

Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
”Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)”

Физтех-школа фундаментальной и прикладной физики

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра квантовой теории поля и астрофизики

**Распад когерентного состояния скалярного поля в трех
измерениях**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и
физика

Работу выполнил:
студент 522 группы _____ Александров Артём Александрович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. _____ Ахмедов Эмиль Тофик-оглы

Москва, 2019

Содержание

1	Введение	1
2	Постановка задачи	3
3	Разложение фермионного поля по модам	3
4	Вычисление тока	7
5	Эффективное действие теории	9
6	Петлевые поправки к пропагаторам	11
7	Заключение	15
A	Приложение	16
	Список литературы	18

1. Введение

На сегодняшний день по-прежнему одним из стандартных методов изучения квантовой теории поля (КТП) является теория возмущений (ТВ), которая сводится к разложению корреляционных функций в ряд по константе связи. Исследуемые корреляционные функции могут быть получены различным образом, в частности из некоторого функционала [1].

Для изучения неравновесной КТП необходимо задать начальное состояние системы. Это может быть сделано либо заданием матрицы плотности ρ_0 в момент времени t_0 , где вообще говоря $\rho_0 \neq \rho^{(\text{eq})}$, где $\rho^{(\text{eq})} \sim e^{-\beta H}$ есть матрица плотности состояния теплового равновесия. С таким же успехом, вместо матрицы плотности можно задать корреляционные функции в момент времени t_0 (весь набор n -точечных функций). Определив начальное состояние системы, дальнейшая эволюция будет полностью определяться её гамильтонианом. Таким образом, для неравновесной системы с классическим действием S вся динамика может быть описана производящим функционалом всех корреляционных функций теории [2].

Для описания неравновесных теорий поля чаще всего используется формализм Келдыша-Швингера [3], основанный на использовании замкнутого временного контура и построения соответствующий ТВ с учетом того, что взаимодействие существует на всем промежутке времени. Кратко обсудим основную идею этого формализма.

Эволюция матрицы плотности системы определяется уравнением

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[H(t), \rho(t)], \quad (1.1)$$

которое имеет решение вида

$$\rho(t) = \mathcal{U}(t, -\infty)\rho(-\infty)\mathcal{U}(-\infty, t), \quad (1.2)$$

где $\mathcal{U}(t_1, t_2)$ оператор эволюции,

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) = T \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt H(t) \right). \quad (1.3)$$

В таком формализме среднее от некоторого оператора \mathcal{O} выражается следующим образом

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\text{Tr} [\mathcal{O}(t)\rho(t)]}{\text{Tr} [\rho(t)]} = \frac{1}{\text{Tr} [\rho(t)]} \text{Tr} [\mathcal{U}(-\infty, t) \mathcal{O} \mathcal{U}(t, -\infty)\rho(-\infty)], \quad (1.4)$$

т.е. для вычисления среднего необходимо учитывать эволюцию на всем промежутке времени. В обычной ТВ это усложнение не возникает в следствие некоторого предположения. Действительно, обычная ТВ рассматривает усреднение по вакууму теории $|\Omega\rangle$, который может быть получен из вакуума невзаимодействующей теории $|0\rangle$ действием оператора эволюции $\mathcal{U}(t, -\infty)$. При этом предполагается, что эволюция системы на всем промежутке времени не выводит систему из основного состояния, т.е. $\langle 0|\mathcal{U}(\infty, -\infty)|0\rangle = \exp(i\Phi)$. Такое предположение дает следующую

цепочку рассуждений:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{O} | \Omega \rangle &= e^{-i\Phi} \langle 0 | \mathcal{U}(+\infty, -\infty) \mathcal{U}(-\infty, t) \mathcal{O} \mathcal{U}(t, -\infty) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\langle 0 | \mathcal{U}(+\infty, t) \mathcal{O} \mathcal{U}(t, -\infty) | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{U}(+\infty, -\infty) | 0 \rangle}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

откуда можно заметить, что в отличие от (1.4) имеет место эволюция только в одном направлении. Ключевым моментом при получении (1.5) было предположение об адиабатичности взаимодействия, т.е. предположения, что вся эволюция состояния $|0\rangle$ сводится к фазе $i\Phi$. Для взаимодействия, которое не выключается адиабатически, такое условие совершенно не обязательно выполняется. Из (1.4) можно получить более наглядное выражение для среднего:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\text{Tr} [\rho(-\infty)]} \text{Tr} [\mathcal{U}(-\infty, +\infty) \mathcal{U}(+\infty, t) \mathcal{O} \mathcal{U}(t, -\infty) \rho(-\infty)], \quad (1.6)$$

Для получение этого среднего значения достаточно добавить в гамильтониан теории член $\pm \mathcal{O} J$, где знак определяется частью замкнутого контура. В таком случае оператор эволюции по всему контуру $\mathcal{U}_c[J] \neq 1$ и статсумма теории становится производящим функционалом $\mathcal{Z}[J]$. Теперь среднее значение оператора может быть вычислено как

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left. \frac{i \delta \mathcal{Z}[J]}{2 \delta J} \right|_{J=0}. \quad (1.7)$$

Таким образом, для построения диаграммной техники некоторой теории поля необходимо разбить поля на \pm -компоненты, переписать лагранжиан и стандартным способом вывести правила Фейнмана.

Формализм Швингера-Келдыша широко применяется впервые очередь в физике конденсированных сред [3], а также в космологии [4, 5] и изучению явлений в сильных полях [6, 7]. Нашей задачей является демонстрация следствий неравновесности системы на примере простейшей модели. Такой моделью можно считать теорию Юкавы в $(2+1)$ -пространстве-времени с ненулевым переменным фоновым скалярным полем. В силу относительной простоты вида лагранжиана, данная теория может быть рассмотрена как "игрушечная модель", которая, тем не менее, иллюстрирует общие закономерности поведения систем в переменных фоновых полях. Однако, как будет показано, такая модель не содержит явлений, связанных с туннелированием при наличии фонового поля (эффективное in-out действие не имеет мнимой части), в отличие от КЭД [8] и моделей космологии [9]. Отметим, что для описания открытых систем помимо техники Швингера-Келдыша, также находит применение функционал влияния Фейнмана-Вернона и диаграммная техника Уайльда [10].

Дальнейшая часть работы устроена следующим образом. В разделе [Постановка задачи](#) мы опишем все, что необходимо для последующих вычислений. Раздел ["Разложение фермионного поля по модам"](#) содержит вывод точных мод фермионного поля при наличии ненулевого скалярного поля и их разложения в различных пределах (также обсуждается в ["Приложение"](#)). Результаты этого раздела используются в последующем вычислении (["Вычисление тока"](#)), где мы находим in-in ток теории. В следующем разделе мы обсуждаем эффективное in-out действие нашей

теории и показываем, что в пределе сильного скалярного поля и мягких производных этого поля результат для in-out тока теории совпадает с полученным ранее in-in током. Далее мы закладываем основу для будущих вычислений, выводя правила диаграммной техники для учета петлевых поправок к пропагаторам и обсуждаем выражения для самих поправок в разделе ["Петлевые поправки к пропагаторам"](#). Наконец, мы суммируем результаты проделанной работы в ["Заключение"](#).

2. Постановка задачи

Мы исследуем модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \lambda\bar{\psi}\varphi\psi, \quad (2.1)$$

где $\lambda > 0$. Классические уравнения движения для этого лагранжиана имеют вид:

$$(i\partial - m)\psi - \lambda\varphi\psi = 0; \quad \partial^2\varphi = -\lambda\bar{\psi}\psi. \quad (2.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать следующие классические решения данных уравнений:

$$\psi_{\text{cl}} = 0; \quad \varphi_{\text{cl}} = Et. \quad (2.3)$$

Также мы будем использовать следующее представление матриц Дирака в (2+1)-мерном пространстве-времени:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma^1; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv i\sigma^2; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \equiv i\sigma^3. \quad (2.4)$$

Как обычно, такие матрицы образуют алгебру Клиффорда и удовлетворяют коммутационному соотношению $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{1}$, где $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ и $\hat{1}$ есть единичная матрица размера 2×2 . Это представление не единственно, однако оно оказывается весьма удобным для последующих вычислений.

3. Разложение фермионного поля по модам

Разложение поля ψ по модам мы получим из уравнения движения (2.2). Важно отметить, что в отличие от свободной теории с $\lambda = 0$ или же от ситуации, когда мы полагаем внешнее поле $\varphi_{\text{cl}} = 0$, гармоники разложения будут нетривиальными функциями. Для свободной теории, как и для нулевого внешнего скалярного поля, гармоники представляли бы собой плоские волны. Далее, мы рассматриваем нестационарную теорию, т.е. взаимодействие со скалярным полем не исчезает при $t \rightarrow \infty$. Это также приводит к усложнениям: невозможно определить положительно частотные и отрицательно частотные решения.

Перейдем к вычислению гармоник. Уравнение движения для фермионного поля имеет вид

$$[i\gamma^0\partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m - \lambda Et]\psi(t) = 0, \quad (3.1)$$

где было сделано преобразование Фурье по пространственным координатам, т.е. мы ищем решение вида $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$, где $\psi(t)$ – двухкомпонентный спинор и

обозначено $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2$. Это выражение представляет собой систему уравнений. Применяя к (3.1) оператор $-i\gamma^0 \partial_t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - (m + \lambda Et)$, мы сводим систему к виду

$$[\partial_t^2 + p^2 + (m + \lambda Et)^2 + i\partial_t(m + \lambda Et)\gamma^0] \psi(t) = 0, \quad (3.2)$$

где было использовано анти-коммутиационное соотношение для γ -матриц и оператор ∂_t не действует на $\psi(t)$. Для дальнейшего изложения удобно обозначить $M(t) = m + \lambda Et$. Заметим теперь, что матрица γ^0 имеет собственные значения ± 1 , что приводит к следующему уравнению

$$[\partial_t^2 + p^2 + M^2(t) \pm i\lambda E] \psi_{1,2}(t) = 0, \quad (3.3)$$

раскрыв скобки в котором и обозначая $\omega_{1,2}^2 = p^2 + m^2 \pm i\lambda E$, переписываем в более компактном виде

$$[\partial_t^2 + (\lambda E)^2 t^2 + 2m\lambda Et + \omega_{1,2}^2] \psi_{1,2} = 0. \quad (3.4)$$

Полученное уравнение имеет решения в виде функций параболического цилиндра. Однако чтобы увидеть это явно, нужно проделать некоторые преобразования. Обозначим квадратный трёхчлен в левой части (3.4) как $at^2 + bt + c$, т.е. $a = \lambda E$, $b = 2m\lambda E$ и $c = \omega_{1,2}^2$. Затем выделим в трёхчлене полный квадрат и сдвинем переменную заменой $\tau = t + b/(2a)$. Такая замена дает

$$[\partial_\tau^2 + (a\tau^2 + \sigma)] \psi_{1,2} = 0, \quad \sigma = c - \frac{b^2}{4a}. \quad (3.5)$$

Теперь заменим $\tau = (4a)^{-1/4}x$ и $\rho = -(4a)^{-1/2}\sigma$, тогда получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{x^2}{4} - \rho \right) \right] \psi_{1,2} = 0. \quad (3.6)$$

Теперь наконец заменим $z \rightarrow xe^{-i\pi/4}$, $\rho \rightarrow -i\Delta$. После всех этих замен уравнение (3.4) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,2}(z(t))}{\partial z^2} - \left(\frac{z^2}{4} + \Delta \right) \psi_{1,2}(z(t)) = 0, \quad (3.7)$$

где введены следующие переменные

$$z = \sqrt{\lambda E}(1+i) \left(t + \frac{m}{\lambda E} \right); \quad \Delta = i \left(\frac{p^2}{2\lambda E} \pm \frac{1}{2} \right). \quad (3.8)$$

Решениями (3.7) являются функции параболического цилиндра $D_{-1/2-\Delta}(z(t))$. Обозначая $\nu = -(\Delta + 1/2)$, мы получаем, что функции ψ_1 и ψ_2 являются комбинациями линейно независимых функций:

$$\psi_1 = A_1 D_\nu(z) + B_1 D_{-\nu-1}(iz); \quad \psi_2 = A_2 D_{\nu-1}(z) + B_2 D_\nu(iz). \quad (3.9)$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются различные асимптотики (разложения) функций параболического цилиндра $D_\nu(z)$, поэтому далее мы обсудим получение таких разложений для всех интересующих нас случаев. Рассмотрим разложение $D_\nu(z)$ в пределе $|z| \gg |\nu|$, $|\arg(z)| < \pi/2$. В нашем случае $\arg(z) = \pm\pi/4$, а

условие $|z| \gg |\nu|$ сводится к $|t| \gg p^2(\lambda E)^{-3/2}$. В таком пределе функция $D_\nu(z)$ имеет следующее разложение [11]:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4} \left[\sum_{n=0}^N \frac{(-\nu/2)_n (1/2 - \nu/2)_n}{n! (-z^2/2)^n} + \mathcal{O}|z^2|^{-N-1} \right], \quad (3.10)$$

где обозначено $(k)_0 = 1$ и $(k)_{n \neq 0} = k(k+1)\dots(k+n-1)$. Тогда, используя решения (3.9), в пределе $t \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\psi_{1,2}(t) \sim A_{1,2}(\mathbf{p}) \exp \left[-\frac{i\lambda E t^2}{2} - \frac{ip^2}{2\lambda E} \ln t \right] + B_{1,2}(\mathbf{p}) \exp \left[\frac{i\lambda E t^2}{2} + \frac{ip^2}{2\lambda E} \ln t \right], \quad (3.11)$$

откуда следует уже упомянутый факт: в данной задаче мы не можем выделить положительно и отрицательно частотные решения. Рассмотрим предел $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{\lambda E}$ при фиксированном t . Это условие всегда выполнено для свободной теории, поэтому мы ожидаем, что в таком пределе решения (3.9) должны вести себя как плоские волны. Получение разложения $D_\nu(z)$ в пределе $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{\lambda E}$ обсуждено в [Приложение](#). Для времен $|t| \ll |\mathbf{p}|/(\lambda E)$ моды фермионного поля ведут себя как

$$\psi_{1,2}(t, \mathbf{x}) \sim a_{1,2}(p) e^{-i|\mathbf{p}|t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{1,2}(p) e^{+i|\mathbf{p}|t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.12)$$

Такое поведение позволяет заключить, что данный предел соответствует модам свободной теории. Тогда мы можем отождествить решения $D_\nu(z)$ и $D_{\nu-1}(z)$ с положительно-частотными решениями в том смысле, что эти функции дают в указанном выше пределе моды свободной теории и написать следующее выражение

$$\psi_p^{(+)}(t) = A^{(+)} \begin{pmatrix} D_\nu(z) \\ \frac{(1+i)\mathbf{p}}{2\sqrt{\lambda E}} D_{\nu-1}(z) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Аналогично, для отрицательно-частотных решений получаем

$$\psi_p^{(-)}(t) = A^{(-)} \begin{pmatrix} \frac{(1-i)\mathbf{p}}{2\sqrt{\lambda E}} D_{\nu-1}^*(z) \\ D_\nu^*(z) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Далее, мы бы хотели найти связь этих двух решений. Это можно сделать, построив матрицу зарядового сопряжения. По определению, матрица зарядового сопряжения обладает следующим свойством:

$$-\gamma^{\mu*} = (\mathcal{C}\gamma^0)^{-1} \gamma^\mu (\mathcal{C}\gamma^0). \quad (3.15)$$

В нашем базисе только γ^3 имеет мнимые компоненты, откуда мы заключаем, что матрица $\mathcal{C}\gamma^0$ коммутирует с γ^3 и антикоммутирует с остальными γ -матрицами. Далее, в выражении (3.15) заметим, что такое преобразование – не более чем замена базиса, т.к. матрица $\mathcal{C}\gamma^0$ унитарна. Это позволяет нам написать следующие соотношения:

$$\mathcal{C}\gamma^0 = \alpha\gamma^0; \quad |\alpha|^2 = 1, \quad (3.16)$$

где последнее равенство следует из унитарности. Таким образом, мы находим

$$\mathcal{C} = i\gamma^3\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^1, \quad (3.17)$$

фиксировав $\alpha = i$. Такая матрица позволяет нам связать два решения. Действительно, можно проверить, что $\psi_{\alpha, -p}^{(-)} = -\gamma_{\alpha\beta}^1 (\psi_{\beta, p}^{(+)})^*$. Принимая во внимание эту связь, мы теперь можем найти коэффициенты $A^{(\pm)}$. Для этого мы используем антикоммутиационные соотношения операторов рождения и уничтожения, а также антикоммутиационное соотношение на поля ψ :

$$\{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger\} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}); \quad \{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

Подставляя разложение (ссылка), получаем

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y})\} &= \\ &= \int_p \int_k \left[\{a_p, a_k^\dagger\} \psi_{\alpha p}^{(+)} \psi_{\beta k}^{(+)*} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{y})} + \{b_p, b_k^\dagger\} \psi_{\alpha p}^{(-)} \psi_{\beta k}^{(-)*} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{y})} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

откуда используя коммутационные соотношения (3.18), находим

$$\int_p \left[\psi_{\alpha p}^{(+)} \psi_{\beta p}^{(+)*} + \psi_{\alpha, -p}^{(-)} \psi_{\beta, -p}^{(-)*} \right] e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.20)$$

Покажем также, что это соотношение не зависит от времени. Действительно, используя уравнения движения, находим

$$i\gamma^0 \partial_t \left(\psi_{\alpha p}^{(+)} \psi_{\beta p}^{(+)*} \right) = (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\alpha\lambda} \psi_{\lambda p}^{(+)} \psi_{\beta}^{(+)*} - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\beta\lambda} \psi_{\alpha p}^{(+)} \psi_{\lambda p}^{(+)*} \quad (3.21)$$

$$i\gamma^0 \partial_t \left(\psi_{\alpha, -p}^{(-)} \psi_{\beta, -p}^{(-)*} \right) = (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\alpha\lambda} \psi_{\lambda, -p}^{(-)} \psi_{\beta, -p}^{(-)*} - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma})_{\beta\lambda} \psi_{\alpha, -p}^{(-)} \psi_{\lambda, -p}^{(-)*}. \quad (3.22)$$

Теперь используя матрицу зарядового сопряжения, находим, что производная по времени от $\psi_{\alpha p}^{(+)} \psi_{\beta p}^{(+)*} + \psi_{\alpha, -p}^{(-)} \psi_{\beta, -p}^{(-)*}$ есть ноль. Вернемся теперь к коммутационному соотношению. Оно дает систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} |A^{(+)}|^2 |D_\nu(z)|^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2\lambda E} |A^{(-)}|^2 |D_{\nu-1}|^2 = 1, \\ |A^{(-)}|^2 |D_\nu(z)|^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2\lambda E} |A^{(+)}|^2 |D_{\nu-1}|^2 = 1, \\ \frac{(1-i)p}{2\sqrt{\lambda E}} (|A^{(+)}|^2 - |A^{(-)}|^2) D_\nu(z) D_{\nu-1}^*(z) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Из этой системы мы находим, что $|A^{(+)}|^2 = |A^{(-)}|^2 = |A|^2$. Чтобы определить константу A , нам достаточно рассмотреть $z = 0$ и используя

$$D_\nu(0) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-\nu}}{\Gamma(1/2 - \nu/2)}, \quad (3.24)$$

мы получаем выражение вида

$$|A|^2 \left(\frac{\pi}{|\Gamma(1/2 - \nu/2)|^2} + \frac{p^2}{4\lambda E} \frac{\pi}{|\Gamma(1/2 - \nu/2)|^2} \right) = 1, \quad (3.25)$$

где $\nu = -ip^2/(2\lambda E)$. Используя соотношение $|\Gamma(it + 1/2)|^2 = \pi/\cosh(\pi t)$, наконец находим

$$|A|^2 = \exp\left(-\frac{\pi p^2}{4\lambda E}\right). \quad (3.26)$$

Теперь исследуем случай больших импульсов $|\mathbf{p}| \gg \lambda E$, чтобы проверить нашу идею о том, что в таком пределе мы должны получить асимптотику мод свободной теории. Рассмотрим асимптотику в случае $\lambda E|t| \ll |\mathbf{p}|$, но при этом $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{\lambda E}$. В этом пределе для мод мы получаем следующие разложения:

$$\psi^{(+)} \sim \left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left(1 + \frac{M}{|\mathbf{p}|}\right)\right) \exp\left(-\frac{|\mathbf{p}|M(t)}{\lambda E} + ipx + \frac{ip^2}{4\lambda E} - \frac{ip^2}{4\lambda E} \ln \frac{p^2}{2\alpha} - \frac{iM^3}{\alpha|\mathbf{p}|}\right); \quad (3.27)$$

$$\psi^{(-)} \sim \left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left(1 - \frac{M}{|\mathbf{p}|}\right)\right) \exp\left(\frac{|\mathbf{p}|M(t)}{\lambda E} - ipx - \frac{ip^2}{4\lambda E} + \frac{ip^2}{4\lambda E} \ln \frac{p^2}{2\alpha} + \frac{iM^3}{\alpha|\mathbf{p}|}\right), \quad (3.28)$$

которые совпадают с модами свободной теории. Стоит отметить, что такое разложение перестает работать для случая $|t| \gg \mathbf{p}/(\lambda E)$. Для такого случая необходимо использовать либо разложение (3.10), либо разложение (A.10).

Итак, мы нашли разложение по модам, определили положительно- и отрицательно-частотные моды, связали их при помощи матрицы зарядового сопряжения.

4. Вычисление тока

Исследовав разложение фермионного поля по модам, мы переходим к исследованию вопроса о том, как фермионное поле влияет на скалярное. Для этого получим операторное уравнение движения из гамильтониана теории. Отметим также, что всюду в этом разделе под полями мы понимаем операторы полей. Сопряженные импульсы теории определяются соотношениями

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \partial_t \varphi; \quad \Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0, \quad (4.1)$$

где лагранжиан дается выражением (2.1). Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \int d^2x \left[\frac{\Pi_\varphi^2}{2} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - i\bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla)\psi + m\bar{\psi}\psi + \lambda\bar{\psi}\varphi\psi \right], \quad (4.2)$$

при этом выполняются стандартные коммутационные соотношения

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \Pi_\varphi(t, \mathbf{y})] = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad \{\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})^\dagger\} = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\hat{1} \quad (4.3)$$

и мы обозначали пространственные производные полей как ∇ . Уравнения движения получаются вычислением следующих коммутаторов

$$\dot{\varphi}(x) = i[H, \varphi(x)]; \quad \dot{\psi}(x) = i[H, \psi(x)], \quad (4.4)$$

которые дают уравнения $\dot{\varphi}(x) = \Pi_\varphi(x)$ и $(i\boldsymbol{\not{\partial}} - m)\psi = \lambda\varphi\psi$. Первое уравнение вновь приводит к $\partial^2\varphi + \lambda\bar{\psi}\psi = 0$. Из полученного уравнения движения для скалярного

поля следует, что для вычисления отклика скалярного поля $\varphi_{\text{cl}} = \langle \varphi \rangle$ необходимо вычислить величину $J_{\text{cl}}(t) = \langle \bar{\psi}\psi \rangle(t)$. Мы уже нашли разложение фермионного поля, поэтому записать выражение для J_{cl} не составляет труда:

$$\begin{aligned} J_{\text{cl}}(t) = \langle \bar{\psi}\psi \rangle(t) &= \int_p \int_k \langle b_k b_k^\dagger \rangle \left(\psi_{1p}^{(-)} \psi_{1k}^{(-)*} - \psi_{2p}^{(-)} \psi_{2k}^{(-)*} \right) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \cdot x} = \\ &= \int_p \left(1 - 2 \exp \left(-\frac{\pi p^2}{4\alpha} |D_\nu(z)|^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Однако мы бы хотели получить нормально-упорядоченный ток, т.е. из (4.5) нам еще необходимо вычесть ток свободной теории. Для того, что вычислить ток свободной теории, достаточно рассмотреть следующий функциональный интеграл:

$$\mathcal{Z}(J) = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \exp \left(i \int d^3x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + J\bar{\psi}\psi] \right), \quad (4.6)$$

тогда ток свободной теории выражается как

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\lambda=0} = \frac{\partial}{i\partial J} \ln \mathcal{Z}(J) \Big|_{J=0}. \quad (4.7)$$

Интеграл $Z(J)$ квадратичен по фермионному полю, не составляет труда его вычислить. В итоге получаем следующее выражение для тока

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial J} \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - m + J) \Big|_{J=0}, \quad (4.8)$$

которое легко упрощается и приводит к следующему интегралу

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\lambda=0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 m}{m^2 + p^2}, \quad (4.9)$$

который был преобразован путем взятия следа по матричным индексам и виковским поворотом. Регуляризуем расходимость обрезанием Λ , тогда

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\lambda=0} = \Lambda, \quad p \ll \Lambda, \quad (4.10)$$

где здесь и в дальнейшем при работе с регуляризованными величинами мы будем опускать коэффициенты и удерживать те члены, которые необходимы для дальнейшего изложения.

После всех вычислений, мы получаем следующий результат для нормально упорядоченного тока

$$\langle : \bar{\psi}\psi : \rangle = \frac{\lambda^2}{2\pi} \langle \varphi \rangle^2 + \frac{\Lambda}{2\pi}. \quad (4.11)$$

Как видно, полученное выражение содержит расходимость. В следующем разделе мы исследуем эту расходимость и покажем, что она может быть поглощена в перенормировку массы бозонного поля.

5. Эффективное действие теории

Результаты, полученные выше, полезно получить иным способом. Для этого мы изучим функциональный интеграл, описывающий нашу теорию:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^3x \mathcal{L} \right] \quad (5.1)$$

с лагранжианом (2.1). Заметим, что действие квадратично по фермионным полям, поэтому мы можем отинтегрировать фермионные степени свободы и изучать теорию с бозонным полем и эффективным действием. Стоит отметить, что эффективное действие для (2 + 1)-теории при конечных температурах было получено А. Р. С. Malbouisson и соавторами [12]. Мы хотим получить это эффективное действие. Оно дается следующим выражением

$$\begin{aligned} \exp(iS_{\text{eff}}[\varphi]) &= \int \mathcal{D}[\bar{\psi}, \psi] \exp \left[i \int d^3x \mathcal{L} \right] = \\ &= \exp \left[i \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 \right) + \text{Tr} \ln \frac{i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi}{i\rlap{\not{\partial}} - m} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Далее мы вычисляем второе слагаемое эффективного действия. Его можно упростить:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \frac{i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi}{i\rlap{\not{\partial}} - m} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{(i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi)(-i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi)}{(i\rlap{\not{\partial}} - m)(-i\rlap{\not{\partial}} - m)}; \\ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{(i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi)(-i\rlap{\not{\partial}} - m - \lambda\varphi)}{(i\rlap{\not{\partial}} - m)(-i\rlap{\not{\partial}} - m)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{\partial^2 + (m + \lambda\varphi)^2 - i\lambda\rlap{\not{\partial}}\varphi}{\partial^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Чтобы посчитать последнее выражение в (5.3), мы сделаем следующие приближения: пренебрежем производной $\rlap{\not{\partial}}\varphi$ и будем считать, что мы рассматриваем достаточно большие времена, так что $\lambda\varphi \gg m$. Это позволяет нам написать следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{\partial^2 + (m + \lambda\varphi)^2 - i\lambda\rlap{\not{\partial}}\varphi}{\partial^2 + m^2} \approx \text{tr} \ln \left[1 + \frac{(\lambda\varphi)^2}{\partial^2 + m^2} \right], \quad (5.4)$$

где был взят след по спинорным индексам. Как будет показано далее, именно в таком приближении вычисленный ранее in-in ток теории совпадает с током, полученным из in-out действия. Далее, мы разложим логарифм в (5.4) в ряд:

$$\text{tr} \ln \left[1 + \frac{(\lambda\varphi)^2}{\partial^2 + m^2} \right] = i \int d^3x \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(\lambda\varphi)^{2n}}{(p^2 + m^2)^n}, \quad (5.5)$$

при этом мы сделали поворот Вика в интеграле по импульсам. Полученный ряд разобьем на две части: $\sum_n^{\infty} J_n = J_1 + \sum_{k=2}^{\infty} J_k$, где под J_n обозначен интеграл по импульсу p . Рассмотрим J_1 :

$$J_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{(\lambda\varphi)^2}{p^2 + m^2}, \quad (5.6)$$

где было выполнено интегрирование по углам. Видно, что такой интеграл расходится линейно на больших импульсах. Регуляризуем J_1 обрезанием Λ :

$$J_1 = \frac{(\lambda\varphi)^2}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{dp p^2}{p^2 + m^2} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \varphi^2}{2\pi^2} \left(\Lambda - \frac{\pi m}{2} \right) = -\frac{\lambda^2 \varphi^2 m}{4\pi} + \Lambda (\lambda\varphi)^2, \quad (5.7)$$

Оставшиеся интегралы J_k являются сходящимися и могут быть вычислены:

$$J_k = \frac{m^{3-2k} (\lambda\varphi)^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds s^{3/2-1}}{(s+1)^k} = (\lambda\varphi)^{2k} \frac{m^{3-2k}}{8\pi^{3/2} \Gamma(k)} \Gamma\left(k - \frac{3}{2}\right). \quad (5.8)$$

Таким образом, мы можем просуммировать ряд с J_k . Его член имеет вид

$$A_k = \frac{m^3}{8\pi^{3/2}} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} \left(\frac{\lambda\varphi}{m} \right)^{2k} \frac{\Gamma(k - 3/2)}{\Gamma(k)} = (-1)^k \frac{m^3}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{\lambda\varphi}{m} \right)^{2k} \frac{\Gamma(k - 3/2)}{\Gamma(k+1)}, \quad (5.9)$$

а сумма такого ряда есть

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k = +\frac{m(\lambda\varphi)^2}{4\pi} - \frac{(\lambda\varphi)^3}{6\pi} + \frac{m^3}{6\pi} - \frac{m^2 \lambda\varphi}{6\pi}, \quad (5.10)$$

где мы учли, что используем предел $(\lambda\varphi)/m \gg 1$. Сумму этого ряда мы получили, используя представление функции $(1+w)^\alpha$ в виде ряда

$$(1+w)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(-w)^n}{\Gamma(n+1)}; \quad w = \left(\frac{\lambda\varphi}{m} \right)^2. \quad (5.11)$$

Теперь мы можем написать эффективное действие теории:

$$S_{\text{eff}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{(\lambda\varphi)^3}{6\pi} + \Lambda (\lambda\varphi)^2 \right], \quad (5.12)$$

где мы пренебрегли последними двумя членами из (5.10) (они не дадут вклада после вариации S_{eff}). Это эффективное действие позволяет вычислить ток $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ из уравнения движения поля φ . Действительно, получая из (5.12) уравнение движение, мы находим

$$\partial^2 \varphi_{\text{cl}} = -\frac{\lambda^3}{2\pi} \varphi_{\text{cl}}^2 + \lambda^2 \Lambda, \quad (5.13)$$

откуда вновь получаем результат для тока (4.11). Важно отметить, что этот результат получен с учетом приближения $|\varphi| \gg \lambda |\partial_\mu \varphi|$, т.е. в пределе большого скалярного поля, но мягких производных этого поля. Теперь мы бы хотели проверить, что расходимость Λ может быть перенормирована. Наше вычисление эффективного действия теории совпадает по рассуждениям с получением эффективного действия Коулмена-Вайнберга [13], поэтому мы вправе написать следующее определение перенормированной массы:

$$m_R^2 = \left. \frac{\partial^2 V[\varphi]}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \Lambda, \quad (5.14)$$

где в качестве эффективного потенциала $V[\varphi]$ мы имеем в виду следующую величину:

$$V[\varphi] = -\frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 - \frac{(\lambda\varphi)^3}{6\pi} + \Lambda(\lambda\varphi)^2. \quad (5.15)$$

Проделав вычисление эффективного действия теории, мы убедились, что расходимость Λ перенормируема. Также мы получили более общий результат для тока $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ теории, не конкретизируя вид φ_{cl} .

Из вида потенциала (5.15) мы заключаем, что теперь $\varphi_{\text{cl}} = 0$ не является вакуумом теории. Попробуем объяснить этот результат. Отынтегрировав фермионные степени свободы, мы получили (5.5). Из структуры этого выражения видно, что это есть однопетлевое эффективное действие. Действительно, (5.5) представляет собой сумму однопетлевых диаграмм:

$$S_{\text{eff}} = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (5.16)$$

Однопетлевые фермионные поправки спонтанно нарушают симметрию нашей модели и $\varphi_{\text{cl}} = 0$ перестает быть вакуумом теории. При этом, диаграммы с нечетным числом бозонных ног дают нулевой вклад в силу теоремы Фарри.

6. Петлевые поправки к пропагаторам

В данном разделе наша основная цель сформулировать предпосылки для будущей работы, а именно: получить правила диаграммной техники Швингера-Келдыша, выписать выражения для пропагаторов теории и определить выражения для поправок к этим пропагаторам.

Следуя описанному во введении формализму, мы разбиваем поля в лагранжиане теории на \pm -компоненты. Рассмотрим член лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda\bar{\psi}\varphi\psi$. После разбиения на \pm -компоненты он имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda(\bar{\psi}_+\varphi_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\varphi_-\psi_-). \quad (6.1)$$

Для получения правил диаграммной техники удобно сделать так называемый *Келдышевский поворот*:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{\text{cl}} \\ \varphi_{\text{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}; \quad (6.2)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\text{cl}} \\ \bar{\psi}_{\text{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+ \\ \bar{\psi}_- \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \psi_{\text{cl}} \\ \psi_{\text{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

при этом отметим, что матрицы преобразования бозонного (6.2) и фермионного (6.3) поля различны. С учетом таких преобразований, член взаимодействия приобретает вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda(\bar{\psi}_1\varphi_{\text{cl}}\psi_1 + \bar{\psi}_2\varphi_{\text{cl}}\psi_2 + \bar{\psi}_1\varphi_{\text{q}}\psi_2 + \bar{\psi}_2\varphi_{\text{q}}\psi_1), \quad (6.4)$$

который дает следующие правила диаграммной техники для вершин:

$$-i\lambda = \text{cl} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 1 \end{array}; \quad -i\lambda = \text{cl} \begin{array}{c} \nearrow 2 \\ \searrow 2 \end{array}; \quad -i\lambda = \text{q} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{array}; \quad -i\lambda = \text{q} \begin{array}{c} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{array}. \quad (6.5)$$

Фермионные пропагаторы теории мы определяем как

$$iG_{\alpha\beta}^>(x_1, x_2) = \langle \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \rangle; \quad iG_{\alpha\beta}^<(x_1, x_2) = -\langle \bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1) \rangle; \quad (6.6)$$

$$iG^T(x_1, x_2)_{\alpha\beta} = \langle T \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \rangle; \quad iG^{\bar{T}}_{\alpha\beta} = \langle \bar{T} \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \rangle, \quad (6.7)$$

где $(\bar{T})T$ означает (анти)упорядочение по времени. Усреднение проводится по вакууму. При этом надо отметить, что не все эти функции (6.6), (6.7) независимы. Они связаны следующим соотношением:

$$G^T(x_1, x_2) + G^{\bar{T}}(x_1, x_2) = G^>(x_1, x_2) + G^<(x_1, x_2). \quad (6.8)$$

Сделаем преобразование Фурье по пространственным переменным, т.е.

$$G_{\alpha\beta}(x_1, x_2)^{>, <, T, \bar{T}} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} G_{\alpha\beta}(t_1, t_2, \mathbf{p})^{>, <, T, \bar{T}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}. \quad (6.9)$$

Используя полученное ранее разложение по модам, мы можем выписать выражения для функций $G_{\alpha\beta}^{>, <}(t_1, t_2, \mathbf{p})$ через моды. Для $G_{\alpha\beta}^{>}(t_1, t_2, \mathbf{p})$ имеем:

$$G_{\alpha\beta}^{>}(t_1, t_2, \mathbf{p}) = \psi_{p,\alpha}^{(+)}(t_1) (\gamma^0)_{\lambda\beta} \psi_{p,\lambda}^{(+)*}(t_2) = \begin{pmatrix} \psi_1(t_1) \psi_1^*(t_2) & \psi_1(t_1) \psi_2^*(t_2) \\ \psi_2(t_1) \psi_1^*(t_2) & \psi_2(t_1) \psi_2^*(t_2) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

где для краткости мы обозначили $\psi_{p,1}^+(t_1) \equiv \psi_1(t_1)$. Для $G_{\alpha\beta}^{<}(t_1, t_2, \mathbf{p})$ мы получаем следующее выражение

$$G_{\alpha\beta}^{<}(t_1, t_2, \mathbf{p}) = -\tilde{\psi}_{p,\alpha}(t_1) (\gamma^0)_{\lambda\beta} \tilde{\psi}_{p,\lambda}^*(t_2) = -\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(t_1) \tilde{\psi}_1^*(t_2) & \tilde{\psi}_1(t_1) \tilde{\psi}_2^*(t_2) \\ \tilde{\psi}_2(t_1) \tilde{\psi}_1^*(t_2) & \tilde{\psi}_2(t_1) \tilde{\psi}_2^*(t_2) \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

где обозначено $\tilde{\psi}_1(t_1) = \psi_{-p,1}^{(-)}(t_1)$. Используя матрицу зарядового сопряжения, находим

$$G_{\alpha\beta}^{<}(t_1, t_2, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(t_1) \psi_2(t_2) & -\psi_2^*(t_1) \psi_1(t_2) \\ -\psi_1^*(t_1) \psi_2(t_2) & \psi_1^*(t_1) \psi_1(t_2) \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Оставшиеся две функции $G_{\alpha\beta}^{T, \bar{T}}(t_1, t_2, \mathbf{p})$ можно выразить через (6.10) и (6.12), т.к. имеют место соотношения

$$iG_{\alpha\beta}^T(x_1, x_2) = \theta(t_1 - t_2) iG_{\alpha\beta}^{>}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1) iG_{\alpha\beta}^{<}(x_1, x_2); \quad (6.13)$$

$$iG_{\alpha\beta}^{\bar{T}}(x_1, x_2) = \theta(t_1 - t_2) iG_{\alpha\beta}^{<}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1) iG_{\alpha\beta}^{>}(x_1, x_2). \quad (6.14)$$

Наконец, выполнив Келдышевский поворот, мы приходим к следующим пропагаторам теории:

$$G^R(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (G^T - G^{\bar{T}} + G^> - G^<) = \theta(t_1 - t_2) (G^> - G^<); \quad (6.15)$$

$$G^A(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (G^T - G^{\bar{T}} - G^> + G^<) = \theta(t_2 - t_1) (G^< - G^>); \quad (6.16)$$

$$G^K(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (G^T + G^{\bar{T}} + G^> + G^<) = G^> + G^<, \quad (6.17)$$

которые могут быть компактно собраны в матрицу вида

$$\mathcal{G}_{ab} = -\langle \psi_a \bar{\psi}_b \rangle = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

где $a, b = 1, 2$, а нулевой элемент появляется в силу (6.8). Для бозонных пропагаторов имеем аналогичные выражения:

$$iD^>(x_1, x_2) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle; \quad iD^<(x_1, x_2) = \langle \varphi(x_2) \varphi(x_1) \rangle; \quad (6.19)$$

$$iD^T(x_1, x_2) = \langle T\varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle; \quad iD^{\bar{T}}(x_1, x_2) = \langle \bar{T}\varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle, \quad (6.20)$$

при этом также выполняются соотношения (6.13) и (6.14). Выражение для функций $D^{>,<}(t_1, t_2, \mathbf{p})$ через мод гораздо проще, чем для фермионов:

$$D^{>,<}(t_1, t_2, \mathbf{p}) = \frac{1}{2|\mathbf{p}|} e^{\pm i|\mathbf{p}|(t_1 - t_2)}, \quad (6.21)$$

при этом такие моды решают уравнение движения $\partial^2 \varphi = 0$ и также справедливо (6.8). Однако при этом из-за того, что матрицы Келдышевского поворота разные для бозонов и фермионов матрица функций Грина имеет вид

$$\mathcal{D}_{ab} = -i\langle \varphi_a \varphi_b \rangle = \begin{pmatrix} D^K & D^R \\ D^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

где $a, b = \text{cl}, \text{q}$. Графически пропагаторы теории можно изобразить как

$$D^K = \text{cl} \text{---} \text{cl}; \quad D^R = \text{cl} \text{---} \text{q}; \quad D^A = \text{q} \text{---} \text{cl}; \quad (6.23)$$

$$G^K = 1 \text{---} 2; \quad G^R = 1 \text{---} 1; \quad G^A = 2 \text{---} 2. \quad (6.24)$$

С учетом правил диаграммной техники, мы готовы обсуждать выражения для однопетлевых поправок в теории. Поправки к пропагатору D^K описываются следующими диаграммами:

$$\text{cl} \text{---} \text{cl} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \circlearrowleft \\ 1 \quad 1 \end{array} \text{---} \text{cl} \text{---} \text{cl} \quad \text{cl} \text{---} \text{cl} \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \circlearrowleft \\ 2 \quad 2 \end{array} \text{---} \text{cl} \text{---} \text{cl} \quad \text{cl} \text{---} \text{cl} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circlearrowleft \\ 1 \quad 2 \end{array} \text{---} \text{cl} \text{---} \text{cl} \quad (6.25)$$

Обозначим в этих диаграммах "петлевую часть" за $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}$, пусть по верхней части петли импульс $\mathbf{p} + \mathbf{k}$ (по нижней – \mathbf{p}). Тогда имеем следующие выражения:

$$\Sigma_{11} = \text{Tr} [G^R(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4) G^R(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)]; \quad (6.26)$$

$$\Sigma_{22} = \text{Tr} [G^A(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4) G^A(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)];$$

$$\Sigma_{12} = \text{Tr} [G^R(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4) G^R(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)]. \quad (6.27)$$

При этом, в силу того, что преобразование Фурье сделано только по пространственным координатам (в отличие от обычной диаграммной техники), полные выражения для петель будут

$$\Delta D_{(i)}^K = \lambda^2 \int dt_3 \int dt_4 \int_{\mathbf{p}} D^K(\mathbf{k}, t_1, t_3) \Sigma_{(i)} D^K(\mathbf{k}, t_4, t_2), \quad (6.28)$$

где (i) нумерует выражения (6.26) и $\int_{\mathbf{p}} = \int d^2p/(2\pi)^2$. Для пропагатора D_R получаем

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \\
& & \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl} \quad \text{q}
\end{array} \quad (6.29)$$

Выражения для петлевых частей совпадают с (6.26). Полные выражения имеют вид

$$\Delta D_{(i)}^R = \lambda^2 \int dt_3 \int dt_4 \int_{\mathbf{p}} D^K(\mathbf{k}, t_1, t_3) \Sigma_{(i)} D^R(\mathbf{k}, t_4, t_2). \quad (6.30)$$

Наконец, для D^A можно заметить, что петлевые части даются такими же выражениями как и (6.26), а диаграммы имеют вид

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array} \\
& & \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl} \quad \text{q}
\end{array} \quad (6.31)$$

Полные выражения для поправок есть

$$\Delta D_{(i)}^A = \lambda^2 \int dt_3 \int dt_4 \int_{\mathbf{p}} D^A(\mathbf{k}, t_1, t_3) \Sigma_{(i)} D^R(\mathbf{k}, t_4, t_2). \quad (6.32)$$

Диаграммы, определяющие поправки к G^K , есть

$$\begin{array}{cc}
\frac{\begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array}}{\text{1} \quad \text{2}} & \frac{\begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array}}{\text{2} \quad \text{2}} \\
& & \text{cl} \quad \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl}
\end{array} \quad (6.33)$$

$$\begin{array}{cc}
\frac{\begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array}}{\text{2} \quad \text{2}} & \frac{\begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \end{array}}{\text{1} \quad \text{2}} \\
& & \text{cl} \quad \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl}
\end{array} \quad (6.34)$$

Петлевые части этих диаграмм определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12}^{(\text{cl},\text{q})\text{cl}} &= D^{(K,A)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4) G^K(\mathbf{p}, t_3, t_4); \\
\Sigma_{22}^{(\text{cl},\text{q})\text{cl}} &= D^{(K,A)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4) G^A(\mathbf{p}, t_3, t_4); \quad (6.35)
\end{aligned}$$

а полное выражение для поправки имеет вид

$$\Delta G^K = -\lambda^2 \int dt_3 \int dt_4 \int_{\mathbf{p}} G^{(R,K)}(\mathbf{k}, t_1, t_3) \left[\Sigma_{12}^{(\text{cl},\text{q})\text{cl}} + \Sigma_{22}^{(\text{cl},\text{q})\text{cl}} \right] G^A(\mathbf{k}, t_4, t_2), \quad (6.36)$$

где перечисление индексов (R,K) и (cl,q) подразумевает сумму всех вкладов (при этом случай R соответствует cl). Поправка к G^R пропагатору определяется диаграммами:

$$\begin{array}{cc}
\frac{\begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1} \end{array}}{\text{1} \quad \text{1}} & \frac{\begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{2} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array}}{\text{2} \quad \text{2}} \\
& & \text{cl} \quad \text{cl} \quad \text{q} \quad \text{cl}
\end{array} \quad (6.37)$$

Петлевые части имеют вид

$$\Sigma_{11}^{\text{clcl}} = D^K(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)G^R(\mathbf{p}, t_3, t_4); \quad \Sigma_{22}^{\text{qcl}} = D^A(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)G^A(\mathbf{p}, t_3, t_4), \quad (6.38)$$

а полная поправка определяется аналогичным выражением как в (6.36). Поправка к G^A пропагатору дается двумя диграммами:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{q} \quad \text{cl} \\ 2 \quad 2 \quad \text{---} \quad 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 1 \quad 1 \end{array}}{\quad} \quad \frac{\begin{array}{c} \text{cl} \quad \text{cl} \\ 2 \quad 2 \quad \text{---} \quad 2 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array}}{\quad} \quad (6.39)$$

с петлевыми частями

$$\Sigma_{11}^{\text{qcl}} = D^A(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)G^R(\mathbf{p}, t_3, t_4); \quad \Sigma_{22}^{\text{clcl}} = D^K(\mathbf{p} + \mathbf{k}, t_3, t_4)G^A(\mathbf{p}, t_3, t_4), \quad (6.40)$$

а выражение для поправки вновь дается суммой этих двух вкладов.

На этом мы заканчиваем обсуждение петлевых поправок. Отметим, что техника Швингера-Келдыша приводит к появлению большего числа диаграмм, чем техника Фейнмана. Это существенно усложняет расчеты в виду большого количества вычислений.

7. Заключение

Основным результатом проделанной работы можно считать вычисление in-in тока теории с использованием точных мод фермионного поля при наличии ненулевого переменного фонового скалярного поля. По ходу этого вычисления были получены важные выражения для разложения мод, которые затем будут использованы при вычислении петлевых поправок. Также не менее важным результатом является, что in-in и in-out (т.е. полученный из in-out эффективного действия теории) токи совпадают на древесном уровне в пределе сильного скалярного поля и мягких производных этого поля. Наконец, обсуждение диаграммной техники и выражений однопетлевых поправок представляет собой предпосылку для дальнейшего обсуждения исследуемой теории.

А. Приложение

Здесь мы обсуждаем разложение в пределе $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{\lambda E}$ при фиксированном t функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$, которое нам необходимо для изложения. Изложение этого приложения в основном следует оригинальной статье D. S. F. Crothers [14]. Существует представление функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$ в виде следующего интеграла

$$D_\nu(z) = \frac{z\Gamma(1+\nu)}{2\pi i} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \int_C dw \exp\left[z^2\left(w - \frac{w^2}{2}\right) - (1+w)\ln(zw)\right], \quad (\text{A.1})$$

где контур интегрирования C имеет следующий вид (см. рис. 1).

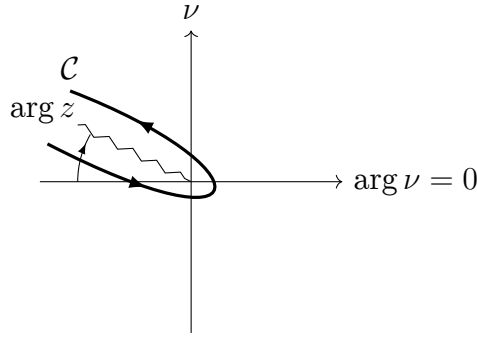


Рис. 1: Контур интегрирования C

Напомним, что в наших обозначениях переменные ν и z есть

$$\nu = -\frac{ip^2}{2\lambda E}; \quad z = \sqrt{\frac{2}{\lambda E}} e^{i\pi/4} (m + \lambda Et). \quad (\text{A.2})$$

Интеграл (A.1) в нашем пределе может быть вычислен с использованием метода перевала. Рассмотрим функцию

$$f(w) = z^2\left(w - \frac{w^2}{2}\right) - (1+w)\ln(zw), \quad (\text{A.3})$$

её критические точки $v_{0,1}$ определяются из уравнения $2zv_{0,1} = z \pm \sqrt{z^2 - 4(1+\nu)}$. Тогда, применив метод перевала находим

$$D_\nu(z) \approx \frac{z\Gamma(1+\nu)}{2\pi i} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \sum_j \frac{\exp(f(v_j) + i\alpha_j)}{\sqrt{|f''(v_j)|}} F(v_j), \quad (\text{A.4})$$

где обозначено $2\alpha_j = \pi - \arg[f''(v_j)]$, а также

$$F(v_j) \equiv 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)!! e^{2ikv_j}}{v_j^{2k} |f''(v_j)|^k} \sum_{\lambda_n} \prod_{n=3}^{2k} \frac{((1+\nu)/n)^{\lambda_k}}{\lambda_k!} \quad (\text{A.5})$$

и сумма с λ_n берется по всем различным целым положительным λ_n , удовлетворяющим уравнению $\sum_{n=3}^{2k} n\lambda_n = 2k$. Эту сумму можно оценить следующим способом. Заметим, что каждый k -член суммы содержит выражение

$$\frac{1}{(v_{0,1}f''(v_{0,1}))^{2k}} = \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \left[1 \mp \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{-1/2} \right] \right)^{2k} \quad (\text{A.6})$$

и не более чем k степень выражения $(1+\nu)/n$. Но в нашем пределе $|\nu| \gg 1$ выражение корень внутри квадратных скобок в (A.6), т.е. k -член суммы есть $\sim \mathcal{O}(1/\nu)$. Проведя суммирование по точкам v_0 и v_1 , получаем следующее выражение

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{2\nu+1}{2} \ln \nu - \frac{\nu+1}{2} \ln \frac{z^2}{4} - \frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right) \right) \times \\ \times \sum_{+,-} \exp \left(\left(-\frac{1}{2} - \nu \right) \ln [1 \pm \sqrt{\dots}] + \frac{z^2}{4} \sqrt{\dots} \right) \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\nu} \right) \right), \quad (\text{A.7})$$

где мы обозначили

$$\sqrt{\dots} = \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.8})$$

Далее, в нашем пределе мы можем оценить

$$\sqrt{1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + M(t)^2}}{M(t)} \left[1 + \frac{i\lambda E}{p^2 + M(t)^2} + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda E}{p^2 + M(t)^2} \right)^2 \right], \quad (\text{A.9})$$

где обозначено $M(t) = m + \lambda Et$. Наконец находим асимптотику для $D_\nu(z)$ в нашем пределе

$$D_\nu(z) \approx \frac{e^{\pi p^2/(8\alpha)}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{M(t)}{\sqrt{M(t)^2 + p^2}} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left(\frac{ip^2}{4\lambda E} - \frac{ip^2}{4\lambda E} \ln \frac{(\sqrt{p^2 + M^2} + M^2)^2}{2\alpha} - \frac{iM\sqrt{M^2 + p^2}}{2\alpha} \right) \times \\ \times \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{\lambda E}{p^2 + M(t)^2} \right)^2 \right) \quad (\text{A.10})$$

и необходимую нам асимптотику $|D_\nu(z)|^2$:

$$|D_\nu(z)|^2 \approx \exp \left(\frac{\pi p^2}{4\alpha} \right) \left[1 - \frac{p^2}{4M(t)^2} + \mathcal{O} \left(\frac{(\lambda E)^2}{M(t)^4} \right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Список литературы

- [1] Peter Kopietz, Lorenz Bartosch, and Florian Schütz. *Introduction to the Functional Renormalization Group*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] Jürgen Berges. Introduction to nonequilibrium quantum field theory. In *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2004.
- [3] Alex Kamenev. *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] Emil T. Akhmedov, Hadi Godazgar, and Fedor K. Popov. Hawking radiation and secularly growing loop corrections. *Physical Review D*, 93(2), jan 2016.
- [5] E. T. Akhmedov. Lecture notes on interacting quantum fields in de sitter space. *International Journal of Modern Physics D*, 23(01):1430001, jan 2014.
- [6] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev, and F. K. Popov. Secularly growing loop corrections in strong electric fields. *Journal of High Energy Physics*, 2014(9), sep 2014.
- [7] E. T. Akhmedov and F. K. Popov. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields. *Journal of High Energy Physics*, 2015(9), sep 2015.
- [8] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82(5):664–679, jun 1951.
- [9] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [10] Esteban A. Calzetta and Bei-Lok B. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2008.
- [11] F. Oberhettinger Harry Bateman with research associates W. Magnus and F. G. Tricomi. *Higher Transcendental Functions Volume 2*. McGraw-Hill, 1953.
- [12] A. P. C. Malbouisson, B. F. Svaiter, and N. F. Svaiter. Analytic regularization of the yukawa model at finite temperature. *Journal of Mathematical Physics*, 38(5):2210–2218, may 1997.
- [13] Sidney Coleman and Erick Weinberg. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D*, 7(6):1888–1910, mar 1973.
- [14] D S F Crothers. Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument. *Journal of Physics A: General Physics*, 5(12):1680–1688, dec 1972.