ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой
теории поля

Сильные поля в массивной модели Швингера

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:
студент 521 группы
Казарновский Кирилл Александрович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный
2019

1 Введение

Моделью Швингера называется двумерная КЭД с безмассовыми фермионами. Известно, что в данной модели на классическом уровне можно полностью избавиться от электромагнитного поля, однако квантовые поправки приводят к возникновению аномалии,которая "возращает" электромагнитное поле.Действительно, теория обладает аксиальной симметрией на классическом уровне,однако аксиальный ток в данной модели не сохраняется. И то и другое может быть показано несколькими способами, однако механизм возникновения этих аномалий уже не так тривиален. Здесь будет показано несколько методов обнаружения вышеуказанной аномалии.

В первую очередь будет разобран метод, основанный на квантовании с помощью функционального интеграла. При аксиальном преобразовании не сохраняется мера.Якобиан связанный с этим изменением будет рассчитан по методу Вергелеса.

Другой способ использует метод бозонизации.Будет показано соответствие между корреляционными функциями скалярного и спинорного полей.И на основе этого соответсвия будет показано появление аномалии.

В конце будет поднят вопрос о массивных фермионах. Классическим рассчетом можно показать, что у свободной энергии есть ненулевая мнимая часть, что на классическом уровне соответсвует рождению пар.Для более честной проверки факта рождения частиц будет посчитан ток в данной теории.Стоит отметить, что даже классическими рассуждениями,можно показать тот факт, что для заряженных частиц имеет место быть конфайнмент.Т.к.закон Кулона в одномерном пространстве имеет вид $E = const$. Учет петлевых поправок должен пролить свет на данный аспект теории, и возможно дать ограничение на поля, в которых возможно рождение пар.

2 Модель Швингера

Итак модель Швингера описывается следующим Лагранжианом:

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i \not{D})\psi - \frac{1}{4}F^2_{cl\ \mu\nu}.$$

$$\not{D} = \gamma_\mu(\partial^\mu + ieA^\mu),\ \gamma^0 = \sigma_3, \gamma^1 = i\sigma_1, \gamma_5 = -\sigma_2.$$

$$\gamma^0 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}, \gamma^1 = \begin{Bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Bmatrix}, \gamma^5 = \begin{Bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Bmatrix} = i\epsilon_{\mu\nu}.$$

Классическое уравнение движение, из которого следует закон сохранения тока, в силу антисимметрии $F_{\mu\nu}$, имеет вид:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = eJ^\mu.$$

В двумерии верно, что:

$$\gamma^\nu\gamma^5 = \epsilon^{\nu\mu}\gamma_\mu,$$

Действительно:

$$\gamma^0\gamma^0\gamma^1 = \gamma^1,\quad \gamma^1\gamma^0\gamma^1 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^1 = -\gamma^0.$$

Из этого следует важное свойства связывающее электрический ток с аксиальным:

$$J_5^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \epsilon^{\nu\mu}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \equiv^* J^\nu. \tag{1}$$

Тензор электромагнитного поля в двух измерениях имеет вид:

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\mu}E = -\epsilon_{\mu\nu}\,{}^*F\,. \tag{2}$$

В терминах ${}^*F$ уравнение (4) принимает вид:

$$\partial_\mu\,{}^*F = e\,{}^*J_\mu,\quad {}^*J^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu}J_\nu = J_5^\mu. \tag{3}$$

Откуда:

$$\partial^2\,{}^*F = e\partial_\mu J_5^\mu. \tag{4}$$

Далее мы покажем наличие аксиальной аномалии:

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{e}{\pi}\,{}^*F\,. \tag{5}$$

Совмещая два последних уравнения:

$$(\partial^2 + \frac{e^2}{\pi})F_{01} = 0. \tag{6}$$

Что подстверждает наличие массы у "фотона".

2.1 Метод функционального интеграла и аксиальная калибровка

Одним из способов получения аномалии, является "аксиальная " калибровка в формализме функционального интеграла. При применении аскиального преобразования меняется мера фермионных полей. Дальнейшее изложение можно разбить на несколько пунктов.
1)Расчет инфинитизимального Якобиана.
2)Рассуждение о гладкости аксиального отображения.
3)Разбиение аксиального преобразования на инфинитизимальные,применение предшествующего расчета и получение окончательного ответа.

2.1.1 Инфинитизмальное аксиальное преобразование

При инфинитизмальном преобразовании в евклидовой сигнатуре (пренебрегая членами со старшими степенями альфа), мы имеем:

$$\psi^{'} = e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi,\ \bar{\psi}^{'} = \bar{\psi}e^{i\alpha(x)\gamma_5}.$$

$$\bar{\psi}'(i\not{D} - m)\psi^{'} = \bar{\psi}(i\not{D} - m - \not{\partial}\alpha\gamma_5 - 2im\gamma_5)\psi.$$

Тогда получаем, что :

$$J[\alpha] = \frac{\det(i\not{D} - m)}{\det(i\not{D} - m - \not{\partial}\alpha\gamma_5 - 2im\gamma_5)}. \tag{7}$$

Теперь, следуя Вергелесу, разобьём поля на моды:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n a_n\varphi_n(x)\\ \overline{\psi}(x) &= \sum_n \varphi_n(x)^\dagger b_n\end{aligned}, \tag{8}$$

где

$$\not{D}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \tag{9}$$

и

$$\int \varphi_n(x)^\dagger\varphi_m(x)d^4x = \delta_{n,m}. \tag{10}$$

Заметим, что мера интегрирования в функциональном интеграле имеет вид:

$$[d\bar{\psi}d\psi dA] = [dA]\prod_{n,m} da_n d\bar{b}_m. \tag{11}$$

Тогда при инфинтизимальном аксиальном преобразовании $J[\alpha]$ можно выразить в терминах детерминанта оператора перемешивающего коэффициенты разложения $a_n, \bar{b}_m$.

$$\psi(x) \to \psi'(x) \equiv \exp\left[i\alpha(x)\gamma_5\right]\psi(x) \equiv \sum_n a'_n\varphi_n(x), \tag{12}$$

где

$$a'_n = \sum_m \int \varphi_n(x)^\dagger \exp\left[i\alpha(x)\gamma_5\right]\varphi_m(x)dxa_m \equiv \sum_m C_{n,m}a_m. \tag{13}$$

Тогда:

$$\Pi da'_n = \left(\det C_{k,l}\right)^{-1}\Pi da_n, \tag{14}$$

$$J[\alpha] = \left(\det C_{k,l}\right)^{-2}, \tag{15}$$

и

$$C_{n,m} \approx \delta_{n,m} + \beta_{n,m} + O(\alpha^2), \tag{16}$$

где

$$\beta_{n,m} = i\int \alpha(x)\varphi_n(x)^\dagger\gamma_5\varphi_m(x)d^2x. \tag{17}$$

$$\det C \approx \det(1+\beta) = exp[Tr\ \ln(1+\beta)] = exp[Tr\beta] =$$

$$= \exp\left[i\int \alpha(x)\sum_n \varphi_n(x)^\dagger\gamma_5\varphi_n(x)d^2x\right] \tag{18}$$

След в показателе экспоненты необходимо регуляризовать:

$$\sum_n \varphi_n(x)^\dagger\gamma_5\varphi_n(x) = \lim_{M\to\infty}\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\exp\left[-\left(\lambda_k/M\right)^2\right]\varphi_n(x) =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\lim_{x\to y} Tr\gamma_5\exp\left[-\left(\not{D}/M\right)^2\right]\delta(x-y) =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\lim_{x\to y}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}Tr\gamma_5\exp\left[-\left([D^2+ie\epsilon_{\nu\mu}F^{\nu\mu}\gamma_5]/M^2\right)\right]e^{-ik(x-y)} =$$

$$= \lim_{M\to\infty} Tr\ ie\epsilon_{\nu\mu}F^{\nu\mu}\gamma_5\gamma_5\frac{1}{M^2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{\frac{k^\nu k_\nu}{M^2}} = \frac{ie}{2\pi}\epsilon_{\nu\mu}F^{\nu\mu}. \tag{19}$$

Окончательно получаем что:

$$\ln J[\alpha] = i\int d^2x\alpha(x)C(x), \tag{20}$$

где в нашем случае $C(x) = -\frac{e}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Тогда имеем:

$$\int d\bar{\psi}'d\psi' exp[\int \bar{\psi}'(i\ \not{D}-m)\psi'] =$$

$$\int d\bar{\psi}d\psi exp[\int \bar{\psi}(i\ \not{D}-m)\psi]exp[-\int i\alpha(x)C(x) + \bar{\psi}(\not{\partial}\alpha\gamma_5 + 2im\alpha\gamma_5)\psi] \tag{21}$$

Откуда видно нарушение сохранения аксиального тока. Варьируя по α получаем что:

$$\partial_\nu J_5^\nu = -i\frac{e}{2\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{22}$$

2.1.2 Непрерывность аксиального преобразования

Следующим шагом будет обоснование разбиения преобразования на инфинитизимальные шаги.

$$e^{i\alpha(\cdot)\gamma_5} : \; S^2 \to U(1),$$
$$x \to e^{i\alpha(x)\gamma_5}.$$

Для упрощения рассуждений компактифицируем E^2 до S^2, тогда имеем, что все преобразования имеют вид:

$$\mathfrak{D} = \left\{ e^{i\alpha()\gamma_5} : \; S^2 \to U(1) \right\}.$$

Известно, что:

$$\Pi_2(U(1)) = 0.$$

Тогда $\mathfrak{D}$ связанно, тогда параметризуя любой путь параметром τ, имеем что:

$$e^{i\alpha(\cdot)\gamma_5} : \; S^2 \times [0,1] \to U(1),$$

$$(x,t) \to e^{i\alpha_\tau(x)\gamma_5}.$$

Чтобы убедиться в том факте, что $\mathfrak{D}$ односвязно, деформируем $S^2 \times [0,1]$ до S^3. Тогда, как известно, $\Pi_3(U(1)) = 0$. Откуда следует что мы всегда можем выбрать прямой путь между 1 и $e^{i\alpha(x)\gamma_5}$.

2.1.3 Финитное аксиальное преобразование и окончательный результат

Теперь можно законно записать испкомый якобиан в виде:

$$J[\alpha] = \frac{\det(i\not\partial - e\not A)}{\det(i\not\partial - e\gamma^{\nu})(A_{\nu} + \frac{i}{e}\epsilon_{\nu\mu}\partial^{\mu}\alpha)} = \lim(N \to +\infty)\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\det(i\not\partial - e\not B^{n})}{\det\big(i\not\partial - e\gamma^{\nu}B^{n}_{\nu} - \partial^{\mu}(\frac{\alpha}{n})\gamma_{\mu}\gamma_{5}\big)}, \tag{23}$$

где $B^{n}_{\nu} = A_{\nu} + \frac{i}{e}\epsilon_{\nu\mu}\partial^{\mu}\alpha\frac{n}{N}$.

$$\ln J[\alpha] = \lim(N \to +\infty)\sum_{n=0}^{N-1}\ln J[n]_{inf} = \lim\sum_{n=0}^{N-1} i\int d^2x(\frac{\alpha}{N})[-\frac{e}{2\pi}\epsilon F(B_n)]. \tag{24}$$

$$\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(B_n) = \epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(A) + \frac{i}{e}(\epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{\nu\delta}\partial_{\mu} - \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\delta}\partial^{\nu})\partial^{\delta}\alpha\frac{n}{N} = \epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(A) - 2\frac{i}{e}\partial^2\alpha\frac{n}{N}. \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\ln J[\alpha] &= \frac{2i}{e\pi}\lim(N \to +\infty)\int d^2x\alpha\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}[\epsilon F - \frac{2i}{e}\frac{n}{N}\partial^2\alpha] = \\ &= \frac{2i}{e\pi}\lim(N \to +\infty)\int d^2x\alpha[\epsilon F - \frac{i}{e}\partial^2\alpha].\end{aligned} \tag{26}$$

Теперь осталось заметить, что данное преобразование аналогично аксиальной калибровке:$A_{\nu} \to A_{\nu} + \frac{i}{e}\epsilon_{\nu\mu}\partial^{\mu}\alpha$, в калибровке Лоренца. А также ,что квадратичный член по альфа: $-\frac{1}{e^2}(\partial\alpha)^2 = (\frac{i}{e})^2\epsilon_{\nu\mu}\epsilon^{\nu\delta}\partial^{\mu}\alpha\partial_{\delta}\alpha = A^2$.В итоге получаем:

$$\det[i\not\partial - e\not A] = exp[-\frac{e^2}{2\pi}\int d^2xA^2]det[i\not\partial]. \tag{27}$$

И окончательно:

$$\begin{aligned}&\int[d\bar{\psi}d\psi dA]exp[\int d^2x[\bar{\psi}(i\not D)\psi - \frac{1}{4}F^2_{\nu\mu}]] = \int[dA]\det[i\not\partial - e\not A]exp[-\int d^2x\frac{1}{4}F^2_{\nu\mu}] = \\ &= \int[dA]exp[-\frac{e^2}{2\pi}\int d^2xA^2]det[i\not\partial]exp[-\int d^2x\frac{1}{4}F^2_{\nu\mu}] = \\ &= \int[d\bar{\psi}d\psi dA]exp[\int d^2x[\bar{\psi}(i\not\partial)\psi - \frac{e^2}{2\pi}A^{\nu}A_{\nu} - \frac{1}{4}F^2_{\nu\mu}]].\end{aligned} \tag{28}$$

2.2 Бозонизация и регуляризация Паули-Вилларса

Аномалию можно обнаружить и другим способом. Например, если использовать регуляризацию Паули-Вилларса,вводя массивное спинорное поле.

$$S\left(\overline{\psi}, \psi, A_\mu, \phi\right) = -\int d^2x[\overline{\psi}(x)(\not{\partial} + i\not{A})\psi(x) - \overline{\phi}(x)(\not{\partial} + i\not{A} + M)\phi(x)]. \tag{29}$$

Применяя калибровочное и аксиально-калибровочное преобразование:

$$B_\mu(x) = -\left[\partial_\mu\alpha(x) + i\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\beta(x)\right] \tag{30}$$

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{i(\alpha(x)+\gamma_5\beta(x))}\psi'(x), \tag{31}$$

$$\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}'(x)\mathrm{e}^{i(-\alpha(x)+\gamma_5\beta(x))}. \tag{32}$$

Можно увидеть что:

$$\left(\overline{\psi}', \psi', A_\mu, \phi'\right) = -\int \mathrm{d}^2x\left[\overline{\psi}'(x)\partial\psi'(x) - \overline{\phi}'(x)\left(\not{\partial} + M\mathrm{e}^{2i\gamma_5\beta(x)}\right)\phi'(x)\right] \tag{33}$$

.

Отинтегрировав по бозонным полям: $\mathcal{D}^{-1}(\beta) = \det\left(\not{\partial} + Me^{2i\gamma_5\beta(x)}\right)$,что снова можно написать в терминах фермионного интеграла:

$$\frac{1}{\mathcal{D}(\beta)} = \int[\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\overline{\psi}]\exp\int\mathrm{d}^2x\left[\overline{\psi}(x)\not{\partial}\psi(x) + \mathrm{e}^{2i\beta(x)}\sigma_+(x) + \mathrm{e}^{-2i\beta(x)}\sigma_-(x)\right], \tag{34}$$

где:

$$\sigma_+ = \bar{\psi}\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}\psi,\ \sigma_- = \bar{\psi}\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{Bmatrix}\psi.$$

Вышенаписанный функциональный интеграл можно отбозонизировать:

$$S(\vartheta, \beta) = \int\mathrm{d}^2x\left\{\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\vartheta(x)\right]^2 - \frac{M\Lambda}{\pi}\cos\left(\sqrt{4\pi}\vartheta + 2\beta\right)\right\}. \tag{35}$$

Взяв предел $M \to +\infty$ и сделав сдвижку $\vartheta + \beta/\sqrt{\pi} \mapsto \vartheta$, получим:

$$\mathcal{D}^{-1}(\beta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}^2x\left(\partial_\mu\beta(x)\right)^2\right]. \tag{36}$$

И окончательно:

$$S\left(\overline{\psi}', \psi', A_\mu\right) = -\int\mathrm{d}^2x\left[\overline{\psi}'(x)\not{\partial}\psi'(x) + \frac{1}{2\pi}\int d^2x\left(\partial_\mu\beta(x)\right)^2\right]. \tag{37}$$

Дополнительные комментарии о бозонизации смотри в секции Дополнения.

3 Массивная модель Швингера

Массивный случай, выбрано другое представление гамма матриц для удобства:

$$\gamma_0 = \sigma_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \gamma_1 = i\sigma_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\psi = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} U(t), \quad U(t) = \begin{Bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{Bmatrix}.$$

Получаемая система уравнений на компоненты положительно-частотного спинора:

$$\begin{cases} -ma + i{-}(p + eEt)b = 0 \\ i{+}(p + eEt)a - mb = 0 \end{cases} \qquad (38)$$

Из первого уравнения получаем:

$$ma = i\dot{b} - (p + eEt)b, \tag{39}$$

и подставляем во второе:

$$\ddot{b} + ((p + eEt)^2 + m^2 + ieE)b = 0. \tag{40}$$

Тогда общий вид решения:

$$b = A_1 D_\nu(z) + B_1 D_{-\nu-1}(iz). \tag{41}$$

Где $D_\nu(z)$ функция параболлического цилиндра, $z = (1+i)\sqrt{eE}(\frac{p}{eE} + t)$,$\nu = \frac{-im^2}{2eE}$.Учитывая ультрафиолетовые ассимптотики функций, положительно-частотные моды необходимо выбрать в виде:

$$\psi^{(+)}(t) = A^{(+)} \begin{Bmatrix} \frac{i\partial_t - (p+eEt)}{m} D_\nu(z) \\ D_\nu(z) \end{Bmatrix} = A^{(+)} \begin{Bmatrix} \frac{(i-1)\sqrt{eE}\nu}{m} D_{\nu-1}(z) \\ D_\nu(z) \end{Bmatrix}. \tag{42}$$

В последнем равенстве вы использовали рекурентное соотношение для функций параболлического цилиндра:

$$(\partial_z + \frac{1}{2}z)D_\nu(z) = \nu D_{\nu-1}(z). \tag{43}$$

Аналогично можно определить отрицательно-частотные моды, используя $\psi^{(-)}(t,x) = i\sigma_2\psi^{(+)*}(t,x)$, где :

$$\psi^{(-)}(t) = A^{(-)} \begin{Bmatrix} D^*_\nu(z) \\ -\frac{(-i-1)\sqrt{eE}\nu^*}{m} D^*_{\nu-1}(z) \end{Bmatrix}. \tag{44}$$

Определив полные моды $\psi^{(\pm)}(t,x) = \psi^{(\pm)}(t)e^{\mp ipx}$, можно зафиксировать коэффициенты, используя антикоммутационные соотношения:

$$\left\{\psi_a(t,x), \psi_b^\dagger(t,y)\right\} =$$

$$= \iint \frac{dp}{2\pi}\frac{dq}{2\pi} \left[\left\{ a_p, a_q^+ \right\} \psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{b,q}(t)^* e^{i(px-qy)} + \left\{ b_p^+, b_q \right\} \psi^{(-)}_{a,p}(t)\psi^{(-)}_{b,q}(t)^* e^{-i(px-qy)} \right] =$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} \left[\psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{b,p}(t)^* + \psi^{(-)}_{a,-p}(t)\psi^{(-)}_{b,-p}(t)^* \right] e^{ip(x-y)} = \delta(x-y)\delta_{ab}. \tag{45}$$

Теперь, учитывая, что это соотношение не зависит от времени, можно найти значение нормировочных констант, взяв ассимптотики.

$$i\gamma^0\partial_t \left(\psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{b,p}(t)^* \right) = p\gamma^1_{ac}\psi^{(+)}_{c,p}(t)\psi^{(+)}_{b,p}(t)^* - p\gamma^1_{bc}\psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{c,p}(t)^* i\gamma^0\partial_t \left(\psi^{(-)}_{a,-p}(t)\psi^{(-)}_{b,-p}(t)^* \right) =$$

$$p\gamma^1_{ac}\psi^{(-)}_{c,-p}(t)\psi^{(-)}_{b,-p}(t)^* - p\gamma^1_{bc}\psi^{(-)}_{a,-p}(t)\psi^{(-)}_{c,-p}(t)^* \Longrightarrow \partial_t \left(\psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{b,p}(t)^* + \psi^{(-)}_{a,-p}(t)\psi^{(-)}_{b,-p}(t)^* \right) = 0 \tag{46}$$

$$\psi^{(+)}_{a,p}(t)\psi^{(+)}_{b,p}(t)^* + \psi^{(-)}_{a,p}(t)\psi^{(-)}_{b,-p}(t)^* = \delta_{ab} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left|A^{(-)}\right|^2 |D_\nu(z(-p,t))|^2 + \left|A^{(+)}\right|^2 \frac{2eE\nu}{m^2} |D_{\nu-1}(z)|^2 = 1 \\ \left|A^{(+)}\right|^2 |D_\nu(z)|^2 + \left|A^{(=)}\right|^2 \frac{2eE\nu}{m^2} |D_{\nu-1}(z(-p,t))|^2 = 1 \\ \frac{(i-1)\sqrt{eE\nu}}{m}(|A^+|^2 D_{\nu-1}D^*_\nu - |A^-|^2 D^*_\nu(z(-p,t))D_\nu(z(-p,t)) = 0 \end{cases} \tag{47}$$

Для вычисления тока нам необходима только вторая константа. При чем т.к. она не зависит от времени, для опрделения ее зависимости от импульсов устремим время к $+\infty$. И при этом для определения констант всегда может быть достигнут предел $t \gg |p|$. При $z \to +\infty$:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{(-\nu)_{2n}}{n!\,(2z^2)^n} + \mathcal{O}\left|z^2\right|^{-N-1} \right]$$

$$(\gamma)_0 = 1, \quad (\gamma)_{n\neq 0} = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1) \tag{48}$$

Т.к. в А не могут содержатся степени t , мы приходим к такому выражению для него

$$|A^-|^2 \approx e^{-\frac{\pi|\nu|}{2}} = e^{-\frac{\pi m^2}{4eE}} \tag{49}$$

Теперь можно вычислить ток:

$$J_0 = \langle\bar\psi\gamma_0\psi\rangle = \iint \frac{dp}{2\pi}\frac{dq}{2\pi} \left[\langle b_p b_q^+ \rangle \left(\psi^{(-)}_{1,p}(t)\psi^{(-)}_{1,q}(t)^* + \psi^{(-)}_{2,p}(t)\psi^{(-)}_{2,q}(t)^* \right) e^{i(p-q)x} \right] \tag{50}$$

$$J_1 = \langle\bar\psi\gamma_1\psi\rangle = \iint \frac{dp}{2\pi}\frac{dq}{2\pi} \left[\langle b_p b_q^+ \rangle \left(-\psi^{(-)}_{1,p}(t)\psi^{(-)}_{1,q}(t)^* + \psi^{(-)}_{2,p}(t)\psi^{(-)}_{2,q}(t)^* \right) e^{i(p-q)x} \right] \tag{51}$$

$$J_0 = \int \frac{dp}{2\pi} \left(\left|\psi^{(-)}_{1,p}(t)\right|^2 + \left|\psi^{(-)}_{2,p}(t)\right|^2 \right), J_1 = \int \frac{dp}{2\pi} \left(-\left|\psi^{(-)}_{1,p}(t)\right|^2 + \left|\psi^{(-)}_{2,p}(t)\right|^2 \right) \tag{52}$$

В первую очередь интересен пространственный ток,для упрощения подинтегрального выражения можно использовать соотношения (47):

$$J_x = \int \frac{dp}{2\pi}[|A^-|^2(|\alpha|^2|D_{\nu-1}|^2 - |D_\nu|^2)] = \int \frac{dp}{2\pi}[1 - 2e^{-\frac{\pi m^2}{4eE}}|D_\nu|^2] \tag{53}$$

И в случае пульса ограничим пределы интегрирования.Ведь при больших импульсах поведение ассимптотически свободное, а значит не чувствующее поле, тогда при вычитании тока в свободной теории большие импульсы не должны давать вклад в ток.Поэтому пределы интегрирование ограничим $+A_1(t) = ETth(\frac{t}{T})$, тогда оценка тока(для мод возьмем ассимптотики окола нуля):

$$D_\nu(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{\nu}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{4}z^2}(1 - \nu\frac{z^2}{2} + ...) - \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma(-\frac{\nu}{2})}e^{-\frac{1}{4}z^2}(z + ...) \tag{54}$$

$$\langle : J_x : \rangle \approx e^{-\frac{\pi m^2}{4eE}} \int_{-ET}^{ET} \frac{dp}{2\pi}[\frac{\pi}{|\Gamma(\frac{im^2}{4eE} + \frac{1}{2})|} - \frac{m^2}{2eE}\frac{\pi}{|\Gamma(\frac{im^2}{4eE} + \frac{3}{2})|}] =$$

$$= 2ETe^{-\frac{\pi m^2}{4eE}}ch(\frac{\pi m^2}{4eE})\frac{(\frac{m^2}{2eE} - \frac{1}{2})^2}{\frac{m^2}{2eE}} \tag{55}$$

4 Дополнения

4.1 Бозонизация

Посчитаем тем самые корреляторы в обеих теориях и получим соответствие. Начнем с фермионных полей. Для удобства перепишем действие в терминах комплексных переменных : $S(\overline{\psi},\psi) = -\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z}\left(\overline{\psi}_+\partial_{\bar{z}}\psi_+ + \overline{\psi}_-\partial_z\psi_-\right),\quad \psi = \begin{Bmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{Bmatrix},\quad \bar{\psi} = \begin{Bmatrix}\bar{\psi_-}\\ \bar{\psi_+}\end{Bmatrix}.$
Тогда легко показать что пропагаторы равны:

$$\begin{aligned}\Delta_\psi^+ &\equiv \left\langle \overline{\psi}_+(\overline{z},z)\psi_+(0)\right\rangle = -\frac{1}{2\pi z},\\ \Delta_\psi^- &\equiv \left\langle \overline{\psi}_-(\overline{z},z)\psi_-(0)\right\rangle = -\frac{1}{2\pi \overline{z}}\end{aligned}. \tag{56}$$

А соответственно корреляционные функции:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \overline{\psi}_+\left(x_i\right)\psi_+\left(x_i'\right)\right\rangle = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^n \det\frac{1}{z_i - z_j'}. \tag{57}$$

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \overline{\psi}_-\left(x_i\right)\psi_-\left(x_i'\right)\right\rangle = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^n \det\frac{1}{\overline{z}_i - \overline{z}_j'}. \tag{58}$$

Тогда корреляционные функции для сигм:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \sigma_+\left\langle x_i\right) \sigma_-\left(x_i'\right)\right\rangle = (-1)^n \left\langle \prod_{i=1}^n \overline{\psi}_+\left(x_i'\right)\psi_+\left(x_i\right)\right\rangle \left\langle \prod_{i=1}^n \overline{\psi}_-\left(x_i\right)\psi_-\left\langle x_i'\right\rangle\right\rangle = \tag{59}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \frac{\prod_{i<j}\left|x_i - x_j\right|^2\left|x_i' - x_j'\right|^2}{\prod_{i,j}\left|x_i - x_j'\right|^2}. \tag{60}$$

Для скалярного поля легко показать:

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{i\kappa_i\varphi(x_i)}\right) &= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^2xd^2yJ(x)\Delta(x-y,m)J(y)\right]\\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\kappa_i\kappa_j\Delta\left(x_i - x_j, m\right)\right]\end{aligned}, \tag{61}$$

где $J(x) = i\sum\kappa_j\delta(x - x_j)$.Учитывая:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\kappa_i\kappa_j\Delta\left(x_i - x_j, m\right) = -\frac{1}{2\pi}&\left[\left(\sum_i \kappa_i\right)^2(\ln m - \ln 2 + \gamma) - \sum_i \kappa_i^2\ln\Lambda\right.\\ &\left.+\sum_{i\neq j}\kappa_i\kappa_j ln\left|x_i - x_j\right|\right] + O(m\rangle)\end{aligned}, \tag{62}$$

Получаем:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} e^{i\kappa_i \varphi(x_i)} \right\rangle \Bigg|_{ren.} = \prod_{i<j} \left(\mu \left|x_i - x_j\right|\right)^{\kappa_i \kappa_i / 2\pi}. \tag{63}$$

Где μ нормировочный масштаб. И для корреляционной функции получаем следующее выражение:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} e^{i\kappa[\varphi(x_i)-\varphi(y_i)]} \right\rangle \Bigg|_{ren.} = \frac{\prod_{i<j} \left(\mu \left|x_i - x_j\right|\right)^{\kappa^2/2\pi} \left(\mu \left|y_i - y_j\right|\right)^{\kappa^2/2\pi}}{\prod_{i,j} \left(\mu \left|x_i - y_j\right|\right)^{\kappa^2/2\pi}}. \tag{64}$$

Откуда и видно то самое соотвествие между корреляционными функциями, которое возникает при бозонизации.

$$Z(\psi) = \int [d\bar{\psi} d\psi] exp[-\int \mathrm{d}^2x \left[\overline{\psi}(x)\partial\psi(x) + M_+(x)\sigma_+(x) + M_-(x)\sigma_-(x)\right]] =$$

$$= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \int \prod_i d^2x_i d^2y_i \frac{M_+(x_i)\, M_-(y_i)}{(2\pi)^2} \frac{\prod_{i<j} \left|x_i - x_j\right|^2 \left|y_i - y_j\right|^2}{\prod_{i,j} \left|x_i - y_j\right|^2}. \tag{65}$$

Что с учетом полученного выше соответсвия переписывается как:

$$Z = \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu}{2\pi\zeta}\right)^n \left\langle \left[\int \mathrm{d}^2x \left(M_+(x)\mathrm{e}^{i\sqrt{4x}\varphi(x)} + M_-(x)\mathrm{e}^{-i\sqrt{4\pi}\varphi(x)}\right)\right]^n \right\rangle_{\varphi} =$$

$$\int [d\varphi] exp[-\int \mathrm{d}^2x \left\{\frac{1}{2}\left[\partial_{\boldsymbol{u}}\varphi(x)\right]^2 - \frac{\Lambda}{2\pi}\left[M_+(x)\mathrm{e}^{i\sqrt{4\pi}\varphi(z)} + M_-(x)\mathrm{e}^{-i\sqrt{4\pi}\varphi(x)}\right]\right\}]. \tag{66}$$

Теперь если вместо $M_\pm$ подставить $e^{\pm i\beta(x)}$ получается формула (34).

4.2 Поляризационный оператор

Последний способ. Вычисление поляризационного оператора(в евклиде):

$$P_{\mu\nu}(q) = ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{Tr[\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{(}k+q)]}{(k^2)(k+q)^2} \tag{67}$$

$$P_{00} = ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2(k, k+q)}{k^2(k+q)^2} = ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+q)^2} - \frac{q^2}{k^2(k+q)^2}\right) \tag{68}$$

$$P_{00} = -ie^2q^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2(1-x) + (k+q)^2x]^2} = -ie^2q^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + q^2x(1-x)]^2}$$

$$= P_{00} = \frac{e^2}{4\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \tag{69}$$

4.3 Ассимптотики функций параболлического цилиндра

$\lim(z \to +\infty)$

$$D_\nu = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\nu)_{2n}}{n!\,(2z^2)^n} \right], \tag{70}$$

При $|\operatorname{ph} z| < \frac{3}{4}\pi$.
А при $\frac{1}{4}\pi < \pm \operatorname{ph} z < \frac{5}{4}\pi$ ассимптотики можно записать в виде:

$$D_\nu(z) \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2} z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\nu)_{2n}}{n!\,(2z^2)^n} \pm$$

$$\pm\, \mathrm{i} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi(\nu+\frac{1}{2})} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}z^2} z^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_{2s}}{n!\,(2z^2)^n} \tag{71}$$

При малых z:

$$D_\nu(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(-\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{4}z^2} u(z) - \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma(-\frac{\nu}{2})} e^{-\frac{1}{4}z^2} w(z) \tag{72}$$

$$u(z) = (1 + (-\nu) \frac{z^2}{2} + (-\nu)(-\nu+2) \frac{z^4}{4!} + ...) \tag{73}$$

$$w(z) = (z + (-\nu+1) \frac{z^3}{3!} + (-\nu+1)(-\nu+3) \frac{z^5}{5!} + ...) \tag{74}$$

5 Список литературы

[1] Julian Schwinger Phys. Rev. Vol. 125, N. 1

[2] Julian Schwinger Phys. Rev. Vol. 128, N. 5

[3] T. BANKS, D. HORN and H. NEUBERGER Nuclear Physics B108 (1976) 1199129

[4] H. 0. Girotti,* H. J. Rothe, and K. D. Rothe Phys. Rev D Vol. 34, N. 2

[5] Alexander O. Gogolin, Alexander A. Nersesyan, Alexei M. Tsvelik-Bosonization and strongly correlated systems-Cambridge University Press(1999)

[6] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F.K.Popov - Secularly growing loop corrections in strong electric fields ITEP–TH–17/14

[7] Gerald V. Dunne – Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and extensions

[8] Ian K. Affleck, Nicholas S. Manton Nuclear Physics B194 (1982) 38-64

[9] N. S. Manton Annals Of Physics 159,220-251 (1985)

[10] Rom´an Linares, Luis f. Urrutia and j. David Vergara exact solution of the Schwinger model [11] With compact U(1)

[12] Stephen L. Adler Phys. Rev VOLUME 177, NUMBER 5

[13] Kazuo Fujikawa Phys. Rev. Letters Vol. 42, N. 18

[14] Ivan Todorov Clifford Algebras and Spinors CERN-PH-TH/2011-050

[15] Zinn-Justin J.-Quantum field theory and critical phenomena

[16] Walter Dittrich,Martin Reuter-Lecture Notes in Physics.