ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(Государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Об условии самосогласованности 'т Хофта в гидродинамике

(выпускная квалификационная работа бакаларва)

Выполнил:
студент 424 группы
Васильев Алексей Игоревич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Захаров В. И.

Долгопрудный
2018

Содержание

1 Введение

Условие самосогласования тХофта [1] является редким примером аналитического вычисления некоторой комбинации адронных матричных элементов в режиме сильной связи [1] исходя из первых принципов. В применении к распадам π-мезонов соотношение 'т Хофта записывается как

$$f_\pi f(\pi^0 \to 2\gamma) \;\approx\; \frac{\alpha_{el}}{8\pi^2} N_c \big(Q_u^2 - Q_d^2\big) \;, \tag{1}$$

где f_π - константа пионного распада, $f(\pi^0 \to 2\gamma)$ константа перехода $\pi^0 \to 2\gamma$, $\alpha_{el} \approx 1/137$,, N_c -число цветов, Q_u, Q_d -заряды легких кварков.

Соотношение (1) приближенное, но становится точным в пределе равной нулю массы легких кварков, или в пределе $m_\pi^2 = 0$. Выделенная роль π-мезонов в соотношении (1) связана с тем, что π-мезон является Голдстоуновской частицей, существование которой в случае спонтанного нарушения глобальной симметрии гарантируется теоремой Голдстоуна. Этой же теоремой гарантируется $f_\pi \neq 0$. В этой перспективе, соотношение (1) можно рассматривать как предсказание для константы распада π^0-мезона в два фотона. Численный коэффициент в (1) сводится к коэффициенту C_A в так называемой киральной аномалии:

$$\partial_\alpha j_5^\alpha \;=\; C_A \frac{\alpha_{el}}{4\pi} (\vec{E} \cdot \vec{B}) \;, \tag{2}$$

j_5^α -аксиальный ток определенный так что соответствующий заряд, $Q_5 = \int d^3x j_5^0$ является генератором киральных преобразований, причем классический Лагранжиан инвариантен относительно этих преобразований; $\vec{E}, \vec{B}$-внешние электромагнитные поля. Коэффициент C_A отражает свойства теории на фундаментальном уровне. В частности, в случае квантовой хромодинамики коэффициент C_A определяется такими величинами как число цветов и электрические заряды $u-, d-$кварков, см. (1).

[1]Напомним, что эффективная константа связи в квантовой хромодинамике мала в области больших переданных импульсов, или асимптотической свободы. В этой области можно пользоваться теорией возмущений

Можно сказать, что соотношение 'т Хофта–посредством аномалии–связывает свойства Голдстоуновских бозонов со свойствами фермионов, входящих в лагранжиан фундаментальных взаимодействий. Отметим, что аналоги соотношения 'т Хофта были выведены для различных фундаментальных теорий. Имеется ввиду, в первую очередь, приложения к новым сильным взаимодействиям на масштабе одного ТэВ. Соотношение тХофта оказывается самосогласованным только для определенных наборов мультиплетов, к которым принадлежат Голдстоуновкие частицы и фундаментальные (киральные, то есть безмассовые) фермионы.

В последние годы квантовые аномалии получили неожиданные приложения в гидродинамике. Можно сказать, что возникло новое направление в теоретической физике [?]. В пионерской работе Сона и Суровки [2] было продемонстрировано следующее. Рассматривается теория с некоторым сильным взаимодействием, кирально-инвариантным относительно $U(1)$ преобразований. Предполагается, что эта киральная симметрия аномальна. То есть

$$\partial_\alpha j_5^\alpha \;=\; C_A^{U(1)}\frac{\alpha_{el}}{4\pi}(\vec{E}\cdot\vec{B}) \;, \tag{3}$$

где конствнта $C_A^{U(1)}$ отлична от нуля. Предполагается, далее, применимость гидродинамического разложения, или разложения по производным, и разложение ограничивается первыми неисчезающими членами. В рамках этих, совершенно общих предположений показано, что в векторном и аксиальном гидродинамических токах возникают "аномальные"вклады, которые исчезают вместе с константой $C_A^{U(1)}$.

Более подробно, было показано [3, 4], что векторный и аксиальные токи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} j_V^\alpha \; &= n_V u^\alpha \;+\; \sigma_E E^\alpha \;+\; \sigma_B \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta F_{\gamma\delta} \\ j_5^\alpha \; &= \; n_A u^\alpha \;+\; \sigma_\omega \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta \partial_\gamma u_\delta \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\sigma_B \;=\; C_A^{U(1)}C_B\mu_5 \;,\; \sigma_\omega \;=\; C_A^{U(1)}C_\omega(\mu^2+\mu_5^2) \tag{5}$$

и приняты следующие обозначения: n_V, n_A -плотности частиц с, соответственно, векторным и аксиальным зарядом; u^α- 4-скорость элемента жидкости, $F_{\alpha\beta}$-тензор напряженности внешнего электромагнитного поля, μ, μ_5-химические потенциалы сопряженные, соответственно, векторному и аксиальному зарядам; константа $C_A^{U(1)}$ фиксирует киральную аномалию, см. (3), константы C_B, C_ω вычисляемы и известны явно.

Отметим, что член в векторном токе пропорциональный σ_B называется обычно *киральным магнитным эффектом* [3], в то время как член пропорциональный σ_ω в аксиальном токе называется обычно *киральный вихревой эффект* [4].

Таким образом, было показано, что знание киральной аномалии на уровне фундаментального ланранжиана позволяет фиксировать некоторые гидродинамические эффекты в теориях с сильной связью. Можно говорить поэтому об обобщениях соотношения тХофта на гидродинамику. Такая терминолония особенно уместна если киральная симметрия, связанная с аксиальным зарядом $\int d^3x j_5^0$, реализуется спонтанно нарушенным образом. Отметим, однако, что терминология, связывающая киральные эффекты с соотношением тХофта, не является в настоящее время общепринятой и употреблялась в относительно небольшом количестве работ.

Настоящая дипломная работа посвящена теме возможного обобщения соотношений тХофта на релятивистскую гидродинамику и носит в основном обзорный характер. Мы сосредоточиваемся на трех моментах:

- Общий механизм возникновения аномальных вкладов в токи в гидродинамическом приближении
- Следствия для явлений аномального переноса из неперенормируемости киральной аномалии на фундаментальном уровне
- Динамика аномального переноса в случае спонтанного нарушения соответствующей киральной симметрии

Оговоримся, что многие вопросы остаются открытыми. В особенности это замечание относится к последним двум из перечисленных выше пунктов.

2 Аномалия Адлера-Белла-Джекива

Обсудим для начала так называемый аномальный член в выражении для дивергенции аксиального тока в спинорной электродинамике. Наличие такого члена было впервые описано Швингером [5] и далее развито Адлером, Бэллом и Джекивом [6, 7]. Вкратце, рассматриваемую проблему можно описать вследующим образом:

Как известно, безмассовый лагранжиан Дирака сохраняется при преобразованиях

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \psi \to e^{i\gamma^5\alpha}\psi \tag{6}$$

Следовательно, имеем два сохраняющихся тока

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0 \tag{7}$$

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = 0 \tag{8}$$

Однако, как было показано Швингером [5] оценка треугольных графиков:

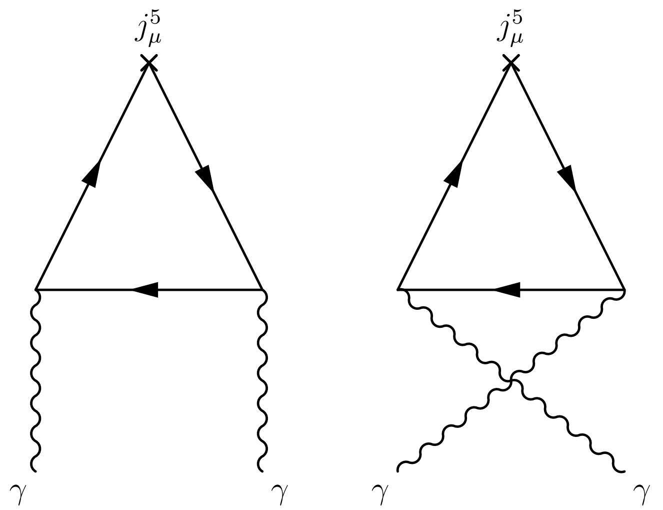


Рис. 1
треугольные диаграммы, оценка которых приводит к аномальному члену в дивергенции аксиального тока

дает следующий матричный элемент акиального тока:

$$\langle 0|\, \partial_\mu j^{\mu 5}\, |2\gamma\rangle = \frac{\alpha}{2\pi} F^{(1)} \tilde{F}^{(2)} \tag{9}$$

Где индексы (1) и (2) обозначают принадлежность к соответсвующим фотонным линиям. Это выражение подразумевает нарушение γ^5 инвариантности даже для нулевых масс. Безусловно, сохранение аксиального тока может быть восстановлено, но лишь ценой нарушения сохранения электромагнитного тока.

Взглянем на поведение интегралов, соответсвующих таким диаграммам на больших импульсах (ультрафиолетовое поведение). Имея три фермионных линии, получим оценку интегралов:

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4 p}{p^3} = \int_0^\Lambda dp = \Lambda \tag{10}$$

Получаем линейную расходимость, что требует применения одного из известных механизмов регуляризации.

2.1 Регуляризация Паули-Вилларса. Регуляторное поле

Введем массивное регуляторное поле R с массой M_R так чтобы имело место соотношение

$$(j_\mu^5)^{quantum} = j_\mu^5 + j_{\mu R}^5 = \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e + \bar{R}\gamma_\mu\gamma_5 R \tag{11}$$

в пределе $m_e = 0$ соответственно $\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{R}\gamma_5 R$

Для регуляторного поля выполнено уравнение Дирака

$$(\hat{p} - M_R)\psi_R = 0 \ (= \eta(x)) \tag{12}$$

где $\hat{p} = i\hat{\partial} - ieA^{el}$, а $\eta(x)$ – какой-либо источник. Отсюда, имеем

$$\psi_R = L^{-1}\eta(x) = \frac{1}{\hat{p} - M_R}\eta(x) \tag{13}$$

Предполагается, что у оператора нет нулевых мод.
Далее, дабы избавиться от гамма-матриц в знаменателе нашего пропагатора, домножим обе части равенства на $(\hat{p}+M_R)$. Для этого, вспомогательно

$$\hat{p}\hat{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = \tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} p_\mu p_\nu + \tfrac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] p_\mu p_\nu =$$
$$= p^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}[p_\mu, p_\nu] = p^2 + ie\partial_{[\mu}A_{\nu]}\sigma^{\mu\nu} = p^2 - ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \tag{14}$$

Таким образом точный пропагатор во внешнем электо-магнитном поле принимает вид

$$\psi_R = \frac{\hat{p}+M_R}{p^2 - M_R^2 - i\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}\eta \tag{15}$$

Соответственно,

$$\langle x| \frac{\hat{p}+M_R}{p^2 - M_R^2 - i\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} |y\rangle = S(x,y) \tag{16}$$
$$= (sum\ of\ diagrams)$$

После этого можем приступить к оценке матричного элемента дивергенции аксиального тока регуляторного поля

$$\langle 2Mi\bar{R}\gamma^5 R\rangle = \langle x| \, 2iM_R Tr\gamma^5 \frac{i}{\hat{p}-M_R} \, |x\rangle \, (-1)(-1) = \tag{17}$$
$$= \langle x| \, 2iM_R Tr\gamma^5 \frac{i(\hat{p}+M_R)}{p^2 - M_R^2 - ie\sigma F/2} \, |x\rangle$$

Разложим это выражение по $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ приняв во внимание что

$$\begin{gathered} Tr\gamma^5 = 0 \\ Tr\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = 0 \\ Tr\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta} = 4i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \end{gathered} \tag{18}$$

Получим

$$\begin{gathered}(2iM_R^2)\left\langle x\right| Tr\gamma^5(-\tfrac{ie\sigma F}{2})^2\tfrac{1}{p^2-M_R^2}\left|x\right\rangle + O(F^{2+\epsilon}) = \\ = 2iM_R^2\tfrac{e^2}{4}Tr(\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta})\left\langle x\right| F_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\tfrac{1}{(p^2-M_R^2)^3}\left|x\right\rangle\end{gathered} \tag{19}$$

Используем вышеописанные соотношения и учтем, что, так как $F^{\mu\nu}$ – классические поля, их можно "вытащить"из-под знака среднего. Далее имеем

$$\left\langle x\right| \frac{1}{(p^2-M_R^2)^3}\left|x\right\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2-M_R^2)^3} = \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{2M_R^2}$$

Собрав все воедино, получим известное выражение аномалии Адлера-Белла-Джэкива

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e^2}{8\pi^2}F\tilde{F} \tag{20}$$

где

$$F\tilde{F} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \tag{21}$$

2.2 Теорема Адлера-Бардина

Итак, мы выяснили, что для аксиального тока не выполняется обыкновенное уравнение для дивергенции, ожидаемое из уравнений движения.

$$\begin{gathered} j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ \partial^\mu j_\mu^5 = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{gathered} \tag{22}$$

Вместо этого, имеет место выражение

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{2\pi}F\tilde{F} \tag{23}$$

Где дополнительный член появляется вследствие наличия треуголных диаграмм аксиального вектора, которые, будучи регуляризованны таким образом, чтобы быть калибровочно-инвариантными по отношению к своим векторным индексам, перестают удовлетворять обычное аксиальное тождество Уорда.

Крайне важным утверждением представляется следующее: это выражение для дивергенции аксиального тока есть точное выражение. Другими словами, аномальный член не получает никаких дополнительных вкладов от радиационных поправок возникающих за счет фотонных линий, соединяющих различные точки треугольных диаграмм. Это утверждение называется теоремой Адлера-Бардина [8], к которой можно лишь добавить несколько уточнений. А именно, что существуют регуляризации, при которых аксиальная аномалия задается лишь низшим графиком теории возмущений. Но существуют и другие регуляризации, в которых это неверно.

Справедливо также заметить, что диаграмма, показанная ниже, все-таки дает неисчезающий вклад в аномалию, хоть и малый, по сравнению с вышеописанным [9]

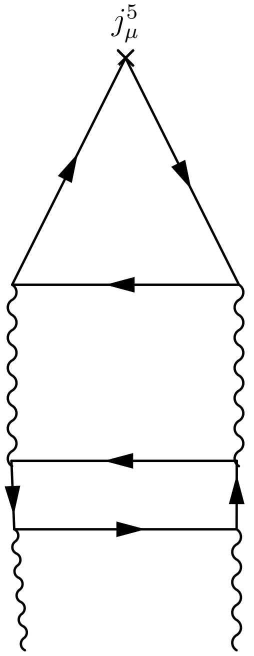


Рис. 2

Диаграмма, отвечающая процессу $\sim e^6$,

все-таки дающая вклад в выражение для аксиальной аномалии

3 Кинематика матричного элемента аксиального тока

Продолжим рассмотрение треугольной диаграммы, определяющей аксиальную аномалию. В случае, когда выходящие фотоны находятся на массовой поверхности, а именно $k_1^2 = k_2^2 = 0$ форм-фактор матричного элемента аксиального тока, из кинематических соображений, может зависеть только от квадрата входящего импульса q^2, а именно:

$$\langle 2\gamma |\, j^5_\mu \,|0\rangle = f(q^2) q_\mu F\tilde{F} \tag{24}$$

Приведем ниже соображения, по которым, в этом матричном элементе будет присутствовать полюс по q^2. Взглянем на структуру последнего выражения и заметим, что оно, с точки зрения преобразований вращения, состоим из двух частей: "нулевой"и пространственных компонент, представляющих собой соответственно скалярное и векторное поле со спинами 0 и 1 соответственно. По известной (название) теореме, частица со спином 1 не может распасться на два фотона, следовательно, пространственная часть этого выражения не столь интересна. Напротив, частица со спином 0 без проблем может распасться на два фотона. Таким образом $f(q^2)$ не содержит γ^μ. Теперь вспоминая выражение для аксиальной аномалии $\partial^\mu j^5_\mu = (const) F\tilde{F}$ восстанавливаем:

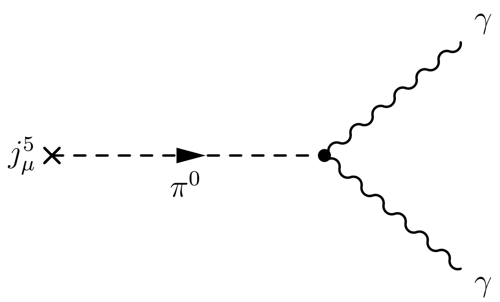
$$\langle 2\gamma |\, j^5_\mu \,|0\rangle = \frac{q_\mu}{q^2} F\tilde{F} \tag{25}$$

Наличие такого полюса в матричном элементе аксиального тока между вакуумом и ссотоянием с двумя фотонами крайне примечательно.

4 Полюс благодаря голдстоуновскому бозону

Широко известно, что в КХД киральная симметрия является спонтанно нарушенной. А в соответствии с теоремой Голдстоуна, каждая спонтанно нарушенная симметрия приводит к возникновению безмассовой частицы. Таким образом, в КХД с двумя безмассовыми кварками должны быть частицы со спином 0, соответсвующие несохраняющимся аксиальным токам. Такими частицами являются пионы.

Полюс в матричном элементе аксиального тока между вакуумом и двухфотонным состоянием, феноменологически, может возникнуть из-за процесса [10], в котором аксиальный ток рождает π^0 – нейтральный пион, который в свою очередь распадается на два фотона. Такой процесс задается графиком:



А матричный элемент такого процесса равен соответственно:

$$\langle 2\gamma| \, j^{\mu A} \, |0\rangle = f_\pi \frac{q^\mu}{q^2} f(\pi^0 \to \gamma\gamma) F\tilde{F} \tag{26}$$

Где f_π есть константа пионного распада. Значение ее, к слову, известно и равно $f_\pi = 93$Mev [10]. А $f(\pi^0 \to \gamma\gamma)$ есть константа распрада пиона в два фотона. Вспоминая о том, что по теореме Адлера-Бардина, ответ для аксиальной аномалии, задававшийся низшим графиком теории возмущений, является точным, домножим последнее выражение на q_μ и получим выражение, выдающее практическое воплощение условия самосогласованности 'т Хофта:

5 Эффективная теория поля

В этой секции покажем, что киральные эффекты можно воспроизвести, используя язык релятивистской гидродинамики. Для этих целей целесообразно использовать подход эффективной теории поля [11]. Нужно уточнить, что фундаментальный Лагранжиан в рассматриваемой теории должен сохранять киральность и быть, таким образом, неаномальным. Следовательно, аномалия появляется в теории только в присутствии внешнего электро-магнитного поля A^μ. Выберем микроскопические токи так, что

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{27}$$

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \tag{28}$$

Где ψ – поле фермионов. Классически в такой теории есть два типа сохраняющихся токов.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{29}$$

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0 \tag{30}$$

Для того, чтобы имитировать наличие среды, необходимо ввести в гамильтониан эффективные члены: химические потенциалы, сопряженные с соответствующими сохраняющимися зарядами

$$H_{eff} = H - \mu Q - \mu^5 Q^5 \tag{31}$$

где заряды имеют вид

$$Q = \int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{32}$$

$$Q_5 = \int d^3x\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \tag{33}$$

Переходя к добавочным членам в Лагранжиане:

$$\delta L = \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi + \mu_5\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi \tag{34}$$

Как известно, введение химического потенциала μ в теорию ведет, главным образом, к двум последствиям. А именно, во-первых, так как все уровни энергии системы ниже μ становятся занятыми, сами уровни сдвигаются $p_0 \to p - \mu$. Во-вторых, полюса пропагаторов меняются, обретая зависимость от μ и p.

Производя Лоренцев поворот в систему покоя элемента жидкости, учтем, что члены, входящие в (34) преобразуются как $\bar{\psi}\gamma^0\psi \to \bar{\psi}\gamma^\mu u_\mu\psi$ получим:

$$S = \int_{V_y} d^4x\bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + (\mu + \mu_5\gamma_5)u_\mu + eA_\mu)\psi \tag{35}$$

Где был введен физически микроскопический объем V_y вокруг точки y так, чтобы в нем все инфракрасные поля эффективной теории можно было рассматривать как однородные. Также был введен член взаимодействия со внешним электромагнитным полем с константой e - зарядом. Внешние поля полагаются постоянными внутри каждого микроскопического физического объема V_y.

Далее на пути построения эффективной теории нам нужно просуммировать по большому числу микрокопических физических объемов и проинтегрировать микроскопические степени свободы. Однако, для рассмотрения киральных эффектов нам будет достаточно изучения токов и аномалий в эффективной теории, чем мы и ограничимся.

Зависимость полюсов пропагаторов от μ не может повлиять на аномальное несохранение токов, так как такое изменения есть инфракрасный эффект, исчезающий при устремлении $\mu \to 0$, а аномалия, как явление, проявляется в пределе больших импульсов. Получается, в таком пределе, рассмотрение возвращается к случаю нулевых плотностей. Существует утверждение, что этот факт эквивалентен независимости аномалии от температуры и плотности [].

Таким образом, только член взаимодействия $\bar{\psi}\gamma^\mu(\mu + \mu_5\gamma_5)u_\mu\psi$ в эффективной теории может описывать зависимость аномалии от величин μ, μ_5. Справедливо заметить, что этот член может рассматриваться точно так же, как и член взаимодействия со внешним полем $\bar{\psi}\gamma^\mu eA_\mu\psi$.

В итоге мы приходим к известному заключению о том, что переход в гидродинамический режим может быть выполнен при помощи подстановки [11]

$$eA_\mu \to eA_\mu + \mu u_\mu \tag{36}$$

Такая подстановка (36) имеет устоявшееся название – химический сдвиг.

6 Гидродинамика

Итак, введение в теорию сохраняющегося заряда, а вместе с ним и химического потенциала ведет к поправке в гамильтониан

$$H \to H - \mu Q \tag{37}$$

А переход в гидродинамический режим может быть осуществлен подстановкой [11]

$$eA_\mu \to eA_\mu + \mu u_\mu \tag{38}$$

где A_μ есть внешнее электро-магнитное поле, а u_μ – "поле" 4-скоростей элементов жидкости, как функция от координат. Как следствие такой подстановки, возникает обобщение аномальных треугольных диаграмм для аксиального тока на гидродинамику.

Рассмотрим теперь варианты применения такой подстановки к вычислению аномалии и аномальных эффектов в гидродинамическом режиме. В результате такой подстановки меняется (обобщается) определение сохраняющегося аксиального заряда [12]. Если ранее, на исключительно теоретико-полевом уровне в теории сохранялся заряд

$$Q^A = Q^A_{naive} + \tfrac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H}_{mh} \ , \quad \frac{d}{dt}Q^A = 0 \tag{39}$$

где Q^A_{naive} есть аксиальный заряд, сохраняющийся в соответствии с классическими уравнениями движения без учета аномалии. $\mathcal{H}_{mh}$ есть так называемая магнитная спиральность, задающаяся выражением:

$$\mathcal{H}_{mh} = \int d^3x \epsilon^{0ijk} A_i \partial_j A_k = \int d^3x \vec{A} \cdot \vec{B} \tag{40}$$

где $\vec{B}$ есть вектор магнитного поля, а $\vec{A}$ – соответствующий вектор-потенциал.

То теперь, мы приходим к новому, более полному определению сохраняющегося аксиального заряда в гидродинамике:

$$Q^A_{hydro} = Q^A_{naive} + \frac{e^2}{4\pi^2}\mathcal{H}_{mh} + \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{H}_{fh} + \frac{e}{2\pi^2}\mathcal{H}_{fmh} \tag{41}$$

Здесь, помимо введенного выше определения магнитной спиральности $\mathcal{H}_{mh}$ были введены:
Так называемая жидкостная спиральность:

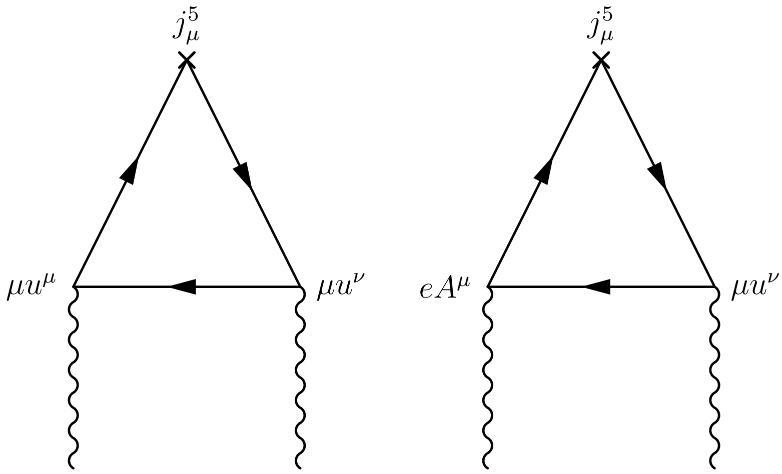
$$\mathcal{H}_{fh} = \int d^3x \epsilon^{0ijk} (\mu u_i) \partial_j (\mu u_k) \tag{42}$$

И смешанная, т.н. жидкостно-магнитная спиральность:

$$\mathcal{H}_{fmh} = \int d^3x \epsilon^{0ijk} (\mu u_i) \partial_j A_k = \int d^3x \epsilon^{0ijk} A_i \partial_j (\mu u_k) \tag{43}$$

Справедливо будет, однако, заметить, что во введенный нами заряд Q_{fh}, вообще говоря, существует дополнительный термальный вклад, не охватываемый подстановкой (36). Его можно получить, рассматривая жидкость в неинерциальной системе отсчета (Виленкин, 1980). Здесь и далее, мы опускаем такой вклад в угоду упрощения рассмотрения.
Заряд, как величина, определенная в системе покоя элемента жидкости, не является величиной ковариантной. Напротив, ковариантной величиной является ток (в нашем случае аксиальный), вклады в который будут соответствовать определенным выше вкладам в сохраняющийся заряд и получены могут быть, альтернативно, если, следуя подстановке (36) производить оценку тре-

угольных графиков с соответствующими величинами в вершинах. Такая же процедура возможна и в случае векторного тока.



Киральные эффекты, полученные таким образом, качественно совпадают с результатом, полученным ранее в пионерской работе Соном и Суровкой [] за тем уточнением, что в их работе рассматривались фермионы лишь одной киральности. Однако, это совпадение продолжается только для членов, пропорциональных первой и второй степеням химпотенциалов. В работе [] были получены выражения для кинетических коэффициентов при вкладах в аксиальный ток, соответствующих киральным вихревому и магнитному эффекту. Эти выражения выглядят следующим образом:

$$\xi = C\Big(\mu^2 - \frac{2}{3}\frac{n\mu^3}{\epsilon + P}\Big) \tag{44}$$

$$\xi_B = C\Big(\mu - \frac{1}{2}\frac{n\mu^2}{\epsilon + P}\Big) \tag{45}$$

где n – плотность частиц, P – давление, ϵ – плотность энергии, а C – константа, стоящая в дивергенции аксиального тока в выражении для аномалии. В свою очередь, вклады в ток записываются как:

$$\delta j_\mu = \xi \omega_\mu + \xi_B B_\mu \tag{46}$$

Наше рассмотрение покрывает, как было сказано выше, не все вклады, полученные в [], а только первые члены. Старшие порядки по химпотенциалам для соответствующих вкладов связаны с n (степень при химпотенциале)-точечными диаграммами, которые расходятся на нижнем (ИК) пределе при интегрировании по импульсам. Следовательно, такие вклады зависят от инфракрасного обрезания и мы не будем пытаться их найти здесь.

Вернемся снова к к треугольной диаграмме. Ввиду описанной выше замены $eA_\mu \to eA_\mu - \mu u_\mu$, получится, в частности, новый вклад в дивергенцию аксиального тока в гидродинамике [14]:

$$\delta\partial_\mu j^{A\mu} \sim \mu^2 \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}\partial_\alpha u_\nu \partial_\beta u_\lambda \tag{47}$$

Что в нерелятивистском пределе ($u_\mu = (1, -\vec{v})_\mu$) переходит в

$$\delta\partial_\mu j^{A\mu} \sim \mu^2(\vec{a}\cdot\vec{\Omega}) \tag{48}$$

где $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j v_k$ есть угловая скорость элемента жидкости, а $\vec{a}$ – его ускорение.

Однако, справедливо заметить, что дополнительный член $\delta H = \mu Q$ в эффективном гамильтониане не отвечает никакому физическому взаимодействию, а лишь вызван нашим желанием ввести в теорию сохраняющийся заряд с соответствующим химическим потенциалом. Следовательно, такой член не должен давать дополнительных вкладов в аномалию.

Единственным способом разрешить возникшую проблему видится требование зануления матричного элемента получившегося дополнительного вклада по среде [13].

$$\langle medium|\, \mu^2 \epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}\partial_\alpha u_\nu \partial_\beta u_\lambda \,|medium\rangle = 0 \tag{49}$$

Так мы приходим к специфическому ограничению на дополнительный вклад в дивергенцию аксиального тока при обобщении условия 'т Хофта на гидродинамику при рассмотрении идеальной жидкости.

6.1 Обобщение условия 'т Хофта на гидродинамику

Рассмотрим подробнее особенности реализации условия самосогласованности 'т Хофта на гидродинамику [13]

Для того, чтобы обобщить соотношение

$$\langle 2\gamma| \, j^{\mu A} \, |0\rangle = f_\pi \frac{q^\mu}{q^2} f(\pi^0 \to \gamma\gamma) F\tilde{F} \qquad (50)$$

Нужно также произвести оценку треугольных графиков, после чего можно заметить, что полюс по q^2 никуда не делся. Можно сказать, что наличие полюса есть независимое от рассматриваемой модели следствие условия $\partial_\mu j^{A\mu} = (const)F\tilde{F}$. Пертурбативно, этот полюс есть отражение наличия безмассовых кварков. Непертурбативно, в фазе конфайнмента пертурбативный полюс заменяется безмассовой бесцветной частицей. В КХД это нейтральный π^0. В случае гидродинамики можно рассуждать, что обмен такой частицей имеет место как обмен т.н. киральной волной.

Обсудим это более подробно и поговорим о гидродинамическом приближении в принципе [11]. Говоря о гидродинамическом приближении мы усредняем по расстояниям Δx много превышающим длины свободного пробега кварков $l_{free\ path}$

$$\Delta x \gg l_{free\ path} \qquad (51)$$

Как результат взаимодействия фермионов формируется жидкость и, непосредственно, рассматривается гидродинамика.

Для фермионов, взаимодействующих только с внешним электромагнитным полем киральная аномалия, как известно, реализована исключительно нулевыми модами, которые есть ни что иное как уровни Ландау. Однако в рассматриваемом случае фермионы, как уже говорилось, взаимодействуют между собой (формируя жидкость), следовательно

$$l_{free\ path} < R_{Landau} \qquad (52)$$

Где R_{Landau} есть радиус уровня Ландау нулевой энергии. Гидродинамическое приближение подразумевает т.н. крупное зернение на масштабах, больших чем $l_{free\ path}$. Фермионы теряют согласованность (когерентность?) и уровни Ландау перестают существовать как решения. Таким образом реализация условия самосогласованности 'т Хофта фермионными возбудениями находится под большим вопросом.

Тогда реализация этого условия псевдоскалярными степенями свободы кажется жизнеспособной альтернативой. Подробное рассмотрения эффективной терии поля для псевдоскалярных возбуждений, или так называемых "гидродинамических теней"пиона, вообще говоря, приводит к существованию двухкомпонентной жидкости, такой, что:

$$j_\mu^5 = n^5 u_\mu + \tilde{n}^5 v_\mu \tag{53}$$

где u_μ и v_μ – два независимых поля скорости элементов двухкомпонентной жидкости. Конечно, в общем случае, такое рассмотрение ассоциируется со сверхтекучей жидкостью, а 4-скорости ассоциируются с нормальной и сверхтекучей компонентами.

Список литературы

[1] Gerard 't Hooft. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. *NATO Sci. Ser. B*, 59:135–157, 1980.

[2] D.T. Son and P. Surowka, *“Hydrodynamcs with Triangle Anomalies”*, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 191601, arXiv:0906.5044 [hep-th]

[3] A. Vilenkin. EQUILIBRIUM PARITY VIOLATING CURRENT IN A MAGNETIC FIELD. Phys. Rev., D22:3080–3084, 1980.

[4] A. Vilenkin. MACROSCOPIC PARITY VIOLATING EFFECTS: NEUTRINO FLUXES FROM ROTATING BLACK HOLES AND IN ROTATING THERMAL RADIATION. Phys. Rev., D20:1807–1812, 1979.

[5] J.Schwinger, Phys.Rev. 82 (1951) 664.

[6] S. L. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426.

[7] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento 60A (1969) 47.

[8] Adler S L and Bardeen W Phys. Rev. 182 1517 (1969)

[9] Anselm A A and Iogansen A JETP Lett. 49 214 (1989)

[10] M.E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press (1995).

[11] A.V. Sadofyev, V.I. Shevchenko, and V.I. Zakharov, “Notes on chiral hydrodynamics within effective theory approach”, Phys. Rev. D83 (2011) 105025, arXiv:1012.1958 [hep-th].

[12] A. Avdoshkin, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, and V.I. Zakharov, Phys. Lett. B 755 1 (2016), 1402.3587.

[13] A. Avdoshkin, A.V. Sadofyev, and V.I. Zakharov, “IR properties of chiral effects in pionic matter”, 1712.01256.

[14] V.I. Zakharov, “Notes on conservation laws in chiral hydrodynamics”, 1611.09113.