ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Квантово-классическая дуальность для систем частиц, связанных с системами корней классических алгебр Ли

выпускная квалификационная работа бакалавра

Выполнил:
студент 421 группы
Васильев Михаил Александрович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Зотов А.В.

Москва 2017

Содержание

1 Введение

Квантово-классическая дуальность - это точная связь между двумя системами, одна из которых является классической, а другая квантовой. В недавнее время несколько работ были посвящены данной теме [1],[2],[3],[4]. В них была установлена связь между периодическими цепочками Гейзенберга(моделями Годена) и системой Русенаарса(Калоджеро). В них были разобраны рациональный, тригонометрический и суперсимметричный случаи дуальности. Отличительной особенностью данных работ было то, что во всех случаях на квантовую систему накладывались периодические граничные условия, то есть рассматривались модели на окружности.

В данной работе будет исследована квантово-классическая дуальность, которая возникает для непереодических квантовых моделей Годена. Естественно задаться следующим вопросом: каким образом наложение нетривиальных граничных условий на квантовую модель скажется на дуальной классической модели? Оказывается, что в данном случае дуальной классической системой окажутся системы Калоджеро-Мозера, построенные по системам корней классических алгебр Ли [5]. Более того, мы покажем, каким образом выбор граничных условий в квантовой системе влияет на выбор системы корней, по которой построена классическая модель, а также на выбор констант связи в системе Калоджеро-Мозера.

Кратко напомним содержание работы [1], заостряя внимание на связи между классическими моделями Калоджеро и квантовыми моделями Годена на окружности.

Система Калоджеро - это интегрирумая механическая система, состоящая из N точек, взаимодействующих с обратно-квадратичным потенциалом. Гамильтониан данной модели имеет вид:

$$H^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \sum_{i\neq j}^{N} \frac{\nu^2}{(q_i-q_j)^2}, \tag{1.1}$$

с каноническими скобками Пуассона:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0,\ \ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \tag{1.2}$$

Данная система является интегрируемой в смысле Лиувилля, то есть она обладает набором из N независимых интегралов движения, которые находятся в инволюции.Уравнения движения данной системы:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H^{\mathrm{CM}}}{\partial p_i} = p_i, \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H^{\mathrm{CM}}}{\partial q_i} = -\sum_{j\neq i}^{N} \frac{2\nu^2}{(q_i-q_j)^3}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнения движения данной системы могут переписаны в форме Лакса:

$$\dot{L} = [L, M], \tag{1.4}$$

где L и M - матрицы размера $N \times N$. Если уравнения движения могут быть переписаны в подобной матричной форме (1.4), то можно мгновенно заключить, что величины:

$$H_k = \mathrm{tr} L^k, \tag{1.5}$$

являются сохраняющимися величинами(интегралами движения).
Матрица Лакса L рациональной системы Калоджеро имеет вид:

$$L_{ij}^{\rm CM} = \delta_{ij}p_i + (1-\delta_{ij})\frac{\nu}{q_i - q_j}. \tag{1.6}$$

Матрица M рациональной системы Калоджеро имеет вид:

$$M_{ij}^{\rm CM} = -(1-\delta_{ij})\frac{\nu}{(q_i - q_j)^2}. \tag{1.7}$$

С квантовой стороны мы имеем квантовую модель Годена, которую в данной работе мы будем рассмаривать как предел квантовой спиновой цепочки.
Гильбертовым пространством системы $\mathcal{H}$ является тензорное произведение $\mathcal{M}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{M}_N$, где каждое пространство $\mathcal{M}_i = \mathbb{C}^n$. $\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}^n$ мы обозначаем вспомогательное пространство.
Квантовая R-матрица, действующая нетривиально лишь в $\mathcal{M}_0 \otimes \mathcal{M}_j$ имеет вид:

$$R_{0j}(z) = 1\otimes 1 + \frac{h}{z}\sum_{a,b=1}^{n} E_{ab}^{(0)} \otimes E_{ba}^{(j)}. \tag{1.8}$$

Квантовая трансфер-матрица определяется следующим образом:

$$\hat{T}^{XXX}(z) = \mathrm{tr}_0\left[V_0 R_{01}(z-q_1)..R_{0N}(z-q_N)\right], \tag{1.9}$$

где $V = \mathrm{diag}(V_1, .., V_n)$. Вследствие того, что R-матрица (1.8) удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u_1-u_2)R_{13}(u_1-u_3)R_{23}(u_2-u_3) = R_{23}(u_2-u_3)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2), \tag{1.10}$$

трансфер матрица (1.9) коммутирует сама с собой при разных значениях спектрального параметра z. Таким образом, трансфер матрицу (1.9) можно рассматривать, как производящую функцию коммутирующих квантовых Гамильтонианов. Данные Гамильтонианы могут быть определены, как вычеты трансфер матрицы в точках q_i:

$$H_i^{XXX} = \underset{z=q_i}{\mathrm{Res}}\hat{T}^{XXX}(z). \tag{1.11}$$

Собственные значения данных операторов ищутся при помощи алгебраического Бете Анзаца. Собственные значения имеют следующий вид:

$$H_i^{XXX} = V_1\prod_{k\neq i}^{N}\frac{q_i - q_k + h}{q_i - q_k}\prod_{\gamma=1}^{N_1}\frac{q_i - v_\gamma^1 - h}{q_i - v_\gamma^1}, \tag{1.12}$$

где параметры v_γ^1 называются корнями Бете и удовлетворяют следующим уравнениями Бете:

$$\begin{gathered}
BE_1 : V_1\prod_{k=1}^{N}\frac{v_\beta^1 - q_k + h}{v_\beta^1 - q_k} = V_2\prod_{\gamma\neq\beta}^{N_1}\frac{v_\beta^1 - v_\gamma^1 + h}{v_\beta^1 - v_\gamma^1 - h}\prod_{\gamma=1}^{N_2}\frac{v_\beta^1 - v_\gamma^2 - h}{v_\beta^1 - v_\gamma^2}, \\
BE_b : V_b\prod_{\gamma=1}^{N_{b-1}}\frac{v_\beta^b - v_\gamma^{b-1} + h}{v_\beta^b - v_\gamma^{b-1}} = V_{b+1}\prod_{\gamma\neq\beta}^{N_b}\frac{v_\beta^b - v_\gamma^b + h}{v_\beta^b - v_\gamma^b - h}\prod_{\gamma=1}^{N_{b+1}}\frac{v_\beta^b - v_\gamma^{b+1} - h}{v_\beta^b - v_\gamma^{b+1}};\ b = 2, .., n-2, \\
BE_{n-1} : V_{n-1}\prod_{\gamma=1}^{N_{n-2}}\frac{v_\beta^{n-1} - v_\gamma^{n-2} + h}{v_\beta^{n-1} - v_\gamma^{n-2}} = V_n\prod_{\gamma\neq\beta}^{N_{n-1}}\frac{v_\beta^{n-1} - v_\gamma^{n-1} + h}{v_\beta^{n-1} - v_\gamma^{n-1} - h}.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Модель Годена можно рассматривать как предел квантовой цепочки $h \to 0$. Для взятия данного предела еще необходимо переобозначить матрицу твистов $V = \mathrm{diag}(e^{h\omega_1}, .., e^{h\omega_n})$. Собственные значения Гамильтонианов Годена, которые есть предел гамильтонианов цепочки, могут быть получены из собственных значения (1.12) взятием первого порядка по h. Аналогично, необходимо взять первый порядок по h в уравнениях Бете (1.13). В итоге получим, что собственные значения Гамильтонианов Годена имеют вид:

$$H_i = \omega_1 + \sum_{k \neq i}^{N} \frac{h}{q_i - q_k} - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{h}{q_i - v_k^1}, \tag{1.14}$$

где q_k-параметры неоднородности, а v_k-корни Бете, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\omega_b - \omega_{b+1} + \delta_{1b} \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{v_\beta^b - q_k} = -\sum_{\gamma=1}^{N_{b-1}} \frac{h}{v_\beta^b - v_\gamma^{b-1}} + 2\sum_{\gamma \neq \beta} \frac{h}{v_\beta^b - v_\gamma^b} - \sum_{\gamma=1}^{N_{b+1}} \frac{h}{v_\beta^b - v_\gamma^{b+1}}. \tag{1.15}$$

Теперь мы готовы сформулировать основное утверждение работы [1] относительно связи систем Калоджеро и квантовых моделей Годена.
Утверждение: Отождествим параметры неоднородности модели Годена и координаты в системе Калоджеро, положим константы связи данных систем равными $h = \nu$, а после этого подставим в матрицу Лакса системы Калоджеро (1.6) вместо импульсов собственные значения Гамильтонианов Годена. Тогда спектр матрицы полученной матрицы будет выражаться через данные квантовой задачи следующим образом:

$$\mathrm{Spec}L^{\mathrm{CM}}\big|_{p_i = H_i} = (\underbrace{\omega_1, .., \omega_1}_{N-N_1}, \underbrace{\omega_2, .., \omega_2}_{N_1-N_2}, .., \underbrace{\omega_{n-1}, .., \omega_{n-1}}_{N_{n-2}-N_{n-1}}, \underbrace{\omega_n, .., \omega_n}_{N_{n-1}}) \tag{1.16}$$

2 Рациональная система Каложеро-Мозера

Рациональная система Калоджеро-Мозера - это обобщение системы Калоджеро, рассмотренной в введении.Системы Калолджеро-Мозера строятся по системам корней простых алгебр Ли. В самом общем виде Гамильтониан данной системы записывается в следующем виде:

$$H^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - (\sum_{j \leq i}^{N} (\frac{m_2^2}{(q_i - q_j)^2} + \frac{m_2^2}{(q_i + q_j)^2}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_4^2}{(2q_i)^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_1^2}{q_i^2}),$$
$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \ \ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \tag{2.1}$$

В работе [5] была предложена Лаксова пара для данной системы со спектральным параметром в эллиптическом случае, нас интересует матрица Лакса для рационального случая без спектрального параметра:

$$L^{\mathrm{CM}}(m_1,m_2,m_4)=\begin{pmatrix} A & B & C_1\\ -B & -A & -C_1\\ -C_1^T & C_1^T & 0\end{pmatrix}$$

$$A_{ij}=\delta_{ij}\left(p_i-\frac{\sqrt{2}m_4}{2q_i}-\frac{\sqrt{2}m_1}{q_i}-m_2\sum_{k\neq i}^{N}(\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{q_i+q_k})\right)+(1-\delta_{ij})\frac{m_2}{q_i-q_j} \tag{2.2}$$

$$B_{ij}=(1-\delta_{ij})\frac{m_2}{q_i+q_j}+\delta_{ij}\frac{\sqrt{2}m_4}{2q_i}$$

$$C_{1i}=\frac{m_1}{q_i},$$

C_1 - столбец.
Стоит заметить, что матрица Лакса (2.2) отличается от привычной формы добавкой в диагональной части матрицы A. Стандартная форма достигается совершением канонического преобразования:

$$\tilde{p}_i=p_i-\frac{\sqrt{2}m_4}{2q_i}-\frac{\sqrt{2}m_1}{q_i}-m_2\sum_{k\neq i}^{N}(\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{q_i+q_k}) \tag{2.3}$$

Данная матрица Лакса задает интегрируемую систему если константы связи удовлетворяют:

$$m_1(m_1^2-2m_2^2+\sqrt{2}m_2m_4)=0. \tag{2.4}$$

Выбор систем корней D_N, C_N, B_N осуществляется следующим выбором констант связи:

$$\begin{aligned} D_N:&\quad m_1=m_4=0,\\ C_N:&\quad m_1=0\,,\\ B_N:&\quad m_4=0\,,\;\; m_1^2=2m_2^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Кроме этого, видно, что в случаях D_N и C_N матрица Лакса эффективно становится размера $2N\times 2N$, поэтому далее будем рассматривать данные матрицы Лакса именно размера $2N\times 2N$.

3 gl(2) квантовая цепочка и модель Годена с непериодическими граничными условиями

В работе Склянина [8] был предложен метод построения квантовых интегрируемых систем с нетривиальными условиями на границе. Кратко напомним основные идеи данной конструкции.

Важнейшим объектом в теории квантовых интегрируемых систем является квантовая R-матрица, котороая удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u_1-u_2)R_{13}(u_1-u_3)R_{23}(u_2-u_3)=R_{23}(u_2-u_3)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2). \tag{3.1}$$

Кроме этого, при построении квантовых интегрируемых систем с нетривиальными граничными условиями на R-матрицу накладываются некоторые дополнительные условия:

$$\begin{aligned}
R_{12}(u) &= R_{21}(u),\\
R_{12}^{t_1}(u) &= R_{12}^{t_2}(u),\\
R_{12}(u)R_{12}(-u) &= \rho(u),\\
R_{12}^{t_1}(u)R_{12}^{t_1}(-u-2h) &= \tilde{\rho}(u),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\rho(u)$ и $\tilde{\rho}(u)$ - некоторые скалярные функции, а t_i означает транспонирование в соответствующей тензорной компоненте.
Алгебра T-операторов определяется следующим RTT соотношением:

$$R_{12}(u_1-u_2)T_1(u_1)T_2(u_2) = T_2(u_2)T_1(u_1)R_{12}(u_1-u_2). \tag{3.3}$$

При построении нетривиальных граничных условий в квантовых интегрируемых моделях используются K-операторы, которые удовлетворяют следующим уравнениям отражения:

$$\begin{aligned}
&R_{12}(u_1-u_2)K_1^-(u_1)R_{12}(u_1+u_2)K_2^-(u_2) =\\
&= K_2^-(u_2)R_{12}(u_1+u_2)K_1^-(u_1)R_{12}(u_1-u_2),\\
&R_{12}(-u_1+u_2)K_1^{+t_1}(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-2h)K_2^{+t_2}(u_2) =\\
&= K_2^{+t_2}(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-2h)K_1^{+t_1}(u_1)R_{12}(-u_1+u_2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В данной работе исследуются диагональные K-матрицы вида:

$$\begin{aligned}
K^-(u) &= \begin{pmatrix} 1+\frac{a}{u} & 0 \\ 0 & \frac{a}{u}-1 \end{pmatrix},\\
K^+(u) &= K^-(-u-h).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Матрица монодромии и трансфер матрица определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
T(u) &= R_{01}(u-q_1)..R_{0N}(u-q_N)K_0^-(u)R_{0N}(u+q_N)..R_{01}(u+q_1) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},\\
\tau(u) &= tr_0(K_0^+(u)T(u)).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Следствием того, что T-операторы удовлетворяют (3.3), а K - операторы уравнениям отражений (3.4), является то, что трансфер матрица коммутирует сама с собой в разных точках. Поэтому, трансфер матрицу можно рассматривать, как производящую функцию квантовых Гамильтонианов. Данные Гамильтонианы могут быть определены, как вычеты трансфер матрицы в параметрах неоднородности:

$$\begin{aligned}
H_i &= \operatorname*{Res}_{u=q_i} \hat{\tau}(u),\\
H_{-i} &= \operatorname*{Res}_{u=-q_i} \hat{\tau}(u).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Собственные функции и собственные значения трансфер матрицы и квантовых Гамильтонианов могут быть найдены при помощи алгебраического Бете-Анзаца [10]. Переход к модели Годена осуществляется разложением по параметру h. Заметим, что во всех случаях, которые мы будем рассматривать, для собственных значений Гамильтонианов Годена верно:

$$H_i = -H_{-i}. \tag{3.8}$$

Для выбора К-матриц:

$$K^-(u) = \begin{pmatrix} 1+\frac{ha}{u} & 0 \\ 0 & \frac{ha}{u}-1 \end{pmatrix}, \quad K^+(u) = \begin{pmatrix} 1+\frac{hb}{u+h} & 0 \\ 0 & \frac{hb}{u+h}-1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Собственные значения Гамильтонианов Годена и уравнения Бете имеют вид [11]:

$$\begin{gathered} H_i = (a+b)\frac{h}{q_i} + \sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{h}{q_i-q_k}+\frac{h}{q_i+q_k}\right) - \sum_{k=1}^{M}\left(\frac{h}{q_i-v_k}+\frac{h}{q_i+v_k}\right), \\ (a+b)\frac{2h}{v_i} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{h}{v_i-q_k}+\frac{h}{v_i+q_k}\right) = 2\left(\frac{h}{v_i} + \sum_{k\neq i}^{M}\left(\frac{h}{v_i-v_k}+\frac{h}{v_i+v_k}\right)\right). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Если параметры $a, b \to \infty$, то К-матрицы становятся пропорциональны тождественным операторами $K^{\pm} = Id$. В данном случае уравнения Бете и собственные значения будут иметь вид:

$$\begin{gathered} H_i = \frac{h}{q_i} + \sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{h}{q_i-q_k}+\frac{h}{q_i+q_k}\right) - \sum_{k=1}^{M}\left(\frac{h}{q_i-v_k}+\frac{h}{q_i+v_k}\right), \\ \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{h}{v_i-q_k}+\frac{h}{v_i+q_k}\right) = 2\sum_{k\neq i}^{M}\left(\frac{h}{v_i-v_k}+\frac{h}{v_i+v_k}\right). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Несложно видеть, что в формулах (3.10) при $(a+b) = 0$ можно положить один из параметров неоднородности нулем, при данном выборе выражения препобразуются к виду:

$$\begin{gathered} H_i = \frac{2h}{q_i} + \sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{h}{q_i-q_k}+\frac{h}{q_i+q_k}\right) - \sum_{k=1}^{M}\left(\frac{h}{q_i-v_k}+\frac{h}{q_i+v_k}\right), \\ \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{h}{v_i-q_k}+\frac{h}{v_i+q_k}\right) = 2\sum_{k\neq i}^{M}\left(\frac{h}{v_i-v_k}+\frac{h}{v_i+v_k}\right). \end{gathered} \tag{3.12}$$

Заметим, что выражения (3.10) и (3.11) совпадают при $(a+b) = 1$, хотя, они и отвечают различному выбору К-матриц. Более того, хотя изначально в K-операторах фигурировали два разных параметра a и b при переходе к модели Годена мы видим, что собственные значения зависят лишь от комбинации $a+b$.

4 Формулы факторизации

В работе [1] для доказательства квантово-классической дуальности использовались так называемые формулы факторизации, которые позволяют записать матрицу Лакса в особом виде. Частные случаи формул факторизации для систем Калоджеро, построенным по системам корней классических алгебр Ли, были найдены в [7]. В данном разделе мы напомним данные формулы факторизации.

Факторизация для систем корней C_N и D_N

Введем следующие матрицы для факторизации матриц Лакса размера $2N \times 2N$:

$$D^C_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 2q_i \prod\limits_{k \neq i}^{N} ((q_i - q_k)(q_i + q_k)) \,, \ i \leq N \,, \\ -2q_{i-N} \prod\limits_{k \neq i-N}^{N} ((q_{i-N} - q_k)(q_{i-N} + q_k)) \,, \ N+1 \leq i \leq 2N \,, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$V^C_{ij} = \begin{cases} q_j^{i-1}, \ j \leq N \,, \\ (-q_{j-N})^{i-1}, \ N+1 \leq j \leq 2N \end{cases} \tag{4.2}$$

и

$$\tilde{C}_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j+1 \,, \ i - \text{четное} \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases} \quad , \ 1 \leq i, j \leq 2N \tag{4.3}$$

$$(C_0)_{ij} = \begin{cases} i, \ \ i = j+1, \\ 0, \ \ \text{иначе.} \end{cases} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 2N \tag{4.4}$$

Матрица Лакса (2.2) для случаев систем корней C_N и D_N может быть записан в следующей факториованной форме:

$$L^{\mathrm{CM}}(m_2, m_4, 0) = P - D^C (V^C)^{-1} (m_2 C_0 - (m_2 - \sqrt{2} m_4) \tilde{C}) V^C (D^C)^{-1}, \tag{4.5}$$

где

$$P_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} p_i \,, \ i \leq N \,, \\ -p_{i-N} \,, \ N+1 \leq i \leq 2N \,. \end{cases} \tag{4.6}$$

При выборе $m_4 = 0$ (4.5) получаем матрицу Лакса системы корней D_N, в ином случае C_N случай.

Факторизация для системы корней B_N

Введем следующие матрицы размера $(2N+1) \times (2N+1)$:

$$D^B_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} \sqrt{2} q_i^2 \prod\limits_{k \neq i}^{N} ((q_i - q_k)(q_i + q_k)) \,, \ \ i \leq N \,, \\ \sqrt{2} q_{i-N}^2 \prod\limits_{k \neq i-N}^{N} ((q_{i-N} - q_k)(q_{i-N} + q_k)) \,, \ \ N+1 \leq i \leq 2N \,, \\ \prod\limits_{k=1}^{N} (-q_k^2) \,, \ \ i = 2N+1 \,, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$V^B_{ij} = \begin{cases} q_j^{i-1} \,, \ j \leq N \,, \\ (-q_{j-N})^{i-1} \,, \ N+1 \leq j \leq 2N \,, \\ \delta_{i,1} \,, \ j = 2N+1 \end{cases} \tag{4.8}$$

и

$$\tilde{C}_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j+1, \ i - \text{четное} \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases} \quad ; \quad i, j = 1, .., 2N+1 \,. \tag{4.9}$$

Матрица Лакса (2.2) для B_N случая (2.5) может быть записана в следующей факторизованной форме:

$$L^{\mathrm{CM}}(m_2, 0, \sqrt{2}m_2) = P - m_2 D^B (V^B)^{-1}(C_0 + \tilde{C})V^B(D^B)^{-1}, \tag{4.10}$$

где C_0 определена (4.4), но имеет размер $(2N+1) \times (2N+1)$, и

$$P_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} p_i \,, \; i \le N \,, \\ -p_{i-N} \,, \; N+1 \le i \le 2N \,, \\ 0 \,, \; i = 2N+1 \,. \end{cases} \tag{4.11}$$

5 Квантово-классическая дуальность

Теперь мы переходим к основному результату данной работы. Сначала, введем некоторые удобные обозначения, связанные с матрицей Лакса (2.2).

$$\begin{gathered} L(\{q\}_N, \{v\}_M, m_2, m_4, m_1) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ -B & -A & -C \\ -C^T & C^T & 0 \end{pmatrix} - \tilde{D} = \\ = \begin{pmatrix} A - \bar{D} & B & C \\ -B & -A + \bar{D} & -C \\ -C^T & C^T & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \left(\frac{m_4}{q_i} + \frac{\sqrt{2}m_1}{q_i} + m_2 \sum_{k \neq i}^{N} \left(\frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{q_i + q_k} \right) \right) + (1 - \delta_{ij}) \frac{m_2}{q_i - q_j}$$

$$\begin{gathered} B_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \frac{m_2}{q_i + q_j} + \delta_{ij} \frac{m_4}{q_i} \\ C_i = \frac{m_1}{q_i}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$\bar{D}_{ij} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{m_2}{q_i - v_k} + \frac{m_2}{q_i + v_k} \right).$$

Заметим, что данная матрица L - есть матрица Лакса (2.2), в которой сделано каноническое преобразование (2.3), а вместо новых импульсов подставлены собственные значения Гамильтонианов Годена(при некотором отождествлении констант связи, которое будет обсуждено подробнее далее). Кроме этого, для дальнейшего удобства была перескалирована константа связи m_4.

Как и прежде, при $m_1 = 0$ мы будем считать, что матрица (5.1) имеет размер $2N \times 2N$.

Теорема 1 *Рассмотрим матрицу Лакса системы Калоджеро (2.2) C_N ($m_1 = 0$), после проведенного канонического преобразование (2.3). Подставим вместо новых импульсов собственные значения Гамильтонианов Годена (3.10), при этом отождествив неоднородности Годена с координатами в Калоджеро. Кроме этого, отождествим константы* *связей данных моделей $h = m_2$, $(a+b)h = m_4$. После этого весь спектр, полученной матрицы будет состоять из нулей.*

Теорема 2 *Рассмотрим матрицу Лакса системы Калоджеро (2.2) B_N ($m_4 = 0$, $m_1 = \sqrt{2}m_2$), после проведенного канонического преобразование (2.3). Подставим вместо новых импульсов собственные значения Гамильтонианов Годена (3.12), при этом отождествив неоднородности Годена с координатами в Калоджеро. Кроме этого, отождествим константы связей данных моделей $h = m_2$. После этого весь спектр, полученной матрицы будет состоять из нулей.*

Доказательства данных теорем состоит в применении детерминантных тождеств, которые будут доказаны в приложении.

Введем дополнительную матрицу:

$$\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, m_2, m_4, m_1) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{B} & -\tilde{A} \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{A}_{ij} = \delta_{ij}(\sum_{k=1}^{N}(\frac{m_2}{v_i - q_k} + \frac{m_2}{v_i + q_k}) - \sum_{k \neq i}^{M}(\frac{m_2}{v_i - v_k} + \frac{m_2}{v_i + v_k}) - \frac{m_4}{v_i}) + (1 - \delta_{ij})\frac{m_2}{v_i - v_j}, \\ \tilde{B}_{ij} = \delta_{ij}\frac{m_4}{v_i} + (1 - \delta_{ij})\frac{m_4}{v_i + v_j}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Детерминантное тождество $C_N \leftrightarrow C_N$:

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, \alpha h, 0) - z) = z^{2(N-M)} \det(\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, h, (1-\alpha)h, 0) - z). \tag{5.5}$$

Заметим, что данное детерминантное тождество вырождается в случай соответствия $C_N \leftrightarrow D_N$ и $D_N \leftrightarrow C_N$ в случае выбора констант связи соответственно $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$.

Детерминантное тождество $B_N \to C_N$:

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, 0, \sqrt{2}h) - z) = z^{2(N-M)+1} \det(\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, h, -h, 0) - z). \tag{5.6}$$

Используя данные тождества докажем теоремы 1 и 2.

Доказательство Теоремы 1:
Докажем сначала, что теорема верна при количестве корней Бете $M = 0$. После указанных в теореме 1 подстановок матрица Лакса приобретет вид

$$L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, (a+b)h, 0) \tag{5.7}$$

При $M = 0$: матрица (5.7) факторизуется согласно формулам факторизации (4.5):

$$L(\{q\}_N, \{\}, h, \alpha h, 0) = (D^C (V^C)^{-1}(hC_0 - (h - 2(a+b)h)\tilde{C})V^C (D^C)^{-1})^T, \tag{5.8}$$

тогда

$$\det(L(\{q\}_N, \{\}, h, \alpha h, 0) - z)$$

$$= \det((D^C(V^C)^{-1}(hC_0 - (h - 2(a+b)h)\tilde{C})V^C(D^C)^{-1})^T - z) = \tag{5.9}$$

$$= \det(hC_0 - (h - 2(a+b)h)\tilde{C} - z) = z^{2N},$$

так как матрицы C_0 и $\tilde{C}$ являются строго верхнетреугольными. Таким образом база индукции доказана.

Покажем, что теорема верна и при количестве корней Бете $M \neq 0$. Рассмотрим матрицу:

$$L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, (a+b)h, 0), \tag{5.10}$$

имеющую вид (5.7). Используем детерминантное тождество (5.5) и получим:

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, (a+b)h, 0) - z) = z^{2(N-M)} \det(\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, h, (1-(a+b))h, 0) - z). \tag{5.11}$$

Корни Бете должны удовлетворять уравнениям Бете (3.10), применим их к диагональным элементам матрицы в правой части тождества (5.11). Вспомнив вид диагональных элементов данной матрицы:

$$\tilde{A}_{ii} = (\sum_{k=1}^{N}(\frac{h}{v_i - q_k} + \frac{h}{v_i + q_k}) - \sum_{k\neq i}^{M}(\frac{h}{v_i - v_k} + \frac{h}{v_i + v_k}) - \frac{(1-(a+b))h}{v_i}) \tag{5.12}$$

При помощи уравнений Бете (3.10) данной выражение преобразуется к виду:

$$\frac{h}{v_i}(1 - a - b) + \sum_{k\neq i}(\frac{h}{v_i - v_k} + \frac{h}{v_i + v_k}) \tag{5.13}$$

Учитывая вид диагональных элементов, мы получили, что после использования уравнений Бете:

$$\tilde{L}\ (\{v\}_M, \{q\}_N, h, (1-(a+b))h, 0)|_{BE} = L(\{v\}_M, \{\}, h, (1-a-b)h, 0), \tag{5.14}$$

то есть

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, (a+b)h, 0) - z) =$$

$$= z^{2(N-M)} \det(\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, h, (1-(a+b))h, 0) - z) = \tag{5.15}$$

$$= z^{2(N-M)} \det(L(\{v\}_M, \{\}, h, (1-a-b)h, 0) - z) = z^{2(N-M)} z^{2M} = z^{2N}.$$

Таким образом мы доказали теорему 1.

Доказательство теоремы 2 проводится абсолютно аналогичным при использовании соответствующих формул факторизации, детерминантных тождеств и уравнений Бете (4.10), (5.6), (3.12).

6 Заключение

В данной работе была доказана квантово-классическая дуальность между рациональными системами Калоджеро - Мозера и квантовыми моделями Година со спином $\frac{1}{2}$ с нетривиальными граничными условиями. Константы связи в системе Калоджеро-Мозера соответствуют параметрам в модели Година, которые задают условия на границе модели. Данная работа является продолжением научной работы [1] и во многом следует ее логике. Заметим, однако, что в отличие от данной работы, нам не удалось получить связь между граничными квантовыми цепочками и интегрируемыми многочастичными системами Русенаарса, которые являются обощениями системами Калоджеро-Мозера. Проблема в данном вопросе состоит в том, как выглядит система Русенаарса, построенная по системам корней простых алгебр Ли. Несмотря на то, что несколько работ, посвященные данной тематике, известны уже около 20 лет, в них отсутствуют необходимые нам константы связи и матрица Лакса имеет крайне громоздкий вид [12], [13]. Кроме этого, заметим, что дуальность подобного типа проявляется между уравнениями Книжника-Замолодчикова и квантовыми моделями Калоджеро [14].

7 Приложение

При доказательстве детерминантных тождеств, мы будем, аналогично работе [1], разлагать детерминанты по полюсам, сначала мы хотим определить какие полюса вообще присутствуют в детерминантах (5.5) и (5.6). Сначала, мы покажем, что данные детерминанты имеют лишь полюса типа $\frac{1}{q_i-v_j}$. Покажем, что других полюсов нет:

Доказательство отсутствия полюсов:

Докажем утверждение для случаев D_N и C_N.

Для этого применим наши формулы факторизации:

$$\det\left(L\left(\{q\}_N,\{v\}_M,m_2,m_4,0\right)-z\right)=$$

$$=\det\left(\left(D^C(V^C)^{-1}(m_2C_0-(m_2-2m_4)\tilde{C})V^C(D^C)^{-1}-\tilde{D}\right)^T-z\right)=$$

$$=\det\left(m_2C_0-(m_2-2m_4)\,\tilde{C}-(V^C)\tilde{D}(V^C)^{-1}-z\right)$$

Лишь член $V\tilde{D}(V^C)^{-1}$ может иметь полюса, распишем его в виде:

$$(V^C\tilde{D}(V^C)^{-1})_{ij}=V^C_{i\gamma}\tilde{D}_\gamma(V^C)^{-1}_{\gamma j}=\sum_\gamma\frac{q_\gamma^{i-1}}{(j-1)!}\tilde{D}_\gamma\partial_\rho^{(j-1)}\left[\frac{\rho\pm q_\gamma}{\pm 2q_\gamma}\prod_{s\neq\gamma}\frac{(\rho-q_s)(\rho+q_s)}{(q_\gamma-q_s)(q_\gamma+q_s)}\right]\Bigg|_{\rho=0}$$

Данное выражение может иметь лишь простые полюса, посмотрим на те члены, где появляются полюса типа $\frac{1}{q_a-q_b}$ и $\frac{1}{q_a+q_b}$. Они появятся в случае $\gamma=a,b$. Всего будет 4 слагаемых, так как у наши координаты имеют вид $(q_1,..,q_N,-q_1,..,-q_N)$. Выпишем их все, опустив постоянные множители и производную:

$$q_a^{i-1}\tilde{D}_a\frac{\rho+q_a}{q_a}\prod_{s\neq a}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}+q_b^{i-1}\tilde{D}_b\frac{\rho+q_b}{q_b}\prod_{s\neq b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}+$$

$$+(-q_a)^{i-1}\tilde{D}_a\frac{\rho-q_a}{q_a}\prod_{s\neq a}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}+(-q_b)^{i-1}\tilde{D}_b\frac{\rho-q_b}{q_b}\prod_{s\neq b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}=$$

$$q_a^{i-1}\tilde{D}_a\frac{\rho+q_a}{q_a(q_a^2-q_b^2)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}-q_b^{i-1}\tilde{D}_b\frac{\rho+q_b}{q_b(q_a^2-q_b^2)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}+$$

$$+(-q_a)^{i-1}\tilde{D}_a\frac{\rho-q_a}{q_a(q_a^2-q_b^2)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}-(-q_b)^{i-1}\tilde{D}_b\frac{\rho-q_b}{q_b(q_a^2-q_b^2)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}$$

Берем множитель перед $\frac{1}{q_a-q_b}$:

$$q_a^{i-1}\tilde{D}_a\frac{\rho+q_a}{q_a(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}-q_b^{i-1}\tilde{D}_b\frac{\rho+q_b}{q_b(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}+$$

$$+(-q_a)^{j-1}\tilde{D}_a\frac{\rho-q_a}{q_a(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_a^2-q_s^2}-(-q_b)^{j-1}\tilde{D}_b\frac{\rho-q_b}{q_b(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{(\rho^2-q_s^2)}{q_b^2-q_s^2}$$

Данная величина обнуляется при $q_a = q_b$, поэтому полюсов вида $\frac{1}{q_a - q_b}$ отсутствуют. Аналогично разбирается случай полюсов $\frac{1}{q_a+q_b}$. Таким образом утверждение доказано для случаев D_N и C_N.

Теперь перейдем к доказательству в случае B_N:

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, 0, \sqrt{2}h) - z) = \det(h(D^B(V^B)^{-1}(C + \tilde{C})V^B(D^B)^{-1})^T - \tilde{D} - z) =$$
$$= \det(h(C + \tilde{C}) - V^B\tilde{D}(V^B)^{-1} - z).$$

Лишь выражение $V^B\tilde{D}(V^B)^{-1}$ может содержать полюса, рассмотрим его:

$$(V^B D(V^B)^{-1})_{ij} = \sum_\gamma V^B_{i\gamma}\tilde{D}_{\gamma\gamma}(V^B)^{-1}_{\gamma j}$$

Будем смотреть на полюса типа $\frac{1}{q_a-q_b}$, $\frac{1}{q_a+q_b}$: они появляются лишь если $\gamma = a, b, a+N, b+N$, то есть мы получим четыре слагаемых.Кроме этого мы отбросим постоянные множители, которые нам не интересны.

$$q_a^{i-1}\tilde{D}_{aa}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho+q_a)}{2q_a^2}\prod_{s\neq a}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_a^2-q_s^2}|_{\rho=0} - (-q_a)^{i-1}\tilde{D}_{aa}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho-q_a)}{2q_a^2}\prod_{s\neq a}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_a^2-q_s^2}|_{\rho=0}+$$

$$+q_b^{i-1}\tilde{D}_{bb}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho+q_b)}{2q_b^2}\prod_{s\neq b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_b^2-q_s^2}|_{\rho=0} - (-q_b)^{i-1}\tilde{D}_{bb}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho-q_b)}{2q_b^2}\prod_{s\neq b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_b^2-q_s^2}|_{\rho=0}$$

Рассмотрим выражения при полюсах $\frac{1}{q_a-q_b}$:

$$q_a^{i-1}\tilde{D}_{aa}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho+q_a)(\rho^2-q_b^2)}{2q_a^2(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_a^2-q_s^2}|_{\rho=0}-$$

$$-(-q_a)^{i-1}\tilde{D}_{aa}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho-q_a)(\rho^2-q_b^2)}{2q_a^2(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_a^2-q_s^2}|_{\rho=0}-$$

$$-q_b^{i-1}\tilde{D}_{bb}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho+q_b)(\rho^2-q_a^2)}{2q_b^2(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_b^2-q_s^2}|_{\rho=0}+$$

$$+(-q_b)^{i-1}\tilde{D}_{bb}\partial_\rho^{(j-1)}\frac{\rho(\rho-q_b)(\rho^2-q_a^2)}{2q_b^2(q_a+q_b)}\prod_{s\neq a,b}\frac{\rho^2-q_s^2}{q_b^2-q_s^2}|_{\rho=0}$$

Данное выражение обнуляется при $q_a = q_b$, так как $\tilde{D}_{aa}|_{q_a=q_b} = \tilde{D}_{bb}|_{q_a=q_b}$.
Аналогично рассматривается случай полюсов $\frac{1}{q_a+q_b}$, однако нужно будет учесть, что

$$\tilde{D}_{aa}|_{q_a=-q_b} = -\tilde{D}_{bb}|_{q_a=-q_b}.$$

Таким образом, мы показали отсутствие полюсов типа $\frac{1}{q_i \pm q_j}$.
Осталось рассмотреть полюса типа $\frac{1}{q_a}$. Данные полюса появляются при $\gamma = a, a+N, 2N+1$, сначала распишем последний член, появляющийся при $\gamma = 2N+1$, опуская некоторые множители.

$$V_{i,2N+1}\tilde{D}_{2N+1,2N+1}\partial_\rho^{(j-1)}\prod_{s=1}^N\frac{\rho^2-q_s^2}{-q_s^2}|_{\rho=0} = 0,$$

так как $\tilde{D}_{2N+1,2N+1} = 0$.
Переходим к членам, появляющимся при $\gamma = a, a+N$:

$$\tilde{D}_{aa} q_a^{i-1} \partial_\rho^{(j-1)} \frac{\rho(\rho+q_a)}{2q_a^2} \prod_{s\neq a} \frac{\rho^2 - q_s^2}{q_a^2 - q_s^2}|_{\rho=0} - \tilde{D}_{aa}(-q_a)^{i-1} \partial_\rho^{(j-1)} \frac{\rho(\rho-q_a)}{2q_a^2} \prod_{s\neq a} \frac{\rho^2 - q_s^2}{q_a^2 - q_s^2}|_{\rho=0}.$$

Полюса могут не пропасть лишь при $i \leq 2$.
При $i = 1$ выражение преобразуется к виду:

$$\tilde{D}_{aa} \partial_\rho^{(j-1)} \frac{2\rho q_a}{2q_a^2} \prod_{s\neq a} \frac{\rho^2 - q_s^2}{q_a^2 - q_s^2}|_{\rho=0} = \tilde{D}_{aa} \partial_\rho^{(j-1)} \frac{\rho}{q_a} \prod_{s\neq a} \frac{\rho^2 - q_s^2}{q_a^2 - q_s^2}|_{\rho=0}.$$

Однако, $\tilde{D}_{aa}$ обнуляется при $q_a = 0$, поэтому в данном случаем полюса нет.
При $i = 2$ получаем выражение:

$$\tilde{D}_{aa} \partial_\rho^{(j-1)} \frac{\rho^2}{q_a} \prod_{s\neq a} \frac{\rho^2 - q_s^2}{q_a^2 - q_s^2},$$

в котором вновь отсутствует особенность по той же причине, что и при $i = 1$. Таким образом утверждение доказано.
Доказательство детерминантного тождества $C_N \leftrightarrow C_N$:

$$\det(L(\{q\}_N, \{v\}_M, h, \alpha h, 0) - z) = z^{2(N-M)} \det(\tilde{L}(\{v\}_M, \{q\}_N, h, (1-\alpha)h, 0) - z). \tag{7.1}$$

Доказательство состоит в подсчете коэффициентов разложения на простые дроби по v_1
Как уже было показано, левая часть (7.1) не имеет особенностей вида $\frac{1}{q_i \pm q_j}$ и $\frac{1}{q_i}$, аналогично левая часть не имеет особенностей $\frac{1}{v_i \pm v_j}$ и $\frac{1}{v_i}$. Разложим обе части равенства на простые дроби по переменной v_1 и получим:

$$\begin{aligned} |L_M|(N) &= |L_M|(N)|_{v_1=\infty} + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{C_k^-}{v_1 - q_k} + \frac{C_k^+}{v_1 + q_k}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{D_k^-}{(v_1 - q_k)^2} + \frac{D_k^+}{(v_1 + q_k)^2}\right) \\ |\tilde{L}_N|(M) &= |\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\tilde{C}_k^-}{v_1 - q_k} + \frac{\tilde{C}_k^+}{v_1 + q_k}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\tilde{D}_k^-}{(v_1 - q_k)^2} + \frac{\tilde{D}_k^+}{(v_1 + q_k)^2}\right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

1)База индукции при M=0: формулы факторизации утверждают, что $|L_0|(N) = z^{2N}$, поэтому база индукции доказана.
2)Пусть утверждение (7.1) верно для M-1, покажем, что в таком случае оно верно и для M.
1) Сначала заметим, что первые члены разложения имеют вид:

$$\begin{aligned} |L_M|(N)|_{v_1=\infty} &= |L_{M-1}|(N) \\ |\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} &= z^2 |\tilde{L}_N|(M-1) \end{aligned} \tag{7.3}$$

В силу предположения индукции получаем:

$$|L_M|(N)|_{v_1=\infty} = |L_{M-1}|(N) = z^{2(N-M+1)} |\tilde{L}_N|(M-1) = z^{2(N-M)} |\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} \tag{7.4}$$

Таким образом для первых членов разложения утверждение доказано.
2) Теперь сравним коэффициенты при членах $\frac{1}{(v_1 \pm q_k)^2}$
В силу равноценности координат $(q_1, .., q_N, -q_1, .., -q_N)$ для наглядности выбирем коэффициенты D_1^- и $\tilde{D}_1^-$. Данные коэффициенты выражаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_1^- &= \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |L_M|(N) \\ \tilde{D}_1^- &= \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |\tilde{L}_N|(M) \end{aligned} \tag{7.5}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |L_M|(N) &= -|L_{M-1}|(N-1) \\ \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |\tilde{L}_N|(M) &= -|\tilde{L}_{N-1}|(M-1) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Пользуясь предположением индукции получаем:

$$D_1^- = -|L_{M-1}|(N-1) = -z^{2(N-M)}|\tilde{L}_{N-1}|(M-1) = z^{2(N-M)}\tilde{D}_1^- \tag{7.7}$$

3) Осталось доказать равенство $C_1^- = z^{2(N-M)}\tilde{C}_1^-$
Для доказательства данного утверждения предлагается разложить детерминанты на части содержащие особенности $\frac{1}{v_1 - q_1}$.
Обозначим: $\Delta^{j_1,..,j_p}_{i_1,..,i_p}$ и $\tilde{\Delta}^{j_1,..,j_p}_{i_1,..,i_p}$ миноры левой и правой частей (7.1) соответственно, которые получаются при удалении $i_1, .., i_p$ строк и $j_1, .., j_p$ столбцов. Кроме этого в скобках будем, если необходимо, указывать выбрасывается ли оставшаяся особенность по $\frac{1}{v_1 - q_1}$. Например, $\Delta_1^1(N+1)$, означает, что мы берем соответствующий минор и из элемента на (N+1,N+1) месте мы удаляем член $\frac{h}{v_1 - q_1}$
Раскладывая левую и правую часть (7.1) получим:

$$\text{л.ч.р (7.1)} = F_l = -\frac{h^2}{(v_1 - q_1)^2}\Delta^{1,N+1}_{1,N+1} + \frac{h}{v_1 - q_1}\Delta_1^1(N+1) - \frac{h}{v_1 - q_1}\Delta^{N+1}_{N+1}(1) \tag{7.8}$$

$$\text{п.ч.р (7.1)} = F_r = -\frac{h^2}{(v_1 - q_1)^2}\tilde{\Delta}^{1,M+1}_{1,M+1} + \frac{h}{v_1 - q_1}\tilde{\Delta}_1^1(M+1) - \frac{h}{v_1 - q_1}\tilde{\Delta}^{M+1}_{M+1}(1) \tag{7.9}$$

Коэффициенты C и $\tilde{C}$ являются вычетами в соответствующих точках по v_1.

$$C_1^- = \underset{v_1 = q_1}{Res} F_l = -\underset{v_1 = q_1}{Res}(-\frac{h^2}{(v_1 - q_1)^2}\Delta^{1,N+1}_{1,N+1} + \frac{h}{v_1 - q_1}\Delta_1^1(N+1) - \frac{h}{v_1 - q_1}\Delta^{N+1}_{N+1}(1)) \tag{7.10}$$

$$\tilde{C}_1^- = \underset{v_1 = q_1}{Res} F_r = \underset{v_1 = q_1}{Res}(-\frac{h^2}{(v_1 - q_1)^2}\tilde{\Delta}^{1,M+1}_{1,M+1} + \frac{h}{v_1 - q_1}\tilde{\Delta}_1^1(M+1) - \frac{h}{v_1 - q_1}\tilde{\Delta}^{M+1}_{M+1}(1)) \tag{7.11}$$

Таким образом наша задача свелась к вычислению вычетов выражений (7.8) и (7.9). Исследуем вычеты данных выражений: выделим отдельно в вычете $\frac{h}{v_1 - q_1}\Delta_1^1(N+1)$ кусок пропорциональный элементу на месте (N+1, N+1). После взятия вычета $(v_1 \to q_1)$ получим, что данный элемент будет равен

$$h_1 = -\frac{h}{q_1}(\alpha - \frac{1}{2}) - \sum_{k \neq 1}^{N}(\frac{h}{q_i - q_k} + \frac{h}{q_i + q_k}) + \sum_{k \neq 1}(\frac{h}{q_1 - v_k} + \frac{h}{q_1 + v_k}) - z \tag{7.12}$$

Аналогичное действие сделаем с $\tilde{\Delta}_1^1$ b получим на месте (M+1,M+1):

$$h_2 = -\frac{h}{q_1}(\alpha - \frac{1}{2}) - \sum_{k\neq 1}^{N}(\frac{h}{q_i - q_k} + \frac{h}{q_i + q_k}) + \sum_{k\neq 1}(\frac{h}{q_1 - v_k} + \frac{h}{q_1 + v_k}) - z \tag{7.13}$$

Видим, что выражения (7.12) и (7.13) равны (здесь было явно использовано, что в одной матрице константа связи α, а в другой $1-\alpha$). Поэтому, выделив в детерминантах члены пропорциональные (7.12) и (7.13), т.е. взяв миноры при них и считая вычет получим:

$$h_1 = |L_{M-1}|(N-1) = z^{2(N-M)} h_2 |\tilde{L}_{N-1}|(M-1) \tag{7.14}$$

Что и требовалось, поэтому теперь можно считать что в выражениях (7.8) и (7.9) выброшены вообще элементы на местах (N+1, N+1) и (M+1,M+1) соответственно(вместо них теперь стоят нули). Будем обозначать $\Delta_{\because}^{\because}(\tilde{1})$ и соответственно. Теперь разберемся с квадратичными полюсами в выражениях (7.8) и (7.9).
Используя стандартные правила дифференцирования детерминанта получим:

$$\begin{gathered} -\mathop{Res}_{v_1=q_1}\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\Delta^{1,N+1}_{1,N+1} = \lim_{v_1\to q_1}\frac{d}{dv_1}h^2\Delta^{1,N+1}_{1,N+1} = \\ = \sum_{k=2}^{N} h^3(\frac{1}{(q_1-q_k)^2} - \frac{1}{(q_1+q_k)^2})(\Delta^{1,N+1,k}_{1,N+1,k} - \Delta^{1,N+1,N+k}_{1,N+1,N+k})|_{v_1=q_1} \end{gathered} \tag{7.15}$$

Данные выражения имеют полюса второго порядка по $\frac{1}{q_1\pm q_k}$(кроме этого скобка с минорами не содержит в себе q_1). То есть раскладывая выражение (7.15) на простые дроби мы бы не получили простых полюсов и члена без особенности.Будем выделять в оставшихся членах (7.8) выражения с такими же квадратичными полюсами.

$$\frac{h}{v_1-q_1}\Delta^{N+1}_{N+1}(\tilde{1}) \to -h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1-q_k)^2}\Delta^{N+1,k,1}_{N+1,1,k}|_{v_1=q_1} - h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1+q_k)^2}\Delta^{N+1,1,N+k}_{N+1,N+k,1}|_{v_1=q_1} \tag{7.16}$$

$$-\frac{h}{v_1-q_1}\Delta^1_1(\widetilde{N+1}) \to h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1-q_k)^2}\Delta^{N+1,N+k,1}_{N+1,1,N+k}|_{v_1=q_1} + h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1+q_k)^2}\Delta^{N+1,1,k}_{N+1,k,1}|_{v_1=q_1} \tag{7.17}$$

Теперь заметим, что собрав вместе члены (7.15), (7.16) и (7.17) в выражении (7.33) они сократятся. Таким образом, мы показали выражение (7.33) в разложении на простые дроби по q_1 не имеет квадратичных членов.
Сразу же заметим, что членов нулевой степени, там нет, так как, при $q_1 \to \infty$ выражение (7.33) обнуляется.
Осталось лишь посмотреть на дроби 1 степени(коэффициенты при них это вычеты по q_1). Данные вычеты могут возникнуть лишь от 2 и 3 членов в (7.33). Вновь, ограничимся

подсчетом вычета в $q_1 = q_2$, остальные вычисляются аналогично.

$$\begin{aligned} \underset{q_1=q_2}{Res}\Delta_1^1(\widetilde{N+1})|_{v_1=q_1} &= \lim_{q_1\to q_2}\frac{d}{dq_1}(q_1-q_2)^2\Delta_1^1(\widetilde{N+1}) = \\ = \det_{(N-1)x(N-1)}&(L_{C_N}(\{q\}_N/\{q_1\},\{v\}_M/\{v_1\},\alpha)-z-K_1-F)- \\ -\det_{(N-1)x(N-1)}&(L_{C_N}(\{q\}_N/\{q_1\},\{v\}_M/\{v_1\},\alpha)-z-K_2-F), \end{aligned} \tag{7.18}$$

Где $(K_1)_{ij} = \delta_{i,1}\delta_{j,N}\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}$, а $(K_2)_{ij} = -\delta_{i,N}\delta_{j,1}\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}$.
$F = \delta_{i,N}\delta_{j,N}(-p_2 - z)$,
Поскольку матрицы K, состоят из одного элемента, то часть детерминантнов пропорциональную им можно выделить. Более того, все оставшееся сократится.

$$\underset{q_1=q_2}{Res}\Delta_1^1(\widetilde{N+1})|_{v_1=q_1} = (-1)^N\frac{h(\alpha-\frac{1}{2})}{q_2}\Delta_{1,N+1,2}^{1,N+1,N+2} - (-1)^N\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}\Delta_{1,N+1,N+2}^{1,N+1,2} \tag{7.19}$$

С другой стороны аналогичными вычислениями приходим к тому, что:

$$\underset{q_1=q_2}{Res}\Delta_{N+1}^{N+1}(\tilde{1})|_{v_1=q_1} = (-1)^N\frac{h(\alpha-\frac{1}{2})}{q_2}\Delta_{1,N+1,2}^{1,N+1,N+2} - (-1)^N\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}\Delta_{1,N+1,N+2}^{1,N+1,2} \tag{7.20}$$

Таким образом данные выражения сокращаются и теорема доказана.

Теорема: *Детерминантное тождество* $B_N \to C_N$:

$$\det(L_{B_N}(\{q\}_N,\{v\}_M)-z) = z^{2(N-M)+1}\det(\tilde{L}_{C_N}(\{v\}_M,\{q\}_N,\frac{1}{2})-z), \tag{7.21}$$

где

$$L_{B_N}(\{q\}_N,\{v\}_M) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ -B & -A & -C \\ -C^T & C^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij}(\frac{2h}{q_i} + \sum_{k\neq i}^{N}(\frac{h}{q_i-q_j}+\frac{h}{q_i+q_j}) + \sum_{k=1}^{M}(\frac{h}{q_i-v_k}+\frac{h}{q_i+v_k})) + (1-\delta_{ij})\frac{h}{q_i-q_j} \tag{7.22}$$

$$B_{ij} = \delta_{ij}\frac{h}{2q_i} + (1-\delta_{ij})\frac{h}{q_i+q_j}; \quad C_i = \frac{\sqrt{2}h}{q_i}$$

$$\tilde{L}_{C_N}(\{v\}_M,\{q\}_N) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{B} & -\tilde{A} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \delta_{ij}(\sum_{k=1}^{N}(\frac{h}{v_i-q_k}+\frac{h}{v_i+q_k}) - \sum_{k\neq i}^{M}(\frac{h}{v_i-v_k}+\frac{h}{v_i+v_k}) + \frac{h}{v_i}) + (1-\delta_{ij})\frac{h}{v_i-v_j} \tag{7.23}$$

$$\tilde{B}_{ij} = -\delta_{ij}\frac{h}{v_i} + (1-\delta_{ij})\frac{h}{v_i+v_j}$$

Доказательство:
Доказательство проводится совершенно аналогично случаю $C_N \leftrightarrow C_N$.
Сначала введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
|L_M|(N) &:= \det_{(2N+1)x(2N+1)}(L_{B_N}(\{q\}_N, \{v\}_M) - z) \\
|\tilde{L}_N|(M) &:= \det_{2Mx2M}(\tilde{L}_{C_N}(\{v\}_M, \{q\}_N) - z)
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

Как уже было показано, левая часть (7.21) не имеет особенностей вида $\frac{1}{q_i \pm q_j}$ и $\frac{1}{q_i}$, аналогично левая часть не имеет особенностей $\frac{1}{v_i \pm v_j}$ и $\frac{1}{v_i}$. Разложим обе части равенства на простые дроби по переменной v_1 и получим:

$$
\begin{aligned}
|L_M|(N) &= |L_M|(N)|_{v_1=\infty} + \sum_{k=1}^{N}(\frac{C_k^-}{v_1 - q_k} + \frac{C_k^+}{v_1 + q_k}) + \sum_{k=1}^{N}(\frac{D_k^-}{(v_1 - q_k)^2} + \frac{D_k^+}{(v_1 + q_k)^2}) \\
|\tilde{L}_N|(M) &= |\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} + \sum_{k=1}^{N}(\frac{\tilde{C}_k^-}{v_1 - q_k} + \frac{\tilde{C}_k^+}{v_1 + q_k}) + \sum_{k=1}^{N}(\frac{\tilde{D}_k^-}{(v_1 - q_k)^2} + \frac{\tilde{D}_k^+}{(v_1 + q_k)^2})
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

Доказательство будем проводить индукцией по M:
1)База индукциий M=0: формулы факторизации утверждают, что $|L_0|(N) = z^{2N+1}$, поэтому база индукции доказана.
2)Шаг индукции: пусть утверждение (7.21) верно для M-1, покажем, что в таком случае оно верно и для M.
1) Сначала заметим, что первые члены разложения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
|L_M|(N)|_{v_1=\infty} &= |L_{M-1}|(N) \\
|\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} &= z^2 |\tilde{L}_N|(M-1)
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

В силу предположения индукции получаем:

$$
|L_M|(N)|_{v_1=\infty} = |L_{M-1}|(N) = z^{2(N-M+1)+1}|\tilde{L}_N|(M-1) = z^{2(N-M)+1}|\tilde{L}_N|(M)|_{v_1=\infty} \tag{7.27}
$$

Таким образом для первых членов разложения утверждение доказано.

2) Теперь сравним коэффициенты при членах $\frac{1}{(v_1 \pm q_k)^2}$
В силу равноценности координат $(q_1, .., q_N, -q_1, .., -q_N)$ для наглядности выбирем коэффициенты D_1^- и $\tilde{D}_1^-$. Данные коэффициенты выражаются в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
D_1^- &= \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |L_M|(N) \\
\tilde{D}_1^- &= \lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |\tilde{L}_N|(M)
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

Заметим, что:

$$
\begin{aligned}
\lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |L_M|(N) &= -|L_{M-1}|(N-1) \\
\lim_{v_1 \to q_1} (v_1 - q_1)^2 |\tilde{L}_N|(M) &= -|\tilde{L}_{N-1}|(M-1)
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Пользуясь предположением индукции получаем:

$$D_1^- = -|L_{M-1}|(N-1) = -z^{2(N-M)+1}|\tilde{L}_{N-1}|(M-1) = z^{2(N-M)+1}\tilde{D}_1^- \tag{7.30}$$

3) Осталось доказать равенство $C_1^- = z^{2(N-M)+1}\tilde{C}_1^-$
Для доказательства данного утверждения предлагается разложить детерминанты на части содержащие особенности $\frac{1}{v_1-q_1}$.
Обозначим: $\Delta_{i_1,..,i_p}^{j_1,..,j_p}$ и $\tilde{\Delta}_{i_1,..,i_p}^{j_1,..,j_p}$ миноры левой и правой частей (7.21) соответственно, которые получаются при удалении $i_1,..,i_p$ строк и $j_1,..,j_p$ столбцов. Кроме этого в скобках будем, если необходимо, указывать выбрасывается ли оставшаяся особенность по $\frac{1}{v_1-q_1}$. Например, $\Delta_1^1(N+1)$, означает, что мы берем соответствующий минор и из элемента на (N+1,N+1) месте мы удаляем член $\frac{h}{v_1-q_1}$
Раскладывая левую и правую часть (7.21) получим:

$$\text{л.ч.р (7.21)} = F_l = -\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\Delta_{1,N+1}^{1,N+1} + \frac{h}{v_1-q_1}\Delta_1^1(N+1) - \frac{h}{v_1-q_1}\Delta_{N+1}^{N+1}(1) \tag{7.31}$$

$$\text{п.ч.р (7.21)} = F_r = -\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\tilde{\Delta}_{1,M+1}^{1,M+1} + \frac{h}{v_1-q_1}\tilde{\Delta}_1^1(M+1) - \frac{h}{v_1-q_1}\tilde{\Delta}_{M+1}^{M+1}(1) \tag{7.32}$$

Коэффициенты C и $\tilde{C}$ являются вычетами в соответствующих точках по v_1.

$$C_1^- = \underset{v_1=q_1}{Res} F_l = -\underset{v_1=q_1}{Res}(-\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\Delta_{1,N+1}^{1,N+1} + \frac{h}{v_1-q_1}\Delta_1^1(N+1) - \frac{h}{v_1-q_1}\Delta_{N+1}^{N+1}(1)) \tag{7.33}$$

$$\tilde{C}_1^- = \underset{v_1=q_1}{Res} F_r = \underset{v_1=q_1}{Res}(-\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\tilde{\Delta}_{1,M+1}^{1,M+1} + \frac{h}{v_1-q_1}\tilde{\Delta}_1^1(M+1) - \frac{h}{v_1-q_1}\tilde{\Delta}_{M+1}^{M+1}(1)) \tag{7.34}$$

Таким образом наша задача свелась к вычислению вычетов выражений (7.33) и (7.34). Исследуем вычеты данных выражений: выделим отдельно в вычете $\frac{h}{v_1-q_1}\Delta_1^1(N+1)$ кусок пропорциональный элементу на месте (N+1, N+1). После взятия вычета $(v_1 \to q_1)$ получим, что данный элемент будет равен

$$h_1 = -\frac{3h}{2q_1} - \sum_{k\neq 1}^{N}(\frac{h}{q_i-q_k} + \frac{h}{q_i+q_k}) + \sum_{k\neq 1}(\frac{h}{q_1-v_k} + \frac{h}{q_1+v_k}) - z \tag{7.35}$$

Аналогичное действие сделаем с $\tilde{\Delta}_1^1$ b получим на месте (M+1,M+1):

$$h_2 = -\frac{3h}{2q_1} - \sum_{k\neq 1}^{N}(\frac{h}{q_i-q_k} + \frac{h}{q_i+q_k}) + \sum_{k\neq 1}(\frac{h}{q_1-v_k} + \frac{h}{q_1+v_k}) - z \tag{7.36}$$

Видим, что выражения (7.35) и (7.36) равны. Поэтому, выделив в детерминантах члены пропорциональные (7.35) и (7.36), т.е. взяв миноры при них и считая вычет получим:

$$h_1 = |L_{M-1}|(N-1) = z^{2(N-M)+1}h_2|\tilde{L}_{N-1}|(M-1) \tag{7.37}$$

Что и требовалось, поэтому теперь можно считать что в выражениях (7.33) и (7.34) выброшены вообще элементы на местах (N+1, N+1) и (M+1,M+1) соответственно(вместо них

теперь стоят нули). Будем обозначать $\Delta_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}(\tilde{1})$ и соответственно. Теперь разберемся с квадратичными полюсами в выражениях (7.33) и (7.34).
Используя стандартные правила дифференцирования детерминанта получим:

$$\begin{gathered}-\operatorname*{Res}_{v_1=q_1}\frac{h^2}{(v_1-q_1)^2}\Delta_{1,N+1}^{1,N+1}=\lim_{v_1\to q_1}\frac{d}{dv_1}h^2\Delta_{1,N+1}^{1,N+1}=\\ =\sum_{k=2}^{N}h^3\left(\frac{1}{(q_1-q_k)^2}-\frac{1}{(q_1+q_k)^2}\right)(\Delta_{1,N+1,k}^{1,N+1,k}-\Delta_{1,N+1,N+k}^{1,N+1,N+k})|_{v_1=q_1}\end{gathered} \tag{7.38}$$

Данные выражения имеют полюса второго порядка по $\frac{1}{q_1\pm q_k}$(кроме этого скобка с минорами не содержит в себе q_1). То есть раскладывая выражение (7.38) на простые дроби мы бы не получили простых полюсов и члена без особенности.Будем выделять в оставшихся членах (7.33) выражения с такими же квадратичными полюсами.

$$\frac{h}{v_1-q_1}\Delta_{N+1}^{N+1}(\tilde{1})\to -h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1-q_k)^2}\Delta_{N+1,1,k}^{N+1,k,1}|_{v_1=q_1}-h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1+q_k)^2}\Delta_{N+1,N+k,1}^{N+1,1,N+k}|_{v_1=q_1} \tag{7.39}$$

$$-\frac{h}{v_1-q_1}\Delta_1^1(\widetilde{N+1})\to h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1-q_k)^2}\Delta_{N+1,1,N+k}^{N+1,N+k,1}|_{v_1=q_1}+h^3\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{(q_1+q_k)^2}\Delta_{N+1,k,1}^{N+1,1,k}|_{v_1=q_1} \tag{7.40}$$

Теперь заметим, что собрав вместе члены (7.38), (7.39) и (7.40) в выражении (7.33) они сократятся. Таким образом, мы показали выражение (7.33) в разложении на простые дроби по q_1 не имеет квадратичных членов.
Сразу же заметим, что членов нулевой степени, там нет, так как, при $q_1\to\infty$ выражение (7.33) обнуляется.
Осталось лишь посмотреть на дроби 1 степени(коэффициенты при них это вычеты по q_1). Данные вычеты могут возникнуть лишь от 2 и 3 членов в (7.33). Вновь, ограничимся подсчетом вычета в $q_1=q_2$, остальные вычисляются аналогично.

$$\begin{gathered}\operatorname*{Res}_{q_1=q_2}\Delta_1^1(\widetilde{N+1})|_{v_1=q_1}=\lim_{q_1\to q_2}\frac{d}{dq_1}(q_1-q_2)^2\Delta_1^1(\widetilde{N+1})=\\ =\det_{(N-1)x(N-1)}(L_{C_N}(\{q\}_N/\{q_1\},\{v\}_M/\{v_1\},\alpha)-z-K_1-F)-\\ -\det_{(N-1)x(N-1)}(L_{C_N}(\{q\}_N/\{q_1\},\{v\}_M/\{v_1\},\alpha)-z-K_2-F),\end{gathered} \tag{7.41}$$

Где $(K_1)_{ij}=\delta_{i,1}\delta_{j,N}\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}$, а $(K_2)_{ij}=-\delta_{i,N}\delta_{j,1}\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}$.
$F=\delta_{i,N}\delta_{j,N}(-p_2-z)$,
Поскольку матрицы K, состоят из одного элемента, то часть детерминантнов пропроциональную им можно выделить. Более того, все оставшееся сократится.

$$\operatorname*{Res}_{q_1=q_2}\Delta_1^1(\widetilde{N+1})|_{v_1=q_1}=(-1)^N\frac{h(\alpha-\frac{1}{2})}{q_2}\Delta_{1,N+1,2}^{1,N+1,N+2}-(-1)^N\frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}\Delta_{1,N+1,N+2}^{1,N+1,2} \tag{7.42}$$

С другой стороны аналогичными вычислениями приходим к тому, что:

$$\underset{q_1=q_2}{Res}\Delta_{N+1}^{N+1}(\tilde{1})|_{v_1=q_1} = (-1)^N \frac{h(\alpha-\frac{1}{2})}{q_2}\Delta_{1,N+1,2}^{1,N+1,N+2} - (-1)^N \frac{h(\frac{1}{2}-\alpha)}{q_2}\Delta_{1,N+1,N+2}^{1,N+1,2} \tag{7.43}$$

Таким образом данные выражения сокращаются и теорема доказана.

Список литературы

[1] A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, *Spectrum of Quantum Transfer Matrices via Classical Many-Body Systems*, JHEP 01 (2014) 070

[2] M. Beketov, A. Liashyk, A. Zabrodin, A. Zotov, *Trigonometric version of quantum-classical duality in integrable systems*, Nuclear Physics B, 903 (2016) 150-163

[3] A. Liashyk, D. Rudneva, A. Zabrodin, A. Zotov, *Asymmetric 6-vertex model and classical Ruijsenaars-Schneider system of particles*, Theoret. and Math. Phys., 192:2 (2017) 1141-1153

[4] Zengo Tsuboi, Anton Zabrodin, Andrei Zotov, *Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems*, JHEP 05 (2015) 086

[5] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *"Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. 71C (1981) 313-400.

[6] E.D'Hoker, D.H. Phong, *Calogero-Moser Lax Pairs with Spectral Parameter for General Lie Algebras*,Nucl.Phys. B530 (1998) 611-640

[7] M. Vasilyev, A. Zotov, *On factorized Lax pairs for classical many-body integrable systems*, arXiv:1804.02777 [math-ph]

[8] E.K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, 1988 J. Phys. A: Math. Gen. 21 2375

[9] André M Grabinski and Holger Frahm, *Non-diagonal boundary conditions for super spin chains*, 2010 J. Phys. A: Math. Theor. 43 045207

[10] S. Belliard, E. Ragoucy, *Nested Bethe ansatz for 'all' open spin chains with diagonal boundary conditions*, J. Phys. A42 (2009) 205203

[11] S. Belliard, E. Ragoucy, *Nested Bethe ansatz for "all"closed spin chains*, J.Phys.A41:295202,2008

[12] Kai Chen, Bo-yu Hou, *The Dn Ruijsenaars-Schneider model*, J. Phys. A 34, 7579-7590 (2001)

[13] Kai Chen, Bo-yu Hou, Wen-Li Yang, *The Lax pairs for elliptic C_n and BC_n Ruijsenaars-Schneider models and their spectral curves*, J. Math. Phys. 42, 4894-4914 (2001)

[14] A. Zabrodin, A. Zotov, *KZ-Calogero correspondence revisited*, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 205202