Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Динамические уравнения для суперæлгебр Ли и интегрируемые системы частиц

Выпускная квалификационная работа на соискание степени магистра

Выполнил:
студент 321 группы
Доценко Егор Иванович

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Ольшанецкий Михаил Аронович

Москва 2019

Содержание

1 Введение

Существет давняя и глубокая связь между интегрируемыми системами частиц (как классическими так и квантовыми) и простыми конечномерными алгебрами Ли. В дальнейшем будет обсуждаться связь между тремя объектами, которые можно построить по простой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$: интегрируемыме системы Калоджеро, (твистованную) систему уравнений Книжника-Замолодчикова (КЗ для кратности), Динамические уравнения и их близкого родственника- связность Казимира.

(i) Система Калоджеро строится по системе корней R алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Конфигурационным пространством системы является $\mathfrak{h}^{reg}$- это Картановская подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ из которой выкинули корневые гиперпроскости. Система коней отвечает взаимодействию в системе. Пример гамильтониана, квадратиного по импульсам, приведен ниже

$$H_2 = \sum_{i=1}^{rk(\mathfrak{g})} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{\alpha>0} \frac{\nu_\alpha}{\langle \alpha, x \rangle^2}, \tag{1}$$

где ν_α- констатны связи, постоянные на корнях одинаковой длины. Гамильтониан (1) интегрируем по Лиувиллю: существуют гамильтонианы $H_3, \ldots, H_{rk(\mathfrak{g})}$, находящиеся в инволюци с (1) и между собой и функционально независимые. Интегрируемая система Калоджеро может быть проквантована, что $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ и $\hat{H}_i$ это дифференциальный опреатор порядок которого равен степени i-того порождающего (базисного) многочлена, инвариантного относительно соответствующей группы Вейля. Утверждение о классической и квантовой интегрируемости систем Калоджеро- основополагающее открытие, сделанное М. Ольшанецким и А. Переломовым в [1] и [2].

(ii) Система уравнений Книжника-Замолодчикова (КЗ для кратности) имеет вид

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j,\neq i} \frac{\sum_{a=1}^{dim \mathfrak{g}} t_a^{(i)} \otimes t_a^{(j)}}{z_i - z_j} \right) |\Psi\rangle = 0, \tag{2}$$

где $\kappa \in \mathbb{C}^\times$, t_a- ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга. Вектор $|\Psi\rangle \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$, где V_i- конечномерные неприводимые представления $\mathfrak{g}$, а $t_a^{(i)}$ нетривиально действует только в $i-$том тензорном сомножителе (для более подробного обсуждения этой системы можно заглянуть в [18]).

Система (2) может быть твистована следующим образом с сохранением условия совместности

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{i=1}^{rk(\mathfrak{g})} \lambda_i h_i - \sum_{j,\neq i} \frac{\sum_{a=1}^{dim \mathfrak{g}} t_a^{(i)} \otimes t_a^{(j)}}{z_i - z_j} \right) |\Psi\rangle = 0, \tag{3}$$

Где h_i- некоторый базис в $\mathfrak{h}$. Система КЗ может рассматриваться как деавтономизация модели Годена, тогда твистованная КЗ система может рассматриваться как девтономизация модели Годена с твистованными гран. условиями.

(iii) В [5] была обнаружена совместная система уравнений по параметрам твиста, которая коммутирует с (3) и имеет следующий вид

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \sum_j z_j h_i^{(j)} - \sum_{\alpha>0} \frac{\langle \alpha, \epsilon_i \rangle}{\langle \alpha, \lambda \rangle} \right) |\Psi\rangle = 0, \tag{4}$$

где ϵ_i образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{h}^*$ и, следовадельно, корни алгебры выражаются через их линейные комбинации.

Также, раньше и независимо две группы Де Консини, Прочези и Миллсон, Толедано-Ларедо открыли, что на тривиальном векторном расслоении $\mathfrak{h}^{reg} \times V$, где V- представление $\mathfrak{g}$ (не обязательно неприводимое) имеется плоская связность, которая задается следующей явной формулой

$$\nabla = d - \hbar \sum_{\alpha>0} \kappa_\alpha \frac{d\alpha}{\alpha}, \tag{5}$$

где d- дифференциал де Рама, $\alpha-$ корень, а $\alpha > 0$ значит, что корень положительный. $\kappa_\alpha = \frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}(e_\alpha f_\alpha + f_\alpha e_\alpha)$, где e_α, f_α- корневые генераторы. Кроме $\nabla^2 = 0$ эта связность имеет другие свойства, о которых будет сказано познее.

(i), (ii) и (iii) связаны следующим образом. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, и $V_i = \mathbb{C}^n$ (число отмеченных точек равно рангу), Тогда рассмотрим в $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^n$- подпространство, инвариантное относительно действия Картановской подалгебры $\mathfrak{sl}(n)$ и обозначим его за $V[0]$. На $V[0]$ имеются два ковектора

$$\langle\Omega^+| = \sum_{\sigma\in S_n} \langle e_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma(n)}|, \tag{6a}$$

$$\langle\Omega^-| = \sum_{\sigma\in S_n} \langle e_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma(n)}|(-1)^{sgn(\sigma)}, \tag{6b}$$

где e_i- некоторый базис в $\mathbb{C}^n$. Имеется следующее утверждение

Theorem 1.1 (Соответствие Мацуо-Чередника). *Пусть $|\Psi\rangle \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^n$- решает совместную задачу (3) и (4) для $\mathfrak{sl}(n)$, тогда $\langle\Omega^\pm|\Psi\rangle$ решает биспектральную задачу в смысле [6], а именно*

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^n \partial_{z_a}^2 + \sum_{a\neq b} \frac{\pm\kappa - 1}{(z_{ab})^2}\right) \langle\Omega^\pm|\Psi\rangle = \left(\sum_{a=1}^n \lambda_a^2\right) \langle\Omega^\pm|\Psi\rangle, \tag{7a}$$

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^n \partial_{\lambda_a}^2 + \sum_{a\neq b} \frac{\pm\kappa - 1}{(\lambda_{ab})^2}\right) \langle\Omega^\pm|\Psi\rangle = \left(\sum_{a=1}^n z_a^2\right) \langle\Omega^\pm|\Psi\rangle. \tag{7b}$$

Это утверждение появлялось в литературе в разных формах- в основном на языке алгебр Чередника. Алгебраический подход был использован в [22] (раздел 7) и в [23], геометрические методы были использованы в [19]. Также следует отметить недавний прогресс в расширении соответствия Мацуо-Чередника между уравнениями КЗ и системами семейства Калоджеро-Руджженарса для подпространств веса отличного от 0-[20] и [15] . Идея расширения соответствия возникла из квантово-классического соответствия в интергируремых системах [17], [16].

Настоящая дипломная работа посвящена обобщению Динамических уравнений и связностей Казимира на случай некоторых супералгебр Ли. Работа частично основывается на [14] и организована следующим образом:

В **Разделе 2** мы доказываем совместность предложенных Динамических уравнений и их совместность с уравнениями КЗ для $\mathfrak{gl}(n|m)$

В **Разделе 3** мы устанавливаем соответствие Мацуо-Чередника для Дин. уравнений

В **Разделе 4** мы строим связности Казимира для некоторых супералгебр

В **Разделе 5** мы подводим итоги и обсуждаем некоторые открытые вопросы.

2 Динамические уравнения

Пусть $\overrightarrow{z} \in \mathbb{C}^k \setminus \amalg_{i<j} z_i = z_j$ и $\overrightarrow{\lambda} \in \mathbb{C}^{n+m} \setminus \amalg_{i<j} \lambda_i = \lambda_j$. Пусть $V = \bigotimes_{i=1}^k \mathbb{C}^{n|m}$ будет тензорным произведением векторных представлений $\mathfrak{gl}(n|m)$. И пусть $|\Psi\rangle : (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{\lambda}) \to V$ будет плоским сечением, а именно

$$\left(\kappa\partial_{z_i} - \sum_c \lambda_c e_{cc}^{(i)} - \sum_{j,\neq i} \frac{P_{ij}}{z_i - z_j}\right)|\Psi\rangle = 0, \tag{8}$$

где градуированная перестановка $P_{ij} = \sum_{a,b}(-1)^{p(b)} e_{ab}^{(i)} e_{ba}^{(j)}$ и $p(a)$ функция четности, опеределенная в Аппендиксе. $e_{ab}^{(j)}$ - генератор $\mathfrak{gl}(n|m)$, который нетривиально действует только в i тензоном сомножителе V как матричная единица в некотором базисе (см Аппендикс).

Theorem 2.1. *Следующая система уравнений совместна и коммутирует с (8)*

$$\left(\kappa\partial_a - \sum_j z_j e_{aa}^{(j)} - \sum_{b,\neq a}(-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_b}\right)|\Psi\rangle = 0, \tag{9}$$

где $E_{ab} = \sum_{j=1}^k e_{ab}^{(j)}$.

Доказательство. Сперва докажем, что (9) совместная система. Для того, чтобы это показать нам нужно проверить, что следующий коммутатор зануляется

$$\left[\kappa\partial_a - \sum_j z_j e_{aa}^{(j)} - \sum_{c,\neq a}(-1)^{p(c)} \frac{E_{ac}E_{ca} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_c}, \kappa\partial_b - \sum_l z_l e_{bb}^{(l)} - \sum_{d,\neq b}(-1)^{p(d)} \frac{E_{bd}E_{db} - E_{bb}}{\lambda_b - \lambda_d}\right] = 0. \tag{10}$$

Есть три типа членов

(1)
$$\begin{gathered}\left[\partial_a, \sum_{d,\neq b}(-1)^{p(d)} \frac{E_{bd}E_{db} - E_{bb}}{\lambda_b - \lambda_d}\right] + \left[\sum_{c,\neq a}(-1)^{p(c)} \frac{E_{ac}E_{ca} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_c}, \partial_b\right] = \\ = (-1)^{p(a)} \frac{E_{ba}E_{ab} - E_{bb}}{(\lambda_b - \lambda_a)^2} - (-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba} - E_{aa}}{(\lambda_a - \lambda_b)^2} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Последнее уравнение выполнено из-за соотношений (58).

(2)
$$\begin{gathered}\left[\sum_j z_j e_{aa}^{(j)}, \sum_{d,\neq b}(-1)^{p(d)} \frac{E_{bd}E_{db} - E_{bb}}{\lambda_b - \lambda_d}\right] + \left[\sum_{c,\neq a}(-1)^{p(c)} \frac{E_{ac}E_{ca} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_c}, \sum_l z_l e_{bb}^{(l)}\right] = \\ = \frac{(-1)^{p(a)}}{\lambda_{ba}}\left(\sum_j z_j (E_{ba}e_{ab}^{(j)} - e_{ba}^{(j)}E_{ab})\right) + \frac{(-1)^{p(b)}}{\lambda_{ab}}\left(\sum_j z_j (e_{ab}^{(j)}E_{ba} - E_{ab}e_{ba}^{(j)})\right) = 0\end{gathered} \tag{12}$$

Последнее выполнено благодаря (60)

(3)
$$\begin{gathered}\left[\sum_{c,\neq a}(-1)^{p(c)} \frac{E_{ac}E_{ca} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_c}, \sum_{d,\neq b}(-1)^{p(d)} \frac{E_{bd}E_{db} - E_{bb}}{\lambda_b - \lambda_d}\right] = \\ = \sum_{c,\neq a,b}\left(\left[(-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, (-1)^{p(c)} \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \right. \\ \left. + \left[(-1)^{p(c)} \frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, (-1)^{p(a)} \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right]\right) + (-1)^{p(a)+p(b)}\left[\frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right]\end{gathered} \tag{13}$$

Небольшое вычисление показывает, что этот коммутатор зануляется. Сосредоточимся теперб на средней строчке выражения сверху, которая явдяется наиболее сложной. Чтобы доказать, что она зануляется нужно рассмотреть следующие 4 случая

p(a) = p(b) = 0, p(c)= 1

$$\begin{aligned} -\left[\frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] - \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right] = \\ = -\frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ab}\lambda_{bc}} + \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{bc}} - \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{ba}} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

p(a) = p(c) = 0, p(b)= 1

$$\begin{aligned} -\left[\frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right] = \\ = \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ab}\lambda_{bc}} - \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{bc}} + \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{ba}} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

p(b) = p(c) = 1, p(a)= 0

$$\begin{aligned} \left[\frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] - \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right] = \\ = \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}\lambda_{bc}} - \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{bc}} + \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{ba}} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

p(a) = p(b) = 1, p(c)= 0

$$\begin{aligned} -\left[\frac{E_{ab}E_{ba}}{\lambda_{ab}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] + \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{bc}E_{cb}}{\lambda_{bc}}\right] - \left[\frac{E_{ac}E_{ca}}{\lambda_{ac}}, \frac{E_{ba}E_{ab}}{\lambda_{ba}}\right] = \\ = -\frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ab}\lambda_{bc}} + \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{bc}} - \frac{E_{ac}E_{ba}E_{cb} - E_{bc}E_{ab}E_{ca}}{\lambda_{ac}\lambda_{ba}} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Два случая где четность a, b и c одинаковые рассматривать не нужно, потому что соответствующие операторы $\mathfrak{gl}(n|m)$ бозонные.

Проделанное вычисление доказывает, что система (9) совместна и, следовательно, первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем, что системы (8) и (9) совместны. Снова нужно показать, что следующий коммутатор зануляется

$$\left[\kappa\partial_{z_i} - \sum_c \lambda_c e^{(i)}_{cc} - \sum_{j,\neq i} \frac{P_{ij}}{z_i - z_j}, \kappa\partial_a - \sum_j z_j e^{(j)}_{aa} - \sum_{b,\neq a} (-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_b}\right] = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим наиболее сложную часть коммутатора, написанного сверху

1.

$$\begin{aligned} \left[\sum_c \lambda_c e^{(i)}_{cc}, \sum_{b,\neq a} (-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba} - E_{aa}}{\lambda_{ab}}\right] + \left[\sum_{j,\neq i} \frac{P_{ij}}{z_{ij}}, \sum_j z_j e^{(j)}_{aa}\right] = \\ = \sum_{b,\neq a} (-1)^{p(b)} \left(e^{(i)}_{ab} E_{ba} - E_{ab} e^{(i)}_{ba} - e^{(i)}_{ab} E_{ba} + E_{ab} e^{(i)}_{ba}\right) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

2.
$$\left[\sum_{j,\neq i}\frac{P_{ij}}{z_i-z_j},\sum_{b,\neq a}(-1)^{p(b)}\frac{E_{ab}E_{ba}-E_{aa}}{\lambda_a-\lambda_b}\right]=0. \tag{20}$$

Необходимо проверить, что
$$[P_{ij},E_{ab}E_{ba}]=0. \tag{21}$$

Небольшое вычисление показывает, что верхнее равество выполнено. □

3 Отображение Мацуо-Чередника

В этом Разделе мы зафиксируем $k = n + m$ в определении V.

Theorem 3.1. *следующие ковекторы, построенные в [15] необходимы, чтобы установить МЦ соотвествие для Динамических уравнений* (9)

$$\langle \Omega^0 | = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m} | P_\sigma, \tag{22a}$$

$$\langle \Omega^1 | = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m} | (-1)^{sgn(\sigma)} P_\sigma, \tag{22b}$$

где $P_\sigma = P_{s_{i_1}} \ldots P_{s_{i_l}}$, где $P_{s_{i_j}}$ это перестановка, которая отвечает транспозиции s_{i_j} и $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_l}$- некоторое разложение перестановки в произведение транспозиций. Так как $P_{s_{i_j}}$ удовлетворяет соотношениям в группе кос, то элемент P_σ корректно опрделен.

Появление (22b) есть свойство $V[1]$ на которое мы ограничиваем Дин. уравнение. $V[1] \subset V$- такое подпространство, что $E_{aa}|_{V[1]} = 1$ для всех $a \leq n+m$. Такое ограничение Дин. уравнний корректно, потому что сами уравнения (8) и (9) коммутируют с Картановской подалгеброй. Предположительно для других весовых подпространств (отличных от $V[1]$) МЦ соответствие не сработает, потому что в этом случае симметрия между $z's$ и $\lambda's$ исчезает. Докажем простую и важную

Lemma 3.2. *Ковектора* (22a) *и* (22b) *являются собственными векторами для следующих операторов*

$$\langle \Omega^i | (E_{ab} E_{ba} - E_{aa}) = (-1)^{p(b)+i} \langle \Omega^i |, \tag{23}$$

где $i = 0, 1$.

Доказательство. Вместо того, чтобы рассмотреть ковекторы, предложенные выше можно рассмотреть векторы $|\Omega^i\rangle$ и доказать для них аналогичные свойства. Простое вычисление показывает, что

$$(E_{ab} E_{ba} - E_{aa}) \, |e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}\rangle = (-1)^{p(b)} P_{ab} |e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}\rangle. \tag{24}$$

Симметризуя или кососимметризуя правую часть (24) мы неизбежно получаем (23)

□

Теперь мы готовы, чтобы доказать следующее

Theorem 3.3. *Пусть $|\Psi\rangle$- решение совместной системы* (8), (9) *со заченииями в $V[1]$, тогда*

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial^2_{z_a} + \sum_{a \neq b} \frac{(-1)^i \kappa - 1}{(z_{ab})^2} \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle = \left(\sum_{a=1}^{n+m} \lambda_a^2 \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle, \tag{25a}$$

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial^2_{\lambda_a} + \sum_{a \neq b} \frac{(-1)^i \kappa - 1}{(\lambda_{ab})^2} \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle = \left(\sum_{a=1}^{n+m} z_a^2 \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle, \tag{25b}$$

где $i = 0, 1$

Доказательство. (25a) было доказано в [15], таким образом нам требдуется доказать второе. Пусть D_a есть a^{th} дин. оператор (то что стоит в скобках в формуле (9)). Рассмотрим следующую сумму

$$\langle\Omega^i|\sum_{a=1}^{n} D_a^2|\Psi\rangle = \langle\Omega|\Bigg(\sum_{a=1}^{n}\kappa\frac{\partial^2}{\partial\lambda_a^2} - \{\sum_{i,a=1}^{n} z_i e_{aa}^{(i)}, \sum_{b\neq a}(-1)^{p(b)}\frac{E_{ab}E_{ba}-E_{aa}}{\lambda_a-\lambda_b}\} - \\ -\left(\sum_i z_i e_{aa}^{(i)}\right)^2 - \sum_{b\neq c\neq a}\frac{(-1)^{p(b)+p(c)}(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})(E_{ac}E_{ca}-E_{aa})}{(\lambda_a-\lambda_b)(\lambda_a-\lambda_c)} + \\ + \sum_{b\neq a}\frac{\kappa(-1)^{p(b)}(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})+(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})^2}{(\lambda_a-\lambda_b)^2}\Bigg)|\Psi\rangle, \tag{26}$$

при переходе с левой части (26) на правую были использованы (9). После применения (23) и тождества $\sum_{b\neq c\neq a}\frac{1}{(\lambda_a-\lambda_b)(\lambda_a-\lambda_c)} = 0$ выражение выше упрощается до

$$\langle\Omega^i|(\sum_{a=1}^{n+m}\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda_a^2} - \{\sum_{i,a=1}^{n+m} z_i e_{aa}^{(i)}, \sum_{b\neq a}(-1)^{p(b)}\frac{E_{ab}E_{ba}-E_{aa}}{\lambda_a-\lambda_b}\} - \sum_i z_i^2 + \sum_{b\neq a}\frac{\kappa(-1)^i-1}{(\lambda_a-\lambda_b)^2})|\Psi\rangle = 0. \tag{27}$$

Чтобы доказать утверждение нужно показать, что

$$\langle\Omega^i|\left(\{\sum_{i,a=1}^{n+m} z_i e_{aa}^{(i)}, \sum_{b\neq a}(-1)^{p(b)}\frac{E_{ab}E_{ba}-E_{aa}}{\lambda_a-\lambda_b}\}\right)|\Psi\rangle = 0. \tag{28}$$

Необходимо проверить только для любых разных a и b

$$\langle\Omega^i|\left(\{\sum_{i=1}^{n+m} z_i e_{aa}^{(i)}, (-1)^{p(b)}(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})\} - \{\sum_{i=1}^{n+m} z_i e_{bb}^{(i)}, (-1)^{p(a)}(E_{ba}E_{ab}-E_{bb})\}\right) = 0. \tag{29}$$

После раскрытия скабок получаем следующее

$$\langle\Omega^i|\left((\sum_{i=1}^{n} z_i e_{aa}^{(i)})(-1)^{p(b)}(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})\right) + (-1)^i\langle\Omega^i|(\sum_{i=1}^{n} z_i e_{aa}^{(i)}) - \\ -\langle\Omega^i|\left((\sum_{i=1}^{n} z_i e_{bb}^{(i)})(-1)^{p(a)}(E_{ba}E_{ab}-E_{bb})\right) - (-1)^i\langle\Omega^i|(\sum_{i=1}^{n} z_i e_{bb}^{(i)}). \tag{30}$$

Можно представить проекторы (22a), (22b) следующим образом

$$\langle\Omega^i| = \sum_{a_1\neq\ldots\neq a_{n+m}}\langle e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_a^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_b^{(j)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{n+m})}|f_i(a_1,\ldots,a_{n+m}). \tag{31}$$

где функции f_i обобщают функцию знака обычной перестановки на градуированный случай

Пусть $i=0$ и рассмотрим $p(a)=0$, $p(b)=1$ (самый нетривиальный случай) явно

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j,\neq i}\sum_{\{a_i=a,a_j=b\}}\langle e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_a^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_b^{(j)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{n+m})}|f_0(a_1,\ldots,a_{n+m})\right)\times \\ \times z_i\left((-1)^{p(b)}(E_{ab}E_{ba}-E_{aa})+1\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n+m}\Bigg(\sum_{j,\neq i}\sum_{\{a_i=a,a_j=b\}}\Big[\langle e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_b^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_a^{(j)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{m+N}}|(-1)^{\sum_{k\in\{i,j\}}p(a_k)} + \\ + \langle e_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes e_a^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_b^{(j)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{n+m}}|\Big]f_0(a_1,\ldots,a,\ldots,b,\ldots,a_{n+m})\Bigg)z_i, \tag{32}$$

где $\sum_{\{a_i=a,a_j=b\}} = \sum_{a_1\neq\ldots\neq a\neq\ldots\neq b\neq\ldots\neq a_{m+n}}$ и $\sum_{k\in\{i,j\}}$ означает, что суммирование идет по всем k, лежащими строго между i и j. Итак, вторая строчка дает следующее

$$\sum_{i=1}^{n+m}\left(\sum_{j,\neq i}\sum_{\{a_i=b,a_j=a\}}\Big[\langle e_{a_1}\otimes\ldots\otimes e_a^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_b^{(j)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{m+N}}|(-1)^{\sum_{k\in\{i,j\}}p(a_k)}+\right.$$
$$\left.+\langle e_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes e_b^{(i)}\otimes\ldots\otimes e_a^{(l)}\otimes\ldots\otimes e_{a_{n+m}}|\Big]f_0(a_1,\ldots,b,\ldots,a,\ldots,a_{n+m})\right)z_i. \tag{33}$$

Из-за (23) имеем следующее соотношение

$$f_0(a_1,\ldots,a,\ldots,b,\ldots,a_{n+m}) = (-1)^{\sum_{k\in\{i,j\}}p(a_k)}f_0(a_1,\ldots,b,\ldots,a,\ldots,a_{n+m}).$$

Откуда можно видеть, что разность (30) зануляется. Случаи других четностей a, b как и другие значения i рассматриваются полностью аналогично. $\square$

4 Связность Казимира

Цель этого раздела состоит в описании связностей Казимира, которые отвечают бесконечным сериям суперaлгебрам Ли. Как и в бозонном случае, некоторые суперaлгебры Ли могут быть описаны как подалгебры $\mathfrak{gl}(n|m)$, которые сохраняют билинейную форму на суперпространстве $\mathbb{C}^{n|m}$ для четных, которая ортогональная по четным координатам и симплектическая по нечетным. Мы представим доказательство отдельно в каждом случае, что предложенная нами сваязноть плоская. Формально пoсльзоваться выражением κ_α из (5) нельзя, так как длина фермионного корня нулевая (как и ограничение формы Киллинга на соответствующую $\mathfrak{sl}(1|1)$ подалгебру), предлагаемое выражение имеет ту же структуру, что и в бозонном случае. В последующих подразделах мы будем пользоваться следующими обозначениями

$$\begin{cases} c_\alpha = e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha, \text{ для бозонного корня } \alpha, \\ c_\alpha = e_{-\alpha} e_\alpha - e_\alpha e_{-\alpha}, \text{ для фермионного корня } \alpha. \end{cases} \tag{34}$$

4.1 $A(m, n)$

$A(m, n)$ суперaлгебра имеет невырожденную инвариантную билинейную форму, если $m \neq n$, но для теоремы ниже это ограничение не влияет

Corollary 4.0.1. *Следующая связность плоская*

$$\nabla = d - \hbar \sum_{i<j} \frac{E_{ij}E_{ji}(-1)^{p(j)} + E_{ji}E_{ij}(-1)^{p(i)}}{\lambda_i - \lambda_j} d(\lambda_i - \lambda_j), \tag{35}$$

где $d-$дифференциал де Рама, $p(i)$ определена в (57), и E_{ij} для $i \neq j$ удовлетворяет (58). Эквивалентно, для всех i, j следующие опреаторы коммутируют

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \hbar \sum_{k, \neq i} \frac{E_{ik}E_{ki}(-1)^{p(k)} + E_{ki}E_{ik}(-1)^{p(i)}}{\lambda_i - \lambda_k}. \tag{36}$$

Доказательство. Доказательство предложения походит также как и доказательство 2.1. Обозначим

$$c_{ik} = E_{ik}E_{ki}(-1)^{p(k)} + E_{ki}E_{ik}(-1)^{p(i)},$$

so $c_{ij} = c_{ji}$. Тогда $[\nabla_i, \nabla_j] = 0$ эквивалентно для любых $i \neq j \neq k$ следующему

$$\frac{[c_{ij}, c_{jk}]}{\lambda_{ij}\lambda_{jk}} + \frac{[c_{ik}, c_{jk}]}{\lambda_{ik}\lambda_{jk}} + \frac{[c_{ij}, c_{ik}]}{\lambda_{ij}\lambda_{ik}} = 0. \tag{37}$$

Необходимо проверить следующее

$$[c_{ij} + c_{ik}, c_{jk}] = 0 \tag{38a}$$
$$[c_{ij} + c_{jk}, c_{ik}] = 0 \tag{38b}$$
$$[c_{ij}, c_{jk} + c_{ik}] = 0. \tag{38c}$$

Несложно видеть, что равенства (38b), (38c) могут быть получены из (38a) при помощи циклической перестановки $i \to j \to k \to i$. Таким образом надо доказать первое из всех равенств выше.

$$[c_{ij}, c_{jk}] = \left((-1)^{p(j)+p(k)+p_{ij}(p_{jk}+p_{ik})} + (-1)^{p_{ik}(p_{ij}+p_{kj})} + (-1)^{p(i)+p(k)} + (-1)^{p(i)+p(j)+(-1)^{p_{jk}(p_{ij}+p_{ki})}}\right)$$
$$(E_{ji}E_{ik}E_{kj} - E_{jk}E_{ki}E_{ij}) = \mathtt{f}_{ij,jk}\left(E_{ji}E_{ik}E_{kj} - E_{jk}E_{ki}E_{ij}\right), \tag{39}$$

где $p_{ij} = p(i) + p(j) \bmod 2$. Используюя симметрию $c_{pq} = c_{qp}$ и переставляя $k \leftrightarrow j$ в выражении выше получаем

$$[c_{ik}, c_{jk}] = -(-1)^{p_{jk}(p_{ij}+p_{ik})}\Bigg((-1)^{p(j)+p(k)+p_{ik}(p_{jk}+p_{ij})} + (-1)^{p_{ij}(p_{ik}+p_{kj})} + (-1)^{p(i)+p(j)} + (-1)^{p(i)+p(k)+}$$
$$+(-1)^{p_{jk}(p_{ij}+p_{ki})}\Bigg)(E_{ji}E_{ik}E_{kj} - E_{jk}E_{ki}E_{ij}) = \mathtt{g}_{ik,jk}(E_{ji}E_{ik}E_{kj} - E_{jk}E_{ki}E_{ij}). \tag{40}$$

Чтобы увидеть, что сумма (39), (40) зануляется мы предлагаем перебор. Результаты приведены в таблице ниже.

Четности	$\mathtt{f}_{ij,jk}$	$\mathtt{g}_{ik,jk}$
$p(i) = 0, p(j) = 0, p(k) = 1$	4	- 4
$p(i) = 0, p(j) = 0, p(k) = 1$	-4	4
$p(i) = 0, p(j) = 1, p(k) = 0$	4	-4
$p(i) = 1, p(j) = 0, p(k) = 0$	-4	4
$p(i) = 1, p(j) = 1, p(k) = 0$	-4	4
$p(i) = 1, p(j) = 0, p(k) = 1$	4	-4
$p(i) = 0, p(j) = 1, p(k) = 1$	-4	4
$p(i) = 1, p(j) = 1, p(k) = 1$	4	- 4

Из таблицы выше видно, что во всех случаях $\mathtt{f}_{ij,jk} + \mathtt{f}_{ik,jk} = 0$.

□

Remark. *Замиетим, что доказательтво работет универсально для всех m и n.*

4.2 $B(0, n)$

$B(0, n) = \mathfrak{osp}(1, 2n)$ алгебра имеет следующую систему корней

$$\Delta_0 = \{\delta_i - \delta_j, \pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i\},\ \Delta_1 = \{\pm\delta_i,\}. \tag{41}$$

Соответствующие корневые генераторы приведены в таблице ниже

Четность	Корень	Генератор
четный	$\delta_i - \delta_j,\ i < j$	$e_{\delta_i-\delta_j} = e_{i+1,j+1} - e_{j+n+1,i+n+1}$
	$\delta_j - \delta_i,\ i < j$	$e_{\delta_j-\delta_i} = e_{j+1,i+1} - e_{i+n+1,j+n+1}$
	$\delta_i + \delta_j\ i < j$	$e_{\delta_i+\delta_j} = e_{i+1,j+n+1} + e_{j+1,i+n+1}$
	$-\delta_i - \delta_j\ i < j$	$e_{-\delta_i-\delta_j} = e_{n+i+1,j+1} + e_{n+j+1,i+1}$
	$2\delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$	$e_{2\delta_i} = e_{i+1,n+1}$
	$-2\delta_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$	$e_{-2\delta_i} = e_{n+1,i+1}$
нечетный	δ_i	$e_{\delta_i} = e_{i+1,1} - e_{1,n+i+1}$
	$-\delta_i$	$e_{-\delta_i} = e_{1,i+1} + e_{n+i+1,1}$

Таблица 1: $B(0, n)$ корневые генераторы

Theorem 4.1. *Следующая связность плоская*

$$\nabla = d - \hbar\left(\sum_{i<j}\frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i + \lambda_j}(d\lambda_i + d\lambda_j) + \frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_i - \lambda_j}(d\lambda_i - d\lambda_j) + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i}d\lambda_i + \frac{c_{\delta_i}}{\lambda_i}d\lambda_i\right). \tag{42}$$

Доказательство. Чтобы показать, что $\nabla^2=0$ докажем, что для всех i следующие опрераторы коммутируют

$$\nabla_i=\partial_i-\hbar\left(\sum_{j,\neq i}\frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i+\lambda_j}+\frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_i-\lambda_j}+2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i}+\frac{c_{\delta_i}}{\lambda_i}\right). \tag{43}$$

Коммутатор $[\nabla_i,\nabla_j]$ сводится к

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{k,\neq i}\frac{c_{\delta_i+\delta_k}}{\lambda_i+\lambda_k}+\frac{c_{\delta_i-\delta_k}}{\lambda_i-\lambda_k}+2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i}+\frac{c_{\delta_i}}{\lambda_i},\sum_{l,\neq j}\frac{c_{\delta_j+\delta_l}}{\lambda_j+\lambda_l}+\frac{c_{\delta_j-\delta_l}}{\lambda_j-\lambda_l}+2\frac{c_{2\delta_j}}{\lambda_j}+\frac{c_{\delta_j}}{\lambda_j}\right]=\\&=\left(\left[\frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_i-\lambda_j}+\frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i+\lambda_j},\frac{c_{\delta_j}}{\lambda_j}\right]+\frac{[c_{\delta_i},c_{\delta_j}]}{\lambda_i\lambda_j}+\left[\frac{c_{\delta_i}}{\lambda_i},\frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_j-\lambda_i}+\frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i+\lambda_j}\right]\right).\end{aligned} \tag{44}$$

Вычисляя коммутаторы в выражении выше имеем

$$[c_{\delta_i-\delta_j},c_{\delta_j}]=4(e_{-\delta_j}e_{\delta_i}e_{\delta_j-\delta_i}-e_{\delta_i-\delta_j}e_{-\delta_i}e_{\delta_j}), \tag{45a}$$
$$[c_{\delta_i+\delta_j},c_{\delta_j}]=4(e_{\delta_i}e_{-\delta_j-\delta_i}e_{\delta_j}-e_{-\delta_j}e_{\delta_i+\delta_j}e_{-\delta_i}), \tag{45b}$$
$$[c_{\delta_i},c_{\delta_j}]=4(e_{-\delta_i}e_{\delta_i-\delta_j}e_{\delta_j}-e_{-\delta_i-\delta_j}e_{\delta_i}e_{\delta_j}-e_{-\delta_j}e_{-\delta_i}e_{\delta_i+\delta_j}-e_{-\delta_j}e_{\delta_j-\delta_i}e_{\delta_i}), \tag{45c}$$
$$[c_{\delta_i},c_{\delta_i-\delta_j}]=4(e_{-\delta_j}e_{\delta_i}e_{\delta_j-\delta_i}-e_{\delta_i-\delta_j}e_{-\delta_i}e_{\delta_j}), \tag{45d}$$
$$[c_{\delta_i},c_{\delta_i+\delta_j}]=-4(e_{\delta_j}e_{\delta_i}e_{-\delta_i-\delta_j}+e_{\delta_i+\delta_j}e_{-\delta_i}e_{-\delta_j}). \tag{45e}$$

Из выражения выше можно видеть, что вторая строчка (44) зануляется. □

4.3 $C(n)$

$C(n)=\mathfrak{osp}(2,2n)$, где $n\geqslant 2$ имеет следующую систему корней

$$\Delta_0=\{\delta_i-\delta_j,\pm\delta_i\pm\delta_j,\pm 2\delta_i\},\ \Delta_1=\{\pm\epsilon\pm\delta_i,\pm\epsilon\mp\delta_i\}. \tag{46}$$

Соотвествующие корневые генераторы приведены в таблице ниже

Четность	Корень	Генератор
четный	$\delta_i-\delta_j,\ i<j$	$e_{\delta_i-\delta_j}=e_{i+2,j+2}-e_{j+n+2,i+n+2}$
	$\delta_j-\delta_i,\ i<j$	$e_{\delta_j-\delta_i}=e_{j+2,i+2}-e_{i+n+2,j+n+2}$
	$\delta_i+\delta_j\ i<j$	$e_{\delta_i+\delta_j}=e_{i+2,j+n+2}+e_{j+2,i+n+2}$
	$-\delta_i-\delta_j\ i<j$	$e_{-\delta_i-\delta_j}=e_{n+i+2,j+2}+e_{n+j+2,i+2}$
	$2\delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$	$e_{2\delta_i}=e_{i+2,n+2}$
	$-2\delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$	$e_{-2\delta_i}=e_{n+2,i+2}$
нечетный	$\epsilon+\delta_i$	$e_{\epsilon+\delta_i}=e_{i+2,2}-e_{1,n+i+2}$
	$-\epsilon-\delta_i$	$e_{-\epsilon-\delta_i}=e_{2,i+2}+e_{n+i+2,1}$
	$\epsilon-\delta_i$	$e_{\epsilon-\delta_i}=e_{n+i+2,2}+e_{1,i+2}$
	$-\epsilon+\delta_i$	$e_{-\epsilon+\delta_i}=e_{2,n+i+2}-e_{i+2,1}$

Таблица 2: $C(n)$ корневые генераторы

Theorem 4.2. *Следующая связность плоская*

$$\begin{aligned}\nabla=d-\hbar\Bigg(&\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda+\lambda_i}(d\lambda+d\lambda_i)+\frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda-\lambda_i}(d\lambda-d\lambda_i)+2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i}d\lambda_i+\\&+\sum_{i<j}\frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i+\lambda_j}(d\lambda_i+d\lambda_j)+\frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_i-\lambda_j}(d\lambda_i-d\lambda_j)\Bigg),\end{aligned} \tag{47}$$

или, эквивалентно, следующие операторы первого порядка коммутинуют друг с другом

$$\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} - \hbar \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{\epsilon-\delta_j}}{\lambda - \lambda_j} + \frac{c_{\epsilon+\delta_j}}{\lambda + \lambda_j} \right), \tag{48a}$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \hbar \left(\frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda + \lambda_i} - \frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda - \lambda_i} + 2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i} + \sum_{j,\neq i} \frac{c_{\delta_i+\delta_j}}{\lambda_i + \lambda_j} + \frac{c_{\delta_i-\delta_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \right), \tag{48b}$$

Доказательство. Для удобства мы разобъем вычисление на две чати: а части (A) рассмотрим $[\nabla_0, \nabla_j]$, в части (B) - $[\nabla_i, \nabla_j]$.

(A) Действительно, нужно показать, что следующий коммутатор зануляется

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{c_{\epsilon-\delta_j}}{\lambda - \lambda_j} + \frac{c_{\epsilon+\delta_j}}{\lambda + \lambda_j} \right), \frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda + \lambda_i} - \frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda - \lambda_i} + 2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i} + \sum_{k,\neq i} \frac{c_{\delta_i+\delta_k}}{\lambda_i + \lambda_k} + \frac{c_{\delta_i-\delta_k}}{\lambda_i - \lambda_k} \right] = \\
&= 2 \left(\frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_i}]}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)} + \left[\frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{(\lambda - \lambda_i)} + \frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{(\lambda + \lambda_i)}, \frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i} \right] \right) + \\
&+ \sum_{k\neq i} \left(\left[\frac{c_{\epsilon-\delta_k}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{c_{\epsilon+\delta_k}}{\lambda + \lambda_k}, \frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda + \lambda_i} + \frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda - \lambda_i} \right] \right. \\
&+ \left[\frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda - \lambda_i} + \frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda + \lambda_i}, \frac{c_{\delta_i+\delta_k}}{\lambda_i + \lambda_k} + \frac{c_{\delta_i-\delta_k}}{\lambda_i - \lambda_k} \right] + \\
&+ \left. \left[\frac{c_{\epsilon-\delta_k}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{c_{\epsilon+\delta_k}}{\lambda + \lambda_k}, \frac{c_{\delta_i+\delta_k}}{\lambda_i + \lambda_k} + \frac{c_{\delta_i-\delta_k}}{\lambda_i - \lambda_k} \right] \right) = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Чтобы сделать это рассмотрим вторую и последующие строчки независимо.

(1) Вторая строчка (49) эквивалентна следующему

$$\frac{\lambda[c_{\epsilon+\delta_i} + c_{\epsilon-\delta_i}, c_{2\delta_i}] + \lambda_i([c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_i}] + [c_{\epsilon-\delta_i} - c_{\epsilon+\delta_i}, c_{2\delta_i}])}{\lambda_i(\lambda^2 - \lambda_i^2)}. \tag{50}$$

Имеем следующие коммутаторы

$$[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{2\delta_i}] = 4\left(e_{2\delta_i} e_{-\epsilon-\delta_i} e_{\epsilon-\delta_i} - e_{-\epsilon+\delta_i} e_{\epsilon+\delta_i} e_{-2\delta_i} \right), \tag{51a}$$

$$[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{2\delta_i}] = 4\left(e_{-\epsilon+\delta_i} e_{\epsilon+\delta_i} e_{-2\delta_i} - e_{2\delta_i} e_{-\epsilon-\delta_i} e_{\epsilon+\delta_i} \right), \tag{51b}$$

$$[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_i}] = 8\left(e_{-\epsilon+\delta_i} e_{-2\delta_i} e_{\epsilon+\delta_i} - e_{-\epsilon-\delta_i} e_{2\delta_i} e_{\epsilon-\delta_i} \right), \tag{51c}$$

откуда видно, что (50) коэффициенты перед λ и λ_i зануляются.

(2) Вторая и третья строчки (49) после открытия скобок имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&\frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_i+\delta_k}]}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda_i + \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_i-\delta_k}]}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_i+\delta_k}]}{(\lambda + \lambda_i)(\lambda_i + \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_i-\delta_k}]}{(\lambda + \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_k)} + \\
&+ \frac{[c_{\epsilon-\delta_k}, c_{\delta_i+\delta_k}]}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda_i + \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon-\delta_k}, c_{\delta_i-\delta_k}]}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_k}, c_{\delta_i+\delta_k}]}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda_i + \lambda_k)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_k}, c_{\delta_i-\delta_k}]}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)} + \\
&+ \frac{[c_{\epsilon-\delta_k}, c_{\epsilon+\delta_i}]}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_i)} - \frac{[c_{\epsilon-\delta_k}, c_{\epsilon-\delta_i}]}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda - \lambda_i)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_k}, c_{\epsilon+\delta_i}]}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda + \lambda_i)} - \frac{[c_{\epsilon+\delta_k}, c_{\epsilon-\delta_i}]}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda - \lambda_i)} = 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Прямолинейное вычисление показывает, что имеются следующие соотношения между усеченными операторами Казимира

$$[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_k}] = -[c_{\delta_i-\delta_k}, c_{\epsilon+\delta_k}] = -[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_k-\delta_i}] = 4\left(e_{-\epsilon-\delta_i}e_{\delta_i-\delta_k}e_{\epsilon+\delta_k} - e_{-\epsilon-\delta_k}e_{\delta_k-\delta_i}e_{\epsilon+\delta_i}\right) \tag{53a}$$

$$[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_k}] = -[c_{\delta_i+\delta_k}, c_{\epsilon+\delta_k}] = -[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_i+\delta_k}] = 4(e_{-\epsilon+\delta_i}e_{-\delta_i-\delta_k}e_{\epsilon+\delta_k} - e_{-\epsilon-\delta_k}e_{\delta_i+\delta_k}e_{\epsilon-\delta_i}) \tag{53b}$$

$$[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_k}] = -[c_{\delta_i+\delta_k}, c_{\epsilon-\delta_k}] = -[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_i+\delta_k}] = 4(e_{-\epsilon-\delta_i}e_{\delta_i+\delta_k}e_{\epsilon-\delta_k} - e_{-\epsilon+\delta_k}e_{-\delta_i-\delta_k}e_{\epsilon-\delta_i}) \tag{53c}$$

$$[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_k}] = -[c_{\delta_i-\delta_k}, c_{\epsilon-\delta_k}] = -[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_i-\delta_k}] = 4(e_{-\epsilon+\delta_k}e_{\delta_i-\delta_k}e_{\epsilon-\delta_i} - e_{-\epsilon+\delta_i}e_{\delta_k-\delta_i}e_{\epsilon-\delta_k}), \tag{53d}$$

После прямолинейного применения равенств выше имеем

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_k)} + \frac{1}{(\lambda+\lambda_k)(\lambda_i-\lambda_k)} - \frac{1}{(\lambda+\lambda_k)(\lambda+\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_k}]+\\
&+\left(\frac{1}{(\lambda+\lambda_k)(\lambda-\lambda_i)} + \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda+\lambda_k)} - \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda-\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_k}]+\\
&+\left(-\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda+\lambda_i)} + \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda_i+\lambda_k)} - \frac{1}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda_i+\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_k}]+\\
&+\left(\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\lambda_k)} + \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)} + \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_k)}\right)[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_k}] = 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Это равестнво завершает часть (A).

(B) Нужно показать, что

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{c_{\epsilon+\delta_i}}{\lambda+\lambda_i} - \frac{c_{\epsilon-\delta_i}}{\lambda-\lambda_i} + 2\frac{c_{2\delta_i}}{\lambda_i} + \sum_{k\neq i}\frac{c_{\delta_i-\delta_k}}{\lambda_i-\lambda_k} + \frac{c_{\delta_i+\delta_k}}{\lambda_i+\lambda_k},\right.\\
&\left.\frac{c_{\epsilon+\delta_j}}{\lambda+\lambda_j} - \frac{c_{\epsilon-\delta_j}}{\lambda-\lambda_j} + 2\frac{c_{2\delta_j}}{\lambda_j} + \sum_{l\neq j}\frac{c_{\delta_j-\delta_l}}{\lambda_j-\lambda_l} + \frac{c_{\delta_j+\delta_l}}{\lambda_j+\lambda_l}\right] =\\
&= \frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_j}]}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_j}]}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_j}]}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda-\lambda_j)} + \frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_j}]}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\lambda_j)}+\\
&+\frac{[c_{\delta_i+\delta_j}, c_{\epsilon+\delta_j}]}{(\lambda_j+\lambda_i)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{[c_{\delta_i+\delta_j}, c_{\epsilon-\delta_j}]}{(\lambda_j+\lambda_i)(\lambda-\lambda_j)} + \frac{[c_{\delta_i-\delta_j}, c_{\epsilon+\delta_j}]}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{[c_{\delta_i-\delta_j}, c_{\epsilon-\delta_j}]}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)}+\\
&+\frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_j-\delta_i}]}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)} + \frac{[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\delta_j+\delta_i}]}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda_j+\lambda_i)} - \frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_j-\delta_i}]}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_i)} - \frac{[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\delta_j+\delta_i}]}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda_j+\lambda_i)} = 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

После открытия скобок в выражении выше невыписанные члены зануляеются, потому что это есть коммутаторы чисто бозонной части $\mathfrak{sp}(2n)$. Испозьзуя (53a)-(53d) тождества (меняя местами $k \leftrightarrow j$) имеем следующее

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda+\lambda_j)} + \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda+\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_j}]+\\
&+\left(-\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda+\lambda_j)} - \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)(\lambda+\lambda_j)} + \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)(\lambda-\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon+\delta_j}]+\\
&+\left(-\frac{1}{(\lambda+\lambda_i)(\lambda-\lambda_j)} + \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)} - \frac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)(\lambda+\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon+\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_j}]+\\
&+\left(\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\lambda_j)} + \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)} - \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda-\lambda_i)}\right)[c_{\epsilon-\delta_i}, c_{\epsilon-\delta_j}] = 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

□

5 Заключение

В работе мы доказали совместность предложенной системы Динамических уравнений и их коммутативности с твистованными уравнениями КЗ. Структурно формула (9) устроена также как и [5], но не совсем из-за фермионных корней. Также для суперапгебр $A(m,n)$, $B(0,n)$ и $C(n)$ был предложен супер аналог бозонной связности Казимира (5). Странно, что ественное обобщение формулы на случай $B(m,n)$ или $D(m,n)$ для произвольных m, n не работает (технически это происходит из-за некоторых несовместностей в знаках, которые на данный момент автору не известно как устранить).

Было бы интересно обобщить работу [10] на случай суперапгебр Ли, а именно, как минимум, ввести $q-$разностные Динамические уравнения, коммутирующие с тригонометрическими уравнениями $q-$КЗ, построенными по симметрии $U_q(\hat{\mathfrak{gl}}(n|m))$. Также имеется довольно общая гипотеза Толедано-Ларедо, которая состоит в следующем: представление монодромии для ∇ задается операторами квантовой группы Вейля, которые удовлетворяют соотношениям обощенной группы кос $B_W = \pi_1(\mathfrak{h}^{reg})/W$, где W- группа Вейля системы корней R. Интересным является вопрос об обобщении этой гипотезы на случай суперапгебр, так как у теории предсталений суперапгебр имеются новые черты по сравнению с бозонными. А именно среди представлений суперапгебр имеются проективные неразложимые модули, а также определенение группы Вейля модифицируются из-за фермионных отражений (различные диаграммы Дынкина определяют одну и ту же суперапгебру).

6 Аппендикс

Здесь мы приводим кратко основную информацию о $\mathfrak{gl}(n|m)$ суперaлгебре Here we give a brief summary of some definitions of the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(n|m)$

Пусть $\mathcal{J} = \{1, \dots n+m\}$ и пусть $p : \mathcal{J} \to \{0, 1\}$

$$\begin{cases} p(a) = 0,\ a \le n, (\text{бозоны})\,, \\ p(a) = 1,\ a > n (\text{фермионы}). \end{cases} \tag{57}$$

Алгебра $\mathfrak{gl}(n|m)$ порождена e_{ab}, где $a, b \in \mathcal{J}$ со следующими соотношениями

$$e_{ab}e_{cd} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})} e_{cd}e_{ab} = \delta_{bc}e_{ad} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})}\delta_{da}e_{cb}, \tag{58}$$

где

$$p(e_{ab}) = p(a) + p(b) \bmod 2. \tag{59}$$

Тензоное $\otimes$ произведение представлений суперaлгебр определено так, что для операторов, собственных для оператора четности, и действующих нетривиально только в i^{th} и в j^{th} тензорном сомножителе выполнено следующее

$$A^{(i)}B^{(j)} = (-1)^{p(A)p(B)}B^{(j)}A^{(i)}. \tag{60}$$

В $\mathbb{C}^{n|m}$ имеется базис e_a, что $e_{ab}(e_c) = \delta_{bc}e_a$, означает что e_{ab} матричные единицы.

Пусть $x, y \in \mathbb{C}^{n|m}$ с определенными $p(x)$ и $p(y)$ тогда градуированная перестановка действует следующим образом

$$P_{12}\,(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x. \tag{61}$$

Список литературы

[1] Olshanetsky, M. A., and Askold Mikhaĭlovich Perelomov. "Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras."Physics Reports 71.5 (1981): 313-400.

[2] Olshanetsky, M. A., and A. M. Perelomov. "Quantum integrable systems related to Lie algebras."Physics Reports 94.6 (1983): 313-404.

[3] De Concini, Corrado, and Claudio Procesi. "Hyperplane arrangements and holonomy equations."Selecta Mathematica, New Series 1.3 (1995): 495-535.

[4] Millson, John J., and Valerio Toledano Laredo. "Casimir operators and monodromy representations of generalised braid groups."Transformation groups 10.2 (2005): 217-254.

[5] Felder, G., Markov, Y., Tarasov, V., Varchenko, A. (2000). Differential equations compatible with KZ equations. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 3(2), 139-177.

[6] Duistermaat, J. J., Grünbaum, F. A. (1986). Differential equations in the spectral parameter. Communications in mathematical physics, 103(2), 177-240.

[7] Matsuo, A. (1992). Integrable connections related to zonal spherical functions. Inventiones mathematicae, 110(1), 95-121.

[8] Cherednik, I. (1994). Integration of quantum many-body problems by affine Knizhnik-Zamolodchikov equations. Advances in Mathematics, 106(1), 65-95.

[9] Mimachi, K. (1996). A solution to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and its application to eigenvalue problems of the Macdonald type. Duke mathematical journal, 85(3), 635-658.

[10] Etingof, P., Varchenko, A. (2002). Dynamical Weyl groups and applications. Advances in Mathematics, 167(1), 74-127.

[11] Okounkov, A., Smirnov, A. (2016). Quantum difference equation for Nakajima varieties. arXiv preprint arXiv:1602.09007.

[12] Nekrasov, N. (2018). Superspin chains and supersymmetric gauge theories. arXiv preprint arXiv:1811.04278.

[13] Geer, N. (2006). Etingof–Kazhdan quantization of Lie superbialgebras. Advances in Mathematics, 207(1), 1-38.

[14] Dotsenko, E. (2019). The Dynamical equations for $\mathfrak{gl}(n|m)$. arXiv preprint arXiv:1904.00006.

[15] Grekov, A., Zabrodin, A., Zotov, A. (2019). Supersymmetric extension of qKZ-Ruijsenaars correspondence. Nuclear Physics B, 939, 174-190.

[16] Gorsky, A., Zabrodin, A., Zotov, A. (2014). Spectrum of quantum transfer matrices via classical many-body systems. Journal of High Energy Physics, 2014(1), 70.

[17] Nekrasov, N., Rosly, A., Shatashvili, S. (2011). Darboux coordinates, Yang-Yang functional, and gauge theory. Nuclear Physics B-Proceedings Supplements, 216(1), 69-93.

[18] Etingof, Pavel I., Igor Frenkel, and Alexander A. Kirillov. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations. No. 58. American Mathematical Soc., 1998.

[19] Braverman, A., Maulik, D., Okounkov, A. (2011). Quantum cohomology of the Springer resolution. Advances in Mathematics, 227(1), 421-458.

[20] Zabrodin, A., Zotov, A. (2017). QKZ–Ruijsenaars correspondence revisited. Nuclear Physics B, 922, 113-125.

[21] Belliard, S., Ragoucy, E. (2008). The nested Bethe ansatz for 'all'closed spin chains. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41(29), 295202.

[22] Laredo, V. T. (2011). The trigonometric Casimir connection of a simple Lie algebra. Journal of Algebra, 329(1), 286-327.

[23] van Meer, M., Stokman, J. (2010). Double affine Hecke algebras and bispectral quantum Knizhnik–Zamolodchikov equations. International Mathematics Research Notices, 2010(6), 969-1040.