})] \tag{5.54}$$

которое связывает между собой разные слагаемые из третьего гамильтониана цепочки из основного текста работы.

Для доказательства корректности третьей R-матричнозначной пары Лакса используется вырождение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера при стремлении $\hbar \to \eta$:

$$R^{\hbar}_{12}(z_{12})R^{\hbar}_{23}(z_{23}) = R^{\hbar}_{13}(z_{13})r_{12}(z_{12}) + r_{23}(z_{23})R^{\hbar}_{13}(z_{13}) - \frac{\partial}{\partial\hbar}R^{\hbar}_{13}(z_{13}). \tag{5.55}$$

Определение R-матрицы Бакстера-Белавина.

Для построения R-матрицы Бакстера-Белавина [2, 3] необходимы следующие функции:

$$\varphi^{\hbar}_{\alpha}(z) = \exp\left(\tfrac{2\pi i\alpha_2 z}{N}\right)\phi\left(z, \tfrac{\hbar+\alpha_1+\alpha_2\tau}{N}\right), \quad \alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \tag{5.56}$$

и связанные с ними базисные $N\times N$-матрицы:

$$T_{\alpha} = \exp\left(\tfrac{\pi i\alpha_1\alpha_2}{N}\right)Q^{\alpha_1}\Lambda^{\alpha_2}, \tag{5.57}$$

где матрицы Q и Λ — матричные корни степени N из единицы, которые определяются своими матричными элементами:

$$Q_{jk} = \delta_{jk}\exp\left(\tfrac{2\pi i k}{N}\right),$$
$$\Lambda_{jk} = \begin{cases}1, & \text{если} \quad j+1=k \mod N\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Квантовая R-матрица Бакстера-Белавина в фундаментальном представлении определяется как:

$$R^{\hbar}(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_N^2} \varphi_{\alpha}^{\hbar}(z,\omega_{\alpha}) T_{\alpha}\otimes T_{-\alpha}, \tag{5.58}$$

В выбранной выше нормировке такая квантовая R-матрица удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера, а значит, для нее справедливы и все свойства, перечисленные в прошлом параграфе.

В частном случае $N = 2$, который важен для этой работы, эта R-матрица может быть переписана с использованием матриц Паули и $\theta_j(z)$-функций (5.38) — (5.41):

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_3, \tag{5.59}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \tag{5.60}$$

$$T_{(0,0)} = 1, \tag{5.61}$$

$$T_{(0,1)} = \Lambda = \sigma_1, \tag{5.62}$$

$$T_{(1,0)} = Q = -\sigma_3, \tag{5.63}$$

$$T_{(1,1)} = e^{\pi i/2} Q\Lambda = -i\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2, \tag{5.64}$$

В случае $N = 2$ квантовая R-матрица имеет вид:

$$R^{\hbar}(z) = \phi\left(z,\tfrac{\hbar}{2}\right) 1\otimes 1 + e^{\pi i z}\phi\left(z,\tfrac{\hbar+\tau}{2}\right)\sigma_1\otimes\sigma_1 + e^{\pi i z}\phi\left(z,\tfrac{\hbar+1+\tau}{2}\right)\sigma_2\otimes\sigma_2 + \phi\left(z,\tfrac{\hbar+1}{2}\right)\sigma_3\otimes\sigma_3, \tag{5.65}$$

Подставляя ϕ-функции через определение (5.5) и используя определения тэта-функций (5.38) — (5.41), можно получить:

$$\begin{aligned} R^{\hbar}(z) = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(z)}\cdot\Big(&\frac{\theta_1\left(z+\frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\hbar}{2}\right)} 1\otimes 1 + \frac{\theta_4\left(z+\frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_4\left(\frac{\hbar}{2}\right)}\sigma_1\otimes\sigma_1 + \\ &+\frac{\theta_3\left(z+\frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_3\left(\frac{\hbar}{2}\right)}\sigma_2\otimes\sigma_2 + \frac{\theta_2\left(z+\frac{\hbar}{2}\right)}{\theta_2\left(\frac{\hbar}{2}\right)}\sigma_3\otimes\sigma_3\Big) \end{aligned} \tag{5.66}$$

Классическая r-матрица и ее производная F^0, соответствующая этой квантовой:

$$r(z) = E_1(z)\cdot 1\otimes 1 + \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(z)}\cdot\left(\frac{\theta_4(z)}{\theta_4(0)}\sigma_1\otimes\sigma_1 + \frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)}\sigma_2\otimes\sigma_2 + \frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)}\sigma_3\otimes\sigma_3\right), \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned} F^0(z) = -E_2(z)\cdot 1\otimes 1 + \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(z)}\cdot\Big(&\frac{\theta_4(z)}{\theta_4(0)}\cdot(\partial_z\log\theta_4(z) - \partial_z\log\theta_1(z))\sigma_1\otimes\sigma_1 + \\ +\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)}(\partial_z\log\theta_3(z) - \partial_z\log\theta_1(z))\sigma_2\otimes\sigma_2 &+ \frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)}(\partial_z\log\theta_2(z) - \partial_z\log\theta_1(z))\sigma_3\otimes\sigma_3\Big) \end{aligned} \tag{5.68}$$

Список литературы

[1] M.Aguiar. Contemp.Math. 267 (2000) 1–29.

[2] R.J. Baxter.Ann.Phys. 70 (1972) 193–228.
R.J. Baxter., Ann. Phys. 76 (1973) 25–47.

[3] A.A. Belavin. Nucl. Phys. B 180 (1981) 189.

[4] F. Calogero. Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411–416.
F.Calogero. Lett. Nuovo Cim. 16 (1976) 77–80.

[5] J.D. Fay. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 352, Springer (1973)

[6] LD Faddeev, EK Sklyanin, LA Takhtajan. Theoretical and Mathematical Physics 40, (1980) 688

[7] G. Felder. Proc. of the ICM 94 (1994) 1247–1255. arXiv:hep-th/9407154

[8] J. Gervais, A. Neveu. Nucl.Phys.B238 125.

[9] F. Haldane. Phys.Rev.Lett. 60, 635 (1988)
B.S. Shastry. Phys.Rev.Lett. 60, 639 (1988)

[10] V. Inozemtsev. J.Stat.Phys. 59, 1143 (1990)
V. Inozemtsev. Phys.Part.Nucl. 34, 166 (2003)
J. Dittrich, V. Inozemtsev. Reg.Chaot.Dyn. 13, 19 (2008)

[11] I.M. Krichever. Funct.Anal.Appl. 14:4 (1980) 282–290

[12] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin, E.K. Sklyanin Letters in Mathematical Physics 5, (1981) 393-403

[13] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov. JHEP 10 (2014) 109. arXiv:1408.6246 [hep-th]
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov. Theoret. and Math. Phys. 184:1 (2015) 924–939. arXiv:1501.07351 [math-ph]

[14] J.Moser. Adv. Math. 16 (1975) 197–220.

[15] Д. Мамфорд. *Лекции о тэта-функциях.* Мир, (1988)

[16] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov. Phys. Rep. 71 (1981) 313–400.

[17] A. Polishchuk. *Classical Yang–Baxter Equation and the A_∞-Constraint.* Adv. in Math. 168:1 (2002) 56-95 open archive
A. Polishchuk. *A_∞-structures on an elliptic curve.* Commun.Math.Phys. 247 (2004) 527–551. arXiv:math/0001048 [math.AG]

[18] A.P.Polycronakos. Phys.Rev.Lett. 69, 703 (1992)

[19] I.Sechin, A.Zotov. Phys.Lett.B. 781, 1 (2018) arXiv:1801.08908

[20] E. Sklyanin. Alg.Anal. 6 (1994), 227 arXiv:9308060

[21] E.K. Sklyanin. Soviet Physics Doklady 24 (1979), 107

[22] A.Weil. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker.* Springer-Verlag (1976)

[23] C.N. Yang. *Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction.* Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315.