

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Комментарии к адиабатической теореме

(выпускная квалификационная работа бакалавра)

Выполнил:

Студент 424 группы
Трунин Дмитрий Алексеевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный

2018

Содержание

1	Введение	3
2	Случай постоянной частоты	5
2.1	Формулировка задачи	5
2.2	Двухточечные функции и пертурбативные поправки	7
2.3	Физические причины секулярного роста	9
2.4	Теорема Вика	10
3	Случай переменной частоты	13
3.1	Формулировка задачи	13
3.2	Случай неадиабатически изменяющейся частоты	15
3.3	Случай адиабатически изменяющейся частоты	18
4	Диаграммная техника	19
4.1	Краткое введение в диаграммную технику	19
4.2	Однопетлевые поправки	24
4.3	Двухпетлевые поправки	25
4.4	Поправки к вершинам	27
4.5	Перенормировка частоты	28
5	Заключение	31
	Список литературы	32

1 Введение

Как правило, в физике высоких энергий рассматривают замкнутые системы, то есть системы, параметры которых не зависят от внешних полей. В частности, считается, что медленно изменяющееся внешнее поле не может принести энергию в систему и изменить ее параметры — следовательно, такую систему можно рассматривать как замкнутую и работать в квазиклассическом приближении. Тем не менее, это приближение выполняется не всегда. Так, большинство работ, посвященных излучению Хокинга, используют квазиклассическое приближение [1, 2], однако последние исследования показывают, что нестационарность фонового гравитационного поля приводит к секулярному росту петлевых поправок к корреляционным функциям и не позволяет использовать теорию возмущений для расчетов [3]. Цель этой дипломной работы — точно показать, в каких обстоятельствах использование квазиклассического (древесного) приближения перестает быть оправданным.

Для исследования эволюции систем, помещенных во внешнее нестационарное поле, следует использовать неравновесную диаграммную технику Швингера-Келдыша, аналогичную фейнмановской диаграммной технике. Основы этого подхода заложил в 1961 году Джулиан Швингер [4], а в дальнейшем его развил советский физик Л.В. Келдыш [5]. Диаграммная техника Швингера-Келдыша находит множество применений в физике конденсированного состояния [6–15], космологии [16–26], физике ультррелятивистских столкновений тяжелых ионов [27–31], исследовании неравновесных явлений в сильных электрических полях [32–35] и так далее.

Здесь мы рассмотрим простейший пример нестационарной системы — нелинейный квантовомеханический осциллятор с переменной частотой и взаимодействием $\lambda\phi^4$. Поскольку множество систем (например, фоновые системы на баллистическом уровне) могут быть рассмотрены как наборы связанных осцилляторов, а свободное поле может быть представлено в виде бесконечного числа гармонических осцилляторов, эта задача является фундаментальной для исследования неравновесных явлений. С одной стороны, мы покажем, что в случае неадиабатически изменяющейся частоты заселенность энергетических уровней и аномальное квантовое среднее получают большие поправки; это подчеркивает, что адиабатичность внешнего воздействия играет важную роль даже для таких простых систем. С другой стороны, также мы покажем, что случай адиабатически изменяющейся частоты фактически не отличается от случая постоянной частоты, то есть от стационарного случая. Этот факт имеет отношение к широко известной адиабатической теореме из квантовой механики [36, 37].

Следует заметить, что в квантовой механике обычно рассматривают измерения, то есть воздействуют на систему внешним макроскопическим прибором и измеряют сколлапсировавшее состояние. Другими словами, обычно рассматривают волновую функцию системы и вычисляют вероятности перехода между ее собственными состояниями [38–40]. Как бы то ни было, в этой работе мы ограничимся квази-замкнутыми квантовомеханическими системами, то есть системами с самодействующим квантовым полем, в которых взаимодействие со внешним миром сводится исключительно к изменению частоты осциллятора. Другими словами, мы рассмотрим квантовую механику в качестве простейшего примера квантовой теории поля. Заметим кстати, что в низкоразмерных квантовых теориях поля инфракрасные расходимости, которые мы рассматриваем в данной работе, зачастую оказываются сильнее, чем в квантовых теориях поля более высоких размерностей [41, 42].

Мы разработаем диаграммную технику, которая позволяет вычислить петлевые поправки к так называемым келдышевскому, запаздывающему и опережающему пропагаторам и совпадает со стандартной диаграммной техникой из квантовой теории поля. Кроме того,

мы проверим результаты с помощью прямых вычислений, используя разложение оператора эволюции. На первый взгляд, неожиданно оказывается, что поправки к келдышевскому пропагатору растут со временем даже в случаях постоянной и адиабатически изменяющейся частоты. В то же время, этот пропагатор связан с заселенностью энергетических уровней и аномальным квантовым средним [8], поэтому следует ожидать, что благодаря адиабатической теореме он не будет получать растущие поправки в этих случаях. Действительно, мы покажем, что этот рост можно убрать, изменяя вакуумное состояние, причем новое состояние переходит в вакуумное состояние свободного гамильтониана в бесконечном прошлом и будущем. Заметим, что подобного роста нет в квантовой теории поля, он возникает только в квантовой механике.

Тем не менее, в случае неадиабатически изменяющейся частоты возникающий рост имеет под собой более фундаментальное основание. Несмотря на то, что вклад диаграмм типа “головастик”, которые дают линейный по λ рост поправок к пропагаторам, можно спрятать в перенормировку частоты, от вклада диаграмм типа “заходящее Солнце” избавиться подобным образом невозможно. В адиабатическом случае подобными вкладами можно было пренебречь, поскольку они давали меньшие по сравнению с “головастиками” степени расходимости по времени, однако в неадиабатическом случае ситуация ровно обратная, и рост поправок определяют именно диаграммы типа “заходящее Солнце”. Более того, такие поправки ведут себя как $\sim (\lambda T)^2$ при среднем времени двухточечной функции $T \rightarrow \infty$, то есть возникающая инфракрасная расходимость сильнее, чем расходимость в квантовой теории поля более высокой размерности, которая $\sim \lambda^2 T$. Вообще говоря, это общее свойство квантовых теорий поля низкой размерности [41, 42]. Наконец, подчеркнем, что подобного роста следовало ожидать, поскольку неадиабатичность временной зависимости частоты должна привносить энергию в систему.

Стоит отметить, что между неравновесной квантовой теорией поля и квантовой механикой имеются отличия. А именно, обычно в квантовой теории поля используют теорему Вика, чтобы построить диаграммную технику и вычислить поправки к корреляционным функциям в произвольном состоянии [43–45], а затем выводят с помощью этой техники кинетическое уравнение [6, 9, 10, 17–20]. В то же время, в квантовой механике теорема Вика работает только для вакуумного и теплового состояния из-за того, что выполнить усреднение по бесконечному пространственному объему невозможно [46–49]. Это значит, что с помощью стандартной диаграммной техники мы не можем просуммировать лидирующие вклады в поправки во всех петлях, вывести кинетическое уравнение и определить, как в действительности изменяется со временем заселенность уровней и аномальное квантовое среднее. Таким образом, для исследуемой системы вопрос пересуммирования остается открытым.

Основной текст работы состоит из трех частей, каждая из которых разбивается на 3–5 подразделов. В части 2 мы рассматриваем осциллятор с постоянной частотой и адиабатически включающимся и выключающимся взаимодействием $\lambda\phi^4$, обсуждаем физические причины секулярного роста и отличия от квантовой теории поля. В части 3 мы обращаемся к нестационарному случаю и рассматриваем случаи адиабатически и неадиабатически изменяющейся частоты по отдельности. В части 4 мы вводим диаграммную технику, показываем, что она дает правильные результаты для нескольких первых порядков по λ , вычисляем поправки к вершинам и обсуждаем перенормировку частоты.

2 Случай постоянной частоты

2.1 Формулировка задачи

Чтобы ввести используемые в данной работе обозначения, мы начнем рассмотрение задачи с простейшего случая нелинейного $\lambda\phi^4$ осциллятора с постоянной частотой [6, 7]:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) - \frac{\omega^2}{2} \phi^2(t) - \frac{\lambda}{4} \phi^4(t) \right]. \quad (1)$$

Лагранжиан и гамильтониан теории:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\omega^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad \text{и} \quad H = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (2)$$

Вводя лестничные операторы a и a^+ и раскладывая действительное скалярное поле $\phi(t)$ как

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a e^{i\omega t} + a^+ e^{-i\omega t} \right] = a f(t) + a^+ f^*(t), \quad (3)$$

мы получаем, что свободный гамильтониан принимает стандартную форму:

$$H_0(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{\omega^2}{2} \phi^2 = \omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

Здесь мы для краткости ввели следующее обозначение:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Следовательно, оператор эволюции свободной теории:

$$U_0(t_2, t_1) = T \exp \left[-i \int_{t_1}^{t_2} d\tau H_0(\tau) \right] = \exp \left[-i(t_2 - t_1) H_0 \right]. \quad (6)$$

Оператор взаимодействия в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} V(t) &= U_0^+(t, t_0) \left(\frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) U_0(t, t_0) = \frac{\lambda}{4} \left(U_0^+(t, t_0) \phi U_0(t, t_0) \right)^4 = \frac{\lambda}{4} \phi^4(t) = \\ &= \frac{\lambda}{4} \left(a^4 f^4(t) + (a^+)^4 f^{*4}(t) + 2B f^2(t) |f(t)|^2 + 2B^+ f^{*2}(t) |f(t)|^2 + 3A |f(t)|^4 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь t_0 — это время, после которого адиабатически включается самодействие $\lambda\phi^4$. Подчеркнем, что благодаря трансляционной инвариантности действия в случае постоянной частоты все вычисляемые величины зависят только от разности $t - t_0$, а не от моментов времени t и t_0 по отдельности. Следовательно, в этом разделе мы можем положить $t_0 = 0$ без потери общности. Кроме того, введем для удобства следующие обозначения для произведений лестничных операторов:

$$A = a a^+ a a^+ + a^+ a a^+ a, \quad B = a^3 a^+ + a^+ a^3. \quad (8)$$

Эти операторы имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} A|n\rangle &= (2n^2 + 2n + 1)|n\rangle, & A^+|n\rangle &= A|n\rangle = (2n^2 + 2n + 1)|n\rangle, \\ B|n\rangle &= (2n - 1)\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle, & B^+|n\rangle &= (2n + 3)\sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, введем обозначения (предполагая, что $t_1 \geq t_2$):

$$T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad \tau = t_1 - t_2. \quad (10)$$

Таким образом, оператор эволюции в представлении взаимодействия записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} U(t_b, t_a) &= T \exp \left[-i \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) \right] = 1 - i \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) + (-i)^2 \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) \int_{t_a}^{\eta} d\xi V(\xi) + \dots \equiv \\ &\equiv 1 + U_1(t_b, t_a) + U_2(t_b, t_a) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что он имеет следующие свойства:

$$U(t_a, t_b)U(t_b, t_c) = U(t_a, t_c), \quad U^+(t_a, t_b) = U(t_b, t_a). \quad (12)$$

Первую поправку к оператору эволюции легко можно вычислить точно:

$$\begin{aligned} U_1(t_b, t_a) &= \frac{\lambda}{64\omega^3} \left[a^{+4} \left(e^{-4i\omega t_b} - e^{-4i\omega t_a} \right) - a^4 \left(e^{4i\omega t_b} - e^{4i\omega t_a} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4B^+ \left(e^{-2i\omega t_b} - e^{-2i\omega t_a} \right) - 4B \left(e^{2i\omega t_b} - e^{2i\omega t_a} \right) - 12Ai\omega(t_b - t_a) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

К сожалению, число членов, которые содержат поправки к оператору эволюции, быстро увеличивается с ростом степени по λ . например, второй порядок содержит уже более сотни различных членов. Как бы то ни было, большинством из них можно пренебречь, если мы будем смотреть только на лидирующие вклады в растущие со временем выражения. Поэтому в данной работе мы будем рассматривать предел $T \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$:

$$\begin{aligned} U_1(t_{1/2}, 0) &= \left(\frac{-3i\lambda}{16\omega^3} \right) \cdot \omega T \cdot A + O(T^0), \\ U_1(t_2, t_1) &= O(T^0), \\ U_2(t_{1/2}, 0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-3i\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \cdot \omega^2 (T^2 \pm T\tau) \cdot A^2 - \\ &\quad - \frac{i}{12} \left(\frac{-3i\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \cdot \omega T \cdot \left[\frac{1}{3} (a^{+4} a^4 - a^4 a^{+4}) + \frac{8}{3} (B^+ B - B B^+) + \right. \\ &\quad \left. + (a^4 A e^{4i\omega t_{1/2}} - A a^4) + (4B A e^{2i\omega t_{1/2}} - 4AB) - \right. \\ &\quad \left. - (a^{+4} A e^{-4i\omega t_{1/2}} - A a^{+4}) - (4B^+ A e^{-2i\omega t_{1/2}} - 4AB^+) \right] + O(T^0), \\ U_2(t_2, t_1) &= O(T^0) \cdot O(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Этот предел относится к случаю, когда обе точки двухточечной корреляционной функции $\langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle$ уносятся на бесконечность, в то время как разность между ними удерживается постоянной. Мы рассматриваем этот предел, чтобы проверить, как состояние системы изменится со временем благодаря самодействию $\lambda\phi^4$.

2.2 Двухточечные функции и пертурбативные поправки

Вычислим корреляционную (вайтмановскую) функцию двух полей в n -ом собственном состоянии свободного гамильтониана $H_0|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$:

$$\begin{aligned} C(1, 2) &= \langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \langle n|U^+(t_1, 0)\phi(t_1)U^+(t, t_1)U(t, t_2)\phi(t_2)U(t_2, 0)|n\rangle = \\ &= \left\langle n \left| \left[1 + U_1(0, t_1) + U_2(0, t_1) + \dots \right] \phi(t_1) \left[1 + U_1(t_1, t_2) + U_2(t_1, t_2) + \dots \right] \phi(t_2) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[1 + U_1(t_2, 0) + U_2(t_2, 0) + \dots \right] \right| n \right\rangle = C_0(t_1, t_2) + C_1(t_1, t_2) + C_2(t_1, t_2) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы обозначили (напомним, что мы положили $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} C_0(1, 2) &\equiv \langle n|\phi_1\phi_2|n\rangle, \\ C_1(1, 2) &\equiv \langle n|U_1(0, 1)\phi_1\phi_2 + \phi_1U_1(1, 2)\phi_2 + \phi_1\phi_2U_1(2, 0)|n\rangle, \\ C_2(1, 2) &\equiv C_2^1(1, 2) + C_2^2(1, 2), \\ C_2^1(1, 2) &\equiv \langle n|U_1(0, 1)\phi_1U_1(1, 2)\phi_2 + U_1(0, 1)\phi_1\phi_2U_1(2, 0) + \phi_1U_1(1, 2)\phi_2U_1(2, 0)|n\rangle, \\ C_2^2(1, 2) &\equiv \langle n|U_2(0, 1)\phi_1\phi_2 + \phi_1U_2(1, 2)\phi_2 + \phi_1\phi_2U_2(2, 0)|n\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь мы для краткости обозначили $\phi(t_a) \equiv \phi_a$ и $C(t_a, t_b) \equiv C(a, b)$. Корреляторы $C_0(1, 2)$ и $C_1(1, 2)$ легко можно вычислить, в то время как сложность вычислений $C_2(1, 2)$ гораздо выше. Тем не менее, большинство возникающих в ходе расчетов членов подавлены в пределе $T \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$, а потому мы будем выделять только лидирующий вклад в корреляторы в этом пределе.

Таким образом, нулевой порядок:

$$C_0(1, 2) = nf_1^*f_2 + (n+1)f_1f_2^* = \frac{1}{2\omega} \left(n \exp(-i\omega\tau) + (n+1) \exp(i\omega\tau) \right). \quad (17)$$

Лидирующие вклады в первый порядок сокращают друг друга благодаря свойствам оператора A , поэтому в результате:

$$C_1(1, 2) = \frac{3i\lambda}{16\omega^3} \cdot \omega T \cdot \langle A\phi_1\phi_2 \rangle - \frac{3i\lambda}{16\omega^3} \cdot \omega T \cdot \langle \phi_1\phi_2A \rangle + O(T^0) = O(T^0), \quad (18)$$

то есть C_1 не растет при $T \rightarrow \infty$.

Вторая поправка в произвольном состоянии содержит огромное число членов. Поэтому мы сначала вычислим поправку в вакуумном состоянии свободного гамильтониана: $H_0|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle$, а потом обобщим результат на случай произвольного состояния. Удобно разбить вычисление на две части; первая часть:

$$\begin{aligned} C_2^1(1, 2) &= \left(\frac{3\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \cdot (\omega T)^2 \cdot \langle A\phi_1\phi_2A \rangle - \\ &\quad - \left(\frac{3\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \cdot \frac{i\omega T}{3} \cdot \left[\langle Aa^2B^+e^{2i\omega t_2} - Aa^2B^+ \rangle f_1f_2 - \langle ABA^{+2}e^{-2i\omega t_1} - ABA^{+2} \rangle f_1^*f_2^* \right] + \\ &\quad + O(T^0), \end{aligned} \quad (19)$$

и вторая часть:

$$\begin{aligned} C_2^2(1, 2) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda}{16\omega^2} \right)^2 \cdot \left[(T^2 + T\tau) \langle A^2\phi_1\phi_2 \rangle + (T^2 - T\tau) \langle \phi_1\phi_2A^2 \rangle \right] + \\ &\quad + \left(\frac{3\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \cdot \frac{i\omega T}{3} \cdot \left[\langle a^2B^+Ae^{2i\omega t_2} - a^2AB^+ \rangle f_1f_2 - \langle ABA^{+2}e^{-2i\omega t_1} - BAA^{+2} \rangle f_1^*f_2^* \right] + \\ &\quad + O(T^0). \end{aligned} \quad (20)$$

Можно заметить, что лидирующие вклады в эти выражения $\sim T^2$ сокращают друг друга. Тем не менее, C_2 все же растет линейно со временем при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} C_2(1, 2) &= -\frac{i\omega T}{3} \left(\frac{3\lambda}{16\omega^3} \right)^2 \langle a^2 AB^+ - Aa^2 B^+ \rangle (f_1 f_2 - f_1^* f_2^*) + O(T^0) = \\ &= 27i \cdot \frac{\lambda^2 T}{(2\omega)^5} (f_1^* f_2^* - f_1 f_2) + O(T^0). \end{aligned} \quad (21)$$

Выполняя похожие вычисления, можно получить, что в произвольном собственном состоянии n свободного гамильтониана:

$$C_2(1, 2) = (48n^3 + 72n^2 + 78n + 27) \cdot \frac{i\lambda^2 T}{(2\omega)^5} (f_1^* f_2^* - f_1 f_2) + O(T^0). \quad (22)$$

Чтобы вычислить $\langle \phi(t_2)\phi(t_1) \rangle$, следует сделать замену $t_1 \leftrightarrow t_2$, или, что то же самое, $T \rightarrow T$ и $\tau \rightarrow -\tau$. Тогда мы найдем выражения для келдышевского $D^K(t_1, t_2)$ и запаздывающего/опережающего (R/A) $D^{R/A}(t_1, t_2)$ пропагаторов:

$$\begin{aligned} D^K(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \langle \{ \phi(t_1), \phi(t_2) \} \rangle, \\ D^{R/A}(t_1, t_2) &= \pm \theta(\pm t_1 \mp t_2) \langle [\phi(t_1), \phi(t_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что

$$D^A(t_1, t_2) = D^R(t_2, t_1), \quad \text{то есть} \quad D^A(T, \tau) = D^R(T, -\tau). \quad (24)$$

Это значит, что запаздывающий и опережающий пропагаторы ведут себя одинаково в интересующем нас пределе, а потому мы будем всегда вычислять только запаздывающий пропагатор. Таким образом, мы немедленно получаем, что в вакуумном состоянии:

$$\begin{aligned} D_0^K(T, \tau) &= \frac{1}{2} (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) = \frac{1}{2\omega} \cos(\omega\tau), \\ D_1^K(T, \tau) &= O(T^0), \\ D_2^K(T, \tau) &= 27i \cdot \frac{\lambda^2 T}{(2\omega)^5} (f_1^* f_2^* - f_1 f_2) = 54 \frac{\lambda^2 T}{(2\omega)^6} \sin(2\omega T) + O(T^0), \\ D_0^R(T, \tau) &= \theta(\tau) (f_1 f_2^* - f_1^* f_2) = \theta(\tau) \frac{i}{\omega} \sin(\omega\tau), \\ D_1^R(T, \tau) &= D_2^R(T, \tau) = O(T^0). \end{aligned} \quad (25)$$

Подведем промежуточные итоги. В этом подразделе мы получили, что первая и вторая поправки к R/A пропагаторам не растут в пределе $T \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$, также как и первая поправка к келдышевскому пропагатору. В то же самое время, поправка к келдышевскому пропагатору второго порядка по λ в этом пределе все-таки растет. Другими словами, мы получили секулярный рост двухпетлевых поправок к келдышевскому пропагатору.

Кроме того, келдышевский пропагатор можно связать с заселенностью уровней $n = \langle a^+ a \rangle$ и аномальным квантовым средним $\kappa = \langle aa \rangle$, вычисляя выражение (23) напрямую:

$$D^K(t_1, t_2) = \left(n(T) + \frac{1}{2} \right) f_1 f_2^* + \kappa(T) f_1 f_2 + h.c. \quad (26)$$

Следовательно, секулярный рост келдышевского пропагатора связан с ростом этих выражений [8]. Как бы то ни было, в следующем подразделе 2.3 мы покажем, что этот рост можно убрать, переобределяя вакуумное состояние теории.

2.3 Физические причины секулярного роста

Вообще говоря, следует ожидать, что ни поправки к R/A пропагаторам, ни поправки к келдышевскому пропагатору не будут расти при $T \rightarrow \infty$, поскольку частота ω не зависит от времени, а константа взаимодействия λ меняется со временем адиабатически. В самом деле, заселенность уровней и аномальное квантовое среднее, которые являются компонентами келдышевского пропагатора, не должны получать большие поправки в рассматриваемом случае в силу адиабатической теоремы [36, 37]. В этом подразделе мы проясним причины найденного роста, который кажется неестественным в свете этой теоремы. Чтобы сделать это, модифицируем вакуумное состояние свободного гамильтониана H_0 :

$$|\Omega\rangle = \mu_0|0\rangle + \mu_1|1\rangle + \mu_2|2\rangle + \dots \quad (27)$$

Условие нормировки этого состояния на единицу $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$ дает:

$$|\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + \dots = 1, \quad (28)$$

а корреляционные функции изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C^\Omega(1, 2) &= \langle\Omega|U^+(1, 0)\phi_1U(1, 2)\phi_2U(2, 0)|\Omega\rangle = \langle\Omega|\dots|\Omega\rangle = \\ &= |\mu_0|^2\langle 0|\dots|0\rangle + |\mu_1|^2\langle 1|\dots|1\rangle + |\mu_2|^2\langle 2|\dots|2\rangle + \mu_0\mu_2^*\langle 2|\dots|0\rangle + \mu_0^*\mu_2\langle 0|\dots|2\rangle + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Мы ограничимся первыми двумя порядками разложения состояния, поскольку этого достаточно для понимания поведения выражений в порядке λ^2 . Будем называть первые три члена в (29) “диагональными”, а последние два члена — “недиагональными”, подчеркивая их различную природу. Разложим корреляционную функцию по степеням λ таким же образом, как и в предыдущем подразделе (16): $C^\Omega(1, 2) = C_0^\Omega(1, 2) + C_1^\Omega(1, 2) + C_2^\Omega(1, 2) + \dots$, заменяя во всех выражениях состояние $|n\rangle$ на состояние $|\Omega\rangle$. Напомним, что диагональные вклады в поправки C_0 и C_1 уже были вычислены ранее (17), (18). Подставляя эти выражения в формулу (29), получаем:

$$\begin{aligned} C_0^\Omega(1, 2) &= |\mu_0|^2 f_1 f_2^* + |\mu_1|^2 (2f_1 f_2^* + f_1^* f_2) + \\ &\quad + |\mu_2|^2 (3f_1 f_2^* + 2f_1^* f_2) + \sqrt{2}(\mu_0 \mu_2^* f_1^* f_2^* + \mu_0^* \mu_2 f_1 f_2) + \dots, \\ C_1^\Omega(1, 2) &= 9\sqrt{2} \frac{i\lambda T}{(2\omega)^2} \cdot (\mu_0 \mu_2^* f_1^* f_2^* - \mu_0^* \mu_2 f_1 f_2) + O(T^0) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что поправка C_1^Ω пропорциональна T из-за недиагональных элементов, входящих в выражение (29). Диагональная поправка второго порядка C_2^Ω равняется

$$C_2^{\Omega, \text{diagonal}}(1, 2) = (27|\mu_0|^2 + 225|\mu_1|^2 + 855|\mu_2|^2 + \dots) \cdot \frac{\lambda^2 T}{(2\omega)^5} \cdot (f_1^* f_2^* - f_1 f_2) + O(T^0), \quad (31)$$

а недиагональная поправка —

$$C_2^{\Omega, \text{off-diagonal}}(1, 2) = -\frac{81}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^2 T^2}{(2\omega)^4} \cdot (\mu_0 \mu_2^* f_1^* f_2^* + \mu_0^* \mu_2 f_1 f_2) + O(\mu_0 \mu_2 T) + \dots \quad (32)$$

Если мы выберем коэффициенты μ_i следующим образом:

$$\mu_0 = 1 - \frac{1}{(6\omega T)^2}, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{-i}{3\sqrt{2} \cdot \omega T}, \quad (33)$$

то мы получим, что и первая, и вторая поправки к корреляционной функции C^Ω больше не растут при $T \rightarrow \infty$. В то же время, можно заметить, что $\mu_0 \rightarrow 1$ и $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$ в пределе $T \rightarrow \infty$, то есть новое вакуумное состояние переходит в вакуумное состояние свободного гамильтониана $|\Omega\rangle \rightarrow |0\rangle$ в бесконечном прошлом и будущем. Таким образом, секулярный рост (21) можно убрать, переопределяя вакуумное состояние на прошлой и будущей бесконечностях. Это становится возможным из-за быстрого роста недиагональных поправок, которые сокращают рост диагональных вкладов C^Ω в одном и том же порядке по λ . Именно поэтому коэффициенты (33) не зависят от λ , хотя обычно такая зависимость возникает естественным образом (например, в теории возмущений). Вообще говоря, можно проверить, что в порядке λ^n ($n \geq 1$) диагональный вклад $C_n^{\Omega, \text{diagonal}} \sim T^{n-1}$, а недиагональный — $C_n^{\Omega, \text{off-diagonal}} \sim T^n$. Следовательно, с помощью похожей замены можно убрать секулярный рост не только во втором, но и в произвольном порядке. Наконец, подчеркнем, что выражение (33) следует рассматривать только в пределе $T \rightarrow \infty$, и никакой расходимости при $T \rightarrow 0$ на самом деле нет.

Таким образом, рост поправки второго порядка (21) связан с недиагональными элементами, которые возникают из-за эволюции свободного состояния теории:

$$U(t, 0)|0\rangle = |0\rangle - \frac{3\lambda t}{16\omega^2}|0\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{3\lambda t}{16\omega^2}\right)^2|0\rangle - \frac{i}{12}\left(\frac{3\lambda}{16\omega^3}\right)^2 \omega t \left[56|0\rangle + 12\sqrt{2}(e^{-2i\omega t} - 13)|2\rangle + \sqrt{24}(e^{-4i\omega t} - 41)|4\rangle \right]. \quad (34)$$

В самом деле, в выражении (21) выживают только такие средние, которые содержат операторы B и B^+ , что указывает на эволюцию вакуумного состояния $|0\rangle$ в вакуумное состояние $|2\rangle$. Другими словами, рост петлевых поправок к келдышевскому пропагатору возникает из-за “выскакивания” из вакуумного состояния свободного гамильтониана в результате включения самодействия $\lambda\phi^4$.

Подчеркнем, что похожие поправки к корреляционным функциям также возникают в квантовой теории поля. Тем не менее, обычно от таких вкладов избавляются с помощью перенормировки массы и константы связи теории, а не прямого переопределения вакуумного состояния [48–50]. В подразделе 4.5 мы покажем, что в случае неадиабатически изменяющейся частоты можно выполнить подобную перенормировку, чтобы избавиться от определенного типа петлевых поправок, однако в случае постоянной (1) и адиабатически изменяющейся (49) частоты этот подход заведомо обречен на провал. В самом деле, вторая поправка к корреляционной функции (21) содержит члены вида $f_1 f_2$ и $f_1^* f_2^*$, которые отсутствуют в нулевом порядке (17). Следовательно, такие члены принципиально нельзя получить, изменяя частоту в (17), а потому необходимо переопределять вакуумное состояние теории.

Наконец, подчеркнем, что такие вклады как (21) запрещены в квантовой теории поля из-за законов сохранения энергии и импульса [51].

2.4 Теорема Вика

В этом подразделе мы рассмотрим теорию действительного скалярного массивного поля в $3 + 1$ измерениях и обсудим ее отличия от квантовой механики в $0 + 1$ измерениях (1). Для этого мы просто повторим стандартные выводы из учебников, чтобы подчеркнуть различия. Рассмотрим следующее действие:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right]. \quad (35)$$

Как обычно, мы переходим в представление взаимодействия: $\phi(x) = e^{iH_0 t} \phi(\vec{x}) e^{-iH_0 t}$, где H_0 — это гамильтониан, а $U_0(t, 0) = e^{-iH_0 t}$ — оператор эволюции свободной теории. Затем мы квантуем поле в выбранный момент времени t_0 следующим образом [48]:

$$\phi(t_0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\vec{p}\vec{x}} + a_p^+ e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right), \quad (36)$$

и получаем для произвольного момента времени:

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-iH_0(t-t_0)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^+ e^{ipx} \right). \quad (37)$$

Здесь a_p^+ — это оператор повышения, а a_p — оператор уничтожения, которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_p, a_q^+] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad [a_p, a_q] = [a_p^+, a_q^+] = 0. \quad (38)$$

Математически более удобно сначала рассмотреть поле в конечном объеме \mathcal{V} , а затем перейти к пределу $\mathcal{V} \rightarrow \infty$:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2E_p \mathcal{V}}} a_p e^{-ipx} + \sum_p \frac{1}{\sqrt{2E_p \mathcal{V}}} a_p^+ e^{ipx}. \quad (39)$$

Важное свойство квантовой теории поля — это теорема Вика, которая позволяет значительно упростить вычисление поправок к корреляционным функциям [43–46]. Как бы то ни было, в квантовой механике этой теоремой следует пользоваться с осторожностью, поскольку ее доказательство использует усреднение по бесконечному пространственному объему. В самом деле, рассмотрим для примера следующее среднее от четырех полей:

$$\langle \phi^+(x_1) \phi^+(x_2) \phi^-(x_3) \phi^-(x_4) \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}^2} \sum_{p_1 \dots p_4} \langle a_{p_1} a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4}^+ \rangle \exp(\dots), \quad (40)$$

где мы обозначили произведение соответствующих экспонент как $\exp(\dots)$, а суммирование выполняется по всем четырем импульсам. В этой сумме от нуля отличны только такие выражения, которые содержат одинаковое число операторов a_p и a_p^+ . Поэтому сумму по четырем импульсам можно свести к сумме по двум импульсам, а затем разбить выражение на произведение двух средних:

$$\langle a_{p_1} a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4}^+ \rangle \rightarrow \langle a_{p_1} a_{p_3}^+ \rangle \langle a_{p_2} a_{p_4}^+ \rangle + \langle a_{p_1} a_{p_4}^+ \rangle \langle a_{p_2} a_{p_3}^+ \rangle \rightarrow (\delta_{p_1, p_3} \delta_{p_2, p_4} + \delta_{p_1, p_4} \delta_{p_2, p_3}) \langle a_{p_1} a_{p_1}^+ \rangle \langle a_{p_2} a_{p_2}^+ \rangle. \quad (41)$$

Получаем, что в пределе $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ это выражение остается конечным, поскольку обе суммы следует заменить на интегралы $\sum_p \rightarrow \int \frac{\mathcal{V} d^3 p}{(2\pi)^3}$:

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2} \sum_{p_1, p_2} \langle a_{p_1} a_{p_1}^+ \rangle \langle a_{p_2} a_{p_2}^+ \rangle \exp(\dots) \longrightarrow \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \langle a_{p_1} a_{p_1}^+ \rangle \langle a_{p_2} a_{p_2}^+ \rangle \exp(\dots). \quad (42)$$

С другой стороны, в сумме (40) есть ненулевые члены другого типа, которые возникают, когда совпадают все четыре импульса. Впрочем, в пределе $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ такие выражения стремятся к нулю:

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2} \sum_p \langle a_p a_p a_p^+ a_p^+ \rangle \exp(\dots) \longrightarrow \frac{1}{\mathcal{V}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \langle a_p a_p a_p^+ a_p^+ \rangle \exp(\dots) \sim \frac{1}{\mathcal{V}} \rightarrow 0, \quad (43)$$

а следовательно, сумма (40) сводится к сумме произведений попарных сверток. Таким образом, четырехточечная корреляционная функция раскладывается следующим образом:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \phi_4 \rangle + \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \langle \phi_2 \phi_4 \rangle + \langle \phi_1 \phi_4 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle, \quad (44)$$

где мы для краткости обозначили $\phi(x_a) \equiv \phi_a$. Аналогичные рассуждения можно применить и при вычислении n -точечной корреляционной функции.

Подчеркнем, что в ходе доказательства мы не предполагали, что усреднение производится по вакуумному состоянию. В действительности оно с тем же успехом будет работать и для более общего случая, когда усреднение производится по произвольным когерентным состояниям. В этом случае присутствие бесконечного пространственного объема также позволяет выбросить члены вида (43) — следовательно, выживать будут только такие выражения, которые можно свести к произведениям попарных средних.

С другой стороны, при наличии ограничений на состояния, по которым производится усреднение, для доказательства теоремы Вика не нужно требовать, чтобы $\mathcal{V} \rightarrow \infty$. Другими словами, любую n -точечную функцию Грина в квантовой теории поля можно разложить на произведение двухточечных функций даже при $\mathcal{V} < \infty$. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [46]. Еще раз подчеркнем, что в этом случае общность теоремы теряется — например, в указанной работе рассматривается только вакуумное и тепловое состояние, тогда как приведенное выше доказательство работает для произвольных состояний.

Приведем здесь пример более простого доказательства теоремы Вика, которое избегает понятие пространственного объема как такового, но ограничивается рассмотрением только вакуумных средних [47–49]. Докажем по индукции следующее утверждение:

$$\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m = \mathcal{N} \left\{ \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m + \left(\begin{array}{c} \text{все возможные} \\ \text{попарные свертки} \end{array} \right) \right\}, \quad (45)$$

где $\mathcal{N}\{\cdots\}$ — это нормальное упорядочивание. Определим свертку двух полей как $\phi_a^\bullet \phi_b^\bullet \equiv [\phi_a^+, \phi_b^-]$. Определенное таким образом выражение является c -числом и совпадает с вакуумным средним $\phi_a^\bullet \phi_b^\bullet = \langle \phi_a \phi_b \rangle$ (разумеется, это верно *только* для вакуумных средних). В случае двух полей равенство (45) очевидным образом выполняется. Затем нам понадобится следующее тождество:

$$\underbrace{\phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{i-1}^- \phi_i^+ \phi_{i+1}^+ \cdots \phi_m^+}_{\text{нормально-упорядоченное произведение}} \phi_{m+1}^- = \phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{i-1}^- [\phi_i^+, \phi_{m+1}^-] \phi_{i+1}^+ \cdots \phi_m^+ + \phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{i-1}^- \phi_i^+ [\phi_{i+1}^+, \phi_{m+1}^-] \cdots \phi_m^+ + \cdots + \phi_1^- \phi_2^- \cdots \phi_{i-1}^- \phi_i^+ \phi_{i+1}^+ \cdots [\phi_m^+, \phi_{m+1}^-]. \quad (46)$$

Следовательно, умножая обе части выражения (45) на оператор ϕ_{m+1} , разделяя ϕ_{m+1} на положительную и отрицательную части (39) и переставляя операторы в правой части так, чтобы получить нормально упорядоченное произведение, мы делаем шаг индукции. Наконец, при усреднении тождества (45) по вакуумному состоянию благодаря определению нормального упорядочивания выживают только полностью свернутые выражения. Следовательно, мы получаем разложение, аналогичное разложению (44).

Это значит, что в квантовой механике теорему Вика тоже можно использовать, но только для вакуумных (и тепловых) состояний. Например, проверим, что она работает для четырех-

точечной корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle &= f_1f_2^*f_3f_4^* + 2f_1f_2f_3^*f_4^*, \\ \langle 0|\phi_1\phi_2|0\rangle\langle 0|\phi_3\phi_4|0\rangle + \langle 0|\phi_1\phi_3|0\rangle\langle 0|\phi_2\phi_4|0\rangle + \langle 0|\phi_1\phi_4|0\rangle\langle 0|\phi_2\phi_3|0\rangle &= f_1f_2^*f_3f_4^* + 2f_1f_2f_3^*f_4^*. \end{aligned} \quad (47)$$

Легко видеть, что равенство действительно выполнено. Тем не менее, для состояний, отличных от вакуумных, это не так:

$$\begin{aligned} \langle 2|\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|2\rangle &= 12f_1f_2f_3^*f_4^* + 9f_1f_2^*f_3f_4^* + 6f_1f_2^*f_3^*f_4 + 6f_1^*f_2f_3f_4^* + 4f_1^*f_2f_3^*f_4 + 2f_1^*f_2^*f_3f_4, \\ \langle 2|\phi_1\phi_2|2\rangle\langle 2|\phi_3\phi_4|2\rangle + \langle 2|\phi_1\phi_3|2\rangle\langle 2|\phi_2\phi_4|2\rangle + \langle 2|\phi_1\phi_4|2\rangle\langle 2|\phi_2\phi_3|2\rangle &= \\ &= 18f_1f_2f_3^*f_4^* + 15f_1f_2^*f_3f_4^* + 12f_1f_2^*f_3^*f_4 + 12f_1^*f_2f_3f_4^* + 10f_1^*f_2f_3^*f_4 + 8f_1^*f_2^*f_3f_4. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, в квантовой механике можно построить диаграммную технику, аналогичную диаграммной технике из квантовой теории поля (смотри раздел 4). Тем не менее, всегда следует помнить, что эта техника работает только для вакуумных (и тепловых) состояний, тогда как при усреднении по более сложным состояниям, возникающим в ходе неравновесных процессов, она бесполезна.

3 Случай переменной частоты

3.1 Формулировка задачи

В этом разделе мы вычислим пропагаторы и обобщим результат предыдущего раздела на случай переменной частоты:

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) - \frac{\omega^2(t)}{2} \phi^2(t) - \frac{\lambda}{4} \phi^4(t) \right], \quad (49)$$

где частота $\omega(t) \rightarrow \omega_{\pm} = \text{const}$ при $t \rightarrow \pm\infty$, а самодействие $\lambda\phi^4$ адиабатически включается после момента времени t_0 . Аналогично случаю постоянной частоты, разложим поле $\phi(t)$ как

$$\phi(t) = af(t) + a^+f^*(t), \quad (50)$$

где функция $f(t)$ решает свободное уравнение движения $\ddot{f} + \omega^2(t)f = 0$. В квазиклассическом (ВКБ) приближении эти моды могут быть представлены как

$$f(t) = \alpha(t) \exp \left[-i \int_{-\infty}^t \omega(t'') dt'' \right] + \beta(t) \exp \left[i \int_{-\infty}^t \omega(t'') dt'' \right]. \quad (51)$$

Мы выбираем $f(t)$ таким образом, чтобы на прошлой бесконечности выражение содержало только одну экспоненту:

$$f(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\omega_-}} e^{i\omega_- t} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \quad (52)$$

Это так называемые ин-моды. Использование квазиклассического приближения оправдано только тогда, когда частота меняется сравнительно медленно:

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega(t)} \right| \ll 1 \implies \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega^2(t)} \ll 1. \quad (53)$$

Если это неравенство выполняется для всех времен $t \in (-\infty, +\infty)$, то есть частота изменяется адиабатически, то в бесконечном будущем выражение снова содержит только одну экспоненту: $f(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\omega_+}} e^{i\omega_+ t}$ при $t \rightarrow +\infty$. Если же это неравенство нарушается в некоторых областях t , то мы имеем:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\omega_-}} e^{i\omega_- t} & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2\omega_+}} e^{i\omega_+ t} + \frac{\beta}{\sqrt{2\omega_+}} e^{-i\omega_+ t} & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь комплексные числа α и β удовлетворяют соотношению $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ как следствие стандартных коммутационных соотношений $[\phi, \pi] = [\phi, \dot{\phi}] = i$, которые, в свою очередь, следуют из независимости вронскиана $ff^* - f^*f = i$ от времени. Для начала мы рассмотрим случай $\beta \neq 0$, то есть неадиабатический случай (подраздел 3.2). Затем мы обратимся к адиабатическому случаю $\beta = 0$ (подраздел 3.3).

Операторы взаимодействия и эволюции определяются таким же образом, как и в предыдущем разделе (смотри уравнения (7), (11) с соответствующей заменой $f(t)$). На этот раз $\omega(t) \neq \text{const}$, то есть трансляционной инвариантности нет, и мы не можем положить $t_0 = 0$. Как бы то ни было, ниже мы покажем, что в лидирующих вкладах в выражения зависимость от времени t_0 исчезает в пределе $t_0 \rightarrow -\infty$, если мы фиксируем функцию $f(t)$ в бесконечном прошлом уравнением (52).

Мы хотим работать в лидирующем порядке разложения по степеням T при $T \rightarrow \infty$ и $\tau = \text{const}$, где T и τ — определенные выражениями (10) времена. В таком случае мы можем аппроксимировать интегралы следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t_{1/2}} g(t) dt = \int_{t_0}^T g(t) dt \pm \frac{\tau}{2} g(T) + O(\tau^2), \quad \int_{t_2}^{t_1} g(t) dt = \tau g(T) + O(\tau^2), \quad (55)$$

где функция $g(t)$ медленно изменяется в течение периода $\sim \tau$. Следовательно, оператор эволюции примерно равен

$$\begin{aligned} U_1(t_{1/2}, t_0) &= -i \int_{t_0}^{t_{1/2}} V(\eta) d\eta = -i \int_{t_0}^T V(\eta) d\eta + O(T^0), \\ U_1(t_1, t_2) &= -i \int_{t_2}^{t_1} V(\eta) d\eta = -i\tau V(T) + O(\tau^2) = O(T^0), \\ U_2(t_1, t_2) &= -i \int_{t_2}^{t_1} d\eta V(\eta) U_1(\eta, t_2) = -i\tau V(T) U_1(T, t_2) + O(\tau^2) = O(T^0), \\ U_2(t_{1/2}, t_0) &= -i \int_{t_0}^{t_{1/2}} d\eta V(\eta) U_1(\eta, t_0) = - \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \int_{t_0}^{\eta} d\xi V(\xi) \mp \frac{\tau}{2} V(T) \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) + O(T^0), \\ U_1(t_0, t_{1/2}) &= -i \int_{t_{1/2}}^{t_0} d\eta V(\eta) U_1(\eta, t_1) = - \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \int_{\eta}^T d\xi V(\xi) \mp \frac{\tau}{2} \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) V(T) + O(T^0). \end{aligned} \quad (56)$$

Чтобы выделить лидирующий вклад, мы удерживаем только неосциллирующие члены из $V(t)$ при $t = T \rightarrow +\infty$. Выглядят они так:

$$\begin{aligned} (2\omega_+)^2 \cdot f^4(T) &\simeq 6\alpha^2\beta^2, & (2\omega_+)^2 \cdot f^{*4}(T) &\simeq 6\alpha^{*2}\beta^{*2}, \\ (2\omega_+)^2 \cdot |f(T)|^2 f^2(T) &\simeq 3\alpha\beta(|\alpha|^2 + |\beta|^2), & (2\omega_+)^2 \cdot |f(T)|^2 f^{*2}(T) &\simeq 3\alpha^*\beta^*(|\alpha|^2 + |\beta|^2), \\ (2\omega_+)^2 \cdot |f(T)|^4 &= |\alpha|^4 + 4|\alpha|^2|\beta|^2 + |\beta|^4. \end{aligned} \quad (57)$$

Легко видеть, что единственный неосциллирующий член из $V(t)$ при $t = T \rightarrow +\infty$ выглядит следующим образом:

$$(2\omega_-)^2 \cdot |f(t)|^4 = 1. \quad (58)$$

Когда мы выполняем интегрирования, нам следует беспокоиться только о таких неосциллирующих выражениях, поскольку именно они определяют лидирующие вклады в соответствующие средние в пределе $T \rightarrow \infty$, когда $\tau = \text{const}$.

Наконец, для дальнейших вычислений полезно иметь в виду следующее свойство ожидаемых значений операторов (8), следующее из их действительности:

$$\langle n|a^{+2}B|n\rangle = \langle n|a^{+2}B|n\rangle^* = \langle n|B^+a^2|n\rangle, \quad \langle n|a^2B^+|n\rangle = \langle n|Ba^{+2}|n\rangle. \quad (59)$$

3.2 Случай неадиабатически изменяющейся частоты

Вычислим двухточечную корреляционную функцию в n -ом собственном состоянии свободного гамильтониана $H_0|n\rangle = n|n\rangle$:

$$\langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ T \rightarrow +\infty}} \langle n|U^+(t_1, t_0)\phi(t_1)U^+(t, t_1)U(t, t_2)\phi(t_2)U(t_2, t_0)|n\rangle. \quad (60)$$

Удобно разделить это выражение на три члена C_0, C_1, C_2 и обозначить $\phi(t_a) \equiv \phi_a, C(t_a, t_b) \equiv C(a, b)$ аналогично случаю постоянной частоты (15), (16).

В нулевом порядке по λ :

$$C_0(1, 2) = \langle n|\phi_1\phi_2|n\rangle = (n+1)f_1f_2^* + nf_1^*f_2. \quad (61)$$

В первом порядке по λ :

$$\begin{aligned} C_1(1, 2) &= \frac{\lambda}{4} \left\langle n \left| \left(i \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \right) \cdot \left(f_1 f_2 a^2 + f_1^* f_2^* a^{+2} + f_1^* f_2 a^+ a + f_1 f_2^* a a^+ \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(f_1 f_2 a^2 + f_1^* f_2^* a^{+2} + f_1^* f_2 a^+ a + f_1 f_2^* a a^+ \right) \cdot \left(-i \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \right) \right| n \right\rangle + O(T^0) = \\ &= 6\lambda i \cdot \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \cdot \int_{t_0}^T d\eta |f(\eta)|^2 \left(f^2(\eta) f_1^* f_2^* - f^{*2}(\eta) f_1 f_2 \right) + O(T^0). \end{aligned} \quad (62)$$

Удерживая неосциллирующие в бесконечном прошлом и будущем подинтегральные выражения, мы получаем:

$$C_1(1, 2) \simeq -18i \cdot \frac{\lambda T}{(2\omega_+)^2} \cdot \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \cdot (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left(\alpha^* \beta^* f_1 f_2 - \alpha \beta f_1^* f_2^* \right) + O(T^0). \quad (63)$$

Заметим, что роста при $t_0 \rightarrow -\infty$ нет, поскольку подинтегральные выражения быстро осциллируют в этом пределе. Другими словами, зависимость от t_0 исчезает из лидирующего вклада. Это является общим свойством ин-мод, поскольку $f_{in}(t) \sim e^{i\omega t}$ при $t \rightarrow -\infty$.

Второй порядок удобно разбить на два выражения $C_2(1, 2) = C_2^1(1, 2) + C_2^2(1, 2)$, где

$$\begin{aligned}
C_2^1(1, 2) &= \left\langle \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \phi_1 \phi_2 \int_{t_0}^T d\xi V(\xi) \right\rangle + \\
&+ \tau \int_{t_0}^T d\eta \left\langle V(\eta) \phi_1 V(T) \phi_2 - \phi_1 V(T) \phi_2 V(\eta) \right\rangle + \\
&+ \frac{\tau}{2} \int_{t_0}^T d\eta \left\langle V(T) \phi_1 \phi_2 V(\eta) - V(\eta) \phi_1 \phi_2 V(T) \right\rangle + O(T^0), \\
C_2^2(1, 2) &= - \left\langle \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \int_{\eta}^T d\xi V(\xi) \phi_1 \phi_2 \right\rangle - \left\langle \phi_1 \phi_2 \int_{t_0}^T d\eta V(\eta) \int_{t_0}^{\eta} d\xi V(\xi) \right\rangle + \\
&+ \frac{\tau}{2} \int_{t_0}^T d\eta \left\langle \phi_1 \phi_2 V(T) V(\eta) - V(\eta) V(T) \phi_1 \phi_2 \right\rangle + O(T^0). \tag{64}
\end{aligned}$$

Вычисляя $C_2^1(1, 2)$ и $C_2^2(1, 2)$ по отдельности, удерживая лидирующие вклады $\sim T^2$ и $\sim T$ и складывая выражения снова, получаем для произвольного собственного состояния свободного гамильтониана:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} C_2(1, 2) &= f_1 f_2^* \cdot (4n^3 + 6n^2 + 14n + 6) \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^4(\eta) \int_{t_0}^T d\xi f^{*4}(\xi) + \\
&+ f_1 f_2^* \cdot (16n^3 + 24n^2 + 26n + 9) \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \int_{t_0}^T d\xi f^{*2}(\xi) |f(\xi)|^2 + \\
&+ f_1 f_2 \cdot (16n^3 + 24n^2 + 26n + 9) \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \int_{\eta}^T d\xi f^{*4}(\xi) - \\
&- f_1 f_2 \cdot (8n^3 + 12n^2 + 28n + 12) \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^{*4}(\eta) \int_{\eta}^T d\xi f^2(\xi) |f(\xi)|^2 - \\
&- f_1 f_2 \cdot (48n^3 + 72n^2 + 78n + 27) \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^{*2}(\eta) |f(\xi)|^2 \int_{\eta}^T d\xi |f(\xi)|^4 + h.c. + O(T). \tag{65}
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_{t_0}^T d\eta g(\eta) \int_{t_0}^{\eta} d\xi h(\xi) = \int_{t_0}^T d\xi h(\xi) \int_{\eta}^T d\eta g(\eta). \tag{66}$$

Удерживая неосциллирующие подынтегральные выражения в пределе $T \rightarrow +\infty$, $t_0 \rightarrow -\infty$, $\tau = \text{const}$, получаем для лидирующего вклада:

$$\begin{aligned}
C_2(1, 2) &= \left[\left(4 \left(n + \frac{1}{2} \right)^3 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \cdot 36(1 + 5|\alpha|^2|\beta|^2) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot 54(3 + 20|\alpha|^2|\beta|^2) \right] \cdot \\
&\cdot \frac{(\lambda T)^2}{(2\omega_+)^4} \cdot \left[|\alpha|^2|\beta|^2 (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) - \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) (\alpha \beta f_1^* f_2^* + \alpha^* \beta^* f_1 f_2) \right] + O(T), \tag{67}
\end{aligned}$$

где мы учли, что $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Заметим, что после подставления мод (54) в явном виде выражение приобретает вид:

$$|\alpha|^2|\beta|^2 f_1 f_2^* - \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cdot \alpha \beta f_1^* f_2^* + h.c. = -\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left(\alpha \beta^* e^{2i\omega T} + \alpha^* \beta e^{-2i\omega T} \right), \tag{68}$$

так что выражение (67) на самом деле не зависит от τ . Аналогичные выражения для вакуумного состояния $H_0|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\lambda^2}C_2(1, 2) = & f_1f_2^* \cdot \left(2 \int_{t_0}^T d\eta f^4(\eta) \int_{t_0}^T d\xi f^{*4}(\xi) + 3 \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta)|f(\eta)|^2 \int_{t_0}^T d\xi f^{*2}(\xi)|f(\xi)|^2 \right) + \\ & - f_1f_2 \cdot \left(4 \int_{t_0}^T d\eta f^{*4}(\eta) \int_{\eta}^T d\xi f^2(\xi)|f(\xi)|^2 - 3 \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta)|f(\eta)|^2 \int_{\eta}^T d\xi f^{*4}(\xi) \right) - \\ & - f_1f_2 \cdot 9 \int_{t_0}^T d\eta f^{*2}(\eta)|f(\xi)|^2 \int_{\eta}^T d\xi |f(\xi)|^4 + h.c. + O(T), \end{aligned} \quad (69)$$

и

$$\begin{aligned} C_2(1, 2) = & \frac{(\lambda T)^2}{(2\omega_+)^4} \cdot 27(3|\alpha|^4 + 3|\beta|^4 + 14|\alpha|^2|\beta|^2) \cdot \\ & \cdot \left[|\alpha|^2|\beta|^2(f_1f_2^* + f_1^*f_2) - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(\alpha\beta f_1^*f_2^* + \alpha^*\beta^*f_1f_2) \right] + O(T). \end{aligned} \quad (70)$$

Отметим несколько важных свойств, которые имеют эти выражения. Во-первых, они не зависят от t_0 , также как и первый порядок (62). Во-вторых, лидирующий вклад симметричен относительно замены $t_1 \leftrightarrow t_2$. Это значит, что лидирующий вклад в келдышевский пропагатор в точности равен $C_2 \sim (\lambda T)^2$, тогда как запаздывающий и опережающий пропагаторы $O(\lambda^2 T)$, то есть подавлены более высокими степенями λ в пределе $\lambda \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$ и $\lambda T = \text{const}$.

Наконец, для вакуумного состояния $H_0|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle$ получаем:

$$\begin{aligned} D_0^K(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}(f_1f_2^* + f_1^*f_2), \\ D_1^K(t_1, t_2) &\simeq -9i \cdot \frac{\lambda T}{(2\omega_+)^2} \cdot (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cdot (\alpha^*\beta^*f_1f_2 - \alpha\beta f_1^*f_2^*) + O(T^0), \\ D_2^K(t_1, t_2) &= \frac{(\lambda T)^2}{(2\omega_+)^4} \cdot 27(3|\alpha|^4 + 3|\beta|^4 + 14|\alpha|^2|\beta|^2) \cdot \\ &\cdot \left[|\alpha|^2|\beta|^2(f_1f_2^* + f_1^*f_2) - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(\alpha\beta f_1^*f_2^* + \alpha^*\beta^*f_1f_2) \right] + O(T), \\ D_0^R(t_1, t_2) &= \theta(t_1 - t_2)(f_1f_2^* - f_1^*f_2), \\ D_0^A(t_1, t_2) &= -\theta(t_2 - t_1)(f_1f_2^* - f_1^*f_2), \\ D_1^R(t_1, t_2) &= D_1^A(t_1, t_2) = O(T^0), \\ D_2^R(t_1, t_2) &= D_2^A(t_1, t_2) = O(T). \end{aligned} \quad (71)$$

Мы подчеркиваем, что келдышевский пропагатор действителен, тогда как R/A пропагаторы чисто мнимые, как и следовало ожидать.

Итак, в этом подразделе мы получили секулярный рост петлевых поправок к келдышевскому пропагатору как в первом, так и во втором порядке по λ : в обоих случаях они бесконечно росли в пределе $T \rightarrow \infty, \tau = \text{const}$. Глядя на вид (71) и сравнивая ее с (26), можно заметить, что заселенность уровней $n = \langle a^+a \rangle$ и аномальное квантовое среднее $\kappa = \langle aa \rangle$ также бесконечно растут в этом пределе. В то же время, поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам в рассматриваемом пределе подавлены более высокими степенями λ .

3.3 Случай адиабатически изменяющейся частоты

Рассмотрим теперь случай адиабатически изменяющейся частоты. Этот случай отвечает $\beta = 0$ в уравнении (54), то есть моды имеют следующее поведение:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\omega_-}} e^{i\omega_- t} & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_+}} e^{i\omega_+ t} & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (72)$$

В этом случае можно использовать общие выражения, полученные в предыдущем подразделе (62), (69), заменяя моды (54) на моды (72). Отсюда сразу же видно, что поправка первого порядка по λ не растет со временем:

$$C_1(1, 2) = -6\lambda i \cdot \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \cdot \int_{t_0}^T d\eta |f(\eta)|^2 \left(f^2(\eta) f_1^* f_2^* - f^{*2}(\eta) f_1 f_2\right) + O(T^0) = O(T^0). \quad (73)$$

Следовательно, ни кельдышевский, ни запаздывающий/опережающий пропагаторы не растут в пределе $T \rightarrow \infty$: $D_1^K(1, 2) \sim D_1^R(1, 2) \sim O(T^0)$.

Следующая по λ поправка выглядит более сложно. На этот раз следует принимать во внимание следующие члены, которыми можно было пренебречь в неадиабатическом случае:

$$\int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \int_{\eta}^T d\xi |f(\xi)|^4 \simeq \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \frac{T - \eta}{(2\omega(\eta))^2} \simeq \left(\frac{T}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2}\right) \frac{ie^{2i\omega_- t_0}}{(2\omega_-)^3}. \quad (74)$$

В последнем равенстве мы проинтегрировали по частям, предполагая, что благодаря адиабатичности

$$d\left(\frac{e^{i\omega(t)t}}{i\omega(t)}\right) = e^{i\omega(t)t} + e^{i\omega(t)t} \cdot \frac{t\omega''(t)}{\omega(t)} \simeq e^{i\omega(t)t}. \quad (75)$$

Зависимость от времени t_0 снова появляется здесь из-за того, что подынтегральное выражение вида $|f(\xi)|^4 = (2\omega(t))^{-2}$ не осциллирует в пределе $t_0 \rightarrow -\infty$ и дает множитель $T - \eta$, хотя первое подынтегральное выражение вида $f^2(\eta) |f(\eta)|^2$ все-таки осциллирует в этом пределе. В неадиабатическом случае $\beta \neq 0$ такие интегралы были подавлены по сравнению с лидирующими выражениями (смотри уравнение (70)). Однако в случае $\beta = 0$ лидирующие выражения $\sim T$ благодаря характерному поведению ин-мод (72): все интегралы из выражения (69) за исключением (74) содержат только осциллирующие функции, а потому их можно отбросить.

Вообще говоря, наряду с упомянутыми выше выражениями следует учесть члены, которые содержат только одно интегрирование и тоже могут дать зависимость $\sim T\tau$ в выражение (64). Тем не менее, оказывается, что эти члены сокращают друг друга благодаря

свойствам оператора A :

$$\begin{aligned}
C_2(1, 2) \Big|_{\tau} &= \tau \int_{t_0}^T d\eta \langle V(\eta) \phi_1 V(T) \phi_2 - \phi_1 V(T) \phi_2 V(\eta) \rangle + \\
&+ \frac{\tau}{2} \int_{t_0}^T d\eta \langle V(T) \phi_1 \phi_2 V(\eta) - V(\eta) \phi_1 \phi_2 V(T) \rangle + \\
&+ \frac{\tau}{2} \int_{t_0}^T d\eta \langle \phi_1 \phi_2 V(T) V(\eta) - V(\eta) V(T) \phi_1 \phi_2 \rangle + O(T^0) = \\
&= \tau \cdot \left(\frac{T}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2} \right) \cdot \langle 3A \rangle \cdot \left(\phi_1 V(T) \phi_2 - \phi_1 V(T) \phi_2 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} V(T) \phi_1 \phi_2 - \frac{1}{2} \phi_1 \phi_2 V(T) + \frac{1}{2} \phi_1 \phi_2 V(T) - \frac{1}{2} V(T) \phi_1 \phi_2 \right) + O(T^0) = \\
&= O(T^0). \tag{76}
\end{aligned}$$

Заметим, что такое сокращение происходит при усреднении не только по вакуумному, но и по произвольному собственному состоянию свободного гамильтониана. Конечное выражение в вакуумном состоянии приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} C_2(1, 2) &\simeq -f_1 f_2 \cdot 27 \int_{t_0}^T d\eta f^{*2}(\eta) |f(\xi)|^2 \int_{\eta}^T d\xi |f(\xi)|^4 + h.c. + O(\tau) = \\
&= \frac{27i}{(2\omega_-)^3} \left(\frac{T}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2} \right) \left(e^{2i\omega_- t_0} f_1^* f_2^* - e^{-2i\omega_- t_0} f_1 f_2 \right) + O(T^0). \tag{77}
\end{aligned}$$

Поправки к R/A пропагаторам не растут благодаря симметрии $C_2(1, 2)$ относительно замены $t_1 \leftrightarrow t_2$: $D_2^R(1, 2) = O(T^0)$. В то же время, поправка к келдышевскому пропагатору в точности равна поправке к вайтмановской функции: $D_2^K(1, 2) = C_2(1, 2) = O(T)$. Следовательно, в случае адиабатически изменяющейся частоты $\omega(t)$ мы снова получаем секулярный рост. Тем не менее, этот рост выражен не так ярко, как в случае неадиабатически изменяющейся частоты, и его можно убрать, переопределяя вакуумное состояние аналогично случаю постоянной частоты (смотри подраздел 2.3).

Очевидно, что выражение (77) переходит в выражение (21) из подраздела 2.2, если положить $\omega_- = \omega_+ = \omega$ и $t_0 = 0$, как и следовало ожидать.

4 Диаграммная техника

4.1 Краткое введение в диаграммную технику

В этом разделе мы введем диаграммную технику, которая позволяет наглядно вычислять петлевые поправки к пропагаторам. Эта техника дает правильные комбинаторные множители и воспроизводит результаты прямых вычислений, выполненных выше в разделах 2 и 3. Тем не менее, мы подчеркиваем, что эта техника работает только для вакуумных средних, поскольку она полагается на теорему Вика (смотри подраздел 2.4). Мы предполагаем, что частота $\omega(t)$ меняется неадиабатически, то есть $\beta \neq 0$.

Для начала рассмотрим следующую статсумму [6, 9–12]:

$$Z_0[\phi(t)] = \langle 0|U_C|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0[\phi(t)]}, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} S_0[\phi(t)] &= S_0[\phi_+, \phi_-] = \int_C dt \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega^2}{2}\phi^2 \right] = \int_{t_0}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}_+^2 - \frac{\omega^2}{2}\phi_+^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_-^2 + \frac{\omega^2}{2}\phi_-^2 \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int dt \vec{\phi}^T(t) \hat{G}_0^{-1} \vec{\phi}(t), \end{aligned} \quad (79)$$

где $\mathcal{D}\phi$ обозначает меру функционального интегрирования по всем действительным скалярным функциям ϕ , \mathcal{C} — это келдышевский временной контур [5], U_C — оператор эволюции, упрямоченный по времени вдоль контура \mathcal{C} , а индексы ” \pm ” относятся к ”прямой” (обычное Т-упорядочивание) и ”обратной” (анти-Т-упорядочивание) сторонам этого контура. Для краткости мы ввели вектор $\vec{\phi}$ и обратный оператор \hat{G}_0^{-1} :

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_0^{-1} = -i \begin{pmatrix} \partial_t^2 + \omega^2(t) & 0 \\ 0 & -\partial_t^2 - \omega^2(t) \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Разделяя контур \mathcal{C} на $2N$ равных временных интервалов и дискретизируя действие, получаем:

$$Z_d = \int \prod_{j=1}^{2N} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi\delta t}} \exp(iS_d[\phi]) = \int \prod_{j=1}^{2N} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi\delta t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^{2N} \phi_k G_{km}^{-1} \phi_m\right), \quad (81)$$

$$\begin{aligned} S_d[\phi] &= \sum_{j=1}^{2N} \left(\frac{1}{\delta t_j} - \frac{\omega_j^2 \delta t_j}{2} \right) \phi_j^2 - \sum_{j=2}^{2N-1} \frac{1}{2\delta t_j} (\phi_j \phi_{j-1} + \phi_j \phi_{j+1}) - \frac{1}{2\delta t_1} \phi_1 \phi_2 - \frac{1}{2\delta t_{2N}} \phi_{2N} \phi_{2N-1} = \\ &= \sum \delta t_j \left[\frac{(\phi_j - \phi_{j-1})^2}{2\delta t_j^2} - \frac{\omega_j^2}{2} \phi_j^2 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (82)$$

где $\delta t_j = \pm \delta t$ — это длина j -го временного интервала на ”прямой” или ”обратной” стороне контура \mathcal{C} соответственно, а $\phi_j = \phi(t_j)$, $\omega_j = \omega(t_j)$. В непрерывном пределе $N \rightarrow \infty$ краевые части, содержащие ϕ_1 и ϕ_{2N} , пренебрежимо малы, и дискретное действие $S_d[\phi]$ переходит в действие $S_0[\phi]$; более подробно такая процедура описывается в книге [6].

Используя эту дискретную статсумму и вычисляя гауссов интеграл, легко получить двухточечные корреляционные функции:

$$Z_d[J] = \int \prod_{j=1}^N \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^N \phi_k A_{km} \phi_m + \sum_{k=1}^N \phi_k J_k\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2} \sum J_k A_{km}^{-1} J_m}. \quad (83)$$

Дифференцируя это выражение и полагая $J = 0$, мы получаем соответствующие правила для дискретизированных полей:

$$\begin{aligned} \langle \phi_a \phi_b \rangle &= \frac{1}{Z_d[0]} \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_a \delta J_b} \right|_{J=0} = A_{ab}^{-1}, \\ \langle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \rangle &= A_{ab}^{-1} A_{cd}^{-1} + A_{ac}^{-1} A_{bd}^{-1} + A_{ad}^{-1} A_{bc}^{-1} = \\ &= \langle \phi_a \phi_b \rangle \langle \phi_c \phi_d \rangle + \langle \phi_a \phi_c \rangle \langle \phi_b \phi_d \rangle + \langle \phi_a \phi_d \rangle \langle \phi_b \phi_c \rangle, \end{aligned} \quad (84)$$

и так далее. В сущности, мы только что доказали теорему Вика (смотри подраздел 2.4 для подробностей).

Возвращаясь к непрерывному пределу и разделяя поля, которые относятся к “прямой” ($\phi_j \rightarrow \phi_+$, $j = 1, \dots, N$) и “обратной” ($\phi_j \rightarrow \phi_-$, $j = 2N, \dots, N+1$) частям контура, получаем следующие двухточечные функции:

$$\begin{aligned} \langle \phi_+(t_1)\phi_-(t_2) \rangle_0 &= G_0^{+-}(t_1, t_2) = f_1 f_2^*, \\ \langle \phi_-(t_1)\phi_+(t_2) \rangle_0 &= G_0^{-+}(t_1, t_2) = f_1^* f_2, \\ \langle \phi_+(t_1)\phi_+(t_2) \rangle_0 &= G_0^{++}(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2) f_1^* f_2 + \theta(t_2 - t_1) f_1 f_2^*, \\ \langle \phi_-(t_1)\phi_-(t_2) \rangle_0 &= G_0^{--}(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2) f_1 f_2^* + \theta(t_2 - t_1) f_1^* f_2, \end{aligned} \quad (85)$$

где $f_1 = f(t_1)$ и $f_2 = f(t_2)$ — моды из предыдущих разделов (5), (54) или (72). Таким образом, мы можем вычислять корреляционные функции произвольного числа полей, взятых в произвольных точках контура \mathcal{C} , используя эти пропагаторы и теорему Вика (84) (то есть разбивая среднее на сумму всех возможных попарных сверток). Здесь мы обозначили угловыми скобками усреднение по основному состоянию в следующем смысле:

$$\langle \phi_{\pm}(t)\phi_{\pm}(t') \rangle_0 \equiv \int \mathcal{D}\phi \phi_{\pm}(t)\phi_{\pm}(t') e^{iS_0[\phi]}. \quad (86)$$

Заметим, что $Z_0[\phi(t)] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0[\phi]} = 1$, если интегрировать по замкнутому келдышевскому временному контуру \mathcal{C} в S_0 .

Подчеркнем, что мы не можем разделить интегрирования по ϕ_+ и ϕ_- из-за неисчезающей взаимной корреляции между этими полями. Легко проверить, что оператор \hat{G}_0 , составленный из компонент (85), является обращением оператора \hat{G}_0^{-1} из статсуммы (80):

$$\hat{G}_0(t, t') = \begin{pmatrix} G_0^{++}(t, t') & G_0^{+-}(t, t') \\ G_0^{-+}(t, t') & G_0^{--}(t, t') \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_0^{-1} \hat{G}_0 = \hat{G}_0 \hat{G}_0^{-1} = \hat{1}. \quad (87)$$

Тем не менее, не все четыре пропагатора являются независимыми:

$$G_0^{++} + G_0^{--} = G_0^{+-} + G_0^{-+}, \quad (88)$$

поэтому удобно сделать келдышевский поворот и определить три независимые функции:

$$\begin{pmatrix} \phi_{cl} \\ \phi_q \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \hat{R} = \hat{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \hat{R} = 1. \quad (89)$$

После поворота действие изменяется следующим образом:

$$S_0[\phi(t)] = \int_{t_0}^{+\infty} dt \left[\dot{\phi}_{cl} \dot{\phi}_q - \omega^2 \phi_{cl} \phi_q \right], \quad (90)$$

а оператор \hat{G}_0 принимает следующую форму:

$$\hat{G}_0(t, t') = \begin{pmatrix} 2G_0^K(t, t') & G_0^R(t, t') \\ G_0^A(t, t') & 0 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Можно заметить, что эти функции в точности равны келдышевскому и R/A пропагаторам (71). Поэтому в дальнейшем мы будем полагать $G(t, t') \equiv D(t, t')$.

Теперь добавим в теорию самодействие $\lambda\phi^4$:

$$Z[\phi(t)] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi(t)]},$$

$$S[\phi(t)] = \int_c dt \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\omega^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right] = \int_{t_0}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}_+^2 - \frac{\omega^2}{2}\phi_+^2 - \frac{\lambda}{4}\phi_+^4 - (\phi_+ \leftrightarrow \phi_-) \right]. \quad (92)$$

Раскладывая экспоненту и используя теорему Вика (84), можно рассчитать поправки к свободным пропагаторам. Например, точный пропагатор D^{++} равен:

$$\begin{aligned} D^{++}(t_1, t_2) &= \langle \phi_1^+ \phi_2^+ \rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \phi_+(t_1) \phi_+(t_2) e^{iS[\phi]} = \\ &= \langle \phi_1^+ \phi_2^+ \rangle_0 - \frac{i\lambda}{4} \int dt_3 \left[\langle \phi_1^+ \phi_3^+ \phi_3^+ \phi_3^+ \phi_2^+ \rangle_0 - \langle \phi_1^+ \phi_3^- \phi_3^- \phi_3^- \phi_2^+ \rangle_0 \right] + \dots = \\ &= D_0^{++}(t_1, t_2) - D_0^{++}(t_1, t_2) \cdot \frac{3i\lambda}{4} \int dt_3 \left[(D_0^{++}(t_3, t_3))^2 - (D_0^{--}(t_3, t_3))^2 \right] - \\ &- 3i\lambda \int dt_3 \left[D_0^{++}(t_1, t_3) D_0^{++}(t_3, t_3) D_0^{++}(t_3, t_2) - D_0^{+-}(t_1, t_3) D_0^{--}(t_3, t_3) D_0^{-+}(t_3, t_2) \right] + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Здесь мы для краткости обозначили $\phi_a^+ \equiv \phi_+(t_a)$, $\phi_a^- \equiv \phi_-(t_a)$. Также мы свернули все поля и приняли во внимание, что некоторые свертки совпадают, что дает дополнительные численные коэффициенты, равные 3 и 12. Например, следующие выражения равны:

$$\langle \phi_1^+ \phi_3^- \phi_3^- \phi_3^- \phi_3^- \phi_2^+ \rangle_0 = \langle \phi_1^+ \phi_3^- \phi_3^- \phi_3^- \phi_3^- \phi_2^+ \rangle_0. \quad (94)$$

Используя это разложение, можно построить диаграммную технику. Тем не менее, более удобным оказывается работать после келдышевского поворота (89), поскольку в этом представлении число отличных диаграмм значительно снижается:

$$S[\phi(t)] = \int_{t_0}^{+\infty} dt \left[\dot{\phi}_{cl} \dot{\phi}_q - \omega^2 \phi_{cl} \phi_q - \lambda \left(\phi_{cl}^3 \phi_q + \frac{1}{4} \phi_{cl} \phi_q^3 \right) \right]. \quad (95)$$

Раскладывая экспоненту в уравнении (92) и сворачивая поля аналогично (93), мы получаем диаграммную технику, аналогичную диаграммной технике из квантовой теории поля (Рис. 1). Различные примеры и приложения этой техники в квантовой теории поля можно найти в работах [9–13, 17–19] и т.д.

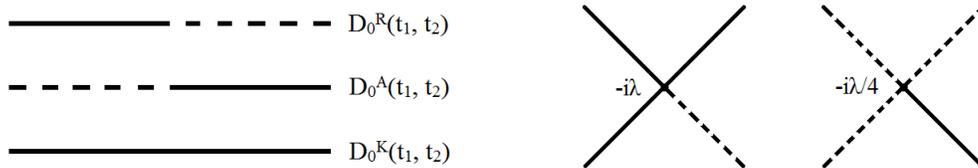


Рис. 1: Сплошная жирная линия отвечает ϕ_{cl} , пунктирная — ϕ_q

В то же время, здесь есть несколько тонкостей, связанных с комбинаторными множителями. В действительности диаграммы вида (Рис. 1) не могут обеспечить абсолютно корректное вычисление комбинаторных множителей, хотя они дают правильные соотношения между ними. Рассмотрим первую поправку к келдышевскому пропагатору, чтобы показать это. На первый взгляд, эта поправка дается двумя однопетлевыми диаграммами типа “головастик”. Тем не менее, если принять во внимание порядок, с которым внешние поля сворачиваются со внутренними, окажется, что каждая из этих диаграмм отвечает трем эквивалентным выражениям в разложении экспоненты (смотри Рис. 2). Это значит, что результат, полученный с помощью стандартной диаграммной техники (Рис. 1) нужно домножить на комбинаторный множитель, равный 3. Подобные множители играют важную роль, когда приходится складывать выражения, которые отвечают разным типам диаграмм (например, смотри подраздел 4.3).

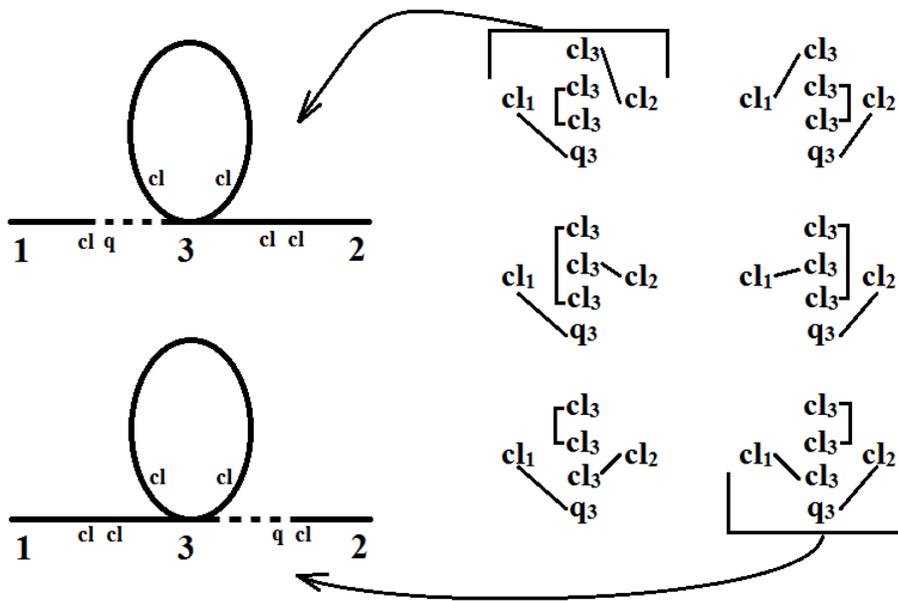


Рис. 2: Однопетлевые поправки к келдышевскому пропагатору (диаграммы типа “головастик”) и соответствующие выражения, возникающие при различных способах свертки полей

Чтобы восстановить правильные комбинаторные множители, можно использовать более аккуратные диаграммы, связанные с корреляционными функциями. Эти диаграммы можно получить из обычных диаграмм, разделяя их вершины, присваивая выходящим из вершин линиям соответствующие индексы и заново соединяя линии всеми возможными способами (Рис. 2). Разумеется, подобные диаграммы — это просто более наглядный и удобный способ записи выражений типа (93) и (94), упрощающий подсчет эквивалентных сверток. Заметим, что этот подход восстанавливает отношения между комбинаторными множителями, следующие из симметрии стандартных диаграмм, но также приписывает им дополнительный правильный множитель. Например, этот множитель равен 3 в случае Рис. 2 и равен 6 в случае Рис. 3.

Наконец, подчеркнем, что в данной диаграммной технике нужно учитывать только связанные диаграммы. В самом деле, все части диаграмм, которые никак не связаны с внешними точками, неизбежно содержат произведения тета-функций вида $\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3) \cdots \theta(t_n - t_1)$,

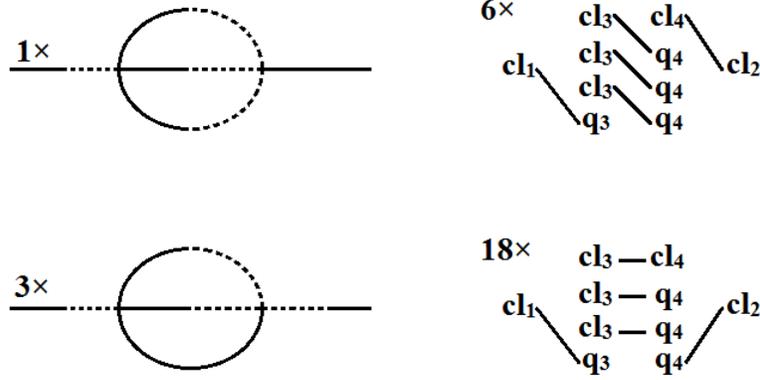


Рис. 3: Двухпетлевые поправки к келдышевскому пропагатору (диаграммы типа “заходящее Солнце”) и соответствующие выражения, возникающие при различных способах свертки полей

равные нулю. Это утверждение доказывается по индукции: простейшая одновершинная диаграмма очевидно содержит такое произведение, а расширение вершин только удлиняет цепочку функций (смотри Рис. 7 и Рис. 8). В то же время, диаграммы, в которых каждая из двух несвязанных частей соединена с различными внешними точками, не могут существовать, поскольку каждая из частей должна содержать четное число линий.

В следующих двух подразделах 4.2 и 4.3 мы покажем, что разработанная техника дает правильные результаты для однопетлевых и двухпетлевых поправок к пропагаторам. Для краткости мы будем рисовать и обозначать словом “диаграмма” только стандартные диаграммы со сплошными и пунктирными линиями, но будем восстанавливать правильные комбинаторные множители в конечных выражениях.

4.2 Однопетлевые поправки

Вычислим однопетлевые поправки ко свободным пропагаторам, используя разработанную диаграммную технику. Для келдышевского пропагатора можно построить шесть различных диаграмм, которые зависят от времен внешних ног t_1 и t_2 ($t_1 > t_2$) и в которых интегрирование производится по промежуточному времени t_3 . Тем не менее, из этих диаграмм только две отличны от нуля (Рис. 4а и 4b), поскольку четыре остальные содержат выражения типа $D_0^R(t_3, t_3)$ и очевидно равны нулю. Таким образом, для келдышевского пропагатора мы получаем:

$$\begin{aligned}
D_1^K(t_1, t_2) &= D_{1,a}^K(t_1, t_2) + D_{1,b}^K(t_1, t_2) = \\
&= -3i\lambda \int dt_3 \left[D_0^K(t_1, t_3) D_0^K(t_3, t_3) D_0^A(t_3, t_2) + D_0^R(t_1, t_3) D_0^K(t_3, t_3) D_0^K(t_3, t_2) \right] = \\
&= -\frac{3i\lambda}{2} \left[f_1 f_2^* \cdot \int_{T-\frac{\tau}{2}}^{T+\frac{\tau}{2}} dt_3 |f_3|^4 + f_1 f_2 \left(2 \int_{t_0}^T + \int_T^{T-\frac{\tau}{2}} + \int_T^{T+\frac{\tau}{2}} \right) dt_3 |f_3|^2 f_3^{*2} - h.c. \right] = \\
&= -9i\lambda \cdot \frac{T}{(2\omega_+)^2} \cdot (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left(\alpha^* \beta^* f_1 f_2 - \alpha \beta f_1^* f_2^* \right) + O(T^0). \tag{96}
\end{aligned}$$

Подобная картина имеет место и для R/A пропагаторов (Рис. 4с). Напомним, что $D_0^A(t_1, t_2) =$

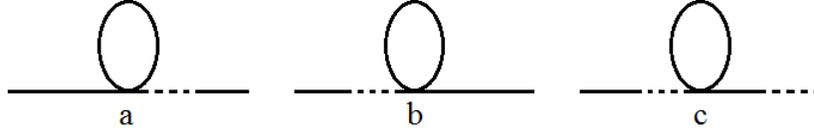


Рис. 4: Все ненулевые однопетлевые поправки к келдышевскому (a, b) и запаздывающему (c) пропагаторам — диаграммы типа “головастик”

$D_0^R(t_2, t_1)$. Следовательно, достаточно рассмотреть только запаздывающий пропагатор:

$$\begin{aligned} D_1^R(t_1, t_2) &= D_{1,c}^R(t_1, t_2) = -i\lambda \int dt_3 D_0^R(t_1, t_3) D_0^K(t_3, t_3) D_0^R(t_3, t_2) = \\ &= -i\lambda \int_{t_2}^{t_1} dt_3 (f_1 f_3^* - f_3 f_1^*) |f_3|^2 (f_3 f_2^* - f_2 f_3^*) = O(T^0). \end{aligned} \quad (97)$$

Эти выражения в точности совпадают с выражениями, которые мы получили с помощью прямых вычислений в предыдущем разделе 3.

4.3 Двухпетлевые поправки

Вычислим теперь двухпетлевые поправки. Очевидно, что $D_2^R(t_1, t_2) \simeq O(T)$ and $D_2^A(t_1, t_2) \simeq O(T)$, поскольку соответствующие интегралы неизбежно содержат произведения тета-функций вида $\theta(t_4 - t_2)\theta(t_3 - t_4)\theta(t_1 - t_3)$ и следовательно ведут себя как $\simeq O(T\tau)$, то есть подавлены в пределе $T \rightarrow \infty$, $\lambda T = \text{const}$, $\tau = \text{const}$. Как и ожидалось, это снова совпадает с зависимостью, полученной с помощью прямых вычислений.

Двухпетлевая поправка к келдышевскому пропагатору выглядит сложнее. Наивно можно построить десять диаграмм типа “заходящее Солнце”, однако диаграммы $KKRAK$, $KRRAA$ и $RRAAK$ очевидно равны нулю (здесь мы используем такую же нотацию, как и на Рис. 5). Удобно скобминировать оставшиеся диаграммы с их обращениями по времени (например, $KAAAA$ и $RRRRK$) и проинтегрировать по промежуточным временам t_3 и t_4 . Суммируя все выражения и удерживая только члены с неосциллирующими подынтегральными выражениями, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6\lambda^2} D_2^K(t_1, t_2) &= +f_1 f_2^* \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^4(\eta) \int_{t_0}^T d\xi f^{*4}(\xi) - \\ &- f_1 f_2 \cdot 2 \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \int_{\eta}^T d\xi f^{*4}(\xi) + h.c. + O(T), \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} D_2^K(t_1, t_2) &= \frac{(\lambda T)^2}{(2\omega_+)^4} \cdot 216 |\alpha|^2 |\beta|^2 \cdot \\ &\cdot \left[|\alpha|^2 |\beta|^2 (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) - \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) (\alpha \beta f_1^* f_2^* + \alpha^* \beta^* f_1 f_2) \right] + O(T). \end{aligned} \quad (99)$$

Вообще говоря, этот результат отличается от результата прямых вычислений с разложением оператора эволюции (71). Тем не менее, до этого момента мы рассматривали только диаграммы типа “заходящее Солнце”, тогда как диаграммы типа “башня” и “двойной головастик” (Рис. 6) тоже дают вклад $\sim \lambda^2$. Принимая их во внимание¹, получаем:

¹Аккуратные вычисления дают дополнительный коэффициент, равный 6 для диаграмм типа “заходящее Солнце” и равный 9 для диаграмм типа “башня” и “двойной головастик”.

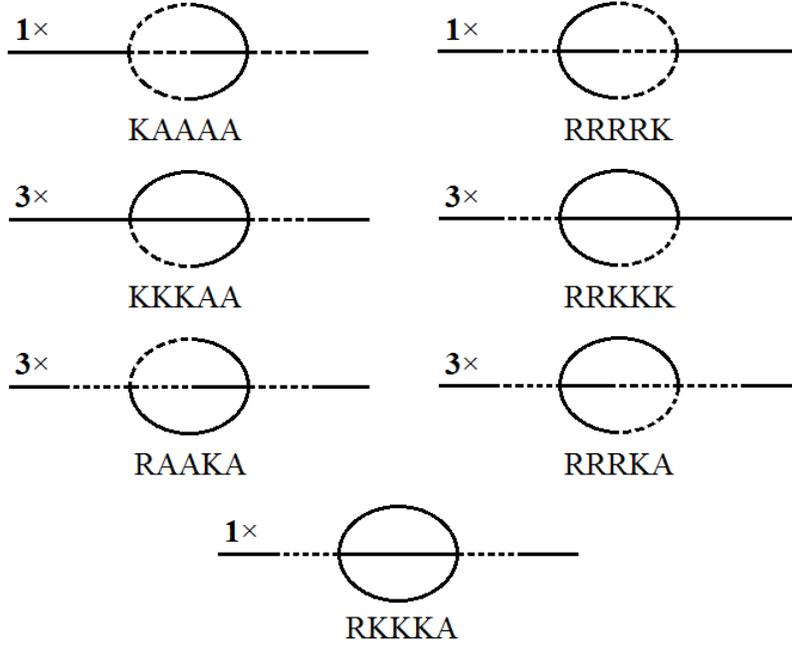


Рис. 5: Все ненулевые двухпетлевые поправки к келдышевскому пропагатору — диаграммы типа “заходящее Солнце”

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3\lambda^2} D_2^K(t_1, t_2) &= f_1 f_2^* \cdot \left(2 \int_{t_0}^T d\eta f^4(\eta) \int_{t_0}^T d\xi f^{*4}(\xi) + 3 \int_{t_0}^T d\eta f^2(\eta) |f(\eta)|^2 \int_{t_0}^T d\xi f^{*2}(\xi) |f(\xi)|^2 \right) - \\
&- f_1 f_2 \cdot \int_{t_0}^T d\eta f^{*4}(\eta) \int_{\eta}^T d\xi f^2(\xi) |f(\xi)|^2 - \\
&- f_1 f_2 \cdot 9 \int_{t_0}^T d\eta f^{*2}(\eta) |f(\xi)|^2 \int_{\eta}^T d\xi |f(\xi)|^4 + h.c. + O(T). \tag{100}
\end{aligned}$$

И наконец:

$$\begin{aligned}
D_2^K(t_1, t_2) &= \frac{(\lambda T)^2}{(2\omega_+)^4} \cdot 27(3|\alpha|^4 + 3|\beta|^4 + 14|\alpha|^2|\beta|^2) \cdot \\
&\cdot \left[|\alpha|^2|\beta|^2 (f_1 f_2^* + f_1^* f_2) - \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) (\alpha\beta f_1^* f_2^* + \alpha^* \beta^* f_1 f_2) \right] + O(T). \tag{101}
\end{aligned}$$

Этот результат уже совпадает с выражениями, полученными с помощью прямых вычислений (69). Поправки к R/A пропагаторам типа “башня” и “двойной головастик” ведут себя как $\simeq O(T\tau)$, также как и диаграммы типа “заходящее Солнце”. Таким образом, можно видеть, что диаграммная техника действительно работает и дает в точности такие же результаты, как прямые вычисления для основного состояния.

Более того, теперь можно увидеть, что неестественный рост двухпетлевых поправок в случаях постоянной и адиабатически изменяющейся частоты, который был получен в подразделах 2.2 и 3.3, на самом деле связан только с диаграммами типа “башня” и “двойной головастик”. В самом деле, учтем, что в этих случаях $\beta = 0$, и заново вычислим полученные

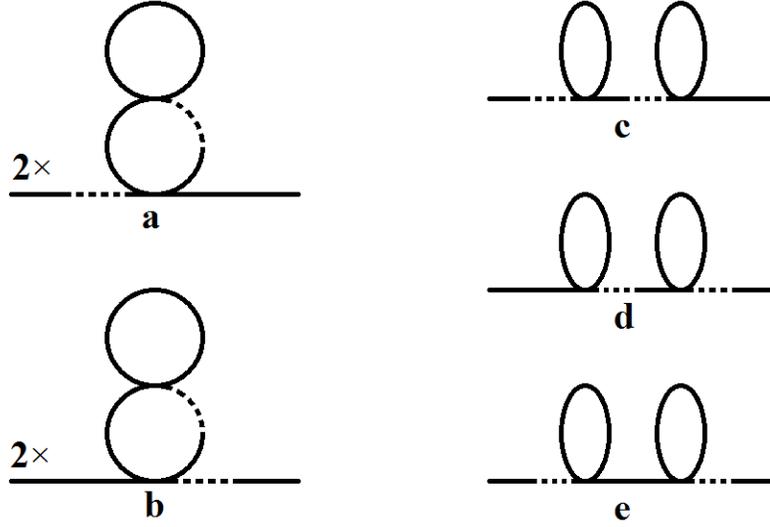


Рис. 6: Все ненулевые двухпетлевые поправки к келдышевскому пропагатору — диаграммы типа “башня” (слева) и “двойной головастик” (справа)

интегралы:

$$\begin{aligned}
D_2^{K,tadpoles}(t_1, t_2) &= \frac{27i\lambda^2}{(2\omega_-)^3} \left(\frac{T}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2} \right) \left(e^{2i\omega_- t_0} f_1^* f_2^* - e^{-2i\omega_- t_0} f_1 f_2 \right) + O(T^0), \\
D_2^{K,sunset}(t_1, t_2) &= D_2^{R/A,tadpoles}(t_1, t_2) = D_2^{R/A,sunset}(t_1, t_2) = O(T^0), \\
D_1^K(t_1, t_2) &= D_1^{R/A}(t_1, t_2) = O(T^0),
\end{aligned} \tag{102}$$

где мы разделили вклады диаграмм, приведенных на Рис. 6 и Рис. 5. В действительности, этот результат можно обобщить: рост поправок к пропагаторам в произвольном порядке по λ отвечает диаграммам типа “множественный головастик”, которые строятся из однопетлевых поправок к линиям и дают $D_n^K(t_1, t_2) \sim T^{n-1} \cdot O(T^0)$, $D_n^{R/A}(t_1, t_2) = O(T^0 \tau^n) = O(T^0)$.

4.4 Поправки к вершинам

До сих пор мы вычисляли поправки к пропагаторам. Тем не менее, возможен и другой тип поправок к корреляционным функциям, которые относятся к вершинам. Здесь мы покажем, что такие поправки подавлены в пределе $T \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$. Другими словами, мы будем работать в пределе, в котором времена внешних ног диаграммы t_1, t_2, t_3, t_4 стремятся к бесконечности, а все разности между ними $t_1 - t_2$ и т.п. удерживаются постоянными. Все такие разности мы будем полагать равными и обозначим их как $\tau = t_i - t_j$.

Для начала рассмотрим однопетлевую ($\sim \lambda^2$) поправку к вершине с тремя пунктирными ногами ($-i\lambda/4$). Легко видеть, что одна из двух возможных диаграмм в этом случае равна нулю, поскольку она содержит произведение тета-функций $\theta(t_5 - t_6)\theta(t_6 - t_5)$ (Рис. 7). Другая возможная диаграмма содержит произведение $\theta(t_5 - t_1)\theta(t_6 - t_5)\theta(t_6 - t_4)\theta(t_3 - t_6)$ и следовательно ведет себя как $\sim \tau^2$, то есть она $O(T^0)$.

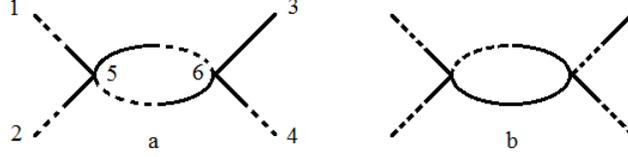


Рис. 7: Однопетлевые поправки к вершине $-i\lambda/4$

Возможных диаграмм, описывающих поправки к вершине с одной пунктирной ногой, несколько больше (Рис. 8). Тем не менее, вклад каждой из этих диаграмм несложно оценить по отдельности.

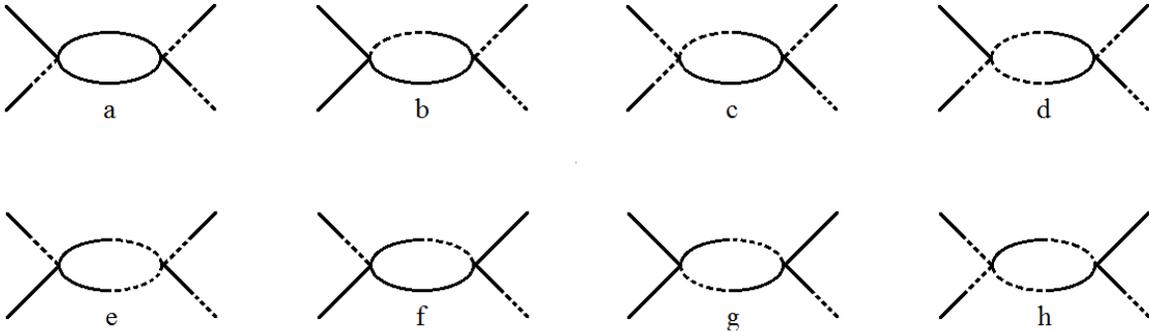


Рис. 8: Однопетлевые поправки к вершине $-i\lambda$

Диаграммы а – d складываются из множителей вида $D^A(t_6, t_3)D^R(t_6, t_4) \sim \theta(t_3 - t_6)\theta(t_6 - t_4)$ (которые отвечают внешним ногам) и следовательно ведут себя как $\sim \tau$. В то же время, они все еще содержат интегрирование вида $\int_{t_0}^T$, которое в случае $\beta \neq 0$ дает итоговую зависимость $\simeq O(T\tau)$, а в случае $\beta = 0$ — зависимость $\simeq O(T^0\tau)$. Диаграммы e, f содержат интегрирования от $\theta(t_1 - t_5)\theta(t_5 - t_6)\theta(t_6 - t_4)$ и следовательно $\simeq O(T^0\tau^2)$. Наконец, диаграммы g и h очевидно равны нулю.

Итак, мы получили, что в неадиабатическом случае $\beta \neq 0$ поправки к вершинам $\sim \lambda^2 T$. Эти поправки растут со временем, однако подавлены по сравнению с поправками к кельдышевскому пропагатору D_1^K и D_2^K в пределе $T \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$. В адиабатическом случае $\beta = 0$ поправки к вершинам $\sim \lambda^2 T^0$ и также подавлены по сравнению с поправками к пропагаторам в рассматриваемом пределе.

4.5 Перенормировка частоты

Выше мы уже видели, что в адиабатическом случае $\beta = 0$ секулярный рост поправок к кельдышевскому пропагатору можно убрать, изменяя вакуумное состояние так, чтобы оно переходило в вакуумное состояние свободной теории в бесконечном прошлом и будущем (смотри подраздел 2.3). Это обусловлено тем фактом, что диагональные вклады относятся к диаграммам типа “головастик” и ведут себя как $\sim \lambda^n T^{n-1}$ при $T \rightarrow \infty$ (смотри подраздел 4.3), тогда как недиагональные вклады ведут себя как $\sim \lambda^n T^n$ в том же пределе. Тем не менее,

в неадиабатическом случае $\beta \neq 0$ оба вида вкладов ведут себя как $\sim \lambda^n T^n$, и избавиться от этого роста переопределением вакуумного состояния нельзя.

В этом подразделе мы покажем, что однопетлевые поправки к келдышевскому пропагатору типа “головастик”, которые бесконечно растут при $T \rightarrow \infty$, можно убрать перенормировкой частоты [17, 18, 48–50]. Это утверждение удобнее доказывать до келдышевского поворота (89). В самом деле, просуммируем все вклады диаграмм типа “головастик” в пропагатор D^{++} , используя уравнение Дайсона – Швингера [45]:

$$D_{exact}^{++}(t_1, t_2) = D_0^{++}(t_1, t_2) - 3i\lambda \int dt_3 M^2(t_3) \left[D_0^{++}(t_1, t_3) D_{exact}^{++}(t_3, t_2) - D_0^{+-}(t_1, t_3) D_{exact}^{-+}(t_3, t_2) \right], \quad (103)$$

где мы обозначили $M^2(t_3) \equiv D_0^{++}(t_3, t_3) = D_0^{--}(t_3, t_3) = |f_3|^2$. Это суммирование можно схематически представить в виде “цепочки головастиков” (Рис. 9). Действуя на точный пропагатор D_{exact}^{++} оператором $(\partial_t^2 + \omega^2)$ и используя тот факт, что оператор \hat{D}_0 является обращением (80), получаем:

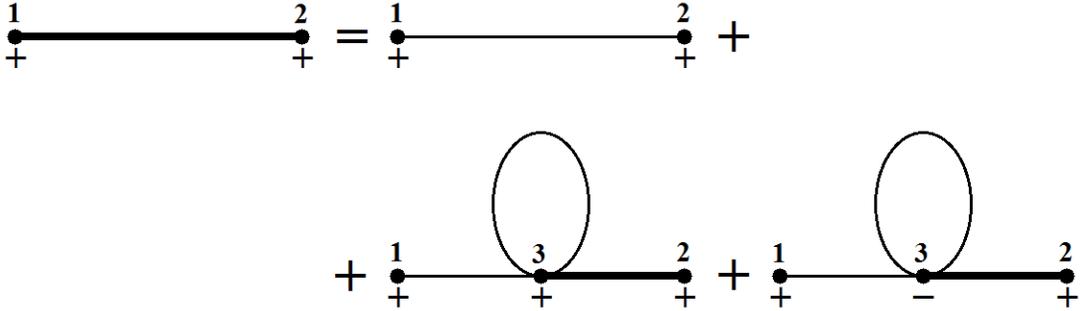


Рис. 9: Поправки к пропагатору D^{++} типа “цепочка головастиков”. Тонкие линии отвечают голым пропагаторам D_0^{++} и D_0^{+-} , жирные линии — точным пропагаторам D^{++} и D^{-+}

$$[\partial_{t_1}^2 + \omega^2(t_1)] D_{exact}^{++}(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2) + 3\lambda M^2(t_1) D_{exact}^{++}(t_1, t_2). \quad (104)$$

Вводя $\tilde{\omega}^2(t) = \omega^2(t) - 3\lambda M^2(t)$, получаем:

$$[\partial_t^2 + \tilde{\omega}^2(t)] D_{exact}^{++}(t, t'') = \delta(t - t''). \quad (105)$$

Аналогичные вычисления для других пропагаторов дают:

$$\begin{aligned} [\partial_t^2 + \tilde{\omega}^2(t)] D_{exact}^{\pm\mp}(t, t'') &= 0, \\ [\partial_t^2 + \tilde{\omega}^2(t)] D_{exact}^{--}(t, t'') &= -\delta(t - t''). \end{aligned} \quad (106)$$

Таким образом, поправки типа “головастик” можно интерпретировать как перенормировку частоты в действии (49) или (79).

В самом деле, рассмотрим поправки типа “головастик” к келдышевскому пропагатору в нескольких низших порядках по λ в случае неадиабатически изменяющейся частоты $\beta \neq 0$.

Подставляя поведение мод на будущей бесконечности (54), получаем:

$$\begin{aligned} D_0^K &= \frac{1}{2\omega} \left[\alpha\beta^* e^{2i\omega T} + \alpha^* \beta e^{-2i\omega T} \right] + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cdot \frac{1}{2\omega} \cos(\omega\tau), \\ D_1^K &= -\frac{9i\lambda T}{(2\omega)^2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cdot \frac{1}{2\omega} \left[\alpha\beta^* e^{2i\omega T} - \alpha^* \beta e^{-2i\omega T} \right] + O(T^0), \\ D_2^K &= \frac{1}{2} \left(-\frac{9i\lambda T}{(2\omega)^2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \right)^2 \cdot \frac{1}{2\omega} \left[\alpha\beta^* e^{2i\omega T} + \alpha^* \beta e^{-2i\omega T} \right] + O(T). \end{aligned} \quad (107)$$

Можно заметить, что знак перед экспоненциальной функцией, содержащей отрицательную частоту, положителен в четных порядках и отрицателен в нечетных. Поэтому все однопетлевые поправки в лидирующем порядке при $T \rightarrow \infty$ суммируются следующим образом:

$$D_{exact}^K \simeq \frac{1}{2\tilde{\omega}} \left[\alpha\beta^* e^{2i\tilde{\omega}T} + \alpha^* \beta e^{-2i\tilde{\omega}T} \right] + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cdot \frac{1}{2\tilde{\omega}} \cos(\tilde{\omega}\tau) + O(\lambda), \quad (108)$$

где мы ввели перенормированную частоту

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{9\lambda}{8\omega^2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2), \quad \text{то есть} \quad \tilde{\omega}^2 \simeq \omega^2 - \frac{9\lambda}{4\omega} (|\alpha|^2 + |\beta|^2), \quad (109)$$

и заменили ω на $\tilde{\omega}$ в знаменателе с точностью до $O(\lambda)$. Это дополнительное выражение подавлено в пределе $T \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda T = \text{const}$.

Заметим, что перенормированная частота, полученная из уравнения Дайсона — Швингера (103)–(106), отличается от результата прямых вычислений (109). Так происходит из-за того, что уравнение (103) относится только к диаграммам типа “цепочка головастиков” вида Рис. 4с, Рис. 6с–е и так далее и не учитывает более общие диаграммы типа “множественный головастик”, включающие в себя диаграммы типа “башня” (Рис. 6а, б) и более сложные вклады.

В случае адиабатически изменяющейся частоты $\beta = 0$ однопетлевые поправки растут медленнее:

$$\begin{aligned} D_0^K &= \frac{1}{2\omega_+} \cos(\omega_+\tau), \\ D_1^K &= \frac{3\lambda}{(2\omega_-)^2} \cdot \frac{1}{4\omega_+\omega_-} \left[e^{2i\omega_+T-2i\omega_-t_0} + e^{-2i\omega_+T+2i\omega_-t_0} \right], \\ D_2^K &= \frac{3\lambda}{(2\omega_-)^2} \cdot (-9i\lambda) \left(\frac{T}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2} \right) \cdot \frac{1}{4\omega_+\omega_-} \left[e^{2i\omega_+T-2i\omega_-t_0} - e^{-2i\omega_+T+2i\omega_-t_0} \right] + O(T^0). \end{aligned} \quad (110)$$

Можно увидеть, что голый пропагатор D_0^K зависит только от разности времен τ , тогда как поправки D_1^K , D_2^K и так далее зависят также от среднего T . Следовательно, выражение вида D_0^K нельзя получить после суммирования всех поправок вида (110). Это значит, что после перенормировки частоты квазиклассическое приближение перестает работать. В самом деле, рассмотрим поправки низшего порядка к массовому члену в (103):

$$M^2(t) = D^K(t, t) = \frac{1}{2\omega_+} + \frac{3\lambda}{8\omega_-\omega_+^3} \cos(2\omega_+t) + \frac{27\lambda^2}{8\omega_-\omega_+^3} \left(\frac{t}{(2\omega_+)^2} - \frac{t_0}{(2\omega_-)^2} \right) \sin(2\omega_+t) + \dots, \quad (111)$$

и проверим условие применимости квазиклассического приближения (53) для частоты из уравнения (105):

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{1}{\tilde{\omega}} \right| = \left| \frac{\dot{\tilde{\omega}}}{\tilde{\omega}^2} \right| = \left| \frac{\dot{\tilde{\omega}}}{\omega^2(t) - 3\lambda M^2(t)} \right| \ll 1. \quad (112)$$

Можно заметить, что $M^2(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, тогда как $\omega^2(t)$ остается конечным в этом пределе, поэтому при $\lambda \neq 0$ появляется по меньшей мере одна точка поворота $\omega^2(t_*) = 3\lambda M^2(t_*)$. Следовательно, неравенство не может быть выполнено для всех времен $t \in (-\infty, +\infty)$, и квазиклассическое приближение использовать нельзя. Таким образом, спрятать рост диаграмм типа “головастик” в перенормировку частоты в этом случае нельзя. Тем не менее, напомним, что в подразделе 2.3 мы показали, что от этих поправок можно избавиться модификацией вакуумного состояния (в этом случае было $\omega = \text{const}$, поэтому мы считали $\omega_+ = \omega_-$ и $t_0 = 0$). Также заметим, что в неадиабатическом случае подобных проблем не возникает, поскольку неравенство (53) не было выполнено с самого начала $\lambda = 0$, и следовательно включение взаимодействия не приводит к качественному изменению поведения пропагатора.

Таким образом, в этом подразделе мы показали, что рост поправок к келдышевскому пропагатору типа “головастик” можно убрать в перенормировку частоты в неадиабатическом случае, хотя в адиабатическом случае этого сделать нельзя. Тем не менее, заметим, что более высокие поправки все еще растут в неадиабатическом случае, поскольку они относятся к диаграммам типа “заходящее Солнце”. В то же время, этот рост соотносится с временной зависимостью $\langle a^+ a \rangle$ и $\langle aa \rangle$, которые являются компонентами келдышевского пропагатора (26).

5 Заключение

В этой дипломной работе мы рассмотрели простейший пример неравновесной квантовой теории поля — а именно, квантовомеханический осциллятор с переменной частотой и самодействием $\lambda\phi^4$. Мы использовали неравновесную диаграммную технику, чтобы вычислить петлевые поправки к пропагаторам и вершинам в основном состоянии свободного гамильтониана и проверили результаты прямыми вычислениями, проквантовав гамильтониан и переходя в представление взаимодействия.

Во-первых, мы получили, что ведущие вклады в петлевые поправки в пределе $T \rightarrow \infty$ одинаково ведут себя в случаях адиабатически изменяющейся частоты и постоянной частоты, то есть стационарном случае. В обоих случаях поправки к келдышевскому пропагатору бесконечно растут со временем, тогда как поправки к запаздывающему/опережающему пропагаторам остаются конечными. Этот рост можно связать только с диаграммами типа “головастик”. Тем не менее, от него можно избавиться, модифицируя вакуумное состояние таким образом, чтобы оно переходило в вакуумное состояние свободной теории в бесконечном прошлом и будущем. Следовательно, ни заселенность уровней $n = \langle a^+ a \rangle$, ни аномальное квантовое среднее $\kappa = \langle aa \rangle$, которые являются компонентами келдышевского пропагатора, не растут в этом случае. Этот факт связан с адиабатической теоремой из квантовой механики, впервые сформулированной в 1928 году Максом Борном и Владимиром Фоком [36].

Во-вторых, в случае неадиабатически изменяющейся частоты петлевые поправки к келдышевскому пропагатору растут быстрее, чем в адиабатическом случае, причем избавиться от них изменением вакуумного состояния нельзя. Поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам в этом случае также бесконечно растут, однако они подавлены по сравнению с поправками к келдышевскому пропагатору более высокими степенями λ в пределе $T \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda T = \text{const}$. Этот рост относится не только к диаграммам типа “головастик”, но и к диаграммам типа “заходящее Солнце”. Поэтому, несмотря на то, что вклад “головастиков” можно спрятать в перенормировку частоты, полностью избавиться от роста нельзя. Это значит, что и заселенность уровней $\langle a^+ a \rangle$, и аномальное квантовое среднее $\langle aa \rangle$ бесконечно растут в этом случае. Этот факт связан с неадиабатичностью изменения частоты, которая

привносит энергию в систему.

Наконец, секулярный рост петлевых поправок фактически означает, что теорию возмущений больше нельзя применять, поскольку даже при малых λ произведение λT может стать порядка единицы. Это значит, что для понимания поведения n и κ нужно просуммировать лидирующие вклады во всех петлях, выписать и решить кинетическое уравнение. Как правило, в квантовой теории поля это уравнение выводят, используя диаграммную технику для произвольных состояний теории [6, 9, 10, 17–20]. К сожалению, в квантовой механике этот подход применить нельзя, поскольку теорема Вика и, следовательно, диаграммная техника работает только для вакуумного (и теплового) состояний из-за отсутствия усреднения по бесконечному пространственному объему. Это значит, что аналог кинетического уравнения следует выводить каким-нибудь другим способом, то есть вопрос пересуммирования остается открытым.

Список литературы

- [1] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) Erratum: [*Commun. Math. Phys.* **46**, 206 (1976)].
- [2] W. G. Unruh, “Notes on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [3] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, “Hawking radiation and secularly growing loop corrections,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 2, 024029 (2016) [[arXiv:1508.07500 \[hep-th\]](#)].
- [4] J. Schwinger, “Brownian Motion of a Quantum Oscillator,” *Journal of Mathematical Physics* **2**, 407 (1961).
- [5] L. V. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1515 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965)].
- [6] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems,” Cambridge, UK: University Press (2011) [[arXiv:cond-mat/041229](#)].
- [7] J.-S. Wang, B. K. Agarwalla, H. Li, J. Thingna, “Nonequilibrium Green’s function method for quantum thermal transport,” *Frontiers of Physics* **9**, 673 (2014) [[arXiv:1303.7317 \[cond-mat\]](#)].
- [8] B. Garbrecht, T. Prokopec and M. G. Schmidt, “Particle number in kinetic theory,” *Eur. Phys. J. C* **38**, 135 (2004) [[arXiv:hep-th/0211219](#)].
- [9] J. Berges, “Introduction to nonequilibrium quantum field theory,” *AIP Conf. Proc.* **739**, 3 (2005) [[arXiv:hep-ph/0409233](#)].
- [10] J. Rammer, “Quantum field theory of non-equilibrium states,” Cambridge, UK: University Press (2007).
- [11] E. A. Calzetta and B. L. B. Hu, “Nonequilibrium Quantum Field Theory,” Cambridge, UK: University Press (2008).
- [12] P. Millington and A. Pilaftsis, “Perturbative nonequilibrium thermal field theory,” *Phys. Rev. D* **88**, no. 8, 085009 (2013) [[arXiv:1211.3152 \[hep-ph\]](#)].

- [13] A. H. Mueller and D. T. Son, “On the Equivalence between the Boltzmann equation and classical field theory at large occupation numbers,” *Phys. Lett. B* **582**, 279 (2004) [[hep-ph/0212198](#)].
- [14] J. Marino and S. Diehl, “Quantum dynamical field theory for non-equilibrium phase transitions in driven open systems,” *Phys. Rev. B* **94**, no. 8, 085150 (2016) [[arXiv:1606.00452](#) [[cond-mat.quant-gas](#)]].
- [15] C. Anastopoulos, “Quantum correlation functions and the classical limit,” *Phys. Rev. D* **63**, 125024 (2001) [[arXiv:gr-qc/0011111](#)].
- [16] E. Calzetta and B. L. Hu, “Closed Time Path Functional Formalism in Curved Space-Time: Application to Cosmological Back Reaction Problems,” *Phys. Rev. D* **35**, 495.
- [17] E. T. Akhmedov, “Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,” *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1430001 (2014) [[arXiv:1309.2557](#) [[hep-th](#)]].
- [18] E. T. Akhmedov, F. K. Popov and V. M. Slepukhin, “Infrared dynamics of the massive ϕ^4 theory on de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **88**, 024021 (2013) [[arXiv:1303.1068](#) [[hep-th](#)]].
- [19] A. M. Polyakov, “Infrared instability of the de Sitter space,” [arXiv:1209.4135](#) [[hep-th](#)].
- [20] E. T. Akhmedov and P. Burda, “Solution of the Dyson–Schwinger equation on de Sitter background in IR limit,” *Phys. Rev. D* **86**, 044031 (2012) [[arXiv:1202.1202](#) [[hep-th](#)]].
- [21] E. T. Akhmedov and F. Bascone, “Quantum heating as an alternative of reheating,” *Phys. Rev. D* **97**, no. 4, 045013 (2018) [[arXiv:1710.06118](#) [[hep-th](#)]].
- [22] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko and F. K. Popov, “Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **96**, no. 2, 025002 (2017) [[arXiv:1701.07226](#) [[hep-th](#)]].
- [23] D. Glavan, S. P. Miao, T. Prokopec and R. P. Woodard, “Electrodynamical Effects of Inflationary Gravitons,” *Class. Quant. Grav.* **31**, 175002 (2014) [[arXiv:1308.3453](#) [[gr-qc](#)]].
- [24] G. Petri, “A Diagrammatic Approach to Scalar Field Correlators during Inflation,” [arXiv:0810.3330](#) [[gr-qc](#)].
- [25] S. B. Giddings and M. S. Sloth, “Cosmological diagrammatic rules,” *JCAP* **1007**, 015 (2010) [[arXiv:1005.3287](#) [[hep-th](#)]].
- [26] T. Prokopec, M. G. Schmidt and S. Weinstock, “Transport equations for chiral fermions to order \hbar and electroweak baryogenesis. Part I,” *Annals Phys.* **314**, 208 (2004) [[arXiv:hep-ph/0312110](#)].
- [27] T. Prokopec, M. G. Schmidt and S. Weinstock, “Transport equations for chiral fermions to order \hbar and electroweak baryogenesis. Part II,” *Annals Phys.* **314**, 267 (2004) [[arXiv:hep-ph/0406140](#)].
- [28] K. Dusling, T. Epelbaum, F. Gelis and R. Venugopalan, “Role of quantum fluctuations in a system with strong fields: Onset of hydrodynamical flow,” *Nucl. Phys. A* **850**, 69 (2011) [[arXiv:1009.4363](#) [[hep-ph](#)]].

- [29] T. Epelbaum, F. Gelis and B. Wu, “Nonrenormalizability of the classical statistical approximation,” *Phys. Rev. D* **90**, no. 6, 065029 (2014) [[arXiv:1402.0115 \[hep-ph\]](#)].
- [30] A. V. Leonidov and A. A. Radovskaya, “On formation of equation of state of evolving quantum field,” *JETP Lett.* **101**, no. 4, 215 (2015) [[arXiv:1412.0098 \[nucl-th\]](#)].
- [31] A. Leonidov and A. Radovskaya, “Applicability of the Wigner functional approach to evolution of quantum fields,” *EPJ Web Conf.* **125**, 05013 (2016) [[arXiv:1608.04580 \[hep-ph\]](#)].
- [32] A. I. Nikishov, “S matrix in quantum electrodynamics with external field,” *Teor. Mat. Fiz.* **20**, 48 (1974)
- [33] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, “Solutions of the Klein-Gordon and Dirac equations for a particle in a constant electric field and a plane electromagnetic wave propagating along the field,” *Teor. Mat. Fiz.* **26**, 16 (1976).
- [34] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, “Secularly growing loop corrections in strong electric fields,” *JHEP* **1409**, 071 (2014) [[arXiv:1405.5285 \[hep-th\]](#)].
- [35] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, “A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields,” *JHEP* **1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085 [[arXiv:1412.1554 \[hep-th\]](#)].
- [36] M. Born and V. A. Fock, “Beweis des Adiabatenatzes,” *Zeitschrift für Physik A* **51** (3-4), 165 (1928).
- [37] T. Kato, “On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **5**, 435 (1950).
- [38] B. Ya. Zel’dovich, A. M. Perelomov and V. S. Popov, “Relaxation of a quantum oscillator,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55**, 589 (1968) [*Sov. Phys. JETP* **28.2**, 308 (1969)].
- [39] V. S. Popov and A. M. Perelomov, “Parametric excitation of a quantum oscillator,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **56**, 1375 (1969) [*Sov. Phys. JETP* **29.4**, 738 (1969)].
- [40] V. S. Popov and A. M. Perelomov, “Parametric excitation of a quantum oscillator. II,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **57**, 1684 (1969) [*Sov. Phys. JETP* **30.5**, 910 (1970)].
- [41] E. T. Akhmedov and S. O. Alexeev, “Dynamical Casimir effect and loop corrections,” *Phys. Rev. D* **96**, no. 6, 065001 (2017) [[arXiv:1707.02242 \[hep-th\]](#)].
- [42] L. Astrahantsev and O. Diatlyk, “Massive quantum scalar field in presence of moving mirror,” [arXiv:1805.00549 \[hep-th\]](#).
- [43] T. Matsubara, “A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics ,” *Prog. Th. Phys.* **14**, no. 4, 351 (1955).
- [44] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, Vol. 9 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1980).
- [45] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [46] T. S. Evans and D. A. Steer, “Wick’s theorem at finite temperature,” *Nucl. Phys. B* **474**, 481 (1996) [[arXiv:hep-ph/9601268](#)].

- [47] G. C. Wick, "The Evaluation of the Collision Matrix," Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
- [48] M. E. Peskin and D. V. Shroeder, "An introduction to quantum field theory" (Westview press, 1995).
- [49] A. Fetter and J. Walecka, "Quantum Theory of Many-Particle Systems," New York: McGraw-Hill (1971).
- [50] K. G. Wilson and J. Kogut, "The renormalization group and the ϵ expansion," Physics Reports **12**, no. 2, 75 (1974).
- [51] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 2 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).