Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики
Кафедра "Теоретическая Астрофизика и Квантовая Теория Поля"

Выпускная квалификационная работа на соискание степени магистра

4d калибровочные теории в сильном 2d Ω-фоне

Выполнил студент 6 курса Сопенко Н.А.
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Горский А.С.

Москва, 2018

Содержание

1 Введение

Решение Зайберга-Виттена для 4d $\mathcal{N}=2$ калибровочных теорий является ярким примером точного низкоэнергетического описания теории в сильной связи. Используя аналитичность, описание в области слабой связи удается продолжить в область сильной, что порой приводит к драматическим последствиям при изменении вакуума теории. Так в чистой $SU(2)$ теории было открыто, что наивная сингулярность в пространстве вакуумов, отвечающая безмассовому W-бозону, и следующая из классического лагранжиана, расщепляется на две, приводя к тому, что при пересечении некоторой кривой маргинальной стабильности (КМС) W-бозон распадается на более легкие монополь и дион до того, как стать безмассовым.

Микроскопический вывод препотенциала был дан Некрасовым [1, 2]. Им был придуман Ω-фон $\mathbf{C}^2_{\epsilon_1,\epsilon_2}$, дающий умный способ ИК регуляризации теории, и сводящий вычисление интегралов по пространству модулей инстантонов к суммирования по (изолированным) неподвижным точкам действия некоторой группы, используя локализацию. Препотенциал Зайберга-Виттена при этом получается как лидирующий член от логарифма статсуммы в пределе $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$.

Решение Зайберга-Виттена тесно связано с классическими алгебраическими интегрируемыми системами [3, 4, 5, 6, 7, 8]. В частности кривая Зайберга-Виттена для заданной теории совпадает со спектрально кривой соответствующей интегрируемой системы, а пространство модулей вакуумов - с базой лиувиллевского расслоения. При этом включение двумерного Ω-фона с одним ненулевым параметром ϵ_1 приводит к квантованию интегрируемой системы, как было показано в [9, 10, 11]. Функция Янга-Янга, которая дает уравнение Бете-анзатца, при этом совпадает с твистованным суперпотенциалом эффективной 2d $\mathcal{N} = (2, 2)$, которая получается при компактификации на 2d Ω-фон с выбранным граничным условием на бесконечности, а квантовые состояния системы отвечают вакуумам этой эффективной теории. Эффективный твистованный суперпотенциал получается как лидирующий член от логарифма статсуммы в пределе $\epsilon_2 \to 0$.

Интересной особенностью квантовых многочастичных систем при некотором специальном выборе квантования является наличие экспоненциально малых по $\hbar$ щелей между разрешенными зонами энергий. Например, для чистой $U(2)$ калибровочной теории один из типов квантования ведет к хорошо известной спектральной задаче Матье, дающей спектр частицы в периодическом $\cos$-потенциале. Наличие этих щелей выглядит загадочным с точки зрения калибровочной теории. Четырехмерный W-бозон дает бесконечную башню мод в двумерии, и смотря на пертурбативную часть можно поспешно заключить, что в области щелей какая-то из мод становится безмассовой, приводя к логарифмической сингулярности в потенциале. Непертурбативная часть в свою очередь в стандартном разложении также имеет особенность в виде полюса в этой области в каждом члене разложения.

Задача данной работы описать физику происходящего вблизи этих щелей. Будет показано, что после процедуры пересуммирования непертурбативного препотенциала и комбинирования с пертурбативным, наивные логарифмические сингулярности исчезают, а вместо них появляются разрезы. Это приводит к тому, что W-бозонная мода распадается на более легкие частицы до того, как стать безмассовой, аналогично судьбе W-бозона в 4d теории, который распадается на монополь и дион в области сильной связи. Легким частицам в нашем случае отвечают солитоны между вакуумами, которые отвечают состояниям по разные стороны от щели.

Твистованный суперпотенциал для локального описания, как мы увидим, оказывается знакомым. Для $U(2)$ калибровочной теории он отвечает суперпотенциалу $\mathbf{CP}^1$ сигма-модели с твистованными массами, пропорциональными $\sim (2a - \hbar)$. Это совпадение позволяет нам сразу описать БПС спектр легких частиц, зная спектр $\mathbf{CP}^1$ модели [12, 13]. Мы также приведем аргументы, что для $U(N)$ соответсвующие локальные модели отвечают сигма-моделям на пространства флагов.

В литературе имеется несколько работ, так или иначе обращающихся к вопросу сингулярностей в твистованном суперпотенциале. В [14] процедура пересуммирования, используемая в этой работе, также была использована для конечно-зонных $\mathcal{N} = 2^*$ $U(2)$ калибровочных теорий. Сама эта процедура, известная в математической литературе под названием транс-асимптотического согласования, в более общем случае описана в [15]. В [16] обсуждалась статсумма полу-БПС поверхностных дефектов рядом с сингулярностями. Важно также отметить [17], где уравнение Матье рассматривалось как мини-суперпространственное приближение для теории синус-Гордона на цилиндре. Отсутствие наивных сигнулярностей в плоскости квази-импульса при этом имело следующую интерпретацию. Квази-импульс отвечал эффективному постоянному электрическому полю для солитонов, и возникновения разрезов вместо наивных логарифмических сингулярностей отвечало швингеровскому процессу.

Данная работа основана на [18] и организована следующим образом:

В **разделе 2** мы дадим краткий обзор статсуммы Некрасова и Бете/Калибровочного соответствия, а также сформулируем решаемую проблему.

В **разделе 3** мы обсудим низко-энергетическое описание эффективной 2d $\mathcal{N} = (2,2)$ теории, возникающей при редукции 4d $\mathcal{N} = 2$ $U(2)$ калибровочной теории в 2d Ω-фоне. Мы пересуммируем непертурбативный вклад в эффективный твистованный суперпотенциал и покажем, что наивные сингулярности по кулоновским параметрам превращаются в разрезы. Мы выделим локальный вклад в суперпотенциал вблизи разреза и обсудим к каким физическим последствиям он приводит.

В **разделе 4** мы обсудим обобщение результатов предыдущего раздела на случай $U(N)$ калибровочных теорий, а также опишем сигма-модели, возникающие в локальном описании вблизи особенностей.

2 Инстантонная статсумма и Бете/Калибровочное соответствие

В данном разделе мы дадим обзор Бете/Калибровочного соответствия [19, 20, 21, 9, 10, 11] и сформулируем решаемую проблему. Во всей работе мы рассматриваем лишь теории с калибровочной группой $U(N)$.

2.1 Инстантонная статсумма

Во-первых, напомним определение статсуммы Некрасова [1, 2] для четырехмерной $U(N)$ калибровочной теории в Ω-фоне $\mathbf{C}^2_{\epsilon,\hbar}$.

Пусть $\mathbf{a}$ обозначает набор комплексных скаляров, параметризующих пространство модулей вакуумов, $\mathbf{m}$ - набор масс для мультиплетов материи в фундаментальном представлении, Λ^{2N} - сгенерированный при размерной трансмутации масштаб, который является производящим параметром в статсумме по числу инстантонов.

Полная статсумма Некрасова имеет пертурбативный и непертурбативный вклад

$$Z(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar) = Z^{pert.}(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar) \times Z^{inst.}(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar) \tag{2.1}$$

Непертурбативный вклад, который можно вычислить используя эквивариантную локализацию на пространстве модулей инстантонов, описывается следующим образом. Определим

$$\mathcal{V}_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \sum_{(r,s)\in\lambda_i} e^{a_i+(r-1)\epsilon+(s-1)\hbar}, \quad \mathcal{W} = \sum_{i=1}^{N} e^{a_i}, \quad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^{N_f} e^{m_i} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{T}_\lambda = -\mathcal{M}\mathcal{V}^*_\lambda + \mathcal{W}\mathcal{V}^*_\lambda + e^{\epsilon+\hbar}\mathcal{V}_\lambda\mathcal{W}^* - (1-e^\epsilon)(1-e^\hbar)\mathcal{V}_\lambda\mathcal{V}^*_\lambda \tag{2.3}$$

Параметры ε, $\hbar$, $\mathbf{a}$ отвечают эквивариантным параметрам для действия пространственных вращений в двух действительных плоскостях $\mathbf{C}^2$ и для действия максимального тора $U(N)$ глобальной внутренней симметрии, соответственно. Сами выражения являются характерами слоев некоторых естественных расслоений на пространстве модулей инстантонов в фиксированных точках действия группы, параметризованных набором N диаграмм Юнга $\{\lambda_i\}$. В частности $\mathcal{T}_\lambda$ отвечает касательному расслоению. Операция $*$ меняет знак весов в характере:

$$\left(\sum_a e^{w_a}\right)^* = \sum_a e^{-w_a} \tag{2.4}$$

Тогда инстантонная статсумма имеет следующий вид

$$Z^{inst.}(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar) = \sum_{\{\lambda\}} \Lambda^{2N|\lambda|}\varepsilon(\mathcal{T}_\lambda) \tag{2.5}$$

где

$$\varepsilon(\sum_a e^{w_a} - \sum_b e^{w_b}) = \frac{\prod_b w_b}{\prod_a w_a} \tag{2.6}$$

символ, конвертирующий сумму характеров в произведение весов.

Пертурбативная часть имеет неоднозначность связанную с выбором граничных условий на бесконечности [22]. Она может быть записана как

$$Z^{pert.}(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar)=\Lambda^{-\frac{N}{\epsilon\hbar}\sum_{i=1}^{N}a_i^2}\varepsilon\left(\frac{e^{\epsilon+\hbar}(\mathcal{M}\mathcal{W}^{*}-\mathcal{W}\mathcal{W}^{*})}{(1-e^{\epsilon})(1-e^{\hbar})}\right) \tag{2.7}$$

но из-за того, что в фигурирующем характере имеется бесконечно много членов, это выражение необходимо регуляризовать. Первый член возникает от древесного вклада в статсумму, в то время как первый и второй члены в характере отвечают одно-петлевым вкладам мультиплетов материи и W-бозонов, соответственно.

Заметим, что пертурбативный вклад зависит от параметра инстантонного счета, т.к. он определяет бегущую константу связи τ.

2.2 Предел Некрасова-Шаташвили

Низко-энергетическое описание недеформированной Ω-фоном четырехмерной теории характеризуется препотенциалом, который получается пределом логарифма деформированной статсуммы

$$\mathcal{F}(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda)=\lim_{\epsilon,\hbar\to 0}\epsilon\,\hbar\log Z(\mathbf{a},\mathbf{m},\Lambda;\epsilon,\hbar) \tag{2.8}$$

Известно, что он связан с некоторой классической интегрируемой системой [3, 5]. В частности, пространство модулей вакуумов калибровочной теории совпадает с базой лиувиллевского расслоения для соответствующей системы. Для класса колчанный калибровочных теорий соответсвующие интегрируемые системы были найдены в [23].

В [11] была предложена деформация этого соответствия, которая ставит в соответствие двумерной эффективной теории, возникающей в пределе $\epsilon\to 0$, квантовую алгебраическую интегрируемую систему, в которой $\hbar$ играет роль параметра квантования.

Более точно, мы рассматриваем калибровочную теорию на $\mathbf{C}\times\mathbf{D}_\hbar$, где $\mathbf{D}_\hbar$ - сигароподобная геометрия [24]

$$ds^2=dr^2+f(r)d\theta^2, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r<\infty \tag{2.9}$$

$f(r)\sim r^2$ при $r\to 0$ и $f(r)\sim const$ при $r\to\infty$, с включенным Ω-фоном. После процедуры твистования, необходимой для сохранения части суперсимметрии, данная геометрия нарушает половину исходной суперсимметрии. После выбора граничных условий на $\mathbf{C}\times\partial\mathbf{D}_\hbar=\mathbf{C}\times S^1$, сохраняющих оставшуюся суперсимметрию, мы можем скомпактифицировать нашу четырехмерную теорию на сигару и получить двумерную $\mathcal{N} = (2,2)$ теорию на $\mathbf{C}$, низко-энергетическое описание которой характеризуется эффективным твистованным суперпотенциалом

$$\mathcal{W}(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \Lambda; \hbar) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log Z(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \Lambda; \hbar) \tag{2.10}$$

Пертурбативный вклад имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{pert.}(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \Lambda; \hbar) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log Z^{pert.}(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \Lambda; \epsilon, \hbar) = \\ -\frac{1}{2\hbar} \log\left(\frac{\Lambda^{2N}}{\hbar^{2N}}\right) \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i,j=1}^{N} \varpi_\hbar(a_i - a_j) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{N_f} \varpi_\hbar(a_i - m_a) \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\varpi_\hbar(x)$ определяется как

$$\frac{d}{dx} \varpi_\hbar(x) = \log \Gamma\left(1 + \frac{x}{\hbar}\right) = const. - \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{x + n\hbar}{\hbar}\right) \tag{2.12}$$

Одно-петлевой вклад $\varpi_\hbar(m)$ возникает как вклад в эффективный твистованный суперпотенциал от бесконечного числа мод, имеющих различный угловой момент в плоскости деформации, с параметрами массы $(m + n\hbar)$ для n-ой моды. Каждая мода дает киральный мультиплет в двумерной теории, отынтегрировав который мы имеем [1]

$$\Delta \mathcal{W}_n = -(m + n\hbar)\left[\log\left(\frac{m + n\hbar}{\hbar}\right) - 1\right] \tag{2.13}$$

После суммирования по n мы получим $\varpi_\hbar(m)$.

Если все параметры находятся в общем положении, то, вообще говоря, наша двумерная теория имеет бесконечно много локальных степеней свободы. Однако, все эти степени свободы градуированы по угловому моменту, и каждая единица углового момента добавляет $\hbar$ к массовому параметру данной степени свободы. Это аналогично тому, как при компактификации теории поля на окружность возникает башня Калуца-Клейновских мод, при этом параметр $\hbar$ играет роль обратного радиуса окружности.

В нашей системе имеется два естественных выбора граничных условий на бесконечности

$$\text{Type}\, A: \qquad \frac{a_i^D}{\hbar} = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{a}, \mathbf{m}, \Lambda; \hbar)}{\partial a_i} \in \mathbf{Z} \tag{2.14}$$

[1] Мы используем $\hbar$ в качестве размерного параметра 2d теории, характеризующего масштаб

$$\mathrm{Type}\, B: \qquad \frac{a_i}{\hbar} \in \mathbf{Z} + \frac{\theta_i}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \tag{2.15}$$

Тип A отвечает Неймановским граничным условиям для калибровочных полей, что приводит к динамическому векторному мультиплету в двумерии. Тип B в свою очередь отвечает граничным условиям Дирихле, которые фиксируют голономию вдоль границы сигары, параметризуемую θ_i, и замораживают калибровочные степени свободы. [2] Выбор граничных условий задает выбор квантования алгебраической интегрируемой системы.

Бете/Калибровочное соответствие утверждает, что вакуумы эффективной двумерной теории находятся во взаимно-однозначном соответствии с собственными состояниями гамильтонианов квантовой интегрируемой системы. Более того, средние вакуумные значения топологически-защищенных киральных наблюдаемых в данном вакууме, которыми являются следы степеней скаляра векторного мультиплета 4d калибровочной теории $\mathrm{Tr}\,\mathbf{\Phi}^k$, совпадают с собственными значениями гамильтонианов $\mathcal{H}_k$ для соответствующего этому вакууму собственного состояния

$$\langle vac|\mathcal{H}_k|vac\rangle \longleftrightarrow \langle \mathrm{Tr}\,\mathbf{\Phi}^k\rangle_{vac.} \tag{2.16}$$

В данной работе нас будет преимущественно интересовать периодическая A_{N-1} цепочка Тоды.

2.3 Периодическая система Тоды и $U(N)$ калибровочная теория

(Комплексифицированная) периодическая цепочка Тоды - это интегрируемая система N нерелятивистских частиц взаимодействующих с потенциалом

$$V(x_1, ..., x_N) = \Lambda^2 \sum_{i=1}^{N} e^{x_i - x_{i+1}}, \qquad x_{N+1} = x_1$$

где $x_i \in \mathbf{C}/(2\pi\mathbf{Z})$ - координаты, а $p_i \in \mathbf{C}$ - импульсы частиц. Коммутирующие гамильтонианы зашиты в уравнении спектральной кривой

$$\det(x - L(w)) = x^N + H_1 x^{N-1} + H_2 x^{N-2} + ... + H_N - \Lambda^N(z + z^{-1}) = 0 \tag{2.17}$$

[2] Можно рассматривать и более общие граничные условия, получаемые, например, калиброванием суперсимметричным образом некоторой 3d теории на $\mathbf{C} \times \partial\mathbf{D}_\hbar$ используя калибровочные поля нашей теории в балке [25].

где $L(z)$ - оператор Лакса

$$L(z) = \begin{pmatrix} p_1 & \Lambda^2 e^{x_1-x_2} & 0 & \dots & \dots & \Lambda^N z^{-1} \\ 1 & p_2 & \Lambda^2 e^{x_2-x_3} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_3 & \Lambda^2 e^{x_3-x_4} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & p_{N-1} & \Lambda^2 e^{x_{N-1}-x_n} \\ \Lambda^{2-N} e^{x_N-x_1} z & 0 & \dots & 0 & 1 & p_N \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Например, первые два гамильтониана имеют вид

$$H_1 = -\sum_{i=1}^{N} p_i \tag{2.19}$$

$$H_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} p_i p_j + V(x_1, ..., x_N) \tag{2.20}$$

Как хорошо известно, соответствующей 4d $\mathcal{N}=2$ калибровочной теорией для данной системы является чистая $U(N)$ теория. В частности, кривая Зайберга-Виттена данной теории совпадает со спектральной кривой интегрируемой системы [3, 4].

При квантовании системы гамильтонианы становятся дифференциальными операторами, действующими на волновые функции $\psi(x_1, ..., x_N)$, при этом $p_i = \hbar\partial_i$. Имеется два естественных квантования, которым в калибровочной теории отвечают граничные условия типа A и граничные условия типа B [11]. Тип A отвечает спектральной задаче $\psi(x_1 - \bar{x}, ..., x_N - \bar{x}) \in L^2(\mathbf{R}^{N-1})$ для $x_i \in \mathbf{R}$, где $\bar{x} = \sum_i^N x_i/N$ - координата центра масс. Спектр в данной задаче дискретен и параметризуется условиями $a_D/\hbar \in \mathbf{Z}$.

В данной работе нас интересует квантование типа B, отвечающее $x_i \in i\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ и квази-периодическим несингулярным волновым функциям

$$\psi(x_1, ..., x_a + 2\pi i, ..., x_N) = e^{i\theta_a}\psi(x_1, ..., x_N) \tag{2.21}$$

Параметры квази-периодичности $\theta_a \in [0, 2\pi)$ также известны как блоховские фазы. В частном случае $N = 2$, после отщепления центра масс, система сводится к поиску спектра уравнения Матье

$$-\hbar^2\psi''(x) + 8\Lambda^2\cos(2x)\psi(x) = 8u\psi(x) \tag{2.22}$$

где $u = \frac{1}{4}\langle \mathrm{Tr}\,\mathbf{\Phi}^2\rangle$. Для действительных Λ и $\hbar$ оно описывает частицу, движущуюся в периодическом $\cos$-потенциале. При фиксированных θ-параметрах спектр дискретен. Когда мы меняем значения этих параметров, заметаемые спектром значения гамильтонианов организуются в зоны, разделенные щелями. Для маленьких Λ между зонами имеется экспоненциально малые щели. Более точно, если $\theta_1 = ... = \theta_{k_1}; \theta_{k_1+1} = ... = \theta_{k_2}; ...; \theta_{k_m+1} = ... = \theta_{k_N}$, вместо наивной $\frac{N!}{k_1!k_2!...k_N!}$-вырожденности, которая имеется при $\Lambda = 0$, мы имеем невырожденный спектр из-за эффекта надбарьерного отражения на потенциале.

Второй тип квантования, более загадочен с точки зрения калибровочной теории. Когда $a_{ab}/\hbar \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, некоторые пертурбативные W-бозонные моды наивно становятся безмассовыми, что проявляется в появлении логарифмических сингулярностей в их вкладе в эффективный твистованный суперпотенциал. Таким образом, наивно эффективное низко-энергетическое описание должно ломаться в данной области параметров, как было замечено в [16]. Одна из основных целей это работы разрешить этот вопрос.

3 Эффективная двумерная теория поля для $U(2)$

В данном разделе мы анализируем эффективную двумерную $\mathcal{N} = (2,2)$ теорию, получающуюся при компактификации четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ $U(2)$ теории без материи на Ω-деформированную сигару, как было описано в предыдущем разделе.

Эффективный твистованный суперпотенциал зависит от единственного комплексного параметра a, задающего вакуум, и имеет следующий вид

$$\mathcal{W}(a, \Lambda; \hbar) = \mathcal{W}^{pert.}(a, \Lambda; \hbar) - \hbar\, F(\nu, q) \tag{3.1}$$

$$F(\nu, q) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\nu) q^{2k} \tag{3.2}$$

где мы ввели безразмерные переменные ν и q

$$\nu = \frac{2a}{\hbar}, \qquad q = \frac{\Lambda^2}{\hbar^2} \tag{3.3}$$

Пертурбативный вклад $\mathcal{W}^{pert.}$ в суперпотенциал

$$\mathcal{W}^{pert.}(a, \Lambda; \hbar) = -\frac{2a^2}{\hbar} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\hbar^2}\right) + \varpi_\hbar(2a) + \varpi_\hbar(-2a) \tag{3.4}$$

Первые несколько членов для $F_k(s)$ имеют вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(\nu) q^{2k} = \frac{2}{\nu^2 - 1} q^2 + \frac{5\nu^2 + 7}{(\nu^2-1)^3(\nu^2-4)} q^4 + \frac{16\left(9\nu^4 + 58\nu^2 + 29\right)}{3\left(\nu^2-1\right)^5\left(\nu^2-4\right)\left(\nu^2-9\right)} q^6 \\ + \frac{1469\nu^{10} + 9144\nu^8 - 140354\nu^6 + 64228\nu^4 + 827565\nu^2 + 274748}{2\left(\nu^2-4\right)^3\left(\nu^2-1\right)^7\left(\nu^2-9\right)\left(\nu^2-16\right)} q^8 + ... \tag{3.5}$$

Характерная особенность всех членов $F_k(s)$ в том, что они имеют полюса при ненулевых целых $s = n$ для $-k \leq n \leq k$. Как мы вскоре увидим, они являются лишь артефактами разложения по q.

Имеется единственный независимый киральный оператор с вакуумным значением $u = \frac{1}{4}\langle \mathrm{Tr}\, \mathbf{\Phi}^2 \rangle$. Это значение может быть выражено через суперпотенциал в данном вакууме используя квантовую версию соотношения Матона [26], [27], [28]

$$u = -\frac{\hbar}{8}\Lambda \frac{\partial \mathcal{W}(a, \Lambda; \hbar)}{\partial \Lambda} \tag{3.6}$$

Дуальный монопольный параметр a_D^M в нашей нормировке [3] имеет вид

$$a_D^M = i\frac{\hbar}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{W}(a, \Lambda; \hbar)}{\partial a} \tag{3.7}$$

При больших a, таких что $a \gg \Lambda$ и $a \gg \hbar$ инстантонные поправки подавлены и используя уравнения (3.4) и (2.12) мы получаем

$$a_D^M = i\frac{2a}{\pi}\log\frac{2a}{\Lambda} + O(a) \tag{3.8}$$

так как в этом пределе $\varpi_\hbar(x) = \frac{x^2}{2\hbar}\log\frac{x}{\hbar} + O(x)$

3.1 Уравнение Матье

Из вышесказанного следует, что нахождение вакуумного значения кирального оператора в различных вакуумах с граничными условиями типа B сводится к нахождению спектра уравнения Матье

$$-\psi''(x) + 8q\cos(2x)\psi(x) = \frac{8u}{\hbar^2}\psi(x) \tag{3.9}$$

с квази-периодическими условиями $\psi(x+\pi) = e^{\pi i \nu}\psi(x)$. Для действительных Λ и $\hbar$ спектр организуется в чередующийся набор зон и щелей с экспоненциально малыми ширинами зон при $u \approx -\Lambda^2$ и экспоненциально малыми ширинами щелей при $u \gg \Lambda^2$.

Т.к. $\pi\nu$ является блоховской фазой, $u(q,\nu)$ является периодичной функцией от ν на действительно оси с периодом 2. Эта периодичность не видна в разложении, которое получается при подстановке (3.5) в соотношение Матона (3.6). Например, когда мы меняем ν вдоль $[0, 2]$ и в конце интервала

[3] Нормировка выбирается так, что a и a_D^M совпадают с интегралами от формы Зайберга-Виттена $pdq = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{u - \Lambda^2\cos q}\; dq$ по A-циклу $[-\pi, \pi]$ и B-циклу $[\arccos u/\Lambda^2, 2\pi - \arccos u/\Lambda^2]$

должны вернуться обратно, мы встречаем наивную сингулярность в точке $\nu = 1$ в каждом члене разложения. Естественным объяснением периодичности является наличие разрезов вместо наивных полюсов, как показано на рисунке (1), с отождествлением разрезов вблизи $\nu = n$ и $\nu = -n$, чтобы сделать ее периодичной с периодом 2. Когда мы разлагаем по q мы теряем структуру разрезов и вместо этого получаем полюса в каждом члене разложения, т.к. ширина разрезов стремится к нулю, когда q стремится к нулю. Отождествление $\nu = n$ и $\nu = -n$ также естественно, т.к. ν пропорционально кулоновскому параметру a, который преобразуется под действием группы Вейля как $a \to -a$.

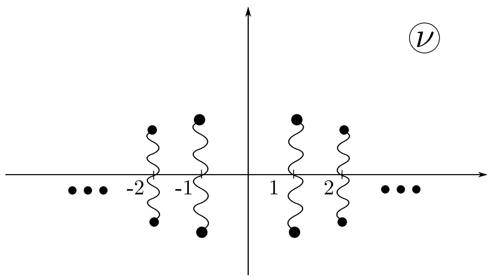

Рис. 1: На этом рисунке изображена структура разрезов функции $u(q, \nu)$. Каждый разрез вблизи $\nu = n$ склеивается с разрезом вблизи $\nu = -n$. В результате отождествления мы получаем поверхность бесконечного рода.

3.2 Пересуммирование

Чтобы получить информативное разложение для $F(\nu, q)$ вблизи разрезов, мы реорганизуем разложение по q также, как и в [14]

$$F(\nu, q) = \sum_{n>0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k^{(n)} \left(\frac{q^n}{n-\nu} \right) + g_k^{(n)} \left(\frac{q^n}{n+\nu} \right) \right] q^{2k-2+n} \tag{3.10}$$

где $g_k^{(n)}(z) = \mathcal{O}(z)$, а введенная переменная z

$$z = \frac{q^n}{n-\nu} \tag{3.11}$$

В чем смысл этого пересуммирования? С технической точки зрения, оно отвечает отдельному пересуммированию лидирующих сингулярностей (функция $g_1^{(n)}$) от каждого инстантонного сектора, затем от сублидирующих (функция $g_2^{(n)}$) и т. д. Как мы вскоре увидим, $\log q^n$ играет роль 2d Файет-Илиопулосовского (ФИ) параметра, где $n - \nu$ пропорционально массе легкой

W-бозонной моды. Комбинация $\log q^n - \log(n-\nu)$ в точности отвечает 2d эффективному ФИ параметру после отынтегрирования частиц массы $n-\nu$. Таким образом, это разложение реорганизует 4d инстантонное разложение в двойное разложение по 2d эффективным вихрям и 4d инстантонам.

Сравнивая первые члены разложения для (3.10) и (3.5) по q легко угадать анзатц для $g_k^{(n)}$

$$g_1^{(n)}(z) = \frac{\log\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{z^2}{\zeta_n^2}}\right) + 1 - \sqrt{1 + \frac{4z^2}{\zeta_n^2}}}{z} \tag{3.12}$$

для $k=1$ и

$$g_k^{(n)}(z) = \frac{\left(1 + \frac{4z^2}{\zeta_n^2}\right)^{\frac{5}{2}-k} Q_{2k-3}\left(z^2\right) + P_{k-1}\left(z^2\right)}{z^{2k-1}} \tag{3.13}$$

для $k>1$, где $\zeta_n = n!(n-1)!$ и $P_m(w)$, $Q_m(w)$ - некоторые полиномы степени m, свои для каждых значений n и k. Используя этот анзатц и тот факт, что $g_k^{(n)}(z) = \mathcal{O}(z)$, мы можем вычислять P и Q полиномы для любых заданных n и k, разлагая статсумму Некрасова до соответствующего порядка. Первые несколько $g_k^{(n)}$-функций приведены в приложении A.

После реорганизации разложения в таком виде мы улавливаем структуру разрезов, помня об отождествлении разрезов вблизи n и $-n$, как описано выше. В частности мы можем использовать это разложение для нахождения границ зон/щелей в разложении по q для $\nu \approx n$, используя соотношение Матона. Результат совпадает с известными выражениями (см. например [29])

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\hbar^2}{8}\left(-q + \frac{7}{4}q^3 - \frac{58}{9}q^5 + \frac{68687}{2304}q^7 + \ldots\right) \\ u_1^- &= \frac{\hbar^2}{8}\left(1 - 4q - 2q^2 + q^3 - \frac{1}{6}q^4 - \frac{11}{36}q^5 + \ldots\right) \\ u_1^+ &= \frac{\hbar^2}{8}\left(1 + 4q - 2q^2 - q^3 - \frac{1}{6}q^4 + \frac{11}{36}q^5 + \ldots\right) \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3 Локальные модели

Попытаемся теперь описать физику происходящего вблизи разреза. Рассмотрим предел большого Ω-фона $\hbar \gg \Lambda$ (или $q \ll 1$) вблизи первого разреза $m = (\hbar - 2a) \to 0$. Наивно, при больших $\hbar$ и a инстантонные поправки должны быть малы и важен лишь пертурбативный вклад

$$\mathcal{W}^{pert.}(a,\Lambda;\hbar) \approx -m\left[\log\left(\frac{m}{\hbar}\right)-1\right] + const. \tag{3.15}$$

который есть не что иное, как W-бозонной моды с единичным угловым моментом, которая наивно становится безмассовой при $2a = \hbar$. Однако, посмотрев на реорганизованное разложение непертурбативного вклада мы видим, что первый лидирующий член имеет тот же порядок по q, что и пертурбативный, и

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(a,\Lambda;\hbar) &\approx -m\left[\log\left(\frac{m}{\hbar}\right)-1\right] - q\hbar\, g_1^{(1)}\left(\frac{q}{1-\nu}\right) + const. \\ &= -m\log\left(\frac{m+\sqrt{m^2+\frac{4\Lambda^4}{\hbar^2}}}{2\hbar}\right) + \sqrt{m^2+\frac{4\Lambda^4}{\hbar^2}} + const. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Полезно рассмотреть на зеркально описание данной системы. Рассмотрим

$$\mathcal{W} = m(Y - t_{eff.}) + e^{-Y} + (\Lambda^4/\hbar^2)e^{Y}. \tag{3.17}$$

где $t_{eff.} = \log(\hbar^{-1})$. Если мы отынтегрируем поле Y мы вернемся к (3.16). Таким образом мы имеем зеркальное описание кирального мультиплета, деформированное оператором $(\Lambda^4/\hbar^2)e^{Y}$.

Можно дать физическую интерпретацию этого члена. Как хорошо известно оператор e^{-Y} отвечает оператору вихрей в зеркальном описании. Аналогично, e^{Y} отвечает оператору вихрей, но с отрицательным зарядом. В описании кирального мультиплета он не появляется в суперпотенциале, т.к. имеет неправильные квантовые числа. Однако, в нашей ситуации параметр $(\Lambda^4/\hbar^2)$ также имеет квантовые числа, и в комбинации с e^{Y} может дать вклады в суперпотенциал вида $(\Lambda^4/\hbar^2)^n e^{(2n-1)Y}$. В первом ненулевом порядке по инстантонному параметру мы имеем $(\Lambda^4/\hbar^2)e^{Y}$. Появление Λ^4, считающего инстантонный заряд, свидетельствует о том, что вихри с отрицательным зарядом также несут инстантонный заряд, и этот заряд, собственно, и позволяет вихрям иметь отрицательный заряд.

Любопытно, что подобная деформация появляется в локальной модели поверхностного оператора кирального дублета в чистой $SU(2)$ калибровочной теории, который получается калиброванием $SU(2)$ глобальной симметрии 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ кирального дублета на $\mathbf{C}\subset\mathbf{C}^2$ [30]. В этом случае, эффективный твистованный суперпотенциал дефекта, модифицированный теорией в балке,

$$\mathcal{W} = -\langle \mathrm{Tr}(m+\Phi)\big(\log(m+\Phi)-1\big)\rangle_{4d} \tag{3.18}$$

где m - твистованный массивный параметр для диагональной $U(1)$ симметрии дублета, а Φ - скаляр в векторном мультиплете теории в балке. Усреднение $\langle ... \rangle_{4d}$ легко сделать используя резольвенту [2]

$$R(x) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{x+\Phi} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2-2u)^2-4\Lambda^2}}, \tag{3.19}$$

которая дает

$$-\partial_m \mathcal{W} = \log \Lambda^2 + \operatorname{arccosh} \frac{m^2-2u}{2\Lambda^2} \tag{3.20}$$

и для больших m^2 и $2u \approx a^2$ близким к $2u \approx m^2$

$$-\partial_m \mathcal{W} \approx \log \Lambda^2 + \operatorname{arccosh} \frac{m-a}{\Lambda^2/a}. \tag{3.21}$$

Зеркальное описание в этой области имеет вид

$$\mathcal{W} = (m-a)Y + e^{-Y} - (\Lambda^4/4a^2)e^{Y} \tag{3.22}$$

Аналогично нашему случаю, пертурбативное 2d описание кирального дублета деформируется членом $(\Lambda^4/(4a^2))e^Y$, который появляется из-за инстантонов теории в балке. В данном случае источник этого оператора имеет простую интерпретацию в бранной конструкции этого дефекта [31] и появляется в микроскопическом выводе суперпотенциала [32, 33, 34].

3.4 Стенки маргинальной стабильности вблизи разрезов

Теперь мы можем сказать, что происходит с W-бозонной модой, которая наивно становится безмассовой вблизи $\nu \approx n$. Она должна исчезнуть из БПС спектра и распасться на другие стабильный БПС объекты.

Посмотрим еще раз на зеркальный суперпотенциал для нашей локальной модели (3.17) вблизи первого полюса. Вакуумное значение Y

$$Y^{(\pm,n)} = \log\left(\frac{-m \pm \sqrt{m^2 + \frac{4\Lambda^4}{\hbar^2}}}{\frac{2\Lambda^4}{\hbar^2}}\right) + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.23}$$

где $2\pi i n$ появляется из-за многозначности логарифмической функции. В исходном глобальном описании эти вакуумы отвечает расщепленным уровням вблизи $\nu \approx 1$ и лежат в двух соседних зонах. Используя методы [35], [36] несложно найти вырожденности БПС солитонов, соединяющих эти два вакуума. Однако, можно заметить, что наш локальный суперпотенциал совпадает с хорошо известным зеркальным описанием для $\mathbf{CP}^1$ сигма-модели с ненулевой твистованной массой, для которой БПС спектр уже был проанализирован в [12]. В самом деле, твистованный суперпотенциал для $\mathbf{CP}^1$ имеет вид (см. например [37])

$$\mathcal{W}_{\mathbf{CP}^1}(t,m) = \Sigma(Y_1 + Y_2 - 2t) + \frac{m}{2}(Y_1 - Y_2) + e^{-Y_1} + e^{-Y_2} \tag{3.24}$$

где t и m - кэлеров параметр $\mathbf{CP}^1$ и твистованная масса, соответственно. Отынтегрировав Σ и Y_2 мы получим

$$\mathcal{W}_{\mathbf{CP}^1}(t,m) = m(Y_1 - t) + e^{-Y_1} + e^{-2t}e^{Y_1} \tag{3.25}$$

что совпадает с (3.17) с точностью до константы, если $e^{-t} = \Lambda^2/\hbar$.

Переводя выводы [12] в наши обозначения, БПС спектр выглядит следующим образом. В области больших m имеется единственное состояние соединяющее $Y^{(\pm,n)}$ и $Y^{(\pm,n+1)}$ и башня однократных состояний, соединяющих $Y^{(+,n)}$ и $Y^{(-,n+k)}$. Первое имеет массу $|m|$ и отвечает W-бозонной моде. Последние в свою очередь отвечают солитонам, связанным с k W-бозонными модами. В области же малых m имеется всего два состояния, соединяющих $Y^{(-,n)}$ и $Y^{(+,n)}$. Массы этих частиц

$$M_{sol.} = \left| \frac{1}{2\pi}\frac{\Lambda^2}{\hbar}\left[4\sqrt{1+\frac{\hbar^2 m^2}{4\Lambda^4}} + \frac{\hbar m}{\Lambda^2}\log\left(\frac{m\hbar - \sqrt{4\Lambda^2 + m^2\hbar^2}}{m\hbar + \sqrt{4\Lambda^2 + m^2\hbar^2}}\right)\right]\right|. \tag{3.26}$$

и в пределе $m \to 0$

$$M_{sol.} = \left|\frac{2}{\pi}\frac{\Lambda^2}{\hbar}\right| \tag{3.27}$$

На кривой маргинальной стабильности (КМС) $|m| = 2M_{sol.}$ все состояния области больших m, включая W-бозонную моду, распадаются на эти две частицы.

Заметим, что электрический заряд (в единицах элементарного электрического заряда) W-бозона в 4d-теории равен 2, и электрический заряд всех остальных частиц целый в единицах W-бозонного. С другой стороны в эффективной 2d теории солитоны имеют заряд 1. Таким образом, эти солитоны не появляются из каких-либо других 4d БПС частиц при редукции, а возникают из-за сгенерированного 2d суперпотенциала.

Замечание. Можно задаться вопросом, почему в спектре 2d БПС частиц нет мод 4d частиц с ненулевым магнитным зарядом. По крайней мере в недеформированной теории в области больших u мы имеем целую башню из дионных частиц, но эффективный суперпотенциал не имеет монодромий ассоциированных с модами этих дионов. Ответ на этот вопрос состоит в том, что, как было показано в [24], тип квантования B отвечает граничным условиям Дирихле в калибровочной теории, и в результате поток магнитного поля через $\mathbf{S}^1_\infty \times \partial \mathbf{D}_\hbar$, где $\mathbf{S}^1_\infty$ - окружность на бесконечности, должен быть равен нулю, что запрещает появляться частицам с ненулевым магнитным зарядом. Аналогично, тип квантования A и граничные условия Неймана разрешают появляться лишь электрически нейтральным частицам.

Хотя наш анализ был сделан для первой щели $2a \to \hbar$, легко сделать тот же анализ вблизи других щелей при малых q. Мы опять будем получать пары солитонов с массами

$$M_n = \frac{2\hbar}{\pi} \frac{1}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Lambda^2}{\hbar^2} \right)^n \tag{3.28}$$

и n-ая W-бозонная мода будет распадаться на эти солитоны вблизи щели. Заметим, что при больших n мы имеем (3.8)

$$M_n \sim \exp\left(-\frac{2\pi |a_D^M|}{\hbar} \right) \tag{3.29}$$

Однако, наш анализ ограничен рассмотрением предела большого Ω-фона $\Lambda/\hbar \ll 1$ и лишь легких БПС частиц. В частности он ничего не говорит нам о режиме сильной связи в 4d теории $u \sim \Lambda^2$. Было бы интересно исследовать эту область, а также глобальную структуру БПС спектра.

4 Эффективная двумерная теория поля для $U(N)$

До сих пор мы рассматривали случай $U(2)$ калибровочной теории. Как было показано в предыдущем разделе, в сильном Ω-фоне вблизи разрезов возникает эффективное описание в виде $\mathcal{N} = (2,2)$ $\mathbf{CP}^1$ модели. В этом разделе мы обсудим обобщение на случай чистой $U(N)$ калибровочной теории.

При $N > 2$ имеется несколько разных видов сингулярностей, параметризуемых набором целых чисел $(k_1, ..., k_l)$, таких что $k_1 + ... + k_l = N$, как было описано в разделе 2. Эти сингулярности возникают при $a_1 = ... = a_{k_1}$, $a_{k_1+1} = ... = a_{k_2}$, ... , $a_{k_{l-1}+1} = ... = a_{k_l}$ и $(a_a - a_b) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Наивная вырожденность в этих сингулярностях $\frac{N!}{k_1!...k_l!}$.

Естественным кандидатом на локальное описание в области этих сингулярностей является $\mathcal{N} = (2,2)$ сигма-модель на пространство $\mathrm{Fl}_{(k_1,...,k_l)}$ флагов $\mathbf{C}^{k_1} \subset \mathbf{C}^{k_1+k_2} \subset ... \subset \mathbf{C}^N$. Тривиальной проверкой является тот факт, что наивная вырожденность сингулярностей совпадает с количеством вакуумов в этих сигма-моделях, а количество кулоновских параметров совпадает с количеством параметров твистованных масс. Однако, в этих сигма моделях

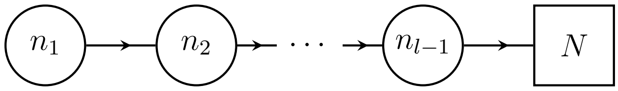

Рис. 2: Колчанная диаграмма для калиброванной линейной сигма-модели, которая дает сигма-модель на пространство флагов при низких энергиях.

мы также можем менять кэлеровы параметры, которых нет в предполагаемом локальном описании. Поэтому их необходимо специализировать в терминах Λ и $\hbar$.

Эффективный твистованный суперпотенциал сигма-модели легко получить, если смотреть на сигма-модель как на низко-энергетическое описание линейной калиброванной сигма-модели. Состав полей, имеющийся в этой линейной сигма-модели, удобно изображать колчанной диаграммой (2).

Круглый узел с n_s внутри на диаграмме отвечает векторному мультиплету для группы $U(n_s)$, где $n_s = k_1 + ...k_s$, а стрелка отвечает киральному мультиплету в бифундаментальном представлении. Последний квадратный узел отвечает фундаментальному киральному мультиплету с глобальной $U(N)$ симметрией с твистованными параметрами для тора $m_1, ..., m_N$, отвечающими твистованным массам сигма-модели. Кэлеровы параметры сигма-модели отвечают ФИ-параметрам t_s на каждом узле. Эффективный суперпотенциал имеет следующий вид [4]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(\sigma, \mathbf{m}, \mathbf{t}) = \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i=1}^{n_s} t_s \sigma_i^{(s)} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} (m_i - \sigma_j^{(l-1)}) \log \frac{(m_i - \sigma_j^{(l-1)})}{e} \\
- \sum_{s=1}^{l-2} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_{s+1}} (\sigma_i^{(s+1)} - \sigma_j^{(s)}) \log \frac{(\sigma_i^{(s+1)} - \sigma_j^{(s)})}{e} \\
+ \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i \neq j}^{n_s} (\sigma_i^{(s)} - \sigma_j^{(s)}) \log \frac{(\sigma_i^{(s)} - \sigma_j^{(s)})}{e}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где $\sigma_i^{(s)}$ - кулоновские параметры векторного мультиплета на s-ом узле. Решая вакуумные уравнения

$$
\exp \frac{\partial \mathcal{W}(\sigma, \mathbf{m}, \mathbf{t})}{\partial \sigma_i}\bigg|_{\sigma_*} = 1 \tag{4.2}
$$

[4] Здесь мы полагаем равным единице сгенерированный размерный масштаб 2d теории, который легко восстановить по размерности.

и минимизируя по σ, мы получаем эффективный твистованный суперпотенциал сигма-модели $\mathcal{W}_{SM}(\mathbf{m},\mathbf{t}) = \mathcal{W}(\sigma_*,\mathbf{m},\mathbf{t})$.

Мы ожидаем, что после должной спецификации $\mathbf{t}$ через Λ и $\hbar$ результат пересуммирования инстантонной статсуммы рядом с сингулярностью $\tilde{\mathbf{a}}$ будет даваться $\mathcal{W}_{SM}(\mathbf{m},\mathbf{t})$ с $m_i = \tilde{a}_i - a_i$. Ниже мы сделаем нетривиальную проверку этого утверждения для случая полных флагов $\mathrm{Fl}_{(1,\ldots,1)}$ рядом с $\tilde{a}_i = (i-1)\hbar$.

Для этого мы включим вторую Ω-деформацию четырехмерной теории с параметром ϵ, которая с точки зрения эффективной двумерной теории отвечает Ω-фону. Статсумма этой деформированной теории отвечает вихревой статсумме [38, 39, 40, 41] для эффективной теории. В пределе $\hbar \to \infty$ мы увидим, что эта вихревая статсумма совпадает с вихревой статсуммой для соответствующей сигма-модели.

Рассмотри Некрасовскую статсумму для чистой $U(N)$ теории с $a_s = (s-1)\hbar - m_s$ в пределе $\hbar \to \infty$ с фиксированным $z = \Lambda^{2N}/\hbar^{2N-2}$. Характер касательного расслоения в фиксированной точке λ

$$\mathcal{T}_\lambda^{pure} = \mathcal{W}\mathcal{V}_\lambda^* + e^{\epsilon+\hbar}\mathcal{V}_\lambda\mathcal{W}^* - (1-e^\epsilon)(1-e^\hbar)\mathcal{V}_\lambda\mathcal{V}_\lambda^* \tag{4.3}$$

Легко видеть, что лишь поднабор диаграмм с условием, что диаграмма λ_s имеет максимум $(N-s)$ строчек, дает ненулевой вклад. В самом деле, если это условие не выполнено, то количество членов в характере содержащих $\hbar$ в экспоненте становится таким, что после взятия ε-символа вклад такой диаграммы будет $o(\hbar^{2-2N})$.

Введем $k_i^{(s)} = \lambda_{i,s-i+1}$, $\sigma_i^{(s)} = m_i - \epsilon k_i^{(s)}$ и

$$z_s = \frac{(-1)^N z}{s!(s-1)!(N-s)!(N-s-1)!}$$

Тогда статсумма Некрасова имеет следующий вид

$$Z^{inst.} = \sum_{k_i^{(s)}\geq 0}\Bigg(\prod_{s=1}^{N-1} z_s^{\sum_i k_i^{(s)}} \times \prod_{s=1}^{N-1}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s+1}\frac{1}{(\sigma_j^{(s+1)} - \sigma_i^{(s)}; -\epsilon)_{k_i^{(s)} - k_j^{(s+1)}}} \times \prod_{s=1}^{N-1}\prod_{i\neq j}^{N}(\sigma_i^{(s)} - \sigma_j^{(s)}; -\epsilon)_{k_j^{(s)} - k_i^{(s)}}\Bigg) \tag{4.4}$$

где

$$(a;\epsilon)_n = \epsilon^n \frac{\Gamma(n + a/\epsilon)}{\Gamma(a/\epsilon)} = a(a+\epsilon)\ldots(a+(n-1)\epsilon)$$

и $\sigma_i^{(N)} = m_i$. Это выражение в точности совпадает с вихревой статсуммой для $\mathrm{Fl}_{(1,1,\ldots)}$ сигма-модели с экспоненцированным ФИ-параметром $z_i = e^{-t_i}$.

Первое произведение отвечает вкладу бифундаментальных киральных мультиплетов и фундаментального кирального мультиплета на последнем узле колчана. Второе произведение отвечает вкладу векторных мультиплетов.

В пределе $\epsilon \to 0$

$$Z^{inst.} \sim e^{\frac{1}{\epsilon}\mathcal{W}(\sigma,\mathbf{m},\mathbf{t})} \tag{4.5}$$

и, используя,

$$(a;\epsilon)_{(\sigma-a)/\epsilon} \sim e^{-\frac{1}{\epsilon}\left(a\log\frac{a}{\epsilon}-a\right)+\frac{1}{\epsilon}\left(\sigma\log\frac{\sigma}{\epsilon}-\sigma\right)} \tag{4.6}$$

мы получаем (4.1) из вихревой статсуммы с точностью до пертурбативного вклада. Последний получается из пертурбативного суперпотенциала $\mathcal{W}^{pert.}(\mathbf{a},\Lambda;\hbar)$.

5 Заключение

В данной работе мы анализировали поведение 4d $\mathcal{N}=2$ чистой $U(N)$ калибровочной теории в сильном Ω-фоне с граничным условиями Дирихле. Было показано, что в эффективной 2d теории W-бозонная мода в области $2a \approx \hbar$ вместо того, чтобы стать безмассовой, при пересечении некоторых стенок маргинальной стабильности распадается на солитонные частицы. При $N=2$ локальный эффективный твистованный суперпотенциал в этой области был отождествлен с твистованным суперпотенциалом $\mathbf{CP}^1$ - модели. Также были сделаны некоторые проверки того, что при $N>2$ локальные описания совпадают с сигма-моделями на пространства флагов.

Результаты нашей работы демонстрируют, что щелевая структура, возникающая в многочастичных квантовых задачах, тесно связана с 2d $\mathcal{N}=(2,2)$ сигма-моделями. Было бы интересно проанализировать другие примеры Бете/Калибровочного соответствия на предмет этой связи.

Наш анализ был по большей части локальным: мы рассматривали лишь область непосредственно вблизи разрезов при $\hbar \gg \Lambda$ и лишь самые легкие БПС частицы. Было бы интересно изучить глобальную структуру БПС спектра эффективной теории и области малых $\hbar$.

Приложения

A g-функции для чистой $U(2)$ теории

Приведем значения $g_k^{(n)}$-функций, появляющихся в основном тексте, для чистой $U(2)$ теории.

- $n = 1$

$$g_1^{(1)}(z) = -\frac{\sqrt{4z^2+1} - \log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{4z^2+1}+1\right)\right) - 1}{z} \tag{A.1}$$

$$g_2^{(1)}(z) = -\frac{(2-z^2)\sqrt{4z^2+1} - (3z^2+2)}{12z^3} \tag{A.2}$$

$$g_3^{(1)}(z) = -\frac{\frac{127z^4}{288} - \frac{z^2}{16} + \frac{\frac{11z^6}{180} - \frac{599z^4}{1440} + \frac{13z^2}{80} + \frac{1}{20}}{\sqrt{4z^2+1}} - \frac{1}{20}}{z^5} \tag{A.3}$$

$$g_4^{(1)}(z) = -\frac{-\frac{16985z^6}{20736} + \frac{1847z^4}{5184} - \frac{z^2}{64} + \frac{\frac{55z^{10}}{1008} + \frac{235z^8}{567} - \frac{191617z^6}{145152} - \frac{4343z^4}{36288} + \frac{71z^2}{448} + \frac{1}{42}}{(4z^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{42}}{z^7} \tag{A.4}$$

- $n = 2$

$$g_1^{(2)}(z) = -\frac{\sqrt{z^2+1} - \log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{z^2+1}+1\right)\right) - 1}{z} \tag{A.5}$$

$$g_2^{(2)}(z) = -\frac{8 - 8\sqrt{z^2+1}}{9z} \tag{A.6}$$

$$g_3^{(2)}(z) = -\frac{-\frac{3355z^2}{1728} - \frac{-\frac{11141z^4}{5184} - \frac{3679z^2}{1728} - \frac{3}{8}}{\sqrt{z^2+1}} - \frac{3}{8}}{z^3} \tag{A.7}$$

- $n = 3$

$$g_1^{(3)}(z) = -\frac{\sqrt{\frac{z^2}{36}+1} - \log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{z^2}{36}+1}+1\right)\right) - 1}{z} \tag{A.8}$$

$$g_2^{(3)}(z) = -\frac{3z^2 - 3z^2\sqrt{\frac{z^2}{36}+1}}{16z^3} \tag{A.9}$$

Список литературы

[1] Nikita A. Nekrasov. "Seiberg-Witten prepotential from instanton counting". B: *Adv. Theor. Math. Phys.* 7.5 (2003), c. 831—864. DOI: `10.4310/ATMP.2003.v7.n5.a4`. arXiv: `hep-th/0206161 [hep-th]`.

[2] Nikita Nekrasov и Andrei Okounkov. "Seiberg-Witten theory and random partitions". B: (2003). arXiv: `hep-th/0306238 [hep-th]`.

[3] A. Gorsky и др. "Integrability and Seiberg-Witten exact solution". B: *Phys. Lett.* B355 (1995), c. 466—474. DOI: `10.1016/0370-2693(95)00723-X`. arXiv: `hep-th/9505035 [hep-th]`.

[4] Emil J. Martinec и Nicholas P. Warner. "Integrable systems and supersymmetric gauge theory". В: *Nucl. Phys.* B459 (1996), с. 97—112. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00588-9. arXiv: hep-th/9509161 [hep-th].

[5] Ron Donagi и Edward Witten. "Supersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems". В: *Nucl. Phys.* B460 (1996), с. 299—334. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00609-5. arXiv: hep-th/9510101 [hep-th].

[6] A. Gorsky и др. "N=2 supersymmetric QCD and integrable spin chains: Rational case N(f) < 2N(c)". В: *Phys. Lett.* B380 (1996), с. 75—80. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00480-7. arXiv: hep-th/9603140 [hep-th].

[7] A. Gorsky, S. Gukov и A. Mironov. "Multiscale N=2 SUSY field theories, integrable systems and their stringy / brane origin. 1." В: *Nucl. Phys.* B517 (1998), с. 409—461. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00055-8. arXiv: hep-th/9707120 [hep-th].

[8] A. Gorsky, S. Gukov и A. Mironov. "SUSY field theories, integrable systems and their stringy / brane origin. 2." В: *Nucl. Phys.* B518 (1998), с. 689—713. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00106-0. arXiv: hep-th/9710239 [hep-th].

[9] Nikita A. Nekrasov и Samson L. Shatashvili. "Quantum integrability and supersymmetric vacua". В: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 177 (2009), с. 105—119. DOI: 10.1143/PTPS.177.105. arXiv: 0901.4748 [hep-th].

[10] Nikita A. Nekrasov и Samson L. Shatashvili. "Supersymmetric vacua and Bethe ansatz". В: *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 192-193 (2009), с. 91—112. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2009.07.047. arXiv: 0901.4744 [hep-th].

[11] Nikita A. Nekrasov и Samson L. Shatashvili. "Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories". В: *Proceedings, 16th International Congress on Mathematical Physics (ICMP09): Prague, Czech Republic, August 3-8, 2009.* 2009, с. 265—289. DOI: 10.1142/9789814304634_0015. arXiv: 0908.4052 [hep-th]. URL: https://inspirehep.net/record/829640/files/arXiv:0908.4052.pdf.

[12] N. Dorey. "The BPS spectra of two-dimensional supersymmetric gauge theories with twisted mass terms". В: *JHEP* 11 (1998), с. 005. DOI: 10.1088/1126-6708/1998/11/005. arXiv: hep-th/9806056 [hep-th].

[13] M. Shifman, A. Vainshtein и Roman Zwicky. "Central charge anomalies in 2-D sigma models with twisted mass". В: *J. Phys.* A39 (2006), с. 13005—13024. DOI: 10.1088/0305-4470/39/41/S13. arXiv: hep-th/0602004 [hep-th].

[14] Matteo Beccaria. “On the large Ω-deformations in the Nekrasov-Shatashvili limit of $\mathcal{N} = 2^*$ SYM”. B: *JHEP* 07 (2016), c. 055. DOI: 10.1007/JHEP07(2016)055. arXiv: 1605.00077 [hep-th].

[15] Ovidiu Costin. *Asymptotics and Borel summability*. CRC press, 2008.

[16] Saebyeok Jeong. “Splitting of surface defect partition functions and integrable systems”. B: (2017). arXiv: 1709.04926 [hep-th].

[17] Sergei L. Lukyanov. “Critical values of the Yang-Yang functional in the quantum sine-Gordon model”. B: *Nucl. Phys.* B853 (2011), c. 475—507. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2011.07.028. arXiv: 1105.2836 [hep-th].

[18] A. Gorsky, A. Milekhin и N. Sopenko. “Bands and gaps in Nekrasov partition function”. B: *JHEP* 01 (2018), c. 133. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)133. arXiv: 1712.02936 [hep-th].

[19] Gregory W. Moore, Nikita Nekrasov и Samson Shatashvili. “Integrating over Higgs branches”. B: *Commun. Math. Phys.* 209 (2000), c. 97—121. DOI: 10.1007/PL00005525. arXiv: hep-th/9712241 [hep-th].

[20] Anton A. Gerasimov и Samson L. Shatashvili. “Two-dimensional gauge theories and quantum integrable systems”. B: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, May 25-29 2007, University of Augsburg, Germany*. 2007. arXiv: 0711.1472 [hep-th]. URL: http://inspirehep.net/record/767222/files/arXiv:0711.1472.pdf.

[21] Anton A. Gerasimov и Samson L. Shatashvili. “Higgs Bundles, Gauge Theories and Quantum Groups”. B: *Commun. Math. Phys.* 277 (2008), c. 323—367. DOI: 10.1007/s00220-007-0369-1. arXiv: hep-th/0609024 [hep-th].

[22] Nikita Nekrasov. “BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson-Schwinger equations and qq-characters”. B: *JHEP* 03 (2016), c. 181. DOI: 10.1007/JHEP03(2016)181. arXiv: 1512.05388 [hep-th].

[23] Nikita Nekrasov и Vasily Pestun. “Seiberg-Witten geometry of four dimensional N=2 quiver gauge theories”. B: (2012). arXiv: 1211.2240 [hep-th].

[24] Nikita Nekrasov и Edward Witten. “The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory”. B: *JHEP* 09 (2010), c. 092. DOI: 10.1007/JHEP09(2010)092. arXiv: 1002.0888 [hep-th].

[25] Nikita Nekrasov, Vasily Pestun и Samson Shatashvili. “Quantum geometry and quiver gauge theories”. B: (2013). arXiv: 1312.6689 [hep-th].

[26] Marco Matone. “Instantons and recursion relations in N=2 SUSY gauge theory”. В: *Phys. Lett.* B357 (1995), с. 342—348. DOI: 10.1016/0370-2693(95)00920-G. arXiv: hep-th/9506102 [hep-th].

[27] Rainald Flume и др. “Matone’s relation in the presence of gravitational couplings”. В: *JHEP* 04 (2004), с. 008. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/04/008. arXiv: hep-th/0403057 [hep-th].

[28] A. Gorsky и A. Milekhin. “RG-Whitham dynamics and complex Hamiltonian systems”. В: *Nucl. Phys.* B895 (2015), с. 33—63. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2015.03.028. arXiv: 1408.0425 [hep-th].

[29] Gökçe Başar и Gerald V. Dunne. “Resurgence and the Nekrasov-Shatashvili limit: connecting weak and strong coupling in the Mathieu and Lamé systems”. В: *JHEP* 02 (2015), с. 160. DOI: 10.1007/JHEP02(2015)160. arXiv: 1501.05671 [hep-th].

[30] Davide Gaiotto, Sergei Gukov и Nathan Seiberg. “Surface Defects and Resolvents”. В: *JHEP* 1309 (2013), с. 070. DOI: 10.1007/JHEP09(2013)070. arXiv: 1307.2578.

[31] Davide Gaiotto. “Surface Operators in N = 2 4d Gauge Theories”. В: *JHEP* 1211 (2012), с. 090. DOI: 10.1007/JHEP11(2012)090. arXiv: 0911.1316 [hep-th].

[32] A. Gorsky и др. “Surface defects and instanton–vortex interaction”. В: *Nucl. Phys.* B920 (2017), с. 122—156. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.04.010. arXiv: 1702.03330 [hep-th].

[33] S. K. Ashok и др. “Surface operators, chiral rings and localization in $\mathcal{N}$ =2 gauge theories”. В: *JHEP* 11 (2017), с. 137. DOI: 10.1007/JHEP11(2017)137. arXiv: 1707.08922 [hep-th].

[34] S. K. Ashok и др. “Modular and duality properties of surface operators in N=2* gauge theories”. В: *JHEP* 07 (2017), с. 068. DOI: 10.1007/JHEP07(2017)068. arXiv: 1702.02833 [hep-th].

[35] Sergio Cecotti и Cumrun Vafa. “On classification of N=2 supersymmetric theories”. В: *Commun. Math. Phys.* 158 (1993), с. 569—644. DOI: 10.1007/BF02096804. arXiv: hep-th/9211097 [hep-th].

[36] Davide Gaiotto, Gregory W. Moore и Andrew Neitzke. “Wall-Crossing in Coupled 2d-4d Systems”. В: *JHEP* 12 (2012), с. 082. DOI: 10.1007/JHEP12(2012)082. arXiv: 1103.2598 [hep-th].

[37] Kentaro Hori и Cumrun Vafa. “Mirror symmetry”. В: (2000). arXiv: hep-th/0002222 [hep-th].

[38] Sergey Shadchin. “On F-term contribution to effective action”. B: *JHEP* 08 (2007), c. 052. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/08/052. arXiv: hep-th/0611278 [hep-th].

[39] Nikita A. Nekrasov. “Instanton partition functions and M-theory”. B: *Proceedings, 15th International Seminar on High Energy Physics (Quarks 2008): Sergiev Posad, Russia. May 23-29, 2008*. 2008. URL: http://quarks.inr.ac.ru/2008/proceedings/p5_FT/nekrasov.pdf.

[40] Tudor Dimofte, Sergei Gukov и Lotte Hollands. “Vortex Counting and Lagrangian 3-manifolds”. B: *Lett. Math. Phys.* 98 (2011), c. 225—287. DOI: 10.1007/s11005-011-0531-8. arXiv: 1006.0977 [hep-th].

[41] Nima Doroud и др. “Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories”. B: *JHEP* 05 (2013), c. 093. DOI: 10.1007/JHEP05(2013)093. arXiv: 1206.2606 [hep-th].