ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

"Московский Физико-Технический институт

(национальный исследовательский университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Распад скалярного поля (линейно зависящего от временной координаты) в трех измерениях

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнила:

студентка 522 группы

Бадамшина Алина Ураловна

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный

2019

Содержание

1. Введение

В данной работе рассматривается модель Юкавы взаимодействия безмассовое бозонное поля с полем Дирака в (2+1)-мерном пространстве-времени Минковского с метрикой $(1, -1, -1)$:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \lambda\phi\bar{\psi}\psi\right], \tag{1}$$

где $\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$, $\lambda > 0$, $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

В (2+1)-мерном случае можно выбрать гамма-матрицы Дирака таким образом:

$$\gamma^0 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; \gamma^2 = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Под полями ϕ и ψ в действии (1) подразумевается сумма квантового и классического поля $\psi = \psi^{cl} + \psi^q$,$\phi = \phi^{cl} + \phi^q$. Варьируя действие по ϕ и по ψ соответственно, получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{cases} \partial^2\phi + \lambda\bar{\psi}\psi = 0 \\ (i\not{\partial} - m - \lambda\phi)\psi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Классическими решениями данного уравнения являются $\psi^{cl} = 0$ и ϕ^{cl} – произвольная гладкая функция. В данной работе рассматривается случай $\phi^{cl} = At$, где A– положительная действительная константа. Также можно рассматривать случаи с $\phi^{cl} = Bt + C$, где B и C – произвольные действительные константы, но это не изменит выкладки существенным образом, поэтому мы ограничимся случаем $\phi^{cl} = At$, $A > 0$.

В равновесном случае при подсчете S-матрицы проводится усреднение по вакуумному состоянию, т.е. предполается, что система возвращается в состояние, отличающееся от начального только на фазовый множитель. Когда же гамильтониан явно зависит от времени, система эволюционирует в отличное от равновесного состояние. В это случае удобно развить формализм, в котором система эволюционирует от $t = -\infty$ к $t = \infty$ и обратно, чтобы избежать усреднения по конечному состоянию. Такой формализм был разработан Келдышем и Швингером.

В стационарной ситуации без внешнего поля в вакууме есть виртуальные электропозитронные пары. Под воздействием сильного электрического поля эти пары могут получить достаточно энергии для того, чтобы стать уже реальными электрон-позитронными парами. Это явление было описано Швингером ([10], [1], [2]). В этом случае пары частиц рождаются за счет туннелирования, которое возникает из-за того, что эффективное действие содержит мнимую часть.

В данной задаче мы тоже рассматриваем нестационарную ситуацию, но берем более простую модель. Гамильтониан явно зависит от времени, то есть мы имеем дело с нестационарным случаем. Следовательно, ожидается рождение частиц, аналогично случаям, описанным выше. Как будет показано далее, эффективное действие не содержит мнимой части, поэтому эффектов, связанных с туннелированием при внешнем поле, не будет. Однако мы все еще можем увидеть общие свойства поведения нестационарной системы во внешнем поле.

Также, лучай $\phi^{cl} = At$ является нефизическим, потому что бесконечно растущее со временем поле невозможно. Но данная задача позволяет исследовать основные свойства модели и выработать определенную интуицию в решении задач в нестационарной теории поля.

2. Моды: случай $\phi^{cl} = At$

Перепишем уравнение движения (3) для случая $\phi^{cl} = At$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M(t))\Psi = 0,\ M(t) = m + \lambda A t,\ \ \alpha = \lambda A. \tag{4}$$

Так как задача пространственно однородна, то можно сделать преобразование Фурье по пространственным координатам:

$$\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}(t) e^{i\boldsymbol{px}} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} e^{i\boldsymbol{px}},\quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

После преобразования Фурье уравнение (4) перепишется следующим образом:

$$(i\gamma^0 \partial_t + \boldsymbol{\gamma p} - M(t))\boldsymbol{\Psi(t)} = 0,\ \ \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

или в координатной записи:

$$\begin{cases} -(i\partial_t - M(t))\psi_1(t) = (ip_1 + p_2)\psi_2(t) \\ (i\partial_t + M(t))\psi_2(t) = (ip_1 - p_2)\psi_1(t). \end{cases} \tag{6}$$

Действуя на уравнение выше оператором $(-i\gamma_0 + \boldsymbol{\gamma p} - M(t))$, получаем:

$$(\partial_t^2 + p^2 + M^2(t) + i\gamma^0 \partial_t M(t))\psi(t) = 0, \tag{7}$$

или в координатной записи:

$$\begin{gathered} (\partial_t^2 + (\omega_\pm)^2(t)\psi_{1,2}(t) = 0, \\ (\omega_\pm)^2(t) = p^2 + M^2(t) \pm i\partial_t M(t) = p^2 + (m + \alpha t)^2 \pm i\alpha, \end{gathered} \tag{8}$$

где $p^2 = p_1^2 + p_2^2$.

$$(\partial_t^2 + p^2 + (m + \alpha t)^2 \pm i\alpha)\psi_{12} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial_t^2}{[(1+i)\sqrt{\alpha}]^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{(1+i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}}\right]^2 - \left(\frac{ip^2}{2\alpha} \mp \frac{1}{2}\right)\right)\psi_{12} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial_t^2}{[(1-i)\sqrt{\alpha}]^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{(1-i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}}\right]^2 - \left(-\frac{ip^2}{2\alpha} \pm \frac{1}{2}\right)\right)\psi_{12} = 0.$$

Для того, чтобы увидеть решения данного уравнения сделаем следующую замену переменных:

$$z = \frac{(1+i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}},\ \ a = \frac{ip^2}{2\alpha} \mp \frac{1}{2}$$

$$z' = \frac{(1-i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}} = iz,\ \ a' = -\frac{ip^2}{2\alpha} \pm \frac{1}{2} = -a$$

В итоге получаем уравнение вида:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{4}z^2 + a\right)\right]\psi_{1,2} = 0, \tag{9}$$

Решением которого являются функции параболического цилиндра ([5]):

$$\psi_{12} = A_{12} D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\left[\frac{(1+i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}}\right] + B_{12} D_{\frac{ip^2}{2\alpha}\mp\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\left[\frac{(1-i)(m+\alpha t)}{\sqrt{\alpha}}\right],$$

Для удобства введем обозначение $\nu = -\frac{ip^2}{2\alpha}$, тогда решения перепишутся в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 D_\nu(z) + B_1 D_{-\nu-1}(iz) \\ \psi_2 &= A_2 D_{\nu-1}(z) + B_2 D_{-\nu}(iz). \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим ассимптотическое поведение функции D_ν в ультрафиолетовом пределе ($|\boldsymbol{p}| \gg \sqrt{\alpha}$). Этот предел всегда выполняется для свободной теории ($\alpha = 0$ в свободной теории), поэтому можно ожидать, что волновая функция в данном пределе в теории со взаимодействием будет вести себя похожим образом. Получаем следующее асимптотическое поведение, вывод которого можно посмотреть в приложении:

$$D_\nu(z(t)) \approx \frac{e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2+p^2}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}\left[1 + O\left(\frac{\alpha}{M^2+p^2}\right)\right], \tag{11}$$

где $\phi = \frac{p^2}{4\alpha} - \frac{p^2}{4\alpha}\log\frac{(\sqrt{M^2+p^2}+M^2)^2}{2\alpha} - \frac{M\sqrt{M^2+p^2}}{2\alpha}$. В пределе $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ll \frac{|p|}{\alpha}$ функция ведет себя следующим образом:

$$D_\nu(z(t)) \propto e^{-i|\boldsymbol{p}|t}, \quad D_{-\nu}(z(t)) \propto e^{i|\boldsymbol{p}|t}, \tag{12}$$

тогда выражения для мод в этом пределе примут следующий вид:

$$\psi_{12} = A_{12}(p)e^{-i|\boldsymbol{p}|t} + B_{12}(p)e^{i|\boldsymbol{p}|t}. \tag{13}$$

Из этого предела видно, что $D_\nu(z)$ и $D_{\nu-1}(z)$ соответствуют положительно-частотным состояниям:

$$\psi^{(+)}(t) = \begin{pmatrix}\psi_1^{(+)}(t) \\ \psi_2^{(+)}(t)\end{pmatrix} = A^{(+)}\begin{pmatrix} D_\nu(z(t)) \\ D_{\nu-1}(z(t))\end{pmatrix} = A^{(+)}\begin{pmatrix} D_\nu(z(t)) \\ \frac{i\partial_t - M(t)}{ip_1+p_2} D_\nu(z(t))\end{pmatrix}, \tag{14}$$

где в последнем равенстве было использовано уравнение (6). Используя свойство функций параболического цилиндра [3]

$$\partial_z D_\nu(z) + \frac{1}{2}zD_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) = 0, \tag{15}$$

получаем:

$$(-ip_1 - p_2)\psi_2^{(+)} = A^{(+)}(i\partial_t - M(t))D_\nu(z) = A^{(+)}[(i-1)\sqrt{\alpha}\partial_z D_\nu(z) - M(t)D_\nu(z)] =$$
$$= A^{(+)}[(i-1)\sqrt{\alpha}[\nu D_{\nu-1}(z) - \frac{1}{2}zD_\nu(z)] - M(t)D_\nu(z)] =$$
$$= A^{(+)}(i-1)\sqrt{\alpha}\nu D_{\nu-1}(z) = A^{(+)}(i-1)\sqrt{\alpha}(ip_1+p_2)(ip_1-p_2)D_{\nu-1}(z). \quad (16)$$

Подставляем результаты (16) в (14) и получаем следующее выражение для положительно-частотных мод:

$$\psi^{(+)}(t,x) = A^{(+)}\begin{pmatrix} D_\nu(z(t)) \\ \frac{(i+1)(p_2-ip_1)}{2\sqrt{\alpha}}D_{\nu-1}(z(t)) \end{pmatrix} e^{i\boldsymbol{px}} \quad (17)$$

Теперь получим выражение для отрицательно-частотных решений:

$$\psi^{(-)}(t,x) = A^{(-)}\begin{pmatrix} D_{-\nu-1}(iz(t)) \\ D_{-\nu}(iz(t)) \end{pmatrix} e^{-i\boldsymbol{px}} \quad (18)$$

Так как $iz = z*$, $-\nu = \nu*$, то $D_\nu^*(z) = D_{-\nu}(iz)$, то, используя свойство (15), аналогично можно найти и отрицательно-частотные решения:

$$\psi^{(-)}(t,x) = A^{(-)}\begin{pmatrix} \frac{(1-i)(ip_1+p_2)}{2\sqrt{\alpha}}D_{\nu-1}^*(z(t)) \\ D_\nu^*(z(t)) \end{pmatrix} e^{-i\boldsymbol{px}} \quad (19)$$

Из антикоммутационных соотношений можно найти коэффициенты $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$. Разложение волновых функций по модам:

$$\begin{cases} \psi_a(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(a_p\psi_{p,a}^{(+)}(t)e^{i\mathbf{px}} + b_p^+\psi_{p,a}^{*(-)}(t)e^{-i\mathbf{px}}) \\ \psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(b_p\psi_{p,a}^{*(-)}(t)e^{-i\mathbf{px}} + a_p^+\psi_{p,a}^{(+)}(t)e^{i\mathbf{px}}) \end{cases} \quad (20)$$

Антикоммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$\{a_p,a_q^\dagger\} = \{b_p,b_q^\dagger\} = (2\pi)^2\delta^{(2)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}), \quad (21)$$

Канонические антикоммутационные соотношения для фермионных полей:

$$\{\psi_a(t,\boldsymbol{x}),\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\} = \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}. \quad (22)$$

Теперь мы можем посчитать антикоммутатор и из него вывести условия на константы.

$$\{\psi_a(t,\boldsymbol{x}),\psi_b(t,\boldsymbol{y})\} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}[\{a_p,a_q^\dagger\}\psi_{p,a}^{(+)}(t)\psi_{q,b}^{*(+)}e^{i(\boldsymbol{px}-\boldsymbol{qy})}+$$
$$+ \{b_p^\dagger,b_q\}\psi_{p,a}^{*(-)}(t)\psi_{q,b}^{(-)}(t)e^{i(-\boldsymbol{px}+\boldsymbol{qy})}] =$$
$$= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})[\psi_{p,a}^{(+)}(t)\psi_{p,b}^{*(+)}(t) + \psi_{-p,a}^{(-)}(t)\psi_{-p,b}^{*(-)}(t)] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}, \quad (23)$$

где в поледнем равенстве были использованы канонические коммутационные соотношения (22). Это равенство может выполняться при условии

$$\begin{cases} |A^{(+)}|^2|D_\nu(z)|^2 + |A^{(-)}|^2|D_{\nu-1}(z)|^2\frac{p^2}{2\alpha} = 1 \\ |A^{(-)}|^2|D_\nu(z)|^2 + |A^{(+)}|^2|D_{\nu-1}(z)|^2\frac{p^2}{2\alpha} = 1 \end{cases} \tag{24}$$

для любого произвольного момента времени t. Но условие (23) не зависит от времени. Этот факт можно доказать, используя равенство $\psi^{(-)}_{a,-p}(t) = -\gamma^2_{ab}\psi^{*(+)}_{b,p}$, которое следует из выражений для мод.

$$i\gamma^0\partial_t[\psi^{(+)}_{p,a}(t)\psi^{*(+)}_{p,b}(t) + \psi^{(-)}_{-p,a}(t)\psi^{*(-)}_{-p,b}(t)] = 0 \tag{25}$$

В итоге получаем следующее ограничение на константы:

$$|A^{(+)}|^2 = |A^{(-)}|^2 = |A|^2. \tag{26}$$

Выражение выше и факт, что (22)не зависит от времени, позволяет нам найти константу $|A|^2$ просто подставив 0 в аргумент функции параболического цилиндра:

$$|A|^2\left[\frac{\pi}{\left|\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{ip^2}{4\alpha})\right|^2} + \frac{p^2}{4\alpha}\frac{\pi}{\left|\Gamma(1+\frac{ip^2}{4\alpha}\right|^2}\right] = 1. \tag{27}$$

Используя свойство Гамма функции

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x\sinh\pi x}, \quad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh\pi x}, \tag{28}$$

в итоге получаем выражение для константы

$$|A|^2 = e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}. \tag{29}$$

и связь функций параболического цилиндра с разными ν

$$\frac{p^2}{2\alpha}|D_{\nu-1}(z)|^2 = e^{\frac{\pi p^2}{4\alpha}} - |D_\nu(z)|^2. \tag{30}$$

Теперь рассмотрим поведение функции $D_\nu(z)$ в пределе $|z| \gg |\nu|$ and $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$. В нашем случае $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{4}$ и $\sqrt{\alpha} \gg \frac{p^2}{\alpha}$, то есть для импульсов в интервале $0 < p < \sqrt{\alpha}$ ([3]):

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{\frac{z^2}{4}}\left[\sum_{n=0}^N \frac{(-\frac{\nu}{2})_n(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2})_n}{n!\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n}\right],$$

$$(\gamma)_0 = 1,\ (\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1),$$

Мы рассматриваем предел $t \to \infty$. В первом приближении получаем:

$$D_\nu \approx e^{-i\phi}\left[1 - \frac{p^2}{4M^2} + O\left(\frac{\alpha^2}{M^4}\right)\right], \tag{31}$$

где $i\phi = \frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha}\log\frac{(\sqrt{M^2+p^2}+M^2)^2}{2\alpha} - \frac{iM\sqrt{M^2+p^2}}{2\alpha}$.

$$|D_\nu(z)|^2 = 1 - \frac{p^2}{4M^2} + O\left(\frac{\alpha^2}{M^4}\right). \tag{32}$$

3. Отклик на внешнее поле

3.1. Вывод операторного уравнения

С помощью преобразований Лежандра получим плотность Гамильтониана нашей теории

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t}\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t}\psi - \mathcal{L} = \\ = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 + (\partial_x\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2\right] - i\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\partial}\psi + \lambda\phi\bar{\psi}\psi. \quad (33)$$

Из гамильтониана

$$\hat{H} = \int d^2x \left(\frac{1}{2}\left[(\partial_t\hat{\phi})^2 + (\partial_x\hat{\phi})^2 + (\partial_y\hat{\phi})^2\right] - i\hat{\bar{\psi}}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\partial}\hat{\psi} + \lambda\hat{\phi}\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}\right) \quad (34)$$

и уравнений Гамильтона

$$\hat{\phi}_t(\boldsymbol{x}) = i\left[\hat{H}, \phi(\hat{\boldsymbol{x}})\right], \hat{\psi}_t(\boldsymbol{x}) = i\left[\hat{H}, \hat{\psi}(\boldsymbol{x})\right] \quad (35)$$

можно получить операторное уравнение, аналогичное уравнениям движения (3):

$$\partial\langle\hat{\phi}\rangle = -\lambda\langle\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}\rangle. \quad (36)$$

То есть для того, чтобы определить отклик на внешнее скалярное поле, нужно вычислить классический ток $\langle\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}\rangle$.

3.2. Вычисление тока

Теперь мы можем посчитать ток в пределе $t \to \infty$:

$$\begin{cases} \psi = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(a_p\psi_p^{(+)}e^{i\mathbf{px}} + b_p^+\psi_p^{(-)}e^{-i\mathbf{px}}) \\ \bar{\psi} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(b_p\bar{\psi}_p^{(-)}e^{-i\mathbf{px}} + a_p^+\bar{\psi}_p^{(+)}e^{i\mathbf{px}}) \end{cases} \quad (37)$$

Антиоммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$\{a_p, a_q^\dagger\} = \{b_p, b_q^\dagger\} = (2\pi)^2\delta^{(2)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}), \quad (38)$$

$$\{\psi_a(t,\boldsymbol{x}), \psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\} = \delta^{(2)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta_{ab}. \quad (39)$$

$$\langle\psi\bar{\psi}\rangle = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\langle b_q b_p^{(+)}\rangle\bar{\psi}_p^{(-)}\psi_q^{(-)}e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\bar{\psi}_p^{(-)}\psi_p^{(-)} = \\ = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}|A|^2\left(\frac{p^2}{2\alpha}|D_{\nu-1}(z)|^2 - |D_\nu(z)|^2\right) = \\ = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left(1 - 2|A|^2|D_\nu(z)|^2\right) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left(1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}|D_\nu(z)|^2\right), \quad (40)$$

где знак минус появляется в силу $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ и было использовано соотношение (30).

Для того чтобы получить нормально упорядоченный ток, нужно вычесть из выражения выше ток свободной теории [9]:

$$\langle : \psi\bar{\psi} : \rangle = \int \frac{d^2p}{2\pi^2} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu(z)|^2 \right) - \langle \psi\bar{\psi} \rangle_{\lambda \to 0} \tag{41}$$

$$\langle \psi\bar{\psi} \rangle_{\lambda \to 0} = -\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} \tag{42}$$

В итоге получаем выражение для нормально упорядоченного тока:

$$\langle : \psi\bar{\psi} : \rangle = \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(1 + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu(z)|^2 \right) \tag{43}$$

Так как полученные интегралы в выражении для тока расходятся, введем ультрафиолетовое обрезание Λ и рассмотрим два предельных случая:$M \ll \Lambda$ и $M \gg \Lambda$. В случае $M \ll \Lambda$ разделим интеграл на две части (приближение (31) и (11) соответственно):

$$\begin{aligned}
\langle : \psi\bar{\psi} : \rangle &= \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(1 + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu(z)|^2 \right) \approx \\
&\approx \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[1 + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} - \left(2 - \frac{p^2}{2M^2} + O\left(\frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right) \right] \approx \\
&\approx \int_0^{\alpha} \frac{dp^2}{4\pi} \left[\frac{p^2}{2M^2} - \frac{p^2}{2m^2} + O\left(\frac{\alpha^2}{M^4}, \alpha^2 m^4 \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{\alpha^2}{16\pi} \left[\frac{1}{M^2} - \frac{1}{m^2} \right].
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\langle : \psi\bar{\psi} : \rangle &= \int_{\sqrt{\alpha}}^{\Lambda} \frac{2d^2p}{(2\pi)^2} \left[\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} - \frac{M}{\sqrt{M^2+p^2}} \left(1 + O\left(\frac{\alpha}{p^2} \right) \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{1}{\pi} \left[-M\sqrt{m^2+\Lambda^2} + M\sqrt{m^2+\alpha} + m\sqrt{m^2+\Lambda^2} - m\sqrt{m^2+\alpha} \right] \approx \\
&\approx -\frac{\alpha t \Lambda}{2\pi} + \frac{(\alpha t)^2}{2\pi}
\end{aligned} \tag{45}$$

В итоге получаем выражение для отклика на внешнее поле:

$$\partial^2 \langle \phi \rangle = -\lambda \langle : \psi\bar{\psi} : \rangle \approx \lambda \left(\frac{\alpha t \Lambda}{2\pi} - \frac{(\alpha t)^2}{2\pi} + \ldots \right) = \frac{\lambda^2 \Lambda}{2\pi} \phi^{cl} + \frac{\lambda^3}{2\pi} (\phi^{cl})^2 \tag{46}$$

В случае $M \gg \Lambda$:

$$\langle : \psi\bar{\psi} : \rangle \approx -m\sqrt{m^2+\Lambda^2} - \Lambda^2 + \Lambda^4 4M^2 \tag{47}$$

Конечно, случай $M \gg \Lambda$ не является физичесим, так как мы получаем бесконечно растущее поле ($\phi^{cl} \to \infty$). Здесь предполагается что в какой-то момент времени поле все-таки выходит на постоянное значение.

Стоит отметить, что для вычисления отклика на внешнее поле использовались точные выражения для мод с учетом того, что взаимодействие не выключается. Поэтому можно считать, что ток был посчитан в рамках нестационарной квантовой теории поля (in-in ток).

4. Эффективное действие

Для того, чтобы проверить результаты предыдущей секции, посчитаем эффективное действие для нашей теории ([8], [7]). Первым шагом нужно проинтегрировать по фермионным полям. Так как статсумма по фермионным полям представляет собой функциональный Гауссов интеграл, то интегрирование не составляет труда и мы получаем:

$$Z = \int D\phi D\psi D\bar{\psi} \exp\left(i \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \lambda\phi\bar{\psi}\psi\right]\right) = \\ = \int D\phi(-i)\det(i\not{\partial} - m - \lambda\phi)\exp\left(i\int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right]\right) \quad (48)$$

Следующим шагом мы снова искусственно вносим интегрирование по фермионным полям, но теперь уже не включаем взаимодействие с бозонным полем в плотность Лагранжиана:

$$Z = \int D\phi D\psi D\bar{\psi}\, \frac{\det(i\not{\partial} - m - \lambda\phi)}{\det(i\not{\partial} - m)} \exp\left(i\int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi\right]\right) = \\ = \int D\phi D\psi D\bar{\psi} \exp\left(i\int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi\right] + \mathrm{Tr}\log\frac{i\not{\partial} - m - \lambda\phi}{i\not{\partial} - m}\right). \quad (49)$$

Предполагая, что $i\lambda\not{\partial}\phi$ мало и $\lambda\phi \gg m$, выражение упрощается следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\ln\frac{i\not{\partial} - m - \lambda\phi}{i\not{\partial} - m} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log\frac{\partial^2 + (m - \lambda\phi)^2 - i\lambda\not{\partial}\phi}{\partial^2 + m^2} = \\ = \mathrm{Tr}\log\left[1 + \frac{(\lambda\phi)^2}{\partial^2 + m^2}\right] = \mathrm{Tr}\log\left[1 + \frac{(\lambda\phi)^2}{\partial^2 + m^2}\right] = \\ = i\int d^3x \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{(\lambda\phi)^2}{p^2 + m^2} = i\int d^3x\left[I_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}I_n\right]. \quad (50)$$

Начнем с подсчета суммы. Каждый член в сумме сходится и равен

$$I_n = (\lambda\phi)^{2n}\frac{m^{3-2n}\Gamma(n - \frac{3}{2})}{8\pi^{3/2}\Gamma(n)}. \quad (51)$$

Сама сумма конечна и легко считается. В итоге получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}I_n = -\frac{m}{12\pi}\left[2((\lambda\phi)^2 + m^2)\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda\phi}{m}\right)^2} - 3(\lambda\phi)^2 - 2m^2\right] = \\ = \frac{m(\lambda\phi)^2}{4\pi} + \frac{m^3}{6\pi} - \frac{(\lambda\phi)^3}{6\pi}, \quad (52)$$

где мы предположили, что $\frac{\lambda\phi}{m} \gg 1$.

Теперь посчитаем интеграл I_1. Данный интеграл расходится, поэтому введем ультрафиолетовое обрезание Λ.

$$\int_0^\Lambda \frac{p^2 dp}{p^2+m^2} = \Lambda - m \arctan\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \tag{53}$$

В пределе $\Lambda \gg m$:

$$I_1 = -\frac{(\lambda\phi)^2 m}{4\pi} + \frac{\Lambda}{2\pi^2}. \tag{54}$$

В итоге получаем следующее выражение:

$$\begin{split}\mathrm{Tr}\ln\frac{i\partial\!\!\!/ - m - \lambda\phi}{i\partial\!\!\!/ - m} = \\ = i\int d^3x \left[\frac{m(\lambda\phi)^2}{4\pi} + \frac{m^3}{6\pi} - \frac{(\lambda\phi)^3}{6\pi} - \frac{m(\lambda\phi)^2}{4\pi} + \frac{\Lambda}{2\pi^2}\right] = S_{eff}.\end{split} \tag{55}$$

Тогда статсумма перепишется следующим образом:

$$Z = \int D\phi D\psi D\bar{\psi} \exp\left(i\int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi\right] + S_{eff}\right). \tag{56}$$

И соответствующие уравнения движения

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \frac{\lambda^2}{2\pi}\langle\phi\rangle^2. \tag{57}$$

Наконец, получаем выражение для отклика на внешнее поле:

$$\partial^2\langle\phi\rangle = -\lambda\langle :\psi\bar{\psi}:\rangle \approx \frac{\lambda^2\Lambda}{2\pi}\phi^{cl} + \frac{\lambda^3}{2\pi}(\phi^{cl})^2, \tag{58}$$

что соответствует результатам, полученным другим способом.

В данном случае интегрирование по времени проводилось от $-\infty$ до ∞, то есть временной контур не замкнут (in-out ток). Однако результат совпал с выражением для in-in тока на древесном уровне.

5. Заключение

В данной работе был посчитан отклик на внешнее скалярное поле, который описывается нормально-упорядоченным током, выраженным через моды. Далее было найдено эффективное действие теории и посчитан ток этим способом. Оба способа дают одинаковые результаты.

Важным результатом данной работы являются точные выражения для мод, так как дальнейшей задачей является подсчет петлевых поправок к пропагаторам с помощью диаграммной техники Келдыша.

A. Альтернативное представление гамма-матриц в 2+1-мерном пространстве

В данной работе мы использовали представление гамма-матриц в виде матриц 2 на 2 в силу наглядности и простоты выкладок, однако стоит отметить, что в 2+1 возможно и представление в виде матриц 4 на 4 [6].

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu = \begin{pmatrix} i\partial_t & -\partial_1 + i\partial_2 & 0 & 0 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & -\partial_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\partial_t & \partial_1 - i\partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_1 + i\partial_2 & i\partial_t \end{pmatrix} \tag{60}$$

Преобразование Фурье по пространственным координатам:

$$\Psi(t,x) = \psi(t)e^{ip_1x+ip_2y} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \\ \psi_4(t) \end{pmatrix} e^{ip_1+ip_2y} \tag{61}$$

Тогда в координатном виде уравнение движения запишется так:

$$\begin{cases} (i\partial_t - M(t))\psi_1(t) + (-ip_1 - p_2)\psi_2(t) = 0 \\ (-i\partial_t - M(t))\psi_2(t) + (-ip_1 + p_2)\psi_1(t) = 0 \\ (-i\partial_t - M(t))\psi_3(t) + (ip_1 + p_2)\psi_4(t) = 0 \\ (i\partial_t - M(t))\psi_4(t) + (ip_1 - p_2)\psi_3(t) = 0 \end{cases} \tag{62}$$

$$(\partial_t^2 + \omega_\pm^2(t))\psi_{23}^{14} = 0 \tag{63}$$

$$\omega_\pm = p^2 + M^2(t) \pm i\partial_t M = p^2 + (m+\alpha t)^2 \pm i\alpha,\ p^2 = p_1^2 + p_2^2, \tag{64}$$

$$(\partial_t^2 + p^2 + (m+\alpha t)^2 \pm i\alpha)\psi_{23}^{14} = 0 \tag{65}$$

Проделав аналогичные выкладки, можно получить следующие выражения для положительно- и отрицательно-частотных решений уравнения движения:

$$\psi^{(+)}(t,x) = A \begin{pmatrix} D_\nu(z(t)) \\ \frac{i+1}{\sqrt{2}}\frac{ip_1+p_2}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1}(z) \\ \frac{i+1}{\sqrt{2}}\frac{-ip_1+p_2}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1}(z) \\ D_\nu(z(t)) \end{pmatrix} e^{ip_1x+ip_2y} \tag{66}$$

$$\psi^{(-)}(t,x) = A \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{-ip_1+p_2}{\sqrt{2\alpha}} D^*_{\nu-1}(z) \\ D^*_\nu(z(t)) \\ D^*_\nu(z(t)) \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{ip_1+p_2}{\sqrt{2\alpha}} D^*_{\nu-1}(z) \end{pmatrix} e^{-ip_1x-ip_2y} \tag{67}$$

Используя разложение волновых функций через операторы рождения и уничтожения, можно получить следующее выражение для тока:

$$\begin{aligned} \langle\psi\bar\psi\rangle &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\langle b_q b_p^{(+)}\rangle \bar\psi_p^{(-)}\psi_q^{(-)} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\bar\psi_p^{(-)}\psi_p^{(-)} = \\ &= \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2) = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = \\ &= \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}|A|^2\left(\frac{p^2}{2\alpha}|D_{\nu-1}(z)|^2 - |D_\nu(z)|^2\right) = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left(1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}|D_\nu(z)|^2\right) \end{aligned} \tag{68}$$

Нормально упорядоченный ток в предельных случаях:$M \ll \Lambda$ и $M \gg \Lambda$:

$$\langle: \psi\bar\psi :\rangle \approx \frac{\alpha^2}{16\pi}\left[\frac{1}{M^2} - \frac{1}{m^2}\right] - \frac{\alpha t\Lambda}{\pi} + \frac{(\alpha t)^2}{\pi}, \tag{69}$$

в случае $M \gg \Lambda$:

$$\langle: \psi\bar\psi :\rangle \approx -m\sqrt{m^2 + +\Lambda^2} - \Lambda^2 + \Lambda^4 4M^2. \tag{70}$$

Как видно, результаты согласуются.

B. Вывод ассимптотики для функции параболического цилиндра

Данный вывод почти полностью следует из статьи [4]. Для функции параболического цилиндра в пределе $|p| \gg \sqrt{\alpha}$ справедливо следующее разложение:

$$D_\nu(z) \approx \frac{z\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{2\pi i}} e^{-\frac{z^2}{4}} \sum_{j=0}^{1} \frac{\exp(f(v_j) + i\alpha_j)}{\sqrt{|f''(v_j)|}} \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(2l-1)!! \exp(2il\alpha_j)}{v_j^{2l} |f''(v_j)|^l} \sum_{\lambda_n} \prod_{n=3}^{2l} \left(\frac{[(1+p)/n]^{\lambda_n}}{\lambda_n!} \right) \right], \quad (71)$$

где $f(v) = z^2(v - v^2/2) - (1+p)\ln(zv)$, $\alpha_j = \pi/2 - \arg f''(v_j)/2$. Внутренняя сумма берется по всем различным неотрицательным целым решениям λ_n, таким что $\sum_{n=3}^{2l} n\lambda_n = 2l$. Эту сумму можно оценить так: каждый l член суммы сожержит

$$\frac{1}{(v_{0,1} f''(v_{0,1}))^{2k}} = \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \left[1 \mp \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{-1/2} \right] \right)^{2l}. \quad (72)$$

В случае $|\nu| \gg 1$ получаем, что этот член пропорционален $O\left(\frac{1}{\nu}\right)$. Тогда после несложных преобразований получаем, что

$$D_\nu(z(t)) \approx \frac{e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 + p^2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} \left[1 + O\left(\frac{\alpha}{M^2 + p^2} \right) \right], \quad (73)$$

где $\phi = \frac{p^2}{4\alpha} - \frac{p^2}{4\alpha} \log \frac{(\sqrt{M^2+p^2} + M^2)^2}{2\alpha} - \frac{M\sqrt{M^2+p^2}}{2\alpha}$.

Список литературы

[1] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev, and F. K. Popov. Secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP*, 09:071, 2014.

[2] E. T. Akhmedov and F. K. Popov. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP*, 09:085, 2015.

[3] Harry Bateman and Arthur Erdélyi. Higher transcendental functions. vol. 2. 2, 01 1953.

[4] D S F Crothers. Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument. *Journal of Physics A: General Physics*, 5(12):1680–1688, dec 1972.

[5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products.* Academic Press, seventh edition, 2007.

[6] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in (2+1)-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3499–3502, 1994. [Erratum: Phys. Rev. Lett.76,1005(1996)].

[7] A. P. C. Malbouisson, B. F. Swaiter, and N. F. Svaiter. Analytic regularization of the Yukawa model at finite temperature. *J. Math. Phys.*, 38:2210–2218, 1997.

[8] U. Mosel. *Path Integrals in Field Theory: An Introduction.* Advanced Texts in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[9] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, 1995. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.

[10] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, Jun 1951.