

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Обобщение симметрии Редже на $6-j$ символы в $sl(N)$ без кратностей

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:
студент 521 группы
Алексеев Виктор Александрович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., Слепцов А.В.

Долгопрудный
2019

Содержание

1	Введение	2
2	Симметрии из гипотезы собственных значений	4
2.1	Гипотеза о собственных значениях	4
2.2	Гипотеза о собственных значениях в случае без кратностей	6
2.3	Симметрии в $sl(2)$	8
2.4	Симметрии в симметрическом случае $sl(N)$	9
2.5	Вывод симметрий (36)	11
2.6	Другой подход к нахождению симметрий	13
3	Симметрии в случае сопряжённых к симметрическим представлений $sl(N)$	14
3.1	Симметрический R_4	14
3.2	Комбинированный R_4	15
4	Симметрии гипергеометрического решения	16
4.1	Выражение $6-j$ символа через функцию ${}_4\Phi_3$	16
4.2	Симметрии типа I	19
4.3	Симметрии типа II	20
4.4	Дополнительные симметрии	21
5	Результаты	22
5.1	Гипотеза о собственных значениях	22
5.2	Гипергеометрические симметрии	23
6	Заключение	24

1 Введение

В настоящее время имеется ряд теорий в математической и теоретической физике, которые используют 6- j символы Вигнера, также известные как коэффициенты Рака¹. Один из самых базовых примеров возникновения 6- j символов – сложение трех угловых моментов. Здесь они появляются как элементы матрицы преобразования между двумя каноническими базисами, соответствующими различным порядкам сложения моментов. Также 6- j символ является мощным инструментом, который можно использовать для вычисления наблюдаемых в теории Черна-Саймонса. Кроме того, матрицу Рака, составленную из коэффициентов Рака, также можно рассматривать как матрицу двойственности между двумя эквивалентными конформными блоками $sl(2)_k$ Весса-Зумино-Виттена, где квантовая деформация q принимается за корень $k + 2$ степени из единицы.

С другой стороны, для теории узлов одной из фундаментальных идей является концепция инвариантов узлов. Оказывается, что 6- j символы играют большую роль в процессе их вычисления, особенно в полиномах узлов, таких как полином Хосте-Окнеану-Миллетта-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пшицкого-Трачика (ХОМФЛИ-ПТ) [1][2][3]. Одним из наиболее мощных методов получения инвариантов узлов является подход Решетихина-Тураева [4], основанный на теории квантовых групп и квантовых \mathcal{R} -матриц, важной частью этого метода и является 6- j символ (матрица Рака).

Хорошо известно [5], что в $sl(2)$ имеется аналитическое выражение для произвольного 6- j символа в виде q -гипергеометрической функции ${}_4F_3$. Но если рассмотреть произвольные представления в $sl(N)$, возникает множество трудностей, частично связанных с кратностями, поэтому неизвестно, существует ли аналитическое выражение для общего случая. Несмотря на то, что можно получить значение 6- j символа с помощью метода старших весов [13], случай $sl(2)$ мотивирует вести поиски ключевых особенностей 6- j символов $sl(N)$ для того, чтобы обобщить известное решение.

Стоит обратить внимание на то, что есть два типа матриц Рака: те, у которых первые три представления при разложении их тензорного произведения образуют четвёртое, назовём *инклюдивными* или матрицами смешивания. С другой стороны, существуют определение матрицы Рака, в котором представления делятся на две пары, и тензорное произведение первой пары преобразуется матрицей Рака во второе произведение, назовём такие матрицы Рака *экслюдивными*. Важнейшее отличие между ними это то, что при достаточно большом N для любой алгебры $U_q(sl_N)$ инклюдивные матрицы Рака и, соответственно, 6- j символы не зависят от N , тогда как экслюдивные матрицы Рака всегда явно зависят от N .

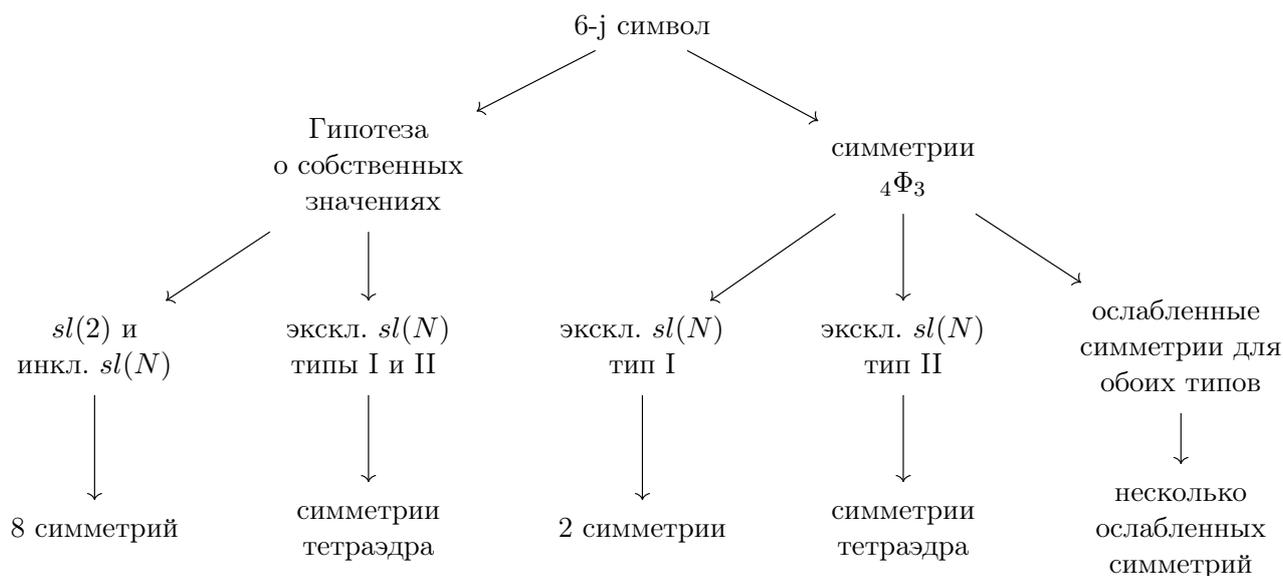
В этой дипломной работе рассматриваются как экслюдивные, так и инклюдивные 6- j символы $sl(N)$ без кратностей с целью найти новые симметрии для симметрических и сопряженных к симметрическим представлений, по сравнению с симметрией тетраэдра. В работе представлены два способа получения симметрий. Первый основан на [6], где гипотеза о собственных значениях используется для предсказания равенства пары U -матриц. Гипотеза переформулирована в более удобной форме и используется для получения новых симметрий для инклюдивных 6- j символов с тремя симметрическими представлениями и произвольным четвертым. Также гипотеза о собственных значениях применяется для некоторых других классов 6- j символов без кратностей. В частности, исследуется вопрос, дает ли гипотеза о собственных значениях нетривиальные симметрии в более сложных случаях.

Во втором подходе рассматриваются экслюдивные 6- j символы, которые имеют только симметрические и сопряженные к симметрическим представления. Все эти 6- j символы можно разделить на типы I и II. Для типа I сопряжено второе представление, для типа II – третье. Другие 6- j символы, которые имеют только симметрические и сопряженные к симметрическим представления, могут быть получены из этих двух типов известными симметриями тетраэдра [7]. Каждый из этих типов можно рассматривать как естественное обобщение 6- j символов $sl(2)$, поскольку в тензорных квадратах представлений имеется только один целочисленный параметр – длина первой строчки диаграммы Юнга, а при $N = 2$ каждый из двух типов переходит в полный набор

¹Вообще говоря, 6- j символы и коэффициенты Рака отличаются нормировочным множителем, как это показано в уравнении (12). Для вопросов данной работы это не существенно, поэтому понятия 6- j символа и коэффициента Рака будем считать эквивалентными.

6- j символов $sl(2)$. В [8] было предложено аналитическое выражение для обоих типов, поэтому упомянутое решение изучается на предмет особенных свойств для получения новых симметрий. Главной особенностью этого решения является то, что оно может быть переписано в терминах q -гипергеометрической функции ${}_4\Phi_3$, которая имеет огромное количество известных симметрий. Затем находится соответствие между симметриями q -гипергеометрической функции и отношениями между 6- j символами. Последние отношения и есть искомые симметрии 6- j символов.

Общая логическая структура работы может быть выражена следующим образом. Рассматривая различные свойства 6- j символов в $sl(N)$, можно прийти к новым соотношениям. Один из способов – гипотеза о собственных значениях, из которой можно вывести симметрии помимо тетраэдрических. Для симметрических представлений найдены 8 новых симметрий. Аналогично можно рассмотреть 6- j символы с симметрическими и сопряжёнными к симметрическим представлениями, что приводит к 2 новым симметриям для типа I.



В разделе 2 были рассмотрены уравнения между U -матрицами. Известно, что для 6- j символов в $sl(2)$ имеется группа симметрий, содержащая 144 элемента [6], но эти отношения связывают матричные элементы, а не сами матрицы. Если рассмотреть только симметрии между матрицами, то имеется 8 тождественно равных матриц. Гипотеза о собственных значениях была применена в случае $sl(2)$, и все 8 соотношений были получены. Затем та же процедура была выполнена для симметрических представлений $sl(N > 2)$, где возникает такое же число соотношений – было получено 8 симметрий, включая тривиальное тождество. Одним из интересных моментов является появление в этих отношениях свободного параметра, который может принимать произвольные неотрицательные целые значения. Также стоит отметить, что симметрия Редже при переходе к $N > 2$ становится одной из найденных симметрий, что позволяет обобщить её на этот класса 6- j символов.

Затем в разделе 3 были рассмотрены 6- j символы с симметрическими и сопряженными к симметрическому представлениями, чтобы продемонстрировать гибкость метода гипотезы собственных значений, но для I и II типа были обнаружены только симметрии тетраэдра. Затем был рассмотрен немного более общий 6- j символ без кратностей и для него были получены 4 новые симметрии, не выражающиеся через симметрии тетраэдра.

Наконец, в разделе 4 рассматривается уравнение для $sl(N)$ 6- j символа без кратностей из [8]. Его можно легко выразить через q -гипергеометрическую функцию ${}_5\Phi_4$, которая позволяет записать ряд симметрий для этого решения. Также само выражение было упрощено при помощи анализа условий из оригинальной статьи и применения симметрий тетраэдра, в результате чего удалось записать решение в виде q -гипергеометрической функции ${}_4\Phi_3$ без дополнительных неравенств на аргументы.

Полученное выражение для эксклюзивного 6- j символа было изучено на предмет симметрий. Анализ выражения показал наличие 24 симметрий для типа I и 4 симметрий для типа II. Некоторые из них выражались через симметрию тетраэдра и потому не рассматривались. Для типа II все найденные равенства являются симметриями тетраэдра, поэтому в данной постановке задачи не найдено симметрий для типа II. Для типа I найдено две новых симметрии, которые в случае $N = 2$ становятся симметрией Редже. Также были рассмотрены дополнительные симметрии, требующие выполнения равенства на аргументы 6- j символа и потому имеющие меньшее количество свободных параметров и меньшую степень общности, для обоих типов найдены нетривиальные выражения и предоставлены примеры. Основным результатом раздела 4, кроме выражения эксклюзивного 6- j символа через ${}_4\Phi_3$, можно считать две новые симметрии для I типа, которые представляют из себя натуральное обобщение двух симметрий Редже из $sl(2)$ в $sl(N)$.

2 Симметрии из гипотезы собственных значений

Гипотеза о собственных значениях [9] может быть получена из уравнения Янга-Бакстера для \mathcal{R} -матриц и переписана [10] в терминах коэффициентов Рака. Гипотеза утверждает, что уравнение Янга-Бакстера имеет одно решение и может быть выражено через собственные значения матриц \mathcal{R} . Для начала приведём рассуждения, которые приводят к формулировке гипотезы о собственных значениях в общей форме. Затем ограничимся рассмотрением лишь нескольких классов 6- j символов без кратностей и переформулируем для них эту гипотезу в упрощённом виде, чтобы использовать её как инструмент для проверки на равенство двух 6- j символов. Наконец, применим её для случая симметрических представлений в $sl(N)$ и найдём все предсказанные гипотезой равенства. Полученные выражения будут искомыми симметриями.

Гипотеза 1 (Гипотеза о собственных значениях). *U -матрица полностью определяется тремя множествами нормированных собственных значений \mathcal{R} -матриц.*

2.1 Гипотеза о собственных значениях

Для начала запишем выражения, которые приводят к упомянутой гипотезе. Она берётся из уравнения Янга-Бакстера, которое является алгебраически записанным третьим движением Рейдемейстера из теории узлов. Для узлов его записывают как

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \quad (1)$$

В данной работе рассматриваются представления алгебры $sl(N)$, обозначенные через R_i , каждое из которых действует в V_i . Операторы $\mathcal{R}_1 \dots \mathcal{R}_m$ называются \mathcal{R} -матрицами и они решают уравнение Янга-Бакстера. Здесь они используются как представление группы кос. Каждый \mathcal{R}_i можно записать как комбинацию перестановки P и некоторого оператора $\hat{\mathcal{R}}_i$, которые действуют нетривиально только на произведении двух представлений $V_i \otimes V_{i+1}$:

$$\mathcal{R}_i = 1_{V_1} \otimes 1_{V_2} \otimes \dots \otimes P \hat{\mathcal{R}}_{i,i+1} \otimes \dots \otimes 1_{V_n} \quad (2)$$

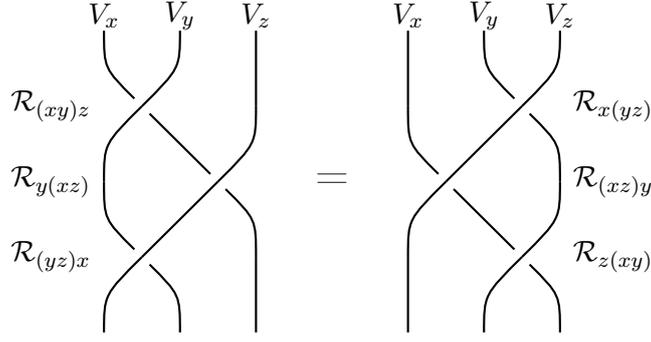
Но для целей этой работы представляет интерес уравнение Янга-Бакстера в случае зацепления с 3 нитями в косе, где ситуация чуть более простая. Каждая нить в косе может нести свое собственное представление, тогда как в случае узла на всех нитях представления одинаковые. Начальный порядок представлений может быть произвольным, поэтому возникают 3 разных уравнения, соответствующих разным начальным положениям нитей. Также для примера предоставлено схематическое изображение операторов, приравняваемых в первом выражении.

$$\mathcal{R}_{(xy)z} : (R_x \otimes R_y) \otimes R_z \rightarrow (R_y \otimes R_x) \otimes R_z \quad \mathcal{R}_{(xy)z} = \mathcal{R}_{(yx)z} \quad (3)$$

$$\mathcal{R}_{(xy)z} \mathcal{R}_{y(xz)} \mathcal{R}_{(yz)x} = \mathcal{R}_{x(yz)} \mathcal{R}_{(xy)z} \mathcal{R}_{z(xy)}$$

$$\mathcal{R}_{(yz)x} \mathcal{R}_{z(yx)} \mathcal{R}_{(zx)y} = \mathcal{R}_{y(zx)} \mathcal{R}_{(yx)z} \mathcal{R}_{x(yz)} \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_{(zx)y} \mathcal{R}_{x(zy)} \mathcal{R}_{(xy)z} = \mathcal{R}_{z(xy)} \mathcal{R}_{(zy)x} \mathcal{R}_{y(zx)}$$



Выберем базис в $R_1 \otimes \dots \otimes R_m$, который соответствует следующему порядку в тензорном произведении:

$$B_{1,2,3\dots m} = (\dots((R_1 \otimes R_2) \otimes R_3) \otimes \dots) \otimes R_m \quad (5)$$

\mathcal{R}_1 в выбранном базисе является диагональным по построению, каждый диагональный элемент соответствует представлению X_α в разложении

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{M}_{\alpha}^{R_1, R_2} \otimes X_{\alpha} \quad (6)$$

Если $\dim \mathcal{M}_{\alpha}^{R_1, R_2} > 1$, то требуется дополнительный поворот для диагонализации \mathcal{R}_1 , но его всегда можно совершить. С другой стороны, если рассмотреть \mathcal{R}_2 , он может быть диагональным только в базисе, соответствующем

$$B_{1,2,3,4\dots m} = (\dots(R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3)) \otimes \dots) \otimes R_m \quad (7)$$

Поэтому, чтобы диагонализировать матрицу \mathcal{R}_2 , требуется сменить базис при помощи U -матрицы, которая является естественным изоморфизмом между базисами тензорного произведения представлений:

$$U : (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \rightarrow R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) \quad (8)$$

Можно переписать его в неприводимых компонентах:

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes X_i \\ R_2 \otimes R_3 &= \bigoplus_j M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes Y_j \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 &= \bigoplus_{i,k} M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_{4k}}^{X_i, R_3} \otimes R_{4k} \\ R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) &= \bigoplus_{j,k} M_{R_{4k}}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3} \otimes R_{4k} \end{aligned} \quad (10)$$

Определение 1. U -матрица определяется как отображение (11). Элементы этой матрицы называются коэффициентами Рака.

$$U_{i,j} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} : \bigoplus_i M_{X_i}^{R_1, R_2} \otimes M_{R_{4k}}^{X_i, R_3} \rightarrow \bigoplus_j M_{R_{4k}}^{R_1, Y_j} \otimes M_{Y_j}^{R_2, R_3} \quad (11)$$

Определение 2. 6 - j символ Вигнера является элементом нормированной U -матрицы:

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & X \\ R_3 & R_4 & Y \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{R_1+R_2+R_3+R_4}}{\sqrt{\dim(X_i) \dim(Y_j)}} U_{i,j} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Также введем сокращенное обозначение для матрицы 6 - j символов, обозначенной как

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{matrix} \right\}_{i,j} = \left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & X \\ R_3 & R_4 & Y \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

Теперь вернемся к уравнению Янга-Бакстера. U -матрицы действуют в тензорном произведении трех представлений:

$$U_{xyz} : (R_x \otimes R_y) \otimes R_z \rightarrow R_x \otimes (R_y \otimes R_z) \quad U_{xyz}^\dagger = U_{xyz}^{-1} \quad (14)$$

Давайте выберем базис, в котором $\mathcal{R}_{(xy)z}$ диагональна, тогда $\mathcal{R}_{x(yz)}$ может быть не диагональным, но возможно повторно выразить его как $\mathcal{R}_{x(yz)} = U_{xyz}^\dagger \mathcal{R}'_{x(yz)} U_{xyz}$ где $\mathcal{R}'_{x(yz)}$ диагональна. Делая это для всех \mathcal{R} , получаются выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_{(xy)z} U_{yzx}^\dagger \mathcal{R}'_{y(xz)} U_{yzx} \mathcal{R}_{(yz)x} &= U_{xyz}^\dagger \mathcal{R}'_{x(yz)} U_{xzy} \mathcal{R}'_{(xz)y} U_{zxy}^\dagger \mathcal{R}'_{z(xy)} U_{zyx} \\ \mathcal{R}'_{(yz)x} U_{zyx}^\dagger \mathcal{R}'_{z(yx)} U_{zxy} \mathcal{R}'_{(zx)y} &= U_{yzx}^\dagger \mathcal{R}'_{y(zx)} U_{yxz} \mathcal{R}'_{(yx)z} U_{xyz}^\dagger \mathcal{R}'_{x(yz)} U_{xzy} \\ \mathcal{R}'_{(zx)y} U_{xzy}^\dagger \mathcal{R}'_{x(zy)} U_{xyz} \mathcal{R}'_{(xy)z} &= U_{zxy}^\dagger \mathcal{R}'_{z(xy)} U_{zyx} \mathcal{R}'_{(zy)x} U_{yzx}^\dagger \mathcal{R}'_{y(zx)} U_{yxz} \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения однородны, и без ограничения общности можно нормировать все \mathcal{R} -матрицы, чтобы было выполнено соотношение $\det \mathcal{R}' = \prod_i \lambda_i = 1$, и упорядочить собственные значения по возрастанию. Если этих отношений достаточно для определения U -матрицы, то она, согласно гипотезе, зависит только от множества нормированных собственных значений. Гипотеза о собственных значениях говорит, что U -матрицы равны, если в стандартном базисе три множества собственных значений нормированных \mathcal{R} -матриц равны трем множествам собственных значений другой матрицы соответственно. Но давайте переформулируем гипотезу в случае симметрических представлений в более удобном виде.

2.2 Гипотеза о собственных значениях в случае без кратностей

Определение 3. Если существует три симметрических представления R_1, R_2, R_3 и одно представление $R_4 \vdash R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$, назовём X, Y, Z всеми неприводимыми представлениями, которые удовлетворяют правилам отбора:

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= \bigoplus_{\alpha=0}^d X_\alpha & R_4 \vdash X_\alpha \otimes R_3 \\ R_2 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\alpha=0}^d Y_\alpha & R_4 \vdash Y_\alpha \otimes R_1 \\ R_1 \otimes R_3 &= \bigoplus_{\alpha=0}^d Z_\alpha & R_4 \vdash Z_\alpha \otimes R_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно теории представлений число неприводимых компонент для каждого X, Y, Z равно и обозначается как $d + 1$.

Определение 4. Для последовательностей представлений X, Y и Z в виде диаграмм Юнга введём параметры α, λ, δ , которые обозначают последовательность представлений в виде $[\lambda - \alpha, \lambda - \delta + \alpha]$, где $0 \leq \alpha \leq d$. λ и δ неотрицательны и определяются конкретным выбором R_1, R_2, R_3, R_4 .

Обратим внимание, что такое определение возможно, поскольку произведение двух симметрических представлений раскладывается только на диаграммы с не более чем двумя строками.

Гипотеза 2. Если имеются матрицы U, \tilde{U} (обозначим все параметры второго через $\tilde{}$), так что для них обоих R_1, R_2, R_3 симметрические и $R_4 \vdash R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$, то U -матрицы равны, если удовлетворяется система уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} d_{12} = \tilde{d}_{12} = d_{23} = \tilde{d}_{23} = d_{13} = \tilde{d}_{13} \\ \delta_{12} = \tilde{\delta}_{12} \\ \delta_{23} = \tilde{\delta}_{23} \\ \delta_{13} = \tilde{\delta}_{13} \end{cases}} \quad (17)$$

Доказательство. Каждое собственное значение соответствует представлению из тензорного произведения пар представлений из R_1, R_2, R_3 . Более того, известно выражение для собственных значений \mathcal{R} -матриц [11]:

$$\begin{aligned} \lambda_{X_\alpha} &= \epsilon_{X_\alpha} q^{\kappa(X_\alpha) - \kappa(R_1) - \kappa(R_2)} \\ \kappa([\lambda_i]) &= \sum_i \frac{\lambda_i}{2} (\lambda_i - 2i + 1) \quad R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_{\alpha=0}^d X_\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

где ϵ равен 1 или -1 . Знак не повлияет на дальнейшее доказательство, потому что в рассмотренных решениях подразумеваются чередующийся знак собственных значений.

Как уже было упомянуто, три множества нормированных собственных значений $[X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha]$ равны для некоторых \mathcal{R} -матриц. Требуется найти условие равенства трёх множеств собственных значений для X, Y, Z и аналогичных множеств для других представлений. Из уравнения (18) видно, что R_1, R_2 постоянны, поэтому единственное условие задается в $\kappa(X_\alpha)$. Другими словами:

$$\kappa(X_\alpha) - \kappa(\tilde{X}_\alpha) = \text{const}(\alpha) \quad (19)$$

Если в \mathcal{R} -матрице имеется более одного собственного значения ($d > 0$), это уравнение дает нетривиальные условия. Можно использовать свойство монотонности функции κ для симметрических представлений. Рассмотрим произведение произвольных симметрических представлений в виде последовательности диаграмм Юнга $X_\alpha = [\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 + \alpha] = [\lambda_1 - \alpha, \lambda_1 - \delta + \alpha]$ где $0 \leq \alpha \leq d$:

$$2\kappa(X_\alpha) = \sum_j \lambda_j(\alpha)(\lambda_j(\alpha) - 2j + 1) = 2\alpha^2 - 2(1 + \delta)\alpha + \text{const} \quad (20)$$

Действительно, функция является монотонной для всех представлений с одинаковым порядком диаграммы Юнга. Но есть ли две последовательности диаграмм Юнга, которые имеют одинаковые нормализованные собственные значения?

$$\lambda(\alpha) = [\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 + \alpha] = [\lambda_1 - \alpha, \lambda_1 - \delta + \alpha], \quad \tilde{\lambda}(\alpha) = [\tilde{\lambda}_1 - \alpha, \tilde{\lambda}_2 + \alpha] = [\tilde{\lambda}_1 - \alpha, \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} + \alpha]$$

$$\kappa(X_\alpha) - \kappa(\tilde{X}_\alpha) = (\tilde{\delta} - \delta)\alpha + \text{const} \quad (21)$$

В результате получается следующая ситуация: если число собственных значений больше 1, то для получения условий гипотезы о собственных значениях должно выполняться $\delta = \tilde{\delta}$ для пары диаграмм X_0, \tilde{X}_0 . Также равенство d необходимо для того, чтобы число элементов было одинаковым. В случае $sl(N), N > 2$ это эквивалентно условиям:

$$[\lambda_1, \lambda_1 - \delta] = [\tilde{\lambda}_1 + C, \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\delta} + C], \quad d = \tilde{d} \quad (22)$$

Или в более компактной форме:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ \delta = \tilde{\delta} \end{cases} \quad \delta = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (23)$$

Для других двух представлений доказательство аналогично. Наконец, d одинаково для всех трех тензорных произведений, так как это следует из теории представлений. \square

Следствие 1. В $sl(2)$ система модифицируется следующим образом:

$$\begin{cases} d_{12} = \tilde{d}_{12} = d_{23} = \tilde{d}_{23} = d_{13} = \tilde{d}_{13} \\ X_0 = \tilde{X}_0 \\ Y_0 = \tilde{Y}_0 \\ Z_0 = \tilde{Z}_0 \end{cases} \quad (24)$$

Этот подход также может быть применен для случая, когда представления симметрические и сопряженные к симметрическим. Доказательство аналогично основному утверждению, но для этого случая последовательность диаграммы Юнга имеет вид $[\lambda_1 - \alpha, (\lambda_2)^{N-2}, \lambda_N + \alpha]$, и δ определяется как $\lambda_1 - \lambda_N$.

Следствие 2. Если в $sl(N)$ в случае симметрических и сопряженных к симметрическим представлений $\delta = \lambda_1 - \lambda_N$, то система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} d_{12} = \tilde{d}_{12} = d_{23} = \tilde{d}_{23} = d_{13} = \tilde{d}_{13} \\ \delta_{12} = \tilde{\delta}_{12} \\ \delta_{23} = \tilde{\delta}_{23} \\ \delta_{13} = \tilde{\delta}_{13} \end{cases} \quad (25)$$

2.3 Симметрии в $sl(2)$

Имеется пара 6-*j* символов, где R_1, R_2, R_3, R_4, X, Y – целые числа, которые обозначают длины строк диаграмм Юнга для представлений $sl(2)$.

$$\begin{Bmatrix} R_1 & R_2 & X \\ R_3 & R_4 & Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_1 & \tilde{R}_3 & \tilde{X} \\ \tilde{R}_3 & \tilde{R}_4 & \tilde{Y} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Цель работы состоит в том, чтобы найти такие $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{R}_4$, чтобы при всех возможных R_1, R_2, R_3, R_4 выполнялось равенство с произвольными $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ из гипотезы о собственных значениях. X, Y, Z – 3 последовательности представлений, возникающие в результате разложения тензорного произведения для $R_1 \otimes R_2, R_2 \otimes R_3$ и $R_1 \otimes R_3$. Диапазон значений X, Y, Z известен из правил отбора. Например, X ограничен условиями

$$\max \begin{pmatrix} R_1 - R_2 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_4 \\ R_4 - R_3 \end{pmatrix} \leq X \leq \min \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_3 + R_4 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Вывод условий на Y, Z такой же, как и в случае X , поэтому их можно найти путем замены переменных $R_3 \leftrightarrow R_1$ и $R_3 \leftrightarrow R_2$ соответственно. Можно выразить X, Y, Z в терминах гипотезы собственного значения, используя обозначение из (24) (см. таблицу 1).

альтернатива	$2d$	X_0	Y_0	Z_0
c_1	$R_1 + R_2 + R_3 - R_4$	$R_1 + R_2$	$R_2 + R_3$	$R_1 + R_3$
c_2	$R_1 + R_2 - R_3 + R_4$	$R_1 + R_2$	$R_1 + R_4$	$R_2 + R_4$
c_3	$R_1 - R_2 + R_3 + R_4$	$R_3 + R_4$	$R_1 + R_4$	$R_1 + R_3$
c_4	$-R_1 + R_2 + R_3 + R_4$	$R_3 + R_4$	$R_2 + R_3$	$R_2 + R_4$
c_5	$2R_4$	$R_3 + R_4$	$R_2 + R_3$	$R_1 + R_3$
c_6	$2R_3$	$R_3 + R_4$	$R_1 + R_4$	$R_2 + R_4$
c_7	$2R_2$	$R_1 + R_2$	$R_1 + R_4$	$R_1 + R_3$
c_8	$2R_1$	$R_1 + R_2$	$R_2 + R_3$	$R_2 + R_4$

Таблица 1: $sl(2)$ U -матрицы в зависимости от значения d

Заметим, что если значения d из разных альтернатив совпадают, то остальные переменные тоже равны. Также стоит внимания тот факт, что в $sl(2)$ интервал между двумя соседними представлениями равен двум, и этот множитель стоит перед d в таблице 1. Можно заметить, что d инвариантен относительно перестановок R_1, R_2, R_3 , поэтому $d_{12} = d_{23} = d_{13}$, как и должно быть для каждого 6-*j* символа. Система (24) может быть уменьшена до:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ X_0 = \tilde{X}_0 \\ Y_0 = \tilde{Y}_0 \\ Z_0 = \tilde{Z}_0 \end{cases} \quad (28)$$

Определение 5. Уравнения (29) и их композиции (всего 6 одинаковых 6- j символов) называются симметриями Редже или преобразованиями Редже. ($\rho = \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{2}$, $\rho' = \frac{R_1+R_3+X+Y}{2}$, $\rho'' = \frac{R_2+R_4+X+Y}{2}$).

$$\begin{Bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho - R_4 & \rho - R_3 & X \\ \rho - R_2 & \rho - R_1 & Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho' - Y & R_2 & \rho' - R_3 \\ \rho' - X & R_4 & \rho' - R_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 & \rho'' - Y & \rho'' - R_4 \\ R_3 & \rho'' - X & \rho'' - R_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Утверждение 1. Система (24) имеет 8 различных решений, которые образуют группу из одной перестановки строк, одной перестановки столбцов и одного преобразования Редже из (29):

$$\begin{Bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_4 & R_2 \\ R_3 & R_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_3 & R_4 \\ R_1 & R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2 & R_1 \\ R_4 & R_3 \end{Bmatrix} = \quad (30)$$

$$= \begin{Bmatrix} \rho - R_1 & \rho - R_2 \\ \rho - R_3 & \rho - R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho - R_4 & \rho - R_3 \\ \rho - R_2 & \rho - R_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho - R_3 & \rho - R_4 \\ \rho - R_1 & \rho - R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho - R_2 & \rho - R_1 \\ \rho - R_4 & \rho - R_3 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения очень похоже на более интересный случай $sl(N)$, доказательство которого подробно разобрано в подразделе 2.5. \square

Стоит подчеркнуть, что, хотя известно, что 6- j символы имеют 144 симметрии, только 8 из них сохраняют X, Y неизменными, т.е. существует 8 равных U -матриц. Это означает, что все известные $sl(2)$ симметрии U -матриц описаны в предыдущем утверждении. Другими словами, гипотеза о собственных значениях верна для $sl(2)$, поскольку она предсказывает все существующие симметрии и ничего более.

2.4 Симметрии в симметрическом случае $sl(N)$

Рассмотрим пару 6- j символов, где $R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3, K_1, K_2$ являются целыми числами, обозначающими длину строк на диаграмме Юнга. Также иногда будет использоваться обозначение $[M_1, M_2, M_3]$ как R_4 .

$$\begin{Bmatrix} [R_1] & [R_2] & [R_1 + R_2 - K_1, K_1] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] & [R_2 + R_3 - K_2, K_2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\tilde{R}_1] & [\tilde{R}_3] & [\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{K}_1, \tilde{K}_1] \\ [\tilde{R}_3] & [\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3] & [\tilde{R}_2 + \tilde{R}_3 - \tilde{K}_2, \tilde{K}_2] \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такие $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{R}_4$, чтобы при всех возможных R_1, R_2, R_3, R_4 выполнялось равенство для произвольных $K_1, K_2, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ по гипотезе о собственных значениях. Ниже будет использоваться матричная запись 6- j символа:

$$\begin{Bmatrix} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\tilde{R}_1] & [\tilde{R}_3] \\ [\tilde{R}_3] & [\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3] \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Как было выведено в (17), требуется найти выражения для d и δ . Найдем диапазон значений X, Y, Z по правилам отбора.

Лемма 1. Даны три симметрических представления R_1, R_2, R_3 алгебры $sl(N > 2)$ и представлением $[M_1, M_2, M_3] = R_4 \vdash R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$, каждое из X, Y, Z описывается диаграммами Юнга $[\lambda - \alpha, \lambda - \delta + \alpha]$, где $0 \leq \alpha \leq d$ и d, δ выражены в Таблице 2. Альтернатива определяется значением $d = \min(d_{c_1}, \dots, d_{c_8})$. Также правила отбора требуют $R_1 + R_2 + R_3 = M_1 + M_2 + M_3$.

Доказательство. Давайте посмотрим на разложение $X \vdash R_1 \otimes R_2$ и $R_4 \vdash X_k \otimes R_3$ в виде диаграмм Юнга. $X_k = [R_1 + R_2 - k, k]$, $R_4 = [M_1, M_2, M_3]$. Поскольку R_4 должно получаться из произведения $X_k \otimes R_3$, то можно записать его как $[R_1 + R_2 + R_3 - k - y - z, k + y, M_3]$, где k, y являются неотрицательными целыми числами, которые параметризуют тензорные произведения диаграмм Юнга.

$$a = 2M_1 - R_1 - R_2 - R_3 \quad A = R_1 + R_2 + R_3 - 2M_3$$

альтернатива	d	δ_{12}	δ_{23}	δ_{13}
c_1	$M_1 - M_2$	$a + R_3$	$a + R_1$	$a + R_2$
c_2	$R_1 - M_3$	$A + R_3$	$a + R_1$	$A + R_2$
c_3	$R_2 - M_3$	$A + R_3$	$A + R_1$	$a + R_2$
c_4	$R_3 - M_3$	$a + R_3$	$A + R_1$	$A + R_2$
c_5	$M_2 - M_3$	$A + R_3$	$A + R_1$	$A + R_2$
c_6	$M_1 - R_1$	$a + R_3$	$A + R_1$	$a + R_2$
c_7	$M_1 - R_2$	$a + R_3$	$a + R_1$	$A + R_2$
c_8	$M_1 - R_3$	$A + R_3$	$a + R_1$	$a + R_2$

Таблица 2: $sl(N)$ U -матрицы в зависимости от значения d

Сразу можно обнаружить, что $y = M_2 - k$, $M_3 = R_1 + R_2 + R_3 - M_1 - M_2$. Поскольку y определяется значением k , есть только один целочисленный параметр в тензорном произведении $-k$. Также из правил отбора ясно, что

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq \min(R_1, R_2) \\ y + M_3 \leq R_3 \\ 0 \leq \min(M_3, y) \end{cases}$$

Правила Литтлвуда-Ричардсона для $sl(N)$ гласят, что в произведении произвольной диаграммы Юнга μ и симметрической диаграммы ν любая неприводимая компонента $\lambda \vdash \mu \otimes \nu$ может быть получена добавлением элементов ν в μ , не помещая два элемента ν в одном столбце. Это дает дополнительные неравенства $y \leq R_1 + R_2 - 2k$ и $M_3 \leq k$. После упрощения неравенств получаем:

$$\max \begin{pmatrix} M_3 \\ R_1 + R_2 - M_1 \end{pmatrix} \leq k \leq \min \begin{pmatrix} R_1 + R_2 - M_2 \\ M_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Так же легко найти выражения для Y, Z из-за симметрии задачи. Требуется только заменить переменные: $R_3 \leftrightarrow R_1$ и $R_3 \leftrightarrow R_2$ для k_{23} и k_{13} соответственно. После этого может быть легко получена таблица альтернатив. \square

Заметим, что в таблице 2 d инвариантен относительно циклической перестановки (R_1, R_2, R_3) , поэтому $d_{12} = d_{23} = d_{13}$ выполняется автоматически без гипотезы о собственных значениях. Система (17) может быть упрощена до:

$$\begin{cases} d = \tilde{d} \\ \delta_{12} = \tilde{\delta}_{12} \\ \delta_{23} = \tilde{\delta}_{23} \\ \delta_{13} = \tilde{\delta}_{13} \end{cases} \quad (35)$$

Утверждение 2. Система (17) для $N > 3$ имеет 8 различных решений, образующих группу из 3 независимых инволюций. Каждая симметрия определена для всех целых чисел $C \geq C_0$, где C_0 – наименьшее число, которое сохраняет число элементов в строках диаграмм Юнга

неотрицательным.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{cc} [R_1 + C] & [R_2 + C] \\ [R_3 + C] & [M_1 + C, M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [R_2 + C] & [R_1 + C] \\ [M_1 - M_2 + M_3 + C] & [M_1 + C, R_1 + R_2 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [R_3 + C] & [M_1 - M_2 + M_3 + C] \\ [R_1 + C] & [M_1 + C, R_1 + R_3 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [M_1 - M_2 + M_3 + C] & [R_3 + C] \\ [R_2 + C] & [M_1 + C, C - R_2 + R_3 - M_2, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_1] & [C - R_2] \\ [C - R_3] & [C - M_3, C - M_2, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_2] & [C - R_1] \\ [C - M_1 + M_2 - M_3] & [C - M_3, C - M_2 - R_1 - R_2, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_3] & [C - M_1 + M_2 - M_3] \\ [C - R_1] & [C - M_3, C - M_2 - R_1 - R_3, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - M_1 + M_2 - M_3] & [C - R_3] \\ [C - R_2] & [C - M_3, C - M_2 - R_2 - R_3, C - M_1] \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{36}$$

Замечание 1. Также можно получить случай $sl(3)$ из решения выше, сократив столбцы высоты три.

В качестве примера напишем несколько равных матриц 6-й символов как в $sl(3)$, так и в $sl(N)$, $N > 3$:

- $sl(3)$ $C \geq 8$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{cc} [6] & [5] \\ [7] & [9, 3] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [6 + C] & [5 + C] \\ [7 + C] & [9, 3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [8 + C] & [7 + C] \\ [5 + C] & [9, 5] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [5 + C] & [8 + C] \\ [6 + C] & [9, 6] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [7 + C] & [6 + C] \\ [8 + C] & [9, 4] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - 6] & [C - 5] \\ [C - 7] & [9, 6] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 8] & [C - 7] \\ [C - 5] & [9, 4] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 5] & [C - 8] \\ [C - 6] & [9, 3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 7] & [C - 6] \\ [C - 8] & [9, 5] \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{37}$$

- $sl(N)$, $N > 3$
 $C \geq 16$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{cc} [7] & [8] \\ [11] & [16, 9, 1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [7 + C] & [8 + C] \\ [11 + C] & [16 + C, 9 + C, 1 + C] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 7] & [C - 8] \\ [C - 11] & [C - 1, C - 9, C - 16] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [8 + C] & [7 + C] \\ [8 + C] & [16 + C, 6 + C, 1 + C] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 8] & [C - 7] \\ [C - 24] & [C - 1, -6 + C, C - 16] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [11 + C] & [8 + C] \\ [7 + C] & [16 + C, 9 + C, 1 + C] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 11] & [C - 8] \\ [C - 7] & [C - 1, -9 + C, C - 16] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [8 + C] & [11 + C] \\ [8 + C] & [16 + C, 10 + C, 1 + C] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - 8] & [C - 11] \\ [C - 8] & [C - 1, -10 + C, C - 16] \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{38}$$

2.5 Вывод симметрий (36)

Доказательство. Требуется рассмотреть все возможные значения R_1, R_2, R_3, R_4 , поэтому существует 8 различных возможностей для d . Система (28) имеет только две независимые переменные $-d$ и \tilde{d} . Уравнения с δ определяются выбором конкретного d , поэтому имеется 8 альтернатив для d и 8 альтернатив для \tilde{d} , всего 64. Из леммы 1 известно выражение для $d, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$.

Определение 6. Обозначим каждую систему парой номеров, соответствующим альтернативам в Таблице 2. Система c_{ij} имеет c_i с левой стороны и c_j с правой стороны, $1 \leq i, j \leq 8$.

Например, система с $d, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ из c_2 и $\tilde{d}, \tilde{\delta}_{12}, \tilde{\delta}_{23}, \tilde{\delta}_{13}$ из c_5 обозначается как c_{25} . На самом деле можно просто решить все 64 альтернативы, но есть более удобный способ решения этой системы.

Система не является вырожденной, следовательно, существуют решения для каждого d . Для начала рассмотрим систему c_{11} и назовем соответствующее решение с $d = \tilde{d} = M_1 - M_2 = \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2$ основным. Система для этой альтернативы:

$$\begin{cases} M_1 - M_2 = \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 \\ 2M_1 - R_1 - R_2 = 2\tilde{M}_1 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 \\ 2M_1 - R_2 - R_3 = 2\tilde{M}_1 - \tilde{R}_2 - \tilde{R}_3 \\ 2M_1 - R_1 - R_3 = 2\tilde{M}_1 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_3 \end{cases} \quad (39)$$

Поскольку имеется 4 уравнения из гипотезы о собственных значениях и 5 независимых переменных R_1, R_2, R_3, M_1, M_2 (M_3 фиксируется условием сохранения числа ящиков), решение имеет один свободный целочисленный параметр. Очевидно, что система будет удовлетворена, если $R_i = \tilde{R}_i, M_i = \tilde{M}_i, \forall i$. В общем решении свободный параметр возникает как дополнительное слагаемое, потому что система не изменяется, если сдвинуть каждую переменную на постоянную C . Если рассмотреть $c_{ij}, 1 \leq i, j \leq 8$, каждая сторона уравнений в системе выражается в таблице 2, и возникает такая же ситуация. Решение основной системы:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1 + C] & [R_2 + C] \\ [R_3 + C] & [M_1 + C, M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} \quad (40)$$

Фактически (40) удовлетворяет не только система c_{11} , но и каждый $c_{ii} \forall i$. Так как известно, как свободный параметр входит в решение, системы с совпадающими сторонами уравнений имеют одно и то же решение. Если (40) решает $c_{ii} \forall i$, то его можно применять для всех возможных R_i, M_i без каких-либо ограничений на значение d .

В приведенной ниже лемме 2 решены системы $c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$ в явном виде. Каждое решение можно рассматривать как замену переменных, которые изменяют $d \rightarrow \tilde{d}$. Можно проверить, что все решения из леммы 2 оставляют выражения для d и δ неизменными. Строго говоря, они меняют строки в таблице d и δ , оставляя содержание строк неизменным. Тем не менее, это может изменить значение R_i, M_i . Эта перестановка, однако, может изменить рассмотренную альтернативу, например, c_{15} действует следующим образом:

$$d = \min \begin{pmatrix} M_1 - M_2 \\ R_1 - M_3 \\ R_2 - M_3 \\ R_3 - M_3 \\ M_2 - M_3 \\ M_1 - R_1 \\ M_1 - R_2 \\ M_1 - R_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{matrix} \longrightarrow d = \min \begin{pmatrix} M_2 - M_3 + C \\ M_1 - R_1 + C \\ M_1 - R_2 + C \\ M_1 - R_3 + C \\ M_1 - M_2 + C \\ R_1 - M_3 + C \\ R_2 - M_3 + C \\ R_3 - M_3 + C \end{pmatrix} : \begin{matrix} c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} \quad (41)$$

Ниже описаны эти преобразования как симметрии, будем называть их так, как если бы они были в $sl(2)$. Несмотря на то, что выражения отличаются, они являются прямыми аналогами таковых из $sl(2)$.

1. $c_{ii}, 1 \leq i \leq 8$ просто сдвигает переменные на постоянную, но не меняет альтернативу.
2. c_{15} выполняет преобразование Редже и переставляет $(c_1, c_2, c_3, c_4) \leftrightarrow (c_5, c_6, c_7, c_8)$.
3. c_{12} переставляет (R_2, R_3) так, что $(c_1, c_3, c_5, c_7) \leftrightarrow (c_2, c_4, c_6, c_8)$.
4. c_{13} переставляет (R_1, R_3) так, что $(c_1, c_2, c_5, c_6) \leftrightarrow (c_3, c_4, c_7, c_8)$.

5. c_{14} переставляет (R_1, R_2) так, что $(c_1, c_2, c_5, c_6) \leftrightarrow (c_4, c_3, c_8, c_7)$.

Эти перестановки не изменяют само выражение, поэтому их можно рассматривать как изменение переменных или симметрию, поскольку они сохраняют значение 6-й символа неизменным. Что еще более важно, если они не изменяют значение аргументов d и δ , симметрия работает не только для решаемой альтернативы, но и для всех возможных R_i, M_i , как это будет показано далее.

Множество полученных перестановок альтернатив достаточно для решения каждой из них. Преобразуем произвольную альтернативу в c_{11} . Преобразование Редже перемещает альтернативы из второй половины в первую, применяя для обеих сторон уравнения, получаем c_{ij} , где $1 \leq i \leq j \leq 4$. Перестановочные симметрии превращают первые 4 альтернативы в основную. Также стоит заметить, что можно было бы получить одно из трех последних преобразований из двух других. Таким образом, каждый c_{ij} может быть выражен в базовом решении и композиции 3 дополнительных симметрий. Полученные выражения верны для всех R_i, M_i без дополнительных условий.

Если посмотреть на них как на группу из 8 симметрий, то имеется единичный элемент, 3 независимых, каждый из которых является инволюцией, и еще 4 элемента могут быть получены композициями. Это очень похоже на ситуацию в $sl(2)$, поэтому можно назвать новые симметрии аналогично $sl(2)$. Симметрия из c_{15} (42), очевидно, является аналогом симметрии Редже, остальные 2 действуют как перестановки. В общей сложности обнаружено, что 64 варианта – это всего лишь 8 решений, которые разбиты на 8 различных вариантов. Эти симметрии образуют группу из 8 элементов (для фиксированного C). \square

Результатом доказательства Утверждения 2 можно считать в том числе обобщение симметрии Редже, которая в случае симметрических представлений $sl(N)$ может быть записана следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_1] & [C - R_2] \\ [C - R_3] & [C - M_3, C - M_2, C - M_1] \end{array} \right\} \quad (42)$$

Лемма 2. Если $C \geq C_0$, где C_0 – наименьшее число, которое сохраняет число элементов в строках диаграмм Юнга неотрицательным, то для систем $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ и c_{15} решения

$$c_{11} : \begin{cases} R_1 = \tilde{R}_2 + C \\ R_2 = \tilde{R}_2 + C \\ R_3 = \tilde{R}_3 + C \\ M_1 = \tilde{M}_3 + C \\ M_2 = \tilde{M}_2 + C \\ M_3 = \tilde{M}_1 + C \end{cases} \quad c_{15} : \begin{cases} R_1 = C - \tilde{R}_2 \\ R_2 = C - \tilde{R}_2 \\ R_3 = C - \tilde{R}_3 \\ M_1 = C - \tilde{M}_3 \\ M_2 = C - \tilde{M}_2 \\ M_3 = C - \tilde{M}_1 \end{cases} \quad \forall C \geq C_0 \in \mathbb{Z} \quad (43)$$

$$c_{12} : \begin{cases} R_1 = \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 + C \\ R_2 = \tilde{R}_3 + C \\ R_3 = \tilde{R}_2 + C \\ M_1 = \tilde{M}_1 + C \\ M_2 = \tilde{R}_2 + \tilde{R}_3 - \tilde{M}_2 + C \\ M_3 = \tilde{M}_3 + C \end{cases} \quad c_{13} : \begin{cases} R_1 = \tilde{R}_2 + C \\ R_2 = \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 + C \\ R_3 = \tilde{R}_1 + C \\ M_1 = \tilde{M}_1 + C \\ M_2 = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_3 - \tilde{M}_2 + C \\ M_3 = \tilde{M}_3 + C \end{cases} \quad c_{14} : \begin{cases} R_1 = \tilde{R}_1 + C \\ R_2 = \tilde{R}_2 + C \\ R_3 = \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 + C \\ M_1 = \tilde{M}_1 + C \\ M_2 = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{M}_2 + C \\ M_3 = \tilde{M}_3 + C \end{cases}$$

2.6 Другой подход к нахождению симметрий

Есть еще один способ получить эти симметрии. В [12] была найдена новая связь между симметрическими 6-й символами $sl(N)$ и $sl(2)$ из гипотезы о собственных значениях. Это позволяет нам вывести $sl(N)$ как продолжение $sl(2)$ известных симметрий для произвольного N . Полученный ответ совпадает, потому что оба вывода используют гипотезу собственных значений, только

в разных формах. Выведем симметрию Редже и одну перестановку, все остальные симметрии могут быть получены таким же образом.

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} R_1 - M_3 & R_2 - M_3 \\ R_3 - M_3 & M_1 - M_2 \end{array} \right\} \quad (44)$$

Теперь можно применить симметрию Редже и повторно выразить символ как в $sl(N)$:

$$\left\{ \begin{array}{cc} R_1 - M_3 & R_2 - M_3 \\ R_3 - M_3 & M_1 - M_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} M_1 - R_1 & M_1 - R_2 \\ M_1 - R_3 & M_2 - M_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [\tilde{R}_1] & & [\tilde{R}_2] \\ [\tilde{R}_3] & & [\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3] \end{array} \right\} \quad (45)$$

Решим системы уравнений для $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3$, учитывая правила отбора, и получим симметрию для $sl(N)$ символов:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_1] & [C - R_2] \\ [C - R_3] & [C - M_3, C - M_2, C - M_1] \end{array} \right\} \quad (46)$$

Это та же самая симметрия, которая выведена выше. Теперь давайте рассмотрим перестановку.

$$\left\{ \begin{array}{cc} R_1 - M_3 & R_2 - M_3 \\ R_3 - M_3 & M_1 - M_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} R_3 - M_3 & M_1 - M_2 \\ R_1 - M_3 & R_2 - M_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [\tilde{R}_1] & & [\tilde{R}_2] \\ [\tilde{R}_3] & & [\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3] \end{array} \right\} \quad (47)$$

Решением будет та же симметрия, что и в предыдущем выводе:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1 + C] & [M_1 - M_2 + M_3 + C] \\ [R_3 + C] & [M_1 + C, R_1 + R_3 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} \quad (48)$$

3 Симметрии в случае сопряжённых к симметрическим представлений $sl(N)$

Определение 7. Симметрия тетраэдра это свойство 6-*j* символа быть инвариантным относительно преобразований $(\lambda_i, \mu, \nu - \text{произвольные диаграммы Юнга})$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \mu \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \nu \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_2 & \nu \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_4 & \mu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\mu} \\ \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_4 & \bar{\nu} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_3 & \bar{\lambda}_4 & \bar{\mu} \\ \lambda_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\nu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1 & \bar{\mu} \\ \lambda_4 & \lambda_3 & \nu \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

В этой главе исследуется, существуют ли какие-либо возможности для применения гипотезы о собственных значениях для не симметрических представлений. Для начала гипотеза применяется к специальному классу 6-*j* символов, которые содержат только симметрические и сопряженные к симметрическим представлениями. В результате получаются только тетраэдрические симметрии. Затем проделывается то же самое для чуть более общего класса 6-*j* символов и получаются некоторые новые симметрии. Однако пока возможность проверить эти симметрии, так как неизвестно выражение для этих символов. Поэтому основная цель – показать, что гипотеза может быть применена к большому кругу 6-*j* символов.

3.1 Симметрический R_4

Определение 8. Обозначим пару 6-*j* символов ниже как тип I и тип II.

$$I \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \overline{[R_2]} & X \\ [R_3] & [R_4] & Y \end{array} \right\} \quad II \text{ тип: } \left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & [R_2] & X \\ \overline{[R_3]} & [R_4] & Y \end{array} \right\} \quad (50)$$

Рассмотрим пару 6- j символов типа I, где R_1, R_2, R_3, R_4 – целые числа, обозначающие длину строки на диаграмме Юнга, X, Y – диаграммы Юнга, удовлетворяющие правилам отбора.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \overline{[R_2]} & X \\ [R_3] & [R_4] & Y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [\widetilde{R}_1] & \overline{[\widetilde{R}_2]} & \widetilde{X} \\ [\widetilde{R}_3] & [\widetilde{R}_4] & \widetilde{Y} \end{array} \right\} \quad R_4 = R_1 + R_3 - R_2 \quad (51)$$

Правила отбора для X, Y и Z получены для более общего случая в следующем подразделе, где $R_4 = [K_1 + R_2, R_2^{N-2}, K_2]$. Для этого случая следует принять $K_1 = R_4, K_2 = R_2$ в таблице 3. Система может быть решена вручную из-за небольшого количества случаев. Решения:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & \overline{[R_2]} \\ [R_3] & [R_4] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_2] & \overline{[R_1]} \\ [R_4] & [R_3] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_3] & \overline{[R_4]} \\ [R_1] & [R_2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_4] & \overline{[R_3]} \\ [R_2] & [R_1] \end{array} \right\} \quad (52)$$

Можно легко проверить, что эти симметрии соответствуют тетраэдрической симметрии. Ситуация такая же для 6- j символов типа II.

3.2 Комбинированный R_4

В этом пункте рассматривается другой класс 6- j символов, который отличается видом R_4 . Главная цель этого вывода – показать, что гипотеза о собственных значениях может дать нетривиальные симметрии в более сложных ситуациях, чем симметрические представления. По этой причине был обобщён предыдущий случай, а именно $R_4 = [\alpha, \beta^{N-1}]$ на $R_4 = [\alpha, \beta^{N-2}, \gamma]$, где α, β, γ – некоторые неотрицательные целые числа.

Рассмотрим пару 6- j символов типа I, где R_1, R_2, R_3, K_1, K_2 – целые числа, обозначающие длину строки на диаграмме Юнга.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \overline{[R_2]} & \\ [R_3] & [K_1 + R_2, R_2^{N-2}, K_2] & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [\widetilde{R}_1] & \overline{[\widetilde{R}_3]} & \\ [\widetilde{R}_3] & [\widetilde{K}_1 + \widetilde{R}_2, \widetilde{R}_2^{N-2}, \widetilde{K}_2] & \end{array} \right\} \quad (53)$$

Лемма 3. Значения $d, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$ для системы выше, полученные из правил отбора, соответствуют Таблице 3.

альтернатива	d	δ_{12}	δ_{23}	δ_{13}
c_1	R_1	$R_1 + R_2$	$2K_1 + R_2 - R_3$	$R_1 + R_3$
c_2	R_3	$2K_1 - R_1 + R_2$	$R_2 + R_3$	$R_1 + R_3$
c_3	K_1	$2K_1 - R_1 + R_2$	$2K_1 + R_2 - R_3$	$R_1 + R_3$
c_4	K_2	$R_1 + R_2$	$R_2 + R_3$	$R_1 + R_3$

Таблица 3: $sl(N)$ альтернативы обобщенного типа I U -матрицы

Доказательство. Вывод этой леммы такой же, как в предыдущем разделе, поэтому он опущен. \square

Система может быть решена вручную из-за небольшого количества случаев. Решения:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \overline{[R_2]} & \\ [R_3] & [K_1 + R_2, R_2^{N-2}, K_2] & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [R_3] & \overline{[K_1 - K_2 + R_2]} & \\ [R_1] & [K_2 + R_2, R_2^{N-2}, K_1] & \end{array} \right\} = \quad (54)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} [K_1] & \overline{[K_1 - R_1 + R_2]} & \\ [K_2] & [R_1 + R_2, R_2^{N-2}, R_3] & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [K_2] & \overline{[K_1 - R_3 + R_2]} & \\ [K_1] & [R_3 + R_2, R_2^{N-2}, R_1] & \end{array} \right\} \quad (55)$$

Однако имеется ограничение $R_1 + R_3 = K_1 + K_2$, выразим K_2 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \overline{[R_2]} & \\ [R_3] & [K_1 + R_2, R_2^{N-2}, R_1 + R_3 - K_1] & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [R_3] & \overline{[2K_1 - R_1 - R_3 + R_2]} & \\ [R_1] & [K_2 + R_2, R_2^{N-2}, K_1] & \end{array} \right\} = \quad (56)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} [K_1] & \overline{[K_1 - R_1 + R_2]} & \\ [R_1 + R_3 - K_1] & [R_1 + R_2, R_2^{N-2}, R_3] & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [R_1 + R_3 - K_1] & \overline{[K_1 - R_3 + R_2]} & \\ [K_1] & [R_3 + R_2, R_2^{N-2}, R_1] & \end{array} \right\} \quad (57)$$

Как видно, есть некоторые новые отношения для 6- j символов типа I. Аналогичным образом можно получить соотношения для типа II.

4 Симметрии гипергеометрического решения

В этом разделе выводятся симметрии для известного решения. Из [8] известно выражение для 6- j символа в $sl(N)$ без кратности. Как показано ниже, можно получить более подходящее для наших целей выражение через q -гипергеометрическую функцию. Для целей, поставленных в этой работе, существенным свойством гипергеометрических функций является перестановочная инвариантность их аргументов. Как будет показано ниже, некоторые из этих симметрий могут быть интерпретированы с точки зрения 6- j символов. Было найдено 24 симметрии для типа I и 4 симметрии для типа II. Для типа II все найденные равенства являются симметриями тетраэдра. Первый тип кроме симметрий тетраэдра имеет ещё два равенства, которые при $N = 2$ становятся симметрией Редже, что позволяет обобщить её на рассмотренный случай. Кроме того были рассмотрены дополнительные симметрии, требующие выполнения условий на аргументы 6- j символа, для обоих типов найдены нетривиальные выражения и предоставлены примеры. Также стоит упомянуть, что перестановки аргументов – это не все возможные симметрии q -гипергеометрических функций. Дополнительные соотношения могут быть получены с помощью преобразования Сирза [14], но эти вычисления опущены, потому что для них не было найдено никаких симметрий, кроме тетраэдрических.

4.1 Выражение 6- j символа через функцию ${}_4\Phi_3$

Выражение из упомянутой статьи определяет 6- j символы с симметрическим и сопряженным к симметрическому представлениям, что можно рассматривать как естественное обобщение случая $sl(2)$.

Определение 9. Чтобы сократить обозначение, обозначим 6- j символ типа I как

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [\overline{R_2}] \\ [R_3] & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} i, \frac{R_2 - R_1 + i^{N-2}}{2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} \quad (58)$$

где $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, и тип II:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [\overline{R_3}] & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} \frac{R_1 + R_2 + i}{2}, \frac{R_1 + R_2 - i}{2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} \quad (59)$$

где $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$.

Утверждение 3. 6- j символ с симметрическими и сопряженным к симметрическому представлениям принадлежит к одному из двух видов: тип I или тип II.

Далее используются квантовые числа, которые есть ничто иное, как $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$. Квантовый символ Похгаммера определяется как $(a, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k)$. Квантовое обобщение факториалов для неотрицательных целых чисел можно записать как $[n]! = \frac{(q, q)_n}{(1 - q)^n}$ – квантовый факториал. Используя эти обозначения, можно написать выражение для 6- j символа в $sl(N)$ без кратности из [8]:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \theta(R_1, R_2, i) \theta(R_3, R_4, i) \theta(R_1, R_4, j) \theta(R_2, R_3, j) [N-1]! [N-2]! \sum_{z=z_{min}}^{z_{max}} \quad (60)$$

$$\frac{(-1)^z [z + N - 1]! \cdot A_m}{[z - \frac{R_1 + R_2 + i}{2}]! [z - \frac{R_3 + R_4 + i}{2}]! [z - \frac{R_1 + R_4 + j}{2}]! [z - \frac{R_2 + R_3 + j}{2}]! [\frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{2} - z]! [\frac{i + j + R_1 + R_3}{2} - z]! [\frac{i + j + R_2 + R_4}{2} - z]!}$$

$$\theta(a, b, c) = \sqrt{\frac{[\frac{a+b-c}{2}]! [\frac{a-b+c}{2}]! [\frac{-a+b+c}{2}]!}{[\frac{a+b+c}{2} + N - 1]!}} \quad A_m = \begin{cases} \frac{[k + z_{min} - z]!}{[k + z_{min} + N - 2 - z]!} & \text{для типа I} \\ \frac{[k - z_{max} + z]!}{[k - z_{max} + N - 2 + z]!} & \text{для типа II} \end{cases} \quad (61)$$

Здесь $k = \frac{1}{2} \min(i - R_1 + R_2, j - R_3 + R_2)$ и z_{min}, z_{max} определяются как наименьшее и наибольшее целые числа, которые дают нетривиальное значение в сумме. Решения для двух типов отличаются только выражением A_m . Также следующие условия были наложены в оригинальной статье (как будет показано ниже, они не обязательны):

$$\begin{cases} R_2 \leq R_1 \leq R_3 & \text{для типа I} \\ R_1 \leq R_2 & \text{для типа II} \end{cases} \quad (62)$$

Чтобы повторно выразить (60) как q -гипергеометрическую функцию, изменим переменную суммирования $z = \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - m$. Обозначим указанную выше сумму как $I = \sum_m I_m$, тогда ее можно легко переписать как:

$$I = \sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} \frac{(-1)^{\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{2}-m} \left[\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{2} - m + N - 1 \right]! \cdot A'_m}{[m]! \left[\frac{R_3+R_4-i}{2} - m \right]! \left[\frac{R_1+R_2-i}{2} - m \right]! \left[\frac{R_2+R_3-j}{2} - m \right]! \left[\frac{R_1+R_4-j}{2} - m \right]! \left[\frac{i+j-R_2-R_4}{2} + m \right]! \left[\frac{i+j-R_1-R_3}{2} + m \right]!} \quad (63)$$

$$k = \frac{1}{2} \min \begin{pmatrix} i - R_1 + R_2 \\ j - R_3 + R_2 \end{pmatrix} \quad A'_m = \begin{cases} \frac{[k - m_{max} + m]!}{[k - m_{max} + N - 2 + m]!} & \text{для типа I} \\ \frac{[k + m_{min} - m]!}{[k + m_{min} + N - 2 - m]!} & \text{для типа II} \end{cases} \quad (64)$$

Явные отношения для m_{min} и m_{max} можно легко найти по факториалам знаменателя, поскольку слагаемое равно нулю только в том случае, когда в знаменателе есть отрицательный факториал:

$$m_{max} = \frac{1}{2} \min \begin{pmatrix} R_1 + R_2 - i \\ R_3 + R_4 - i \\ R_1 + R_4 - j \\ R_2 + R_3 - j \end{pmatrix} \quad m_{min} = \frac{1}{2} \max \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 + R_3 - i - j \\ R_2 + R_4 - i - j \end{pmatrix} \quad (65)$$

Как это может быть получено из правил отбора, k, m_{max}, m_{min} всегда являются целыми числами, когда b_j символ не нулевой. Более того, k имеет четкое значение в терминах диаграмм Юнга – это минимальная длина среди вторых строк R_{12} и R_{23} .

Определение 10. q -гипергеометрическая функция определяется как:

$${}_{p+1}\phi_p \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix} \middle| q, z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, q)_n \dots (a_{p+1}, q)_n}{(b_1, q)_n \dots (b_p, q)_n (q, q)_n} z^n \quad (66)$$

Однако удобнее использовать следующую функцию:

$${}_5\Phi_4 \left[\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix} \middle| q, z \right] \equiv {}_5\phi_4 \left[\begin{matrix} \frac{q^{a_1}}{2}, \dots, \frac{q^{a_{p+1}}}{2} \\ \frac{q^{b_1}}{2}, \dots, \frac{q^{b_p}}{2} \end{matrix} \middle| q, z \right] \quad (67)$$

После повторного выражения всех факториалов через квантовые символы Похгаммера можно переписать сумму в виде q -гипергеометрической функции:

$$I = Y \cdot {}_5\Phi_4 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix}; q^2, q^2 \right) \quad (68)$$

$$Y = \frac{\left[\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{2} + N - 1 \right]!}{\left[\frac{R_3+R_4-i}{2} \right]! \left[\frac{R_1+R_2-i}{2} \right]! \left[\frac{R_2+R_3-j}{2} \right]! \left[\frac{R_1+R_4-j}{2} \right]! \left[\frac{i+j-R_2-R_4}{2} \right]! \left[\frac{i+j-R_1-R_3}{2} + N - 2 \right]!}$$

где выполнено $\sum_i a_i + 2 = \sum_i b_i$. Для типа I:

$$a_i = \begin{pmatrix} -R_3 - R_4 + i \\ -R_1 - R_2 + i \\ -R_2 - R_3 + j \\ -R_1 - R_4 + j \\ 2(k - m_{max} + 1) \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} -R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - 2(N - 1) \\ 2(k - m_{max} + N - 1) \\ i + j - R_1 - R_3 + 2 \\ i + j - R_1 - R_3 + 2 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Для типа II:

$$a_i = \begin{pmatrix} 2(k + m_{min} - N + 2) \\ -R_2 - R_3 + j \\ -R_1 - R_4 + j \\ -R_3 - R_4 + i \\ -R_1 - R_2 + i \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} -R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - 2(N - 1) \\ i + j - R_1 - R_3 + 2 \\ i + j - R_2 - R_4 + 2 \\ 2(k + m_{min}) \end{pmatrix} \quad (70)$$

Таким образом, получено q-гипергеометрическое выражение для 6-j символа, но оно ещё не приведено к удобному виду. k , m_{min} и m_{max} можно упростить, как написано в следующих трёх леммах.

Лемма 4. $k - m_{max} = \frac{i+j-R_1-R_3}{2}$ для всех 6-j символов I типа, если выполнены условия:

$$\begin{cases} R_2 \leq R_1 \leq R_3 \\ R_1 + R_3 = R_2 + R_4 \end{cases} \quad (71)$$

Доказательство. Рассмотрим 2 случая, когда $k - m_{max} = \frac{i+j-R_1-R_3}{2}$, они могут быть записаны в виде двух систем:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 - i \leq R_3 + R_4 - i \\ R_1 + R_2 - i \leq R_2 + R_3 - j \\ R_1 + R_2 - i \leq R_1 + R_4 - j \\ j - R_3 \leq i - R_1 \end{cases} \quad \begin{cases} R_2 + R_3 - j \leq R_3 + R_4 - i \\ R_2 + R_3 - j \leq R_1 + R_2 - i \\ R_2 + R_3 - j \leq R_1 + R_4 - j \\ i - R_1 \leq j - R_3 \end{cases} \quad (72)$$

Объединение этих двух систем с условиями (71) образует совокупность:

$$\begin{cases} j - i \leq R_4 - R_2 \\ j - i \geq R_4 - R_2 \end{cases} \quad (73)$$

Следовательно, каждый 6-j символ типа I описывается как $k - m_{max} = \frac{i+j-R_1-R_3}{2}$. \square

Лемма 5. $k + m_{min} = \frac{i-R_1-R_2}{2}$ для всех 6-j символов II типа, если выполнены условия:

$$\begin{cases} R_1 \leq R_2 \leq R_3 \\ R_1 + R_2 = R_3 + R_4 \end{cases} \quad (74)$$

Доказательство. Доказательство для типа II очень похоже на тип I с единственным отличием в дополнительном условии неравенства, которое вводится специально для доказательства этого утверждения. \square

Лемма 6. Условия выражения 6-j символа в (62) необязательны.

Доказательство. Можно получить любой нетривиальный 6-j символ типов I и II, применяя тетраэдрическую симметрию. И можно проверить, что выражение для каждого 6-j символа само по себе инвариантно относительно этих преобразований. Следовательно, выражение можно использовать, даже если условия не выполняются. \square

Следствие 3. Легко видеть, что оба типа могут быть переписаны как функции ${}_4\Phi_3$. Ниже они будут писаться с аргументами, которые определены следующим образом.

Для типа I:

$$a_i = \begin{pmatrix} -R_3 - R_4 + i \\ -R_1 - R_2 + i \\ -R_2 - R_3 + j \\ -R_1 - R_4 + j \end{pmatrix} \quad b_i = \begin{pmatrix} -R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - 2(N - 1) \\ i + j - R_2 - R_4 + 2(N - 1) \\ i + j - R_1 - R_3 + 2 \end{pmatrix} \quad (75)$$

Для типа II:

$$c_i = \begin{pmatrix} -R_1 - R_2 + i - 2(N-2) \\ -R_2 - R_3 + j \\ -R_1 - R_4 + j \\ -R_3 - R_4 + i \end{pmatrix} \quad d_i = \begin{pmatrix} -R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - 2(N-1) \\ i + j - R_1 - R_3 + 2 \\ i + j - R_2 - R_4 + 2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Запишем полностью выражение для рассмотренного 6-j символа:

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & \overline{R_2} & R_{12} \\ R_3 & R_4 & R_{23} \end{matrix} \right\} = K \cdot {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; q^2, q^2 \right) \quad (77)$$

$$\left\{ \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_{12} \\ \overline{R_3} & R_4 & R_{23} \end{matrix} \right\} = K \cdot {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} c_1, c_2, c_3, c_4 \\ d_1, d_2, d_3 \end{matrix}; q^2, q^2 \right) \quad (78)$$

$$K = \frac{\theta(R_1, R_2, i) \theta(R_3, R_4, i) \theta(R_1, R_4, j) \theta(R_2, R_3, j) [N-1]! [N-2]! \left[\frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{2} + N - 1 \right]!}{\left[\frac{R_3+R_4-i}{2} \right]! \left[\frac{R_1+R_2-i}{2} \right]! \left[\frac{R_2+R_3-j}{2} \right]! \left[\frac{R_1+R_4-j}{2} \right]! \left[\frac{i+j-R_2-R_4}{2} \right]! \left[\frac{i+j-R_1-R_3}{2} + N - 2 \right]!}$$

Это наиболее удобная для нас форма 6-j символа. В следующем пункте будут проанализированы симметрии этого выражения и получены явно.

4.2 Симметрии типа I

Из свойств ${}_4\Phi_3$ следует, что 144 симметрии могут быть получены только путем перестановок аргументов. Используя ω как перестановку аргумента, преобразование может быть записано как:

$$\omega \left({}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; q^2, q^2 \right) \right) = {}_4\Phi_3 \left(\begin{matrix} \omega(a_1), \omega(a_2), \omega(a_3), \omega(a_4) \\ \omega(b_1), \omega(b_2), \omega(b_3) \end{matrix}; q^2, q^2 \right) \quad (79)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2 = b_1 + b_2 + b_3$$

Чтобы найти симметрии, требуется решить систему уравнений, которая приравнивает аргументы функций. Максимальный ранг системы – 6, так как q-гипергеометрическая функция имеет 7 аргументов с одним условием, определяющим одну переменную. Однако число неизвестных переменных (R_1, R_2, R_3, i, j) составляет всего 5, поэтому не все гипергеометрические симметрии сводятся к 6-j символам. Сначала рассмотрим общие решения. Затем запишем некоторые соотношения, которые не могут быть применены в общем случае, потому что для них фиксировано не только значение R_4 , но и ещё одно сверх этого, например, R_4 и j .

Можно решить систему (79) с правилами отбора и получить 24 решения. Оказывается, что не только ${}_4\Phi_3$, но и 6-j символ инвариантен относительно преобразований из-за инвариантности множителя перед q-гипергеометрической функцией. Так как полученные симметрии очень похожи на известные, то могут рассматриваться как естественное обобщение симметрий из $sl(2)$, но с точки зрения диаграмм Юнга они имеют более сложный вид. Также стоит упомянуть, что одно из преобразований Редже сводится к тетраэдрической симметрии из-за условия из правил отбора.

$$\rho = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{2} \quad \rho' = \frac{R_2 + i + R_4 + j}{2} = \rho'' = \frac{R_1 + i + R_3 + j}{2}$$

Все 6-j символы ниже равны. Столбцы таблицы связаны симметрией тетраэдра, строки – преобразованием Редже.

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_1 & R_4 & j \\ R_3 & R_2 & i \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_3 & R_4 & i \\ R_1 & R_2 & j \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_3 & R_2 & j \\ R_1 & R_4 & i \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} R_2 & R_1 & i \\ R_4 & R_3 & j \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_2 & R_3 & j \\ R_4 & R_1 & i \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_4 & R_3 & i \\ R_2 & R_1 & j \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_4 & R_1 & j \\ R_2 & R_3 & i \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} R_1 & \rho' - i & \rho' - R_2 \\ R_3 & \rho' - j & \rho' - R_4 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_1 & \rho' - j & \rho' - R_4 \\ R_3 & \rho' - i & \rho' - R_2 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_3 & \rho' - j & \rho' - R_2 \\ R_1 & \rho' - i & \rho' - R_4 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} R_3 & \rho' - i & \rho' - R_4 \\ R_1 & \rho' - j & \rho' - R_2 \end{matrix} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\begin{bmatrix} \rho' - i & R_2 & \rho' - R_1 \\ \rho' - j & R_4 & \rho' - R_3 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - i & R_4 & \rho' - R_3 \\ \rho' - j & R_2 & \rho' - R_1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - j & R_4 & \rho' - R_1 \\ \rho' - i & R_2 & \rho' - R_3 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - j & R_2 & \rho' - R_3 \\ \rho' - i & R_4 & \rho' - R_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \rho' - i & R_1 & \rho' - R_2 \\ \rho' - j & R_3 & \rho' - R_4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - i & R_3 & \rho' - R_4 \\ \rho' - j & R_1 & \rho' - R_2 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - j & R_3 & \rho' - R_2 \\ \rho' - i & R_1 & \rho' - R_4 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} \rho' - j & R_1 & \rho' - R_4 \\ \rho' - i & R_3 & \rho' - R_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} R_2 & \rho' - i & \rho' - R_1 \\ R_4 & \rho' - j & \rho' - R_3 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} R_2 & \rho' - j & \rho' - R_3 \\ R_4 & \rho' - i & \rho' - R_1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} R_4 & \rho' - j & \rho' - R_1 \\ R_2 & \rho' - i & \rho' - R_3 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} R_4 & \rho' - i & \rho' - R_3 \\ R_2 & \rho' - j & \rho' - R_1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Первые две строки, написанные в терминах диаграмм Юнга, можно рассматривать как тетраэдрические симметрии. Поэтому запишем только новые отношения, которые возникают из перечисленных симметрий:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & \rho' - i & \rho' - R_2 \\ R_3 & \rho' - j & \rho' - R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho' - i & R_2 & \rho' - R_1 \\ \rho' - j & R_4 & \rho' - R_3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Или в терминах диаграмм Юнга:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [R_4] \end{array} \begin{array}{c} i, \frac{R_2 - R_1 + i}{2} N^{-2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j}{2} N^{-2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & \left[\frac{R_2 + R_4 - i + j}{2} \right] \\ [R_3] & \left[\frac{R_2 + R_4 + i - j}{2} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[\frac{-R_2 + R_4 + i + j}{2}, \frac{R_3 - R_2 + j}{2} N^{-2} \right] \\ \left[\frac{R_2 - R_4 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_3 + j}{2} N^{-2} \right] \end{array} \right\} = \quad (81) \\
= \left\{ \begin{array}{cc} \left[\frac{R_1 + R_3 - i + j}{2} \right] & [R_2] \\ \left[\frac{R_1 + R_3 + i - j}{2} \right] & [R_4] \end{array} \begin{array}{c} \left[\frac{-R_1 + R_3 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_1 + i}{2} N^{-2} \right] \\ \left[\frac{R_1 - R_3 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_3 + j}{2} N^{-2} \right] \end{array} \right\}$$

Рассмотрим пару примеров этих симметрий:

- Симметрия Редже типа I (1 столбец неизменен, $N \geq 2$):

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{cc} [8] & [4] \\ [10] & [14] \end{array} \begin{array}{c} [12, 4^{N-2}] \\ [6] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [8] & [6] \\ [10] & [12] \end{array} \begin{array}{c} [14, 6^{N-2}] \\ [4] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [10] & [8] \\ [12] & [14] \end{array} \begin{array}{c} [18, 8^{N-2}] \\ [6, 5^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [10] & [5] \\ [12] & [17] \end{array} \begin{array}{c} [15, 5^{N-2}] \\ [9, 8^{N-2}] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [12] & [6] \\ [14] & [20] \end{array} \begin{array}{c} [16, 5^{N-2}] \\ [8] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [12] & [9] \\ [14] & [17] \end{array} \begin{array}{c} [19, 8^{N-2}] \\ [5, 5^{N-2}] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [12] & [8] \\ [14] & [18] \end{array} \begin{array}{c} [10, 3^{N-2}] \\ [6] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [12] & [11] \\ [14] & [15] \end{array} \begin{array}{c} [13, 6^{N-2}] \\ [3] \end{array} \right\}
\end{array}$$

- Симметрия Редже типа I (2 столбец неизменен, $N \geq 2$):

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{cc} [4] & [6] \\ [3] & [1] \end{array} \begin{array}{c} [2, 2^{N-2}] \\ [5, 4^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [2] & [6] \\ [5] & [1] \end{array} \begin{array}{c} [4, 4^{N-2}] \\ [3, 2^{N-2}] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [6] & [5] \\ [3] & [4] \end{array} \begin{array}{c} [7, 3^{N-2}] \\ [2, 2^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [7] & [5] \\ [2] & [4] \end{array} \begin{array}{c} [6, 2^{N-2}] \\ [3, 3^{N-2}] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [5] & [6] \\ [4] & [3] \end{array} \begin{array}{c} [7, 4^{N-2}] \\ [8, 5^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [4] & [6] \\ [5] & [3] \end{array} \begin{array}{c} [8, 5^{N-2}] \\ [7, 4^{N-2}] \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{cc} [4] & [6] \\ [5] & [3] \end{array} \begin{array}{c} [2, 2^{N-2}] \\ [7, 4^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} [2] & [6] \\ [7] & [3] \end{array} \begin{array}{c} [4, 4^{N-2}] \\ [5, 2^{N-2}] \end{array} \right\}
\end{array}$$

4.3 Симметрии типа II

Можно аналогично решить систему (79) для типа II. Однако в данном случае имеется лишь 4 общих выражения:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & R_1 & j \\ R_4 & R_3 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 & R_4 & i \\ R_1 & R_2 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 & R_3 & j \\ R_2 & R_1 & i \end{bmatrix} \quad (82)$$

Эти равенства представляют из себя исключительно симметрии тетраэдра, поэтому они не очень интересны.

4.4 Дополнительные симметрии

Также можно рассмотреть дополнительные симметрии q -гипергеометрической функции. Эти симметрии имеют меньше параметров, потому что условие $\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_3 = \widetilde{R}_2 + \widetilde{R}_4$ должно быть выполнено для 6- j символа справа от знака равенства независимо от такого же условия на 6- j символ слева. Поэтому требуется зафиксировать ещё одну переменную, например, i . В предыдущем разделе если условие выполнялось для одного 6- j символа, другой также удовлетворял этому условию. Но ниже рассмотрены некоторые случаи, когда $\widetilde{R}_1 + \widetilde{R}_3 = \widetilde{R}_2 + \widetilde{R}_4$ верно только для конкретного $i = i_{fixed}$. Из-за этого существует не 5 свободных параметров, а только 4.

Определение 11. Пусть имеется симметрия 6- j символов, для которой из существования левой части (выполнения правил отбора $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$ для I типа и $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ для II типа) не следует существование правой части. В таком случае будем называть её слабой симметрией и обозначать это равенство как \cong .

Рассмотрим решения, соответствующие слабым симметриям I типа:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} &\cong \begin{bmatrix} R_1 & i & R_2 \\ R_3 & j & R_4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} i-2+N & R_2 & R_1+2-N \\ j-2+N & R_4 & R_2+2-N \end{bmatrix} \cong \\ &\cong C \begin{bmatrix} i-2+N & R_1+2-N & R_2 \\ j-2+N & R_3+2-N & R_4 \end{bmatrix} \cong C \begin{bmatrix} R_2-2+N & i & R_1+2-N \\ R_4-2+N & j & R_3+2-N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} &\cong \begin{bmatrix} i & R_2 & R_1 \\ j & R_4 & R_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & i-2+N & R_2+2-N \\ R_3 & j-2+N & R_4+2-N \end{bmatrix} \cong \\ &\cong C \begin{bmatrix} R_2+2-N & i-2+N & R_1 \\ R_4+2-N & j-2+N & R_3 \end{bmatrix} \cong C \begin{bmatrix} i & R_1-2+N & R_2+2-N \\ j & R_3-2+N & R_4+2-N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

C – это функция, представляющая из себя множитель перед q -гипергеометрической функцией левого 6- j символа, делённый на множитель правого (представления без тильды – это аргументы 6- j символа до применения симметрии, с тильдой – после применения). В некоторых случаях числитель и знаменатель сокращаются, поэтому функция пишется только в тех симметриях, где её значение нетривиально.

$$C = \frac{\theta(R_1, R_2, i)\theta(R_3, R_4, i)\theta(R_1, R_4, j)\theta(R_2, R_3, j)}{\theta(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \widetilde{i})\theta(\widetilde{R}_3, \widetilde{R}_4, \widetilde{i})\theta(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_4, \widetilde{j})\theta(\widetilde{R}_2, \widetilde{R}_3, \widetilde{j})} \quad (85)$$

Эти симметрии интересны, потому что некоторые из них не являются прямым обобщением какого-либо выражения для $sl(2)$. Можно путём комбинирования этих симметрий построить неожиданные равенства. Пример слабой симметрии с 4 параметрами, которые дают нам интересное соотношение:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} i + \alpha(N-2) & R_2 & R_1 - \alpha(N-2) \\ j + \alpha(N-2) & R_4 & R_3 - \alpha(N-2) \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{Z} \quad (86)$$

где $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, $R_2 + R_4 = i + j + 2\alpha(N-2)$.

Рассмотрим пару примеров этих симметрий:

- Первая симметрия из (83):

$$\left\{ \begin{bmatrix} [6] & \overline{[4]} & [8, 3^{N-2}] \\ [3] & [5] & [1, 1^{N-2}] \end{bmatrix} \right\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} [6] & \overline{[8]} & [4, 3^{N-2}] \\ [3] & [1] & [5, 5^{N-2}] \end{bmatrix} \right\}$$

- Вторая симметрия из (83):

$$\left\{ \begin{bmatrix} [9] & \overline{[10]} & [1, 1^{N-2}] \\ [7] & [6] & [11, 7^{N-2}] \end{bmatrix} \right\} \cong \left\{ \begin{bmatrix} [3] & \overline{[10]} & [7, 7^{N-2}] \\ [13] & [6] & [5, 1^{N-2}] \end{bmatrix} \right\}$$

- Четвёртая симметрия из (83):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [9] & \overline{[8]} & [5, 2^{N-2}] \\ [6] & [7] & [14, 8^{N-2}] \end{array} \right\} \cong C \left\{ \begin{array}{ccc} [10] & \overline{[5]} & [7, 1^{N-2}] \\ [9] & [14] & [4] \end{array} \right\}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть тип II с 4 свободными параметрами. Хотя аналог симметрии Редже не выполняет правил отбора и потому выполняется не для всех 6-j символов, он всё равно имеет место для II типа:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & \rho' - i & \rho' - R_2 \\ R_3 & \rho' - j & \rho' - R_4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \rho'' - i & R_2 & \rho'' - R_1 \\ \rho'' - j & R_4 & \rho'' - R_3 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Или в терминах диаграмм Юнга:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & [R_2] & \left[\frac{R_1+R_2+i}{2}, \frac{R_1+R_2-i}{2} \right] \\ \overline{[R_3]} & [R_4] & \left[j, \frac{R_2-R_3+j}{2} \right]^{N-2} \end{array} \right\} &\cong \left\{ \begin{array}{ccc} [R_1] & \left[\frac{R_2+R_4-i+j}{2} \right] & \left[\frac{R_1+R_4+j}{2}, \frac{R_1+R_2-i}{2} \right] \\ \overline{[R_3]} & \left[\frac{R_2+R_4+i-j}{2} \right] & \left[\frac{R_2-R_4+i+j}{2}, \frac{R_2-R_3+j}{2} \right]^{N-2} \end{array} \right\} \cong \\ &\cong \left\{ \begin{array}{ccc} \left[\frac{R_1+R_3-i+j}{2} \right] & [R_2] & \left[\frac{R_2+R_3+j}{2}, \frac{R_1+R_2-i}{2} \right] \\ \left[\frac{R_1+R_3+i-j}{2} \right] & [R_4] & \left[\frac{R_1-R_3+i+j}{2}, \frac{R_2-R_3+j}{2} \right]^{N-2} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

Однако, как это может быть показано для обеих симметрий, совокупность правил отбора полностью снимает возможность использовать эту симметрию, т.к. единственное равенство, которое она может предсказать – тривиальное тождество.

Также имеет место симметрия:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & R_4 - (N-2) & j + (N-2) \\ R_3 & R_2 + (N-2) & i - (N-2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & R_4 + (N-2) & j + (N-2) \\ R_3 & R_2 - (N-2) & i - (N-2) \end{bmatrix} \quad (89)$$

Но в каждом из этих равенств при анализе правил отбора выясняется, что им могут удовлетворять такие R_1, R_2, R_3, R_4 , что после применения симметрии они неизменны. Иначе говоря, $R_4 - R_2 = N - 2$ для первой симметрии и $R_2 - R_4 = N - 2$ для второй. В таком случае симметрии могут быть переписаны в виде:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & j + R_4 - R_2 \\ R_3 & R_4 & i + R_4 - R_2 \end{bmatrix} \quad (90)$$

где $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ и $|R_4 - R_2| = N - 2$. Как пример этой симметрии приведём следующую пару 6-j символов:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [6] & \overline{[5]} & [3, 1^{N-2}] \\ [4] & [7] & [9, 5^{N-2}] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} [6] & \overline{[5]} & [11, 5^{N-2}] \\ [4] & [7] & [1, 1^{N-2}] \end{array} \right\}$$

5 Результаты

5.1 Гипотеза о собственных значениях

- Случай симметрических представлений $sl(N)$, $N > 3$, $\forall C \geq C_0$.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ [R_3] & [M_1, M_2, M_3] \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{cc} [R_1 + C] & [R_2 + C] \\ [R_3 + C] & [M_1 + C, M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_1] & [C - R_2] \\ [C - R_3] & [C - M_3, C - M_2, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [R_2 + C] & [R_1 + C] \\ [M_1 - M_2 + M_3 + C] & [M_1 + C, R_1 + R_2 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_2] & [C - R_1] \\ [C - M_1 + M_2 - M_3] & [C - M_3, C - M_2 - R_1 - R_2, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [R_3 + C] & [M_1 - M_2 + M_3 + C] \\ [R_1 + C] & [M_1 + C, R_1 + R_3 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - R_3] & [C - M_1 + M_2 - M_3] \\ [C - R_1] & [C - M_3, C - M_2 - R_1 - R_3, C - M_1] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [M_1 - M_2 + M_3 + C] & [R_3 + C] \\ [R_2 + C] & [M_1 + C, R_2 + R_3 - M_2 + C, M_3 + C] \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} [C - M_1 + M_2 - M_3] & [C - R_3] \\ [C - R_2] & [C - M_3, C - M_2 - R_2 - R_3, C - M_1] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

где $R_1 + R_2 + R_3 = M_1 + M_2 + M_3$. Его также можно переписать как решение $sl(3)$ тривиальным способом.

- Для $sl(N)$ 6- j символов типа I гипотеза о собственных значениях предсказывает только тетраэдрические симметрии.

5.2 Гипергеометрические симметрии

$$C = \frac{\theta(R_1, R_2, i, N)\theta(R_3, R_4, i, N)\theta(R_1, R_4, j, N)\theta(R_2, R_3, j, N)}{\theta(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \widetilde{i}, N)\theta(\widetilde{R}_3, \widetilde{R}_4, \widetilde{i}, N)\theta(\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_4, \widetilde{j}, N)\theta(\widetilde{R}_2, \widetilde{R}_3, \widetilde{j}, N)} \quad (91)$$

6- j символ типа I записывается как:

$$\left[\begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & \overline{[R_2]} \\ [R_3] & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} i, \frac{R_2 - R_1 + i^{N-2}}{2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} \quad (92)$$

где предполагается $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$. Второй тип:

$$\left[\begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & [R_2] \\ \overline{[R_3]} & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} \frac{R_1 + R_2 + i}{2}, \frac{R_1 + R_2 - i}{2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} \quad (93)$$

где $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$.

- Преобразования Редже I типа ($\rho' = \frac{R_1 + R_3 + i + j}{2} = \frac{R_2 + R_4 + i + j}{2}$):

$$\left[\begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} R_1 & \rho' - i & \rho' - R_2 \\ R_3 & \rho' - j & \rho' - R_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \rho' - i & R_2 & \rho' - R_1 \\ \rho' - j & R_4 & \rho' - R_3 \end{array} \right] \quad (94)$$

Или в обозначениях диаграмм Юнга:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & \overline{[R_2]} \\ [R_3] & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} i, \frac{R_2 - R_1 + i^{N-2}}{2} \\ j, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} &= \left\{ \begin{array}{cc} [R_1] & \overline{\left[\frac{R_2 + R_4 - i + j}{2} \right]} \\ [R_3] & \left[\frac{R_2 + R_4 + i - j}{2} \right] \end{array} \left[\begin{array}{c} \frac{-R_2 + R_4 + i + j}{2}, \frac{R_3 - R_2 + j^{N-2}}{2} \\ \frac{R_2 - R_4 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \left[\frac{R_1 + R_3 - i + j}{2} \right] & \overline{[R_2]} \\ \left[\frac{R_1 + R_3 + i - j}{2} \right] & [R_4] \end{array} \left[\begin{array}{c} \frac{-R_1 + R_3 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_1 + i^{N-2}}{2} \\ \frac{R_1 - R_3 + i + j}{2}, \frac{R_2 - R_3 + j^{N-2}}{2} \end{array} \right] \right\} \quad (95)
\end{aligned}$$

- Слабые симметрии I типа:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & i & R_2 \\ R_3 & j & R_4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} i-2+N & R_2 & R_1+2-N \\ j-2+N & R_4 & R_2+2-N \end{bmatrix} \cong \\ & \cong C \begin{bmatrix} i-2+N & R_1+2-N & R_2 \\ j-2+N & R_3+2-N & R_4 \end{bmatrix} \cong C \begin{bmatrix} R_2-2+N & i & R_1+2-N \\ R_4-2+N & j & R_3+2-N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} i & R_2 & R_1 \\ j & R_4 & R_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & i-2+N & R_2+2-N \\ R_3 & j-2+N & R_4+2-N \end{bmatrix} \cong \\ & \cong C \begin{bmatrix} R_2+2-N & i-2+N & R_1 \\ R_4+2-N & j-2+N & R_3 \end{bmatrix} \cong C \begin{bmatrix} i & R_1-2+N & R_2+2-N \\ j & R_3-2+N & R_4+2-N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (97)$$

- Слабые симметрии II типа:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & i \\ R_3 & R_4 & j \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & j+R_4-R_2 \\ R_3 & R_4 & i+R_4-R_2 \end{bmatrix} \quad (98)$$

где $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ и $|R_4 - R_2| = N - 2$.

6 Заключение

Основная цель этой работы состояла в том, чтобы найти некоторые общие соотношения для 6-j символов. Действительно, было обнаружено множество новых симметрий. Однако пока не представляется возможным сказать, встречаются ли эти симметрии только в рассматриваемом случае или имеют более общий вид. Как видно из второго раздела, тетраэдрическая симметрия для случая $sl(2)$ может быть обобщена двумя различными способами: как симметрия тетраэдра $sl(N)$ или как рассмотренная в работе слабая симметрия.

Кроме того, неизвестно обобщение для симметрии Редже в $sl(N)$. С другой стороны, найдено выражение симметрии $sl(N)$ для случая без кратности, которое становится симметрией Редже для $N = 2$. Этот факт позволяет предположить, что симметрия Редже может быть обобщена на произвольный 6-j символ $sl(N)$.

Отношения, обнаруженные во втором разделе, подтверждают, что символ 6-j без кратности $sl(N)$ не изменяется, если постоянное целое число добавляется к каждой строке в диаграммах Юнга из аргументов. Другими словами, этот случай зависит только от разницы длин строк. Это может быть явно видно в подразделе 2.6, но возможно, что эта особенность является более общей и может применяться к произвольным 6-j символам $sl(N)$.

Список литературы

- [1] P.Freyd, D.Yetter, J.Hoste, W.B.R.Lickorish, K.Millet, A.Ocneanu: A new polynomial invariant of knots and links. Bull. AMS. 12 (1985) 239.
- [2] J.H.Przytycki and K.P.Traczyk: Invariants of links of Conway type. Kobe J. Math. 4 (1987) 115-139.
- [3] Satoshi Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia: Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory.
- [4] N.Yu. Reshetikhin, V.G. Turaev: Comm.Math.Phys. 127 (1990) 1-26.
- [5] A.N. Kirillov and N.Yu. Reshetikhin: Representations of the Algebra $U_q(2)$, q-Orthogonal Polynomials and Invariants of Links, Preprint, 1988.
- [6] Andrey Morozov, Alexey Sleptsov: New symmetries for the $U_q(sl_N)$ 6-j symbols from the Eigenvalue conjecture. arXiv:1905.01876v1.

- [7] Jie Gu, Hans Jockers: A note on colored HOMFLY polynomials for hyperbolic knots from WZW models. arXiv:1407.5643.
- [8] Satoshi Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia: Multiplicity-free quantum 6-j symbols for $U_q(sl_N)$. arXiv:1302.5143v3.
- [9] H.Itoyama, A.Mironov, A.Morozov, An.Morozov: Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations. arXiv:1209.6304v1.
- [10] A.Anokhina, An.Morozov: Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials. arXiv:1307.2216v2.
- [11] A. Klimyk, K. Schmüdgen: Quantum groups and their representations, Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] Saswati Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevia, Vivek Kumar Singh, A. Sleptsov: Multi-Colored Links From 3-strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations. arXiv:1805.03916v1.
- [13] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov: Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid. arXiv:1112.2654.
- [14] G. Gasper, M. Rahman: Basic hypergeometric series. Cambridge University Press, 1990.