Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования ”Московский физико-технический институт (государственный университет)”

Физтех-школа фундаментальной и прикладной физики

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Мнимая часть эффективного действия для скалярного поля в пространстве де Ситтера

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Работу выполнил:
студент 521 группы — Базаров Кирилл Валерьевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. — Ахмедов Эмиль Тофикович

Москва, 2019

Содержание

1. Введение

1.1. $0+1$ мерная квантовая механика

Хорошо известно решение для обычного одномерного гармонического осциллятора в представление Гейзенберга:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{iwt}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-iwt}\hat{a}, \qquad \hat{H} = \omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right] \qquad \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{1.1}$$

Такой переход от оператора координаты к операторам повышения и понижения выбран, потому что это обеспечит нам диагональный гамильтониан. Давайте действовать так, будто мы не знаем что вышеупомянутая замена предпочтительна. Разложим оператор поля(координаты) по произвольному набору мод(решений уравнения движения):

$$\hat{x}(t) = f(t)\hat{a}^\dagger + h.c = \left(C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}\right)\hat{a}^\dagger + h.c., \qquad \text{где } \ C_+^2 - C_-^2 = \frac{1}{2\omega} \tag{1.2}$$

где $C_\pm$ это произвольные действительные[1] числа, а последнее равенство следует из канонических коммутационных соотношений между координатой и импульсом, а также между $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$. Проанализируем почему выбор мод (1.1) оправдан. Во-первых, подставив оператор координаты (1.2) в гамильтониан, получим:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\left(\dot{f}^2 + \omega^2 f^2\right) + \hat{a}^\dagger\hat{a}\left(|\dot{f}|^2 + \omega^2|f|^2\right) + h.c.$$

Где коэффициенты перед недиагональными элементами ($\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$) будет равны нулю, тогда и только тогда, когда $C_- = 0$. Во-вторых, из физических соображений мы ожидаем, что корреляционная функция $W(t,t') = \left\langle \hat{x}(t')\hat{x}(t)\right\rangle$ должна зависеть только от разницы времен $(t'-t)$. Можно показать, что если $C_- \neq 0$, тогда $W(t,t') = f(t-t',t+t')$, что противоречит симметрии пространства. В сумме только один выбор[2] мод в виде (1.1) даст нам всем три важных свойства:

✓ Диагональный гамильтониан

✓ Пропагаторы, которые зависят от геодезического расстояния

[1] В общем случае эти числа можно сделать комплексными, но для простоты положим их действительными.

[2] Заметим что переход от одних мод к другим - это на самом деле преобразование Боголюбова, а последние уравнение в (1.2) это ни что иное как условие каноничности этих преобразований.

1.2. Пространство де Ситтера

Разобравшись на игрушечном примере, перейдем к квантовой теории скалярного поля в пространстве де Ситтера. Напомним, что это простейшая модель инфляционно расширяющейся вселенной. Расширение означает, что наша теория не стационарна, т.е. у нас больше нет трансляционной инвариантности по времени. В этом случае, также как и в квантовой механике, мы хотим перейти от оператора поля $\hat{\varphi}$ к его разложению по операторам $\hat{a}_k$ и $\hat{a}^\dagger_{k'}$, которые коммутируют как $[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}] = (2\pi)^{D-1}\delta(k-k')$. Также как и случае с осциллятором, нам нужно зафиксировать две комплексные константы. В квантовой механике мы требовали выполнения трёх условий, обсуждавшихся выше. В пространстве де Ситтера нас ожидают трудности.

Во-первых, диагонализовать гамильтониан на всей оси времени не получится. Метрика в пространстве де Ситтера явно зависит от времени, поэтому коэффициенты при недиагональных элементах гамильтониана будут функциями от времени. Как следствие его можно диагонализавать только в одной точке, а не раз и навсегда.

Во-вторых, как мы увидим, различный выбор мод приводит к корреляционным функциям, которые зависят от геодезического расстояния или ,иначе говоря, уважают симметрию пространства. Следовательно у нас остается свобода выбора коэффициентов.

Как отмечалось ранее, переход от одних мод к другим это преобразование Боголюбова, и разные моды соответствуют разным операторам рождения и уничтожения, а значит и разным состояниям старшего веса в пространстве Фока:

$$\hat{a}\Big|\alpha\Big\rangle = 0, \tag{1.3}$$

которое, вообще говоря, может не является основным[3] состоянием. Соответственно мы можем определить так называемые in- и out- пропагаторы, отвечающие одной волне на минус бесконечности и на плюс бесконечности соответственно. Это пропагаторы, которые ведут себя как e^{it} при больших t, что соответствует бесконечно удаленным по времени точкам.

[3]В теориях с гамильтонианом, зависящим от времени, понятия энергии в привычном понимании этого слова не существует.

2. Связь мнимой части эффективного действия и пропагатора в совпадающих точках

Данная работа является продолжением исследований проведенных в статьях [1] и [2]. Начнем с обсуждения реального скалярного поля в кривом пространстве. Здесь и далее мы обозначаем массу скалярного поля φ как m, метрику как $g_{\mu\nu}$ и модуль детерминанта метрики как $|g|$. Эффективное действие, которое определено как:

$$e^{iS_{\text{eff}}} = e^{i\int \mathcal{L}_{\text{eff}}\, dx} = \int d[\varphi] e^{iS[\varphi]}, \text{ где } \quad S[\varphi] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right).$$

Прямым вычислением можно показать что:

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \log \int d[\varphi] e^{iS[\varphi]} = -i \frac{\int dx \int d[\varphi] \varphi(x) \varphi(x) e^{iS[\varphi]}}{\int d[\varphi] e^{iS[\varphi]}} = -i \int dx \; G_F(x,x).$$

Как результат мы можем связать эффективный лагранжиан с пропагатором Фейнмана в совпадающих точках.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \int_\infty^{m^2} dm^2 \; G_F(x,x). \tag{2.1}$$

Если взглянуть на соотношение:

$$\Big\langle \text{Out} \Big| \text{In} \Big\rangle = e^{i\int \mathcal{L}_{\text{eff}} dx}, \tag{2.2}$$

видно, что если $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ реален, тогда амплитуда перехода будет всего лишь фазой и вероятность перехода из In- в Out- состояние равна единице. Но если эффективный лагранжиан имеет мнимую часть - вероятность такого перехода не будет равна единице:

$$\boxed{\left| \Big\langle \text{Out} \Big| \text{In} \Big\rangle \right|^2 \neq 1.}, \tag{2.3}$$

Это означает нестабильность основного состояния по отношению к рождению частиц. Таким образом, пропагатор Фейнмана, который имеет конечную мнимую часть в совпадающих точках, вызывает особый интерес, и мы покажем, что такую же ситуацию можно увидеть в пространстве де Ситтера.

В этих вычислениях всё зависит от выбора состояния, следовательно нам следует сперва определить моды. После того как мы определим моды - мы определим пространства Фока [4]. В конце мы вычислим T-упорядоченный пропагатор Фейнмана между разными состоянии.

[4]Заметим, что низшие состояния в них не всегда основные состояния свободного гамильтониана.

3. Фейнмановские $\alpha - \beta$ пропагаторы в глобальных координатах пространства де Ситтера

3.1. Свободные моды

В глобальных координатах пространства де Ситтера метрика имеет следующий вид:

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(t) d\Omega^2, \tag{3.1}$$

где, $d\Omega^2$ элемент длины на единичной сфере, и $\sqrt{g} = \cosh^{D-1}(t)\sqrt{|g_\Omega|}$, где $|g_\Omega|$ это детерминант метрики на сфере. Так что оператор Клейна-Гордона в этом пространстве выглядит как:

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu g^{\mu\nu}\sqrt{g}\partial_\nu + m^2 \quad = \quad \partial_t^2 + (D-1)\tanh(t)\partial_t - \cosh^{-2}(t) \triangle_\Omega + m^2.$$

Здесь $\triangle_\Omega$ это оператор Лапласа на единичной сфере. Можно заметить что уравнение КГ симметрично по отношению к преобразованиям $t \to -t$, и как результат для любого решения $y(t)$ существует другое решение $y(-t)$.

Чтобы найти все решения, мы разложим искомую функцию по сферическим гармоникам $\varphi = \sum_{j,m} \varphi_j(t) Y_{jm}(\Omega)$ где j неотрицательное целое и $m = (1,2,..,N_{j,D})$, где $N_{j,D}$ размерность пространства $(D-1)$- мерных сферических гармоник, которые обладают следующим свойством:

$$\triangle_\Omega Y_{jm} = -j(j+D-2)Y_{jm}.$$

Тогда уравнение Клейна-Гордона для слабо взаимодействующего с гравитацией скалярного поля преобразуется в:

$$\left(\partial_t^2 + (D-1)\tanh(t)\partial_t + j(j+D-2)\cosh^{-2}(t) + m^2\right)\varphi_j(t) = 0. \tag{3.2}$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения в терминах функций Феррера (P and Q) также известные как присоединенные функции Лежандра на разрезе:

$$\varphi_j(t) = C_1 \cosh^{-\frac{D-1}{2}}(t)\mathsf{P}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tanh t) + C_2\frac{2}{\pi}\cosh^{-\frac{D-1}{2}}(t)\mathsf{Q}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tanh t). \tag{3.3}$$

Где $\mathsf{P}(z)$ и $\mathsf{Q}(z)$ это не тоже самое что функции Лежандра $P(z)$ и $Q(z)$. И те и те являются решением уравнения Лежандра, но тогда как первые определены на интервале $z = (-1,1)$ вторые определение на комплексной плоскости z с разрезом $(-\infty,1]$.

Такой набор мод как (3.3) был использован в, например, [5]. Из него может быть полученны моды, которые используются в [6] и [7]. Дальше мы будем использовать обозначения $\nu = j + \frac{D-3}{2}$ и $\mu = \sqrt{m^2 - \frac{(D-1)^2}{4}}$.

Теперь наша задача найти In- и Out- , а затем и $\alpha-$ моды. Для этого мы должны найти поведение функций P и Q на плюс и минус бесконечностях $t \to \pm\infty$, к примеру:

$$\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tanh t) \approx \frac{e^{-i\mu t}}{\Gamma(1-i\mu)}, \quad \text{если} \quad t \to +\infty. \tag{3.4}$$

Следовательно на плюс бесконечности эта функция ведет себя как одна волна с частотой равной μ. То есть моды (3.3) с $C_2 = 0$ обычно называются $Out-$ моды в пространстве де Ситтера

Чтобы найти In- моды нам понадобятся следующие соотношения:

$$\frac{\sin\left((\nu-i\mu)\pi\right)}{\Gamma\left(\nu+i\mu+1\right)}\mathsf{P}_\nu^{i\mu}\left(x\right) = \frac{\sin\left(\nu\pi\right)}{\Gamma\left(\nu-i\mu+1\right)}\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}\left(x\right) - \frac{\sin\left(i\mu\pi\right)}{\Gamma\left(\nu-i\mu+1\right)}\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}\left(-x\right),$$

использую которые, можно показать что при $t \to -\infty$:

$$\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tanh t) \approx \frac{\sin\left(\nu\pi\right)}{\sin\left(i\mu\pi\right)\Gamma(1-i\mu)}e^{i\mu t} - \frac{\sin\left((\nu-i\mu)\pi\right)\Gamma\left(\nu-i\mu+1\right)}{\Gamma\left(\nu+i\mu+1\right)\sin\left(i\mu\pi\right)\Gamma(1+i\mu)}e^{-i\mu t}. \tag{3.5}$$

Для функции Q есть следующее соотношение:

$$\frac{2\sin\left(i\mu\pi\right)}{\pi\Gamma\left(\nu-i\mu+1\right)}\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+i\mu+1\right)}\mathsf{P}_\nu^{i\mu}\left(x\right) - \frac{\cos\left(i\mu\pi\right)}{\Gamma\left(\nu-i\mu+1\right)}\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}\left(x\right).$$

Следовательно на минус бесконечности $t \to -\infty$ эта функция ведет себя как:

$$\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tanh t) = \frac{\pi\cos(\nu\pi)}{2\sin(i\mu\pi)\Gamma(1-i\mu)}e^{i\mu t} - \frac{\pi\cos((\nu-i\mu)\pi)\Gamma(\nu-i\mu+1)}{2\sin(i\mu\pi)\Gamma(\nu+i\mu+1)\Gamma(1+i\mu)}e^{-i\mu t}. \tag{3.6}$$

Если объединить функции (3.5) и (3.6), можно найти коэффициент перед $e^{\pm i\mu t}$ в (3.3) в бесконечном прошлом. Этот коэффициент ($e^{+i\mu t}$) равен нулю если выполнено следующее соотношение:

$$C_1 \sin\left[\left(j+\frac{D-3}{2}\right)\pi\right] + C_2\cos\left[\left(j+\frac{D-3}{2}\right)\pi\right] = 0, \tag{3.7}$$

тогда соответствующее решение (3.3) ведет себя как одна волна в бесконечном прошлом. Такие моды обычно называются In-моды в пространстве де Ситтера

Вероятно здесь стоит подчеркнуть, что из формулы (3.7) следует что в четных измерениях $C_1 = 0$, а в нечетных $C_2 = 0$. Следовательно в нечетных измерениях In- и Out- моды совпадают [5]. Это важное наблюдение, в частности поэтому мы не будем рассматривать α-состояния в нечетных размерностях. Когда мы обсуждаем далее $\alpha-$состояния мы подразумеваем всегда нечетные измерения.

[5] Это означает что уравнение (3.2) для нечетных D имеет не рассеивающий потенциал, если рассмотреть проблему поиска мод, как задачу рассеяния для уравнения (3.2). А именно, в обсуждаемом случае, одна волна по одну сторону от потенциала проходит сквозь него не рассеявшись.

Заметим, что никакие из $\alpha-$ мод не диагонализуют гамильтониан нашей теории во все моменты времени. Этим ситуация отличается от Пуанкаре региона. Потому что его геометрия такова, что каждая мода испытывает бесконечный синий сдвиг при движении в бесконечное прошлое, т.е. имеют очень короткую длину волны. Такие "сжатые"моды почти не чувствуют кривизну пространства де Ситтера. Это означает что в бесконечном прошлом в Пуанкаре регионе фоновое гравитационное поле эффективно выключено и, соответственно, гамильтониан может быть диагонализован.

3.2. Коммутационные соотношение

Рассмотрим оператор поля ($\tilde{t} \equiv \tanh t$):

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}) = \sum_{j,m} \cosh(t)^{-\frac{D-1}{2}} \Bigg[\left(\alpha_1 \mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) + \alpha_2 \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) \right) Y_{jm}(\vec{x}) \hat{a}^\dagger_{j,m} + \\ + \left(\alpha_1^* \mathsf{P}_\nu^{i\mu}(\tilde{t}) + \alpha_2^* \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}_\nu^{i\mu}(\tilde{t}) \right) Y^*_{jm}(\vec{x}) \hat{a}_{j,m} \Bigg]. \quad (3.8)$$

Здесь и далее $\vec{x}$ это вектор в угловых координатах на $(D-1)$ - мерной сфере. Если $[\hat{a}_{j,m},\hat{a}^\dagger_{j',m'}] = \delta_{j,j}\delta_{m,m'}$ мы должны выбрать такие комплексные константы $\alpha_{1,2}$ что выполняются канонические коммутационные соотношения:

$$[\varphi(t,\vec{x}),\dot{\varphi}(t,\vec{y})] = -\frac{i\delta(\vec{x}-\vec{y})}{\sqrt{g}}. \quad (3.9)$$

Мы определим $\left(\alpha_1 \mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) + \alpha_2 \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) \right) \cosh(t)^{-\frac{D-1}{2}} = f_j$. Тогда,

$$[\varphi(t,\vec{x}),\dot{\varphi}(t,\vec{y})] = \sum_{j,m} \left(f_j^* \dot{f}_j Y^*_{j,m}(\vec{x}) Y_{j,m}(\vec{y}) - f_j \dot{f}_j^* Y_{j,m}(\vec{x}) Y^*_{j,m}(\vec{y}) \right).$$

Можно переобозначить сумму по m так, что $Y^*_{j,m}(\vec{x})Y_{j,m}(\vec{y}) \to Y_{j,m}(\vec{x})Y^*_{j,m}(\vec{y})$. Например, для $D = 3$: если мы изменим $m \to 2j+1-m$ сферические гармоники преобразуются как $Y_{j,m}(\vec{x}) \to Y^*_{j,m}(\vec{x})$. Следовательно,

$$[\varphi(t,\vec{x}),\dot{\varphi}(t,\vec{y})] = \sum_{j,m} Y_{j,m}(\vec{x}) Y^*_{j,m}(\vec{y}) \left(f_j^* \dot{f}_j - f_j \dot{f}_j^* \right) = -\sum_{j,m} Y_{j,m}(\vec{x}) Y^*_{j,m}(\vec{y}) W_t(f_j, f_j^*),$$

где W_t это вронскиан двух решений уравнения (3.2), который не зависит от j. В результате мы можем использовать свойство полноты сферических гармоник:

$$\sum_{j,m} Y_{j,m}(\vec{x}) Y^*_{j,m}(\vec{y}) = \frac{\delta(\vec{x}-\vec{y})}{\sqrt{g_\Omega}}.$$

Следовательно
$$[\varphi(t,\vec{x}),\dot{\varphi}(t,\vec{y})]=-\frac{\delta(\vec{x}-\vec{y})}{\sqrt{g_\Omega}}W_t(f_j,f_j^*).$$
Для любых двух решений (3.2) выполнено:
$$W_t(f,f^*)=Ce^{-\int(D-1)\tanh(t)dt}=C\cosh^{-(D-1)}(t)=\frac{C\sqrt{g_\Omega}}{\sqrt{|g|}},$$
где _ это некоторая константа, которая зависит от $\alpha_{1,2}$. Теперь мы должны найти такие $\alpha_{1,2}$ при которых $C=i$ чтобы удовлетворить (3.9). Используя [11], мы найдем что
$$W_t\left(\alpha_1\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})+\alpha_2\frac{2}{\pi}\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}),\alpha_1^*\mathsf{P}_\nu^{i\mu}(\tilde{t})+\alpha_2^*\frac{2}{\pi}\mathsf{Q}_\nu^{i\mu}(\tilde{t})\right)=$$
$$=\left(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\right)\frac{2i\sinh(\mu\pi)}{\pi}-\left(\alpha_1^*\alpha_2-\alpha_2^*\alpha_1\right)\frac{2\cosh(\mu\pi)}{\pi}=i. \quad (3.10)$$
Это и есть условие, которому должны удовлетворять коэффициенты $\alpha_{1,2}$ чтобы канонические коммутационные соотношения были выполнены.

Тогда Out-моды задаются:
$$\alpha_1=\sqrt{\frac{\pi}{2\sinh(\mu\pi)}},\quad \text{и}\quad \alpha_2=0. \quad (3.11)$$
В тоже время In-моды соответствуют:
$$\alpha_1=\sqrt{\frac{\pi}{2\sinh(\mu\pi)}},\qquad \alpha_2=0,\qquad \text{в нечетных измерениях,}$$
$$\text{и}\quad \alpha_2=\sqrt{\frac{\pi}{2\sinh(\mu\pi)}},\qquad \alpha_1=0,\qquad \text{в четных измерениях.}$$
В общем случае, для действительных $\alpha_{1,2}$ удовлетворяющих (3.10) полученое решение (3.2) связано с $\alpha-$ модами, введенными в статьях [3], [4], преобразованием Боголюбова.

3.3. Преобразования Боголюбова

Рассмотрим разложение поля $\varphi(t,\vec{x})$ по модам с другими коэффициентами (β_1 и β_2) и соответствующими операторами $\hat{b}^\dagger_{j,m}$ и $\hat{b}_{j,m}$. Здесь β_1 и β_2 удовлетворяют таким же соотношениям что α_1 и α_2, т.е. (3.10). Разложение оператора поля $\hat{\varphi}(t,\vec{x})$ в этих модах, выглядит как:
$$\hat{\varphi}(t,\vec{x})=\sum_{j,m}\cosh(t)^{-\frac{D-1}{2}}\Bigg[\left(\beta_1\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})+\beta_2\frac{2}{\pi}\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})\right)Y_{jm}(\vec{x})\hat{b}^\dagger_{j,m}+$$
$$+\left(\beta_1^*\mathsf{P}_\nu^{i\mu}(\tilde{t})+\beta_2^*\frac{2}{\pi}\mathsf{Q}_\nu^{i\mu}(\tilde{t})\right)Y^*_{jm}(\vec{x})\hat{b}_{j,m}\Bigg]. \quad (3.12)$$

Используя (3.6) можно переписать α и β - моды в терминах $\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})$ и $\mathsf{P}_\nu^{i\mu}(\tilde{t})$ вместо $\mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})$ и $\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})$. Тогда можно сравнить (3.8) с (3.12). Коэффициенты перед $\mathsf{P}_\nu^{\pm i\mu}$ в обоих разложениях должны быть равны. Таким образом мы получаем два уравнения:

$$\alpha_2 Y C_+ \hat{a}^\dagger + (\alpha_1^* + \alpha_2^* C_-^*) Y^* \hat{a} = \beta_2 Y C_+ \hat{b}^\dagger + (\beta_1^* + \beta_2^* C_-^*) Y^* \hat{b},$$
$$\alpha_2^* Y^* C_+^* \hat{a} + (\alpha_1 + \alpha_2 C_-) Y \hat{a}^\dagger = \beta_2^* Y^* C_+^* \hat{b} + (\beta_1 + \beta_2 C_-) Y \hat{b}^\dagger,$$

Мы обозначили $Y_{j,m} = Y$ для того чтобы упростить последние выражения, и также обозначили

$$C_+ = -i\frac{\Gamma(\nu - i\mu + 1)}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(\nu + i\mu + 1)} \quad \text{и} \quad C_- = i\coth(\mu\pi).$$

Можно найти решение этих уравнение в следующей форме $\hat{a}^\dagger = u_b \hat{b}^\dagger + u_a \hat{a}$. Ниже нам понадобится только u_b:

$$u_b = \frac{|\beta_1 + \beta_2 C_-|^2 - |C_+|^2 |\beta_2|^2}{\alpha_2 \beta_2^* + \alpha_1 \beta_1^* + \alpha_2 \beta_1^* C_- + \alpha_1 \beta_2^* C_-^*}. \tag{3.13}$$

Заметим, что u_b не зависит от j и этот факт нам окажется важным ниже.

3.4. $\alpha - \beta$ пропагатор Фейнмана

3.4.1. Разложение по модам

Обозначим:

$$f_{1,j} = \left(\alpha_1 \mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) + \alpha_2 \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})\right) \cosh(t)^{-\frac{D-1}{2}} \quad \text{и} \quad f_{2,j} = \left(\beta_1 \mathsf{P}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t}) + \beta_2 \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(\tilde{t})\right) \cosh(t)^{-\frac{D-1}{2}}.$$

Наша цель в том, что бы вычислить пропагатор Фейнмана между состояниями $\Big|\alpha\Big\rangle$ и $\Big|\beta\Big\rangle$, которые определены как $\hat{a}_{j,m}\Big|\alpha\Big\rangle = 0$ и $\hat{b}_{j,m}\Big|\beta\Big\rangle = 0$:

$$G_{\alpha-\beta}(t_1,\vec{x}|t_2,\vec{y}) = \frac{\Big\langle\beta\Big|T\varphi(\vec{y},t_2)\varphi(\vec{x},t_1)\Big|\alpha\Big\rangle}{\Big\langle\beta\Big|\alpha\Big\rangle} =$$
$$= \frac{1}{\Big\langle\beta\Big|\alpha\Big\rangle}\Big\langle\beta\Big| \sum_{j,m,j',m'} f_{2,j}^*(t_2) Y_{j,m}^*(\vec{y}) f_{1,j'}(t_1) Y_{j',m'}(t_2) \hat{a}_{j',m}^\dagger \Big|\alpha\Big\rangle =$$
$$= \frac{1}{\Big\langle\beta\Big|\alpha\Big\rangle}\Big\langle\beta\Big| \sum_{j,m,j',m'} (f_{2,j}^*(t_2) Y_{j,m}^*(\vec{y}) \hat{b}_{j,m} f_{1,j'}(t_1) Y_{j,m'}(\vec{x}) \hat{b}_{j,m} (u_b \hat{b}_{j,m}^\dagger + u_a \hat{a}_{j,m}) \Big|\alpha\Big\rangle =$$
$$= \sum_{j,m} f_{2,j}^*(t_2) f_{1,j}(t_1) u_b Y_{j,m}^*(\vec{y}) Y_{j,m}(\vec{x}). \tag{3.14}$$

Предположим что ($t_1 < t_2$). Тогда в $D > 2$ можно использовать соотношение:

$$\sum_{m=1}^{N_{j,D}} Y_{j,m}(\vec{y})Y^*_{j,m}(\vec{x}) = \frac{2j + D - 2}{|S^{D-1}|(D-2)} C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}).$$

Где $C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y})$ это полиномы Гегенбауэра, а $|S^{D-1}|$ - это площадь $(D-1)$-мерной сферы. Тогда:

$$\begin{aligned} G_{\alpha-\beta}(t_1,\vec{x}|t_2,\vec{y}) = \frac{u_b \cosh(t_1)^{-\frac{D-1}{2}} \cosh(t_2)^{-\frac{D-1}{2}}}{|S^{D-1}|(D-2)} \times \\ \times \sum_j \Big(2j + D - 2\Big)\Big(\beta_1^* \mathsf{P}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t_2}) + \beta_2^* \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t_2})\Big) \times \\ \times \Big(\alpha_1 \mathsf{P}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t_1}) + \alpha_2 \frac{2}{\pi} \mathsf{Q}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t_1})\Big) C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

В будущем мы всегда вычисляем эту функцию в четных измерениях. Повторимся, что мы не изучаем α-состояния и моды в нечетных размерностях потому что там $\Big|\text{In}\Big\rangle = \Big|\text{Out}\Big\rangle$.

3.4.2. Точный вид пропагатора

Чтобы вычислить (3.15) мы будем использовать уравнения из приложения. Пропагатор (3.15) может быть переписан как:

$$\begin{aligned} G_{\alpha-\beta}(t_1,\vec{x}|t_2,\vec{y}) = \frac{2u_b}{\pi}\Big(A1\Big)\Big[\beta_1^*\alpha_2 - i\beta_1^*\alpha_1 \coth\mu\pi\Big] - \Big(A1\Big)^* \frac{2u_b\beta_2^*\alpha_1}{\pi\sinh^2\mu\pi} + \\ + \Big(A2\Big)\frac{2u_b}{\pi\sinh\mu\pi}\Big[i\beta_1^*\alpha_1 + \beta_2^*\alpha_1\coth\mu\pi\Big] + \Big(A3\Big)\frac{4u_b}{\pi^2}\Big[\beta_2^*\alpha_2 - i\beta_2^*\alpha_1\coth\mu\pi\Big] \end{aligned} \tag{3.16}$$

где (A1), (A2) и (A3) это выражения из соответствующих формул в приложение. Обозначим:

$$Z_\pm \equiv Z \pm i\epsilon = \frac{-\tilde{t_1}\tilde{t_2} + \vec{x}\vec{y}}{\sqrt{1-\tilde{t_1}^2}\sqrt{1-\tilde{t_2}^2}} \pm i\epsilon. \tag{3.17}$$

Это скалярно-инвариантное (гиперболическое расстояние) между $(t_1,\vec{x})$ и $(t_2,\vec{y})$ выраженное через координаты глобального де Ситтера. Также, ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$$F^k_a(x) = (x^2-1)^{-\frac{k}{2}} P^k_a(x), \qquad S^k_a(x) = (x^2-1)^{-\frac{k}{2}} Q^k_a(-x), \tag{3.18}$$

В этих обозначение уравнение (3.16) приобретает следующую форму:

$$G_{\alpha-\beta}(Z) = \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Bigg[S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+)\Big(B_1+B_2e^{-\mu\pi}-\frac{i\pi}{2}B_3\Big)+S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big(B_1+B_2e^{\mu\pi}+\frac{i\pi}{2}B_3\Big)+$$
$$+B_4\Big(S^{\frac{D-2}{2}}_{i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+)+S^{\frac{D-2}{2}}_{i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big)+B_3\frac{i\pi^2}{2\cosh\mu\pi}\Big(F^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+)-F^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big)\Bigg], \quad (3.19)$$

где:

$$B_1 = \frac{2u_b}{\pi}\Big[\beta_1^*\alpha_2 - i\beta_1^*\alpha_1\coth\mu\pi\Big], \qquad B_4 = -\frac{2u_b}{\pi}\frac{\beta_2^*\alpha_1}{\sinh^2\mu\pi},$$
$$B_2 = \frac{2u_b}{\pi\sinh\mu\pi}\Big[i\beta_1^*\alpha_1 + \beta_2^*\alpha_1\coth\mu\pi\Big], \qquad B_3 = \frac{4u_b}{\pi^2}\Big[\beta_2^*\alpha_2 - i\beta_2^*\alpha_1\coth\mu\pi\Big],$$

как это следует из (3.16).

3.5. Поведение произвольного $\alpha-\beta$ пропагатора вблизи совпадающих точек

Совпадающие[6] точки соответствуют $Z=1$. Значит разложим:

$$Z \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{где} \quad \delta \to 0.$$

Выражение в последних скобках в формуле (3.19) исчезает из-за свойств функции $F^k_a(Z)$ для целого k. Чтобы получить поведение остальных членов нам нужна следующая формула, которая используется, например, в [10]:

$$S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_\pm) = \frac{|\Gamma(h_+)|^2}{2^{\frac{D}{2}}\Gamma\big(\frac{D}{2}\big)}\Bigg[\mp i(-1)^{\frac{D}{2}}e^{\pm\mu\pi}F\Big(\frac{1+Z_\pm}{2}\Big)+F\Big(\frac{1-Z_\pm}{2}\Big)\Bigg], \qquad (3.20)$$

где $h_\pm$:

$$h_\pm = \frac{D-1}{2} \pm i\mu, \qquad (3.21)$$

и

$$F(x) \equiv {}_2F_1\Big(h_+,h_-,\frac{D}{2},x\Big). \qquad (3.22)$$

Только в первом члене (3.20), а не во втором есть сингулярность в $Z=1$. То есть в обсуждаемом пределе пропагатор может быть разделен на две части:

$$G_{\alpha-\beta}\Big(Z\approx 1-\frac{\delta^2}{2}\Big) = G_{\rm sing}(\delta) + G_{\rm finite}(\delta). \qquad (3.23)$$

[6]Вернее точки разделенные свето-подобным интервалом отвечают $Z=1$, но мы для простоты будем называть это совпадающими точками.

Используя соотношения

$$F\Big(\frac{1+Z_\pm}{2}\Big) \approx -\frac{1}{4}\frac{\Gamma\big(\frac{D}{2}\big)\Gamma\big(\frac{D-2}{2}\big)}{|\Gamma(h_+)|^2}\frac{4^{\frac{D}{2}}}{\delta^{D-2}}, \quad \text{при} \;\; \delta \to 0, \tag{3.24}$$

можно показать, что

$$G_{\rm sing}(\delta) \approx \frac{\Gamma\Big(\frac{D-2}{2}\Big)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}\frac{2u_b}{\pi}\Bigg[\cosh\mu\pi\Big(\beta_1^*\alpha_1+\beta_2^*\alpha_2\Big)+i\sinh\mu\pi\Big(\beta_1^*\alpha_2-\beta_2^*\alpha_1\Big)\Bigg] =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}\Gamma\Big(\frac{D-2}{2}\Big)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}T, \quad \text{при}\; \delta\to 0, \tag{3.25}$$

что совпадает с поведением пропагатора в плоском пространстве Минковского, но умноженное на некоторую константу T, которая зависит от конкретных α и β. В тоже самое время, конечная часть (3.20) это:

$$G_{\rm finite} \approx \frac{2(-1)^{\frac{D-2}{2}}|\Gamma(h_+)|^2u_b}{\pi(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma\Big(\frac{D}{2}\Big)}\Bigg[\beta_1^*\alpha_2+\beta_2^*\alpha_1\Bigg], \quad \text{при}\; \delta\to 0. \tag{3.26}$$

Ниже мы исследуем, $G_{\rm sing}$ и $G_{\rm finity}$ для конкретных значений $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$. Заметим что, $(\alpha-\beta)$-пропагатор имеет вторую особенность в $Z=-1$ помимо $Z=1$

3.6. $\alpha-\beta$ Пропагаторы в глобальном пространстве де Ситтера для некоторых конкретных значений $\alpha-\beta$

Так-как в нечетных измерениях $\Big|\text{Out}\Big\rangle = \Big|\text{In}\Big\rangle$, то $G_{\text{In-In}} = G_{\text{In-Out}}$ и эти два пропагатора не имеют мнимой части

3.6.1. In-In в четных размерностях

Исходя из определения In-мод в главе 3.2 , In-In пропагатор соответствует:

$$\alpha_1=\beta_1=\sqrt{\frac{\pi}{2\sinh(\mu\pi)}}, \qquad \alpha_2=\beta_2=0, \quad \text{then} \quad u_b=1.$$

Следовательно,

$$G^{\rm even}_{\text{In-In}}(\delta) \approx \frac{\Gamma\Big(\frac{D-2}{2}\Big)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}\coth\mu\pi. \tag{3.27}$$

Этот пропагатор не имеет мнимой части, также и $G_{\rm finite}=0$

3.6.2. In-Out в четных размерностях

В этом случае:

$$\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\sinh(\mu\pi)}}; \quad \alpha_1 = \beta_2 = 0, \quad \text{тогда} \;\; u_b = -i\tanh(\mu\pi).$$

1 В этом случае сумма (3.25) и (3.26) имеет следующую форму:

$$G^{\text{even}}_{\text{In-Out}}(\delta) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}\tanh\mu\pi - i\frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}|\Gamma(h_+)|^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\cosh\pi\mu}, \quad \text{при} \;\; \delta\to 0. \tag{3.28}$$

Этот пропагатор имеет конечную мнимую часть, которая равна:

$$\boxed{\operatorname{Im}\, G^{\text{even}}_{\text{In-Out}}(Z=1) = -\frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}|\Gamma(h_+)|^2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\cosh\pi\mu}.} \tag{3.29}$$

3.6.3. $\alpha - \alpha$ пропагатор

Теперь рассмотрим случай:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \;\; \text{тогда} \;\; u_b = 1. \tag{3.30}$$

В результате:

$$G_{\alpha-\alpha} \approx \frac{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}\frac{2}{\pi}\left[\cosh\mu\pi\left(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2\right) + i\sinh\mu\pi\left(\alpha_1^*\alpha_2 - \alpha_2^*\alpha_1\right)\right] = \tag{3.31}$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{D}{2}}\delta^{D-2}}T, \;\; \text{при} \; \delta\to 0, \tag{3.32}$$

Найдем ограничения на T, используя условие (3.10), можно доказать что:

$$T \geq 1. \tag{3.33}$$

Минимум значения T соответствует случаю, когда:

$$-i\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\frac{\pi}{4e^{\mu\pi}}}. \tag{3.34}$$

И значение $T=1$ не может быть достигнуто когда α_1 и α_2 оба реальные.

3.7. Соответствие между α-модами глобальном де Ситтере и модами Банча-Девиса в Пуанкаре патче

Скажем несколько комментариев по поводу мод Банча-Девиса в Пуанкаре регионе. Можно подобрать такие α_1 и α_2, которые дадут пропагатор равный пропагатору Банча-Девиса в Пуанкаре регионе. Такие моды соответсвуют так называемым евклидовым модам $\Big|\mathrm{E}\Big\rangle$. Они обладают следующим свойством $f(t) = f^*(-t)$, а соответсвующий пропагатор ведет себя в совпадающих точках как пропагатор в плоском минковском пространстве. Эти моды описаны в [3] и [7] и соответствуют $\Big|\mathrm{BD}\Big\rangle$ или $\Big|\mathrm{In}\Big\rangle$ -состояниям в Пуанкаре регионе. Т.е. так называемый БД-БД пропагатор в Пуанкаре регионе совпадает с Е-Е пропагатором в глобальном де Ситтере.

Так же стоит отметить что, не смотря на то что есть соответствие между пропагаторами, нельзя написать преобразования Боголюбова между операторами в глобальном де Ситтере и Пуанкаре регионе, потому что соответствующие моды являются базисом в разных функциональных пространствах (с разными граничными условиями).

4. Заключение

Сейчас мы хотим привести ещё один аргумент почему фейнмановский пропагатор не имеет мнимой части в нечетных размерностях[7]. Эффективное действие можно переписать через интеграл по путям для частицы:

$$iS_{eff} = \log\left(\int d[\varphi] e^{i\int d^dx\mathcal{L}}\right) = \int_0^\infty \frac{dT}{T}\int_{x(0)=x(T)} d[x] e^{i\int_0^T dt\left(\frac{\dot{x}^2}{4}+m^2\right)} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{iS_{\text{extremal}}}\sqrt{\frac{1}{\det(\triangle)}},$$

где S_{extremal} это экстремальное действие для частицы, а $\triangle$ это оператор, описывающий флуктуации вблизи экстремума.

Обычно такие интегралы вычисляются после поворота Вика в евклидову сигнатуру. После такого поворта пространство де Ситтера переходит в сферу. Можно показать что геодезическая линия на сфере это экватор. На $D-$ сфере существуют $(D-1)$ направления, в коотрых можно стянуть геодезическую, что соответствует $(D-1)$ негативным собственным значениям. Так что:

$$-S^E_{eff} \sim \det(\triangle_1)^{-\frac{1}{2}} \sim (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Как следствие для четных измерений $(ImS_{eff}) \neq 0$, а для нечетных мы получаем ноль.

[7] Хотим поблагодарить за это А. Полякова, подсказавшего этот аргумент.

α-β Фейнмановский пропагатор был посчитан в четных измерениях в глобальном пространстве де Ситтера. Получено что in- и out- одинаковы в нечетных измерениях, следовательно in-out Фейнмановский пропагатор не имеет мнимой части. Но в нечетных измерения картина интереснее. Мнимая часть пропагатора равна (3.29).

5. Приложение

Следующие вычисления работают только при четных D. Здесь и далее, под произведением двух функций Лежандра (например:$\mathsf{P}(x)\mathsf{Q}(y)$) подразумевается, что это произведение упорядоченно т.е. $x > y$. Чтобы упростить формулы мы будем использовать обозначения из (3.18). Также нам понадобятся три формулы из [5]:

$$\frac{\Big(\cosh t_2 \cosh t_1\Big)^{-\frac{D-1}{2}}}{(D-2)|\Omega_{D-1}|}\sum_j \Big(2j+D-2\Big)\mathsf{P}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_2)\mathsf{Q}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_1)C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}) =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Big[(Z_+^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_+) + (Z_-^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_-)\Big] =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Big[S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+) + S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big], \quad \text{(A1)}$$

$$\frac{\Big(\cosh t_2 \cosh t_1\Big)^{-\frac{D-1}{2}}}{(D-2)|\Omega_{D-1}|}\sum_j \Big(2j+D-2\Big)\frac{\Gamma(j+\frac{D-3}{2}-i\mu+1)}{\Gamma(j+\frac{D-3}{2}+i\mu+1)}\mathsf{P}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_2)\mathsf{Q}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_1)C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}) =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Big[e^{-\pi\mu}(Z_+^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_+) + e^{\pi\mu}(Z_-^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_-)\Big] =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Big[e^{-\pi\mu}S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+) + e^{\pi\mu}S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big] \quad \text{(A2)}$$

и

$$\frac{\Big(\cosh t_2 \cosh t_1\Big)^{-\frac{D-1}{2}}}{(D-2)|\Omega_{D-1}|}\sum_j \Big(2j+D-2\Big)\mathsf{Q}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_2)\mathsf{Q}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_1)C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}) =$$
$$= -\frac{i\pi}{2}\frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Bigg[(Z_+^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_+) - (Z_-^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}Q^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(-Z_-) -$$
$$- \frac{\pi}{\cosh\pi\mu}\Big((Z_+^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}P^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+) - (Z_-^2-1)^{-\frac{D-2}{4}}P^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big)\Bigg] =$$
$$= -\frac{i\pi}{2}\frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\Bigg[S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+) - S^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-) - \frac{\pi}{\cosh\pi\mu}\Big(F^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_+) - F^{\frac{D-2}{2}}_{-i\mu-\frac{1}{2}}(Z_-)\Big)\Bigg]. \quad \text{(A3)}$$

где мы использовали $Z_\pm$, которые определены в (3.17). Чтобы посчитать (3.15) мы должны выполнить четыре суммы поj. В соответствии с [5]:

$$\mathsf{P}^{-i\mu}_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu-i\mu+1)}{\Gamma(\nu+i\mu+1)}\Big[\cosh\pi\mu\ \mathsf{P}^{i\mu}_\nu(x) - \frac{2i}{\pi}\sinh\pi\mu\ \mathsf{Q}^{i\mu}_\nu\Big], \quad \text{(A4)}$$

$$\mathsf{Q}_\nu^{-i\mu}(x) = \frac{\Gamma(\nu - i\mu + 1)}{\Gamma(\nu + i\mu + 1)}\Big[\frac{\pi i}{2}\sinh\pi\mu\ \mathsf{P}_\nu^{i\mu}(x) + \cosh\pi\mu\ \mathsf{Q}_\nu^{i\mu}\Big]. \tag{A5}$$

Можно преобразовать сумму (3.15) в $(A1)$, $(A2)$, and $(A3)$. Мы обозначаем сумму как:

$$\mathsf{P}^+\mathsf{Q}^- = \frac{\Big(\cosh t_2 \cosh t_1\Big)^{-\frac{D-1}{2}}}{(D-2)|\Omega_{D-1}|}\sum_j \Big(2j + D - 2\Big)\mathsf{P}^{i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_2)\mathsf{Q}^{-i\mu}_{j+\frac{D-3}{2}}(\tilde{t}_1)C_j^{\frac{D-2}{2}}(\vec{x}\vec{y}).$$

В результате:

$$\mathsf{P}^+\mathsf{P}^- = \frac{2}{\pi}\frac{i}{\sinh\mu\pi}(A2) - \frac{2i\cosh\mu\pi}{\pi\sinh\mu\pi}(A1),$$

и

$$\mathsf{Q}^+\mathsf{P}^- = -\frac{1}{\sinh^2\mu\pi}(A1)^* + \frac{\cosh\mu\pi}{\sinh^2\mu\pi}(A2) - \frac{2i\cosh\mu\pi}{\pi\sinh\mu\pi}(A3).$$

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **797**, 199 (2008) doi:10.1016/j.nuclphysb.2008.01.002 [arXiv:0709.2899 [hep-th]].

[2] E. T. Akhmedov, Mod. Phys. Lett. A **25**, 2815 (2010) doi:10.1142/S0217732310034043 [arXiv:0909.3722 [hep-th]].

[3] E. Mottola, Phys. Rev. D **31**, 754 (1985). doi:10.1103/PhysRevD.31.754

[4] B. Allen, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985). doi:10.1103/PhysRevD.32.3136

[5] M. Fukuma, S. Sugishita and Y. Sakatani, Phys. Rev. D **88**, no. 2, 024041 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.024041 [arXiv:1301.7352 [hep-th]].

[6] E. T. Akhmedov, Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014) doi:10.1142/S0218271814300018 [arXiv:1309.2557 [hep-th]] .

[7] R. Bousso, A. Maloney and A. Strominger, Phys. Rev. D **65**, 104039 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.104039 [hep-th/0112218].

[8] Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]

Bateman, Harry (1953) Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]. Vol.I-III. McGraw-Hill Book Company , New York.

[9] D. Krotov and A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011) doi:10.1016/j.nuclphysb.2011.03.025 [arXiv:1012.2107 [hep-th]].

[10] E. Alvarez and R. Vidal, JHEP **0910**, 045 (2009) doi:10.1088/1126-6708/2009/10/045 [arXiv:0907.2375 [hep-th]].

[11] The Digital Library of Mathematical Functions (DLMF): Wronskians and Cross-Products of Legendre and Related Functions. https://dlmf.nist.gov/14.2