Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Тригонометрические интегрируемые волчки и квантовые R-матрицы

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:
студент 321 группы
Тимофей Владимирович Краснов

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Зотов А.В.

Долгопрудный
2019

Содержание

1 Введение

В данной работе рассматриваются GL_N интегрируемые волчки Эйлера-Арнольда[3], уравнения движения которых имеют вид:

$$\dot{S} = [S, J(S)]\,, \qquad S = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} S_{ij} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})\,, \tag{1.1}$$

где $\{S_{ij},\ i,j = 1,...,N\}$ есть набор динамических переменных, $\{E_{ij}\}$ – стандартный базис в $\mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, и уравнения (1.1) описывают вращение твердого тела в N-мерном (комплексном) пространстве. С этой точки зрения $J(S)$ является обратным тензором инерции, который представляет собой линейное отображение действующее на S

$$J(S) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} J_{ijkl} E_{ij} S_{lk} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}). \tag{1.2}$$

Компоненты обратного тензора инерции J_{ijkl} не зависят от динамических переменных. В общем случае данная модель не интегрируема, интегрируемость возникает только при специальном выборе $J(S)$. В качестве простейшего примера рассмотрим волчок в $\mathbb{R}^3$. Пусть J_α — величины обратные главным моментам инерции, S_α — компоненты вектора момента импульса. Тогда матрицы вида:

$$S = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2i} \sigma_\alpha S_\alpha, \qquad J(S) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2i} \sigma_\alpha S_\alpha J_\alpha, \tag{1.3}$$

подчиняются уравнениям движения (1.1). Обсуждаемая в работе конструкция интегрируемых волчков возникла в работе Е.К.Склянина [29] (см. также [12]). Идея состоит в том, чтобы сконструировать классический аналог моделей описываемых в обратной задаче рассеяния. Таким образом были описаны классические спиновые цепочки и квадратичная пуассонова структура была получена в классическом пределе квантовых RLL соотношений.

GL_N волчок можно рассматривать как классический предел спиновой цепочки состоящей из одного узла. Рациональные модели данного вида были описаны в работах [1, 18]. В данной работе мы применим описанные выше результаты к тригонометрической R-матрице, которая удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера [13, 23]:

$$R^{\hbar}_{12}(z_{12}) R^{\eta}_{23}(z_{23}) = R^{\eta}_{13}(z_{13}) R^{\hbar-\eta}_{12}(z_{12}) + R^{\eta-\hbar}_{23}(z_{23}) R^{\hbar}_{13}(z_{13})\,, \quad z_{ab} = z_a - z_b\,. \tag{1.4}$$

Нам также небходимы следующие свойства: 1)антисимметричность

$$R^{\hbar}_{12}(z) = -R^{-\hbar}_{21}(-z) = -P_{12} R^{-\hbar}_{12}(-z) P_{12}\,, \qquad P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes E_{ji}\,, \tag{1.5}$$

здесь и далее P_{12} – оператор перестановки. В частности, для любых двух матриц $A, B \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ с элементами из $\mathbb{C}$ выполнено: $(A \otimes B) P_{12} = P_{12} (B \otimes A)$. 2)унитарность

$$R^{\hbar}_{12}(z) R^{\hbar}_{21}(-z) = f^{\hbar}(z)\ 1_N \otimes 1_N \tag{1.6}$$

3)R-матрица имеет простые полюса в окрестности $z = 0$ и $\hbar = 0$, причем вычеты в данных точках заданы формулами(см. также формулы (3.1)-(3.3))

$$\operatorname*{Res}_{\hbar=0} R^{\hbar}_{12}(z) = 1_N \otimes 1_N = 1_{N^2}\,, \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} R^{\hbar}_{12}(z) = P_{12} \tag{1.7}$$

(1_N – это единичная матрица размера $N \times N$). В работе [20] было показано, что решения уравнения (1.4), которые также обладают свойствами (1.5)-(1.7), позволяют в явном виде построить пару Лакса $L(z), M(z) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$. То есть уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = [L(z), M(z)] \tag{1.8}$$

эквивалентны уравнениям движения (1.1) при любых значения спектрального параметра z. Все данные для интегрируемых волчков, включая их пары Лакса, пуассоновы структуры и обратный тензор инерции (т.е. $J(S)$) даны в терминах коэффициэнтов разложения R-матрицы в окрестности $\hbar = 0$ и $z = 0$. Например, в релятивистском случае пара Лакса равна:

$$L^{\eta}(z) = \mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)S_2)\,, \qquad\qquad M^{\eta}(z) = -\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2)\,, \tag{1.9}$$

где $S_2 = 1_N \otimes S$, и $r_{12}(z)$ – классическая r-матрица. См. раздел 3 для детальной информации. Постоянная Планка играет роль релятивистского параметра деформации η. В частном случае(см. раздел 4) он совпадает с таким же параметром в модели Русенаарса-Шнайдера.

Напомним, что из уравнений Лакса следует, что следы степеней матрицы Лакса не меняются во времени. Интегралы движения системы можно найти из коэффициентов разложения матрицы Лакса по параметру z:

$$\mathrm{tr}(L(z))^k = \frac{1}{z^k} H_{k,k} + \frac{1}{z^{k-1}} H_{k,k-1} + ... + H_{k,0} + ..., \qquad k = 1...N \tag{1.10}$$

Или из спектральной кривой:

$$\det(\lambda - L(z)) = 0 \tag{1.11}$$

Интегрируемость гамильтоновой системы обычно рассматривают в терминах теоремы Лиувилля об интегрируемых системах(см. например [4]). Пусть размерность фазового пространства системы равна $2N$ и система имеет N интегралов движения H_k, которые находятся в инволюции, т.е. скобка Пуассона между любыми двумя интегралами движения равна нулю:

$$\{H_i, H_k\} = 0, \qquad i, k = 1...N \tag{1.12}$$

Тогда уравнения движения данной системы интегрируемы в квадратурах. Скобки Пуассона для интегрируемых волчков задаются при помощи классической r-матрицы, которая является классическим пределом квантовой($r_{12}(z) = \lim_{\hbar \to 0}(R_{12}(z) - 1_N \otimes 1_N/\hbar)$:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = c_2[L_1(z) + L_2(w), r_{12}(z-w)] + c_1[L_1(z)L_2(w), r_{12}(z-w)] \tag{1.13}$$

где c_1 и c_2 — константы. Из формулы(1.13) следует, что следы степеней матрицы Лакса находятся в инволюции, а следовательно и интегралы движения. Подробности смотрите в разделе 3.

Заметим, что решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (1.4), обладающее свойствами (1.5) и (1.6), является также решением квантового уравнения Янга-Бакстера

$$R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2)R^{\hbar}_{13}(z_1-z_3)R^{\hbar}_{23}(z_2-z_3)=R^{\hbar}_{23}(z_2-z_3)R^{\hbar}_{13}(z_1-z_3)R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2)\,, \qquad (1.14)$$

поэтому такие решения (1.4) действительно являются квантовыми R-матрицами. Иногда также выполняется следующее свойство:

$$R^{\hbar}_{12}(z)P_{12}=R^{z}_{12}(\hbar)\,. \qquad (1.15)$$

Это свойство позволяет связать коэффициенты разложения R-матриц в окрестности $\hbar=0$ и $z=0$ друг с другом. Условие (1.15) связано с преобразованием Фурье на конечной решетке. См. [33] для подробностей. Данная работа устроена следующим образом. В разделе 2 мы опишем набор хорошо известных R-матриц, которые подчиняются условиям (1.4)-(1.7), и кратко опишем общую классификацию решений уравнения (1.4)[30, 24]. Мы покажем, что характерным примером матрицы из данной классификации является нестандартная тригонометрическая R-матрица[2], которая обобщает GL_2 семивершинную R-матрицу [9] при $N>2$. В разделе 3 мы рассмотрим построение интегрируемых волчков и выпишем в явном виде данные(обратный тензор инерции, пару Лакса) для интегрируемых волчков в общем случае и в случае нестандартной R-матрицы. Используя (1.4), мы также докажем, что классическая квадратичная r-матричная структура эквивалентна классической пуассоновой структуре(классической алгебре Склянина). В итоге мы получим классификацию тригонометрических классических алгебр Склянина, которая будет связана с классификацией тригонометрических решений ассоциативного уравнения Янга-Бакстера. В разделе 4 мы рассмотрим важный частный случай волчка, отвечающий матрице динамических переменных S ранга один и связанный с нестандартной тригонометрической R-матрицей. Мы покажем, что данная модель калибровочно эквивалентна модели Русенаарса-Шнайдера [26] или модели Калоджеро-Мозера-Сазерленда [8]. Будет описана в явном виде замена переменных.

2 Тригонометрические R-матрицы

Мы начнем со свойств хорошо известных R-матриц и затем перейдем к общему случаю.

2.1 Стандартные и нестандартные R-матрицы

Будем записывать компоненты R-матрицы в стандартном базисе в $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$

$$R^{\eta}_{12}(z)=\sum_{i,j,k,l=1}^{N}R^{\eta}_{ijkl}(z)E_{ij}\otimes E_{kl} \qquad (2.1)$$

- $\underline{\mathbb{Z}_N\text{-инвариантная тригонометрическая } R\text{-матрица [9, 22, 16]}}$:

$$\begin{gathered}(R_1)^{\eta}_{ij,kl}(z)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)+\\+\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}\,,\end{gathered} \qquad (2.2)$$

здесь и далее используется следующее обозначение

$$\varepsilon(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1\,, \text{если A верно}\,, \\ 0\,, \text{если A ложно}\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

- Бактеризация тригонометрической R-матрицы Кремера-Жерве[4, 2]:

$$\begin{gathered}(R_2)^{\eta}_{ij,kl}(z) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\,\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)+ \\ +\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}+ \\ +N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}-\varepsilon(k<j<i)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}\Big)\,.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Данная матрица отличается от предыдущей (2.2) последней строкой. Покажем, как эта матрица связаная с R-матрицей Кремера-Жерве(Cremmer-Gervais). Сначала произведем калибровочное преобразование:

$$R^{\eta}_{12}(z-w)\to \tilde{R}^{\eta}_{12}(z,w)=D_1(z)D_2(w)R^{\eta}_{12}(z-w)D_1^{-1}(z)D_2^{-1}(w) \tag{2.5}$$

с диагональной матрицей $D_{ij}(z)=\delta_{ij}e^{-jz}$. Для матрицы (2.4) мы имеем $\tilde{R}^{\eta}_{12}(z,w)=\tilde{R}^{\eta}_{12}(z-w)$. Результат имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}(\tilde{R}_2)^{\eta}_{ij,kl}(z) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\,\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)+ \\ +\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}+ \\ +N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)e^{(j-k)\eta}-\varepsilon(k<j<i)e^{(j-k)\eta}\Big)\,.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Выпишем R-матрицу Кремера-Жерве[10]. Она не зависит от спектрального параметра:

$$\begin{gathered}R^{\mathrm{CG,q}}_{12}=q^{-1/N}\Big(q\sum_{i=1}^{N}E_{ii}\otimes E_{ii}+q\sum_{i>j}^{N}q^{-2(i-j)/N}E_{ii}\otimes E_{jj}+q^{-1}\sum_{i<j}^{N}q^{-2(i-j)/N}E_{ii}\otimes E_{jj}- \\ -(q-q^{-1})\sum_{i<j}^{N}\sum_{k=1}^{j-i-1}q^{2k/N}E_{j-k,i}\otimes E_{i+k,j}+(q-q^{-1})\sum_{i>j}^{N}\sum_{k=0}^{i-j-1}q^{-2k/N}E_{j+k,i}\otimes E_{i-k,j}\Big)\,.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Обратную R-матрицу можно найти из формулы:

$$R^{\mathrm{CG,q}}_{12}R^{\mathrm{CG,q^{-1}}}_{12}=1_N\otimes 1_N \tag{2.8}$$

Выпишем матрицу Кремера-Жерве в координатах при $q=e^{-N\eta/2}$

$$\begin{gathered}R^{\mathrm{CG},e^{-N\eta/2}}_{ij,kl}=e^{\eta/2}\Big(e^{-N\eta/2}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}+e^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)- \\ -2\sinh(N\eta/2)\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i<k)+2\sinh(N\eta/2)e^{(i-l)\eta}\left(\varepsilon(j<i<l)-\varepsilon(l<i<j)\right)\Big)\end{gathered} \tag{2.9}$$

Также нам понадобится координатное выражение для следующей R-матрицы:

$$\begin{gathered}\left(R_{21}^{\mathrm{CG,q}}\right)^{-1}_{ij,kl} = R_{kl,ij}^{\mathrm{CG},e^{-N\eta/2}} = e^{-\eta/2}\Big(e^{N\eta/2}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}+ \\ e^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)+2\sinh(N\eta/2)\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i>k)+ \\ +2\sinh(N\eta/2)e^{(i-l)\eta}\left(\varepsilon(j<i<l)-\varepsilon(l<i<j)\right)\Big)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Теперь введем спектральный параметр:

$$R_{12}^{\mathrm{CG,q}}(x) = xR_{12}^{\mathrm{CG,q}} - x^{-1}\left(R_{21}^{\mathrm{CG,q}}\right)^{-1} \tag{2.11}$$

и запишем данную R-матрицу в координатах при $x = e^{-\eta/2-Nz/2}$, воспользовавшись (2.9) и (2.10):

$$\begin{gathered}R_{ij,kl}^{\mathrm{CG},e^{-N\eta/2}}(e^{-\eta/2-Nz/2}) = -2\sinh(N(z+\eta)/2)\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}- \\ -2\sinh(Nz/2)e^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)- \\ -2\sinh(N\eta/2)e^{\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)- \\ -4\sinh(N\eta/2)\sinh(Nz/2)\varepsilon^{(i-l)\eta}\left(\varepsilon(i<j<l)-\varepsilon(l<i<j)\right)\end{gathered} \tag{2.12}$$

И наконец,

$$(\tilde{R}_2)^{\eta}_{12}(z) = -\frac{N}{4\sinh(Nz/2)\sinh(N\eta/2)}\,R_{12}^{\mathrm{CG,q}}(x)^T\,, \tag{2.13}$$

где "T" означает транспонирование матрицы ($R_{ij,kl} \xrightarrow{T} R_{ji,lk}$). Воспользовавшись выражением в координатах (2.12), легко убедится, что (2.13) совпадает с (2.11).

• Нестандартная тригонометрическая R-матрица [2]:

$$\begin{gathered}R^{\eta}_{ij,kl}(z) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\,\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)+ \\ +\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}+ \\ +N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}-\varepsilon(k<j<i)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}\Big)+ \\ +N\delta_{i+k,j+l+N}\Big(\delta_{iN}e^{-jz-l\eta}-\delta_{kN}e^{lz+j\eta}\Big)\,.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Она отличается от предыдущей (2.4) последней строкой, которая обеспечивает в случае $N=2$ семивершинную деформацию [9] шестивершинной R-матрицы.

Свойства R-матриц.

Все R-матрицы (2.2), (2.4) и (2.14) подчиняются ассоциативному уравнению Янга-Бакстера (1.4), свойству антисимметричности (1.5), свойству унитарности (1.6), и следовательно, квантовому уравнению Янга-Бакстера (1.14). Более того, все они обладают Фурье симметрией (1.15). Калибровочно преобразованная R-матрица (2.6) не удовлетворяет свойству (1.15), в то время как все остальные свойства верны. Чтобы объеденить свойства описанных выше R-матриц, введем следующие обозначения для последних строк в (2.4) и (2.14): $\Delta_1 R^\eta(z) = (R_2)^\eta(z) - (R_1)^\eta(z)$ и $\Delta_2 R^\eta(z) = (R)^\eta(z) - (R_2)^\eta(z)$, т.е.

$$\Delta_1 R^\eta_{ij,kl}(z) = N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)e^{(i-j)z+(j-k)\eta} - \varepsilon(k<j<i)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}\Big)\,, \tag{2.15}$$

$$\Delta_2 R^\eta_{ij,kl}(z) = N\delta_{i+k,j+l+N}\Big(\delta_{iN}e^{-jz-l\eta} - \delta_{kN}e^{lz+j\eta}\Big) \tag{2.16}$$

и рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\mathbf{R}^\eta(z) = A_0(R_1)^\eta(z) + A_1\Delta_1 R^\eta(z) + A_2\Delta_2 R^\eta(z)\,, \tag{2.17}$$

где A_0, A_1 и A_2 есть некоторые константы. Например, при $A_0 = A_1 = A_2 = 1$ (2.17) получаем (2.14). В итоге:

Предложение 2.1 *Для любых A_0, A_1 и A_2 (2.17) выполняются свойства антисимметричности, унитарности и Фурье симметрия(1.5),(1.6),(1.15) причем:*

$$f^\eta(z) = A_0^2\frac{N^2}{4}\left(\frac{1}{\sinh^2(N\eta/2)} - \frac{1}{\sinh^2(Nz/2)}\right)\,, \tag{2.18}$$

то есть (2.17) невырождена тогда и только тогда, когда $A_0 \neq 0$.

Ассоциативное уравнения Янга-Бакстера (1.4) выполняется для всех R-матриц (2.2), (2.4) и (2.14). Линейная комбинация (2.17) подчиняется (1.4) в следующих случаях:

1. $A_0 = A_1 \neq 0$, A_2 – произвольное,

2. $A_0 \neq 0$, $A_1 = A_2 = 0$

3. $A_0 = A_1 = 0$, A_2 – произвольное.

Последняя строка означает, что R-матрица (2.16) удовлетворяет (1.4).

Отметим также несколько специальных случаев:

a.) В случае $N = 2, 3$ линейная комбинация (2.17) удовлетворяет (1.4) при A_0, A_1 – произвольные, и $A_2 = 0$(вообще, в случае $N = 2$ константа A_1 не нужна, так как $\Delta_1 R^\eta(z) = 0$ в данном случае).

b.) При $N = 4$ и $A_0 = A_2 = 0$ (2.17) не удовлетворяет уравнению (1.4) в то время как квантовое уравнение Янга-Бакстера (1.14) выполняется.

В случае 2 из Предложения можно провести прямую проверку. Вместо прямой проверки случаев 1 и 3 в следующем параграфе мы покажем, что нестандартная R-матрица (2.14) входит в общую классификацию. Затем, мы применим калибровочное преобразование (2.5), причем:

$$D_{ij} = \delta_{ij}e^{-j\Lambda} \tag{2.19}$$

к нестандартной R-матрице (2.14). В компонентах данное преобразование приводит к $R^\eta_{ij,kl}(z) \to e^{(j+l-i-k)\Lambda}R^\eta_{ij,kl}(z)$. Это означает, что последняя строка в (2.14) домножается на $e^{-N\Lambda}$:

$$\begin{gathered}
R^\eta_{ij,kl}(z) = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2) + \coth(N\eta/2)\Big) + \\
+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta - \mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)} + \delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z - \mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)} + \\
+N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)e^{(i-j)z+(j-k)\eta} - \varepsilon(k<j<i)e^{(i-j)z+(j-k)\eta}\Big) + \\
+Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(\delta_{iN}e^{-jz-l\eta} - \delta_{kN}e^{lz+j\eta}\Big)\,.
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Взяв предел $\Lambda \to \pm\infty$ мы получаем случай 1 с константой $A_2 = 0$ или случай 3.

И наконец, рассмотрим

- R-матрицу аффинной квантовой алгебры $\hat{\mathcal{U}}_q(\mathrm{gl}_N)$ [14, 25]:

$$R^{\mathrm{xxz},\eta}_{12}(z) = \frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2) + \coth(N\eta/2)\Big)\sum_{i=1}^{N} E_{ii}\otimes E_{ii} +$$

$$+\frac{(N/2)}{\sinh(N\eta/2)}\sum_{i\neq j}^{N} E_{ii}\otimes E_{jj} + \frac{(N/2)}{\sinh(Nz/2)}\sum_{i<j}^{N}\left(E_{ij}\otimes E_{ji}\, e^{Nz/2} + E_{ji}\otimes E_{ij}\, e^{-Nz/2}\right)\,. \tag{2.21}$$

Она используется для построения GL_N XXZ спиновых цепочек и обычно записывается в другой нормировке:

$$\tilde{R}^{\mathrm{xxz},q}_{12}(x) = \frac{4}{N}\,\sinh(Nz/2)\sinh(N\eta/2)\,R^{\mathrm{xxz},\eta}_{12}(z) =$$

$$= \left(xq - \frac{1}{xq}\right)\sum_{i=1}^{N} E_{ii}\otimes E_{ii} + \left(x - \frac{1}{x}\right)\sum_{i\neq j}^{N} E_{ii}\otimes E_{jj} + \left(q - \frac{1}{q}\right)\sum_{i\neq j}^{N} x^{\mathrm{sgn}(j-i)} E_{ij}\otimes E_{ji}\,, \tag{2.22}$$

где $x = e^{Nz/2}$, $q = e^{N\eta/2}$. XXZ R-матрица является бакстеризацией матрицы Дринфельда: [11]:

$$\left(R^{\mathrm{Dr},q}_{12}\right)^{\pm 1} = q^{\pm 1}\sum_{i=1}^{N} E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j}^{N} E_{ii}\otimes E_{jj} \pm (q - q^{-1})\sum_{i>j}^{N} E_{ij}\otimes E_{ji}\,. \tag{2.23}$$

А именно,

$$\tilde{R}^{\mathrm{xxz},q}_{12}(x) = xR^{\mathrm{Dr},q}_{21} - x^{-1}\left(R^{\mathrm{Dr},q}_{12}\right)^{-1}\,. \tag{2.24}$$

Для R-матрицы (2.21) выполнено квантовое уравнения Янга-Бакстера (1.14). Данная R-матрица антисимметрична и унитарна (1.6), причем:

$$f^{\eta}(z) = \frac{N^2}{4}\left(\frac{1}{\sinh^2(N\eta/2)} - \frac{1}{\sinh^2(Nz/2)}\right)\,. \tag{2.25}$$

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (1.4) для (2.21) выполняется в случае $N = 2$. При $N > 2$ разность между левой и правой частью уравнения (1.4) не равна нулю, хотя она и не зависит от спектральных параметров:

$$R^{\hbar}_{12}(z_{12})R^{\eta}_{23}(z_{23}) - R^{\eta}_{13}(z_{13})R^{\hbar-\eta}_{12}(z_{12}) - R^{\eta-\hbar}_{23}(z_{23})R^{\hbar}_{13}(z_{13}) =$$

$$= -\frac{N^2}{8\cosh(N\hbar/4)\cosh(N\eta/4)\cosh(N(\hbar-\eta)/4)}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}^{N} E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{kk}\,. \tag{2.26}$$

Последнее утверждение можно проверить прямым вычислением, которое приведено в приложении A. Мы не рассматриваем XXZ R-матрицу при построении интегрируемых волчков. Это, конечно, возможно, но наш метод требует, чтобы выполнялось ассоциативное уравнения Янга-Бакстера(1.4).

2.2 Общая классификация

В данном разделе мы кратко опишем классификацию [30, 24] тригонометрических решений ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (1.4), обладающих свойствами антисимметричности (1.5) и унитарности (1.6). Как указано ранее, из этих условий следует, что R-матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (1.14), т.е. мы имеем дело с нединамической квантовой R-матрицей. Мы покажем, что нестандартная тригонометрическая R-матрица (2.14) входит в данную классификацию.

Общее решение уравнения (1.4) дается в терминах комбинаторного построения, которое называется ассоциативной структурой Белавина-Дринфельда. Рассмотрим $S = \{1, ..., N\}$ – конечное множество из N элементов. S можно рассматривать как множество из N вершин на окружности пронумерованных от 1 до N (расширенная диаграмма Дынкина A_{N-1}). Зададим транзитивную циклическую перестановку C_0, действующую на S, и пусть Γ_{C_0} будет графиком данной перестановки, т.е. множеством упорядоченных пар $\Gamma_{C_0} = \{(s, C_0(s)), s \in S\}$.

Определим ещё одну транзитивную циклическую перестановку C и пару подмножеств $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma_{C_0}$, связанных соотношением $(C\times C)\Gamma_1 = \Gamma_2$, имея в виду $(C\times C)(i, j) = (C(i), C(j))$. Другими словами, $C \times C$ задаёт биективное отображение τ: $\Gamma_1 \xrightarrow{C\times C} \Gamma_2$. Набор $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ представляет собой тройку Белавина-Дринфельда [6].

Расширим действие отображения τ на другие элементы из $S\otimes S$. А именно, рассмотрим биекцию $\tau :\ P_1 \xrightarrow{C\times C} P_2$, где $P_{1,2}$ это следующие множества:

$$P_i = \{(s, C_0^k(s)) :\ (s, C_0(s)) \in \Gamma_i\, , ... , (C_0^{k-1}(s), C_0^k(s)) \in \Gamma_i\, , (C_0^k(s), C_0^{k+1}(s)) \notin \Gamma_i\}\,. \tag{2.27}$$

Из транзитивности перестановки C и надлежащего выбора $\Gamma_{1,2}$ ($\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma_{C_0}$,$(C\times C)\Gamma_1 = \Gamma_2$) следует, что существуют числа k_1,k_2 такие, что $(C_0 \times C_0)^{k_i+1}\Gamma_i \notin \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Перестановка C также обладает данным свойством, а именно, существует число k такое, что $(C\times C)^k\Gamma_1 \notin \Gamma_1$. Поэтому, P_i являются хорошо определенными конечными множествами, и τ является биективным отображением между ними.

Теперь мы можем записать общую тригонометрическую R-матрицу в терминах (C_0, C, Γ_1, Γ_2) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
R^\eta_{12}(z) = \frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2) + \coth(N\eta/2)\Big)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \\
+\frac{N}{e^{N\eta}-1}\sum_{0<n<N\,,\, i=C^n(k)} e^{n\eta}E_{ii}\otimes E_{kk} + \frac{N}{e^{Nz}-1}\sum_{0<m<N\,,\, k=C_0^m(i)} e^{mz}E_{ik}\otimes E_{ki} + \\
+ \sum_{\substack{0<m<N\,,\ n>0,\\ i=C_0^m(j)\,,\ \tau^n(j,i)=(k,l)}} N\left(e^{-n\eta-mz}E_{ij}\otimes E_{kl} - e^{n\eta+mz}E_{kl}\otimes E_{ij}\right)\,,
\end{gathered} \tag{2.28}$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям индексов – элементам множества S. В частности, последнее суммирование производится по всем возможным значениям $i, j, k, l \in \{1, ..., N\}$ и положительным m, n для которых отображение $\tau^n(j, i)$ определено, то есть $(j, i) \in P_1$ и $\tau^n(j, i) = (k, l) \in P_2$, где $i = C_0^m(j)$. Данная R-матрица антисимметрична и унитарна (1.6), функция $f^\eta(z)$ задана формулой(2.25). Общее решение (2.28) дано с точностью до калибровочного преобразования[30, 24]. А именно, возьмем произвольные константы c, c', λ, и элементы подалгебры Картана $a, b \in \mathfrak{h}$, которые являются инфинитезимальными симметриями R-матрицы:

$$[a_1 + a_2, R^{\eta}_{12}(z)] = [b_1 + b_2, R^{\eta}_{12}(z)] = 0 \tag{2.29}$$

(здесь $a_1 = a \otimes 1_N, a_2 = 1_N \otimes a$). Тогда следующая R-матрица представляет общее тригонометрическое решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера:

$$\tilde{R}^{\eta}_{12}(z) = ce^{\lambda\eta z} e^{\eta a_2 + z b_1} R^{c\eta}_{12}(c'z) e^{-\eta a_1 - z b_2} \tag{2.30}$$

Пример. Рассмотрим следующую циклическую перестановку:

C_0 :

s	$C_0(s)$
1	N
2	1
3	2
$\vdots$	$\vdots$
N	$N-1$

$C = C_0^{-1}$:

s	$C(s)$
1	2
2	3
$\vdots$	$\vdots$
$N-1$	N
N	1

(2.31)

и определим подмножества $\Gamma_{1,2} \subset \Gamma_{C_0} = \{(s, C_0(s))$ следующим образом:

$$\Gamma_1 = \Big\{(1, N)\,, (2, 1)\,, (3, 2)\,, ... \,, (N-1, N-2)\Big\}\,, \tag{2.32}$$

$$\Gamma_2 = (C \times C)\Gamma_1 = \Big\{(2, 1)\,, (3, 2)\,, ... \,, (N-1, N-2)\,, (N, N-1)\Big\}\,. \tag{2.33}$$

Чтобы получить P_1 рассмотрим действие $C_0 \times C_0$ на элементы подмножества Γ_1 (2.32):

$$\begin{array}{l}
(1, N) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (N, N-1) \not\subset \Gamma_1\,, \\
(2, 1) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (1, N) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (N, N-1) \not\subset \Gamma_1\,, \\
(3, 2) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (2, 1) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (1, N) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (N, N-1) \not\subset \Gamma_1\,, \\
\vdots \\
(N-1, N-2) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} \ldots \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (2, 1) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (1, N) \overset{C_0 \times C_0}{\longrightarrow} (N, N-1) \not\subset \Gamma_1\,.
\end{array} \tag{2.34}$$

В соответствии с определением (2.31) мы получаем соответствующее множество P_1:

$$P_1 = \left\{\begin{array}{l}
(1, N)\,, \\
(2, 1)\,, \quad (2, N)\,, \\
(3, 2)\,, \quad (3, 1)\,, \quad (3, N)\,, \\
\qquad\qquad \vdots \\
(N-1, N-2)\,, (N-1, N-3)\,, ... \,, (N-1, 1)\,, (N-1, N)
\end{array}\right\} \tag{2.35}$$

Таким же образом (2.33) мы получаем множество P_2:

$$P_2 = (C \times C)P_1 = \left\{\begin{array}{l}
(2, 1)\,, \\
(3, 2)\,, \ (3, 1)\,, \\
(4, 3)\,, \ (4, 2)\,, \ (4, 1)\,, \\
\qquad\qquad \vdots \\
(N, N-1)\,, (N, N-2)\,, ... \,, (N, 2)\,, (N, 1)
\end{array}\right\} \tag{2.36}$$

Биекция между P_1 и P_2, получаемая из $C \times C$, есть отображение τ.

Предложение 2.2 *R-матрица (2.28) воспроизводит нестандартную тригонометрическую R-матрицу (2.14), когда ассоциативная структура Белавина-Дринфельда задана соотношениями (2.31)-(2.33).*

Доказательство: Первые две строки в формулах (2.28) и (2.14) совпадают. Рассмотрим первую сумму во второй строке в формуле (2.28):

$$\frac{N}{e^{N\eta}-1}\sum_{0<n<N\,,\,i=C^n(k)} e^{n\eta}E_{ii}\otimes E_{kk}=\frac{Ne^{-N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}\sum_{0<n<N\,,\,i=C^n(k)} e^{n\eta}E_{ii}\otimes E_{kk} \tag{2.37}$$

В силу определения перестановки C (2.31) для индекса суммирования n мы имеем: $n=i-k$ если $i>k$ и $n=N-k+i$ если $i<k$. Поэтому первые суммы во второй строке в формулах (2.28) и (2.14) совпадают. Похожие рассуждения для вторых сумм во второй строке приводят нас к выводу, что вторые строки в формулах (2.28) и (2.14) полностью совпадают.

Затем, первую сумму последней строки в формуле (2.28) и разделим её на две части:

$$\sum_{\substack{0<m<N\,,\,n>0,\\ i=C_0^m(j)\,,\,\tau^n(j,i)=(k,l)}} Ne^{-n\eta-mz}E_{ij}\otimes E_{kl}=\left(\sum{}'+\sum{}''\right)Ne^{-n\eta-mz}E_{ij}\otimes E_{kl}\,, \tag{2.38}$$

где суммы $\sum'$ и $\sum''$ определены указаным ниже образом. Вся сумма берется по таким i,j,k,l, для которых $(j,i)\in P_1$, а $(k,l)\in P_2$ соответственно. Тогда сумма $\sum''$ берется по диагональным элементам $(1,N)$, ... ,$(N-1,N)$ из $(j,i)\in P_1$ (2.35), а сумма $\sum'$ берется по всем остальным элементам из $(j,i)\in P_1$(это нижняя треугольная часть в (2.35)).

Из (2.35) и (2.36) следует, что $j>i$ и $k>l$ для элементов суммы $\sum'$. Более того, для этих элементов верно, что $i+k=j+l$ Это верно, поскольку из таблиц (2.35) и (2.36) видно, что каждое применение отображения τ на элементы под диаганолью в P_1 не меняет разности между элементами пар (j,i) и (k,l), а также при последовательное применение отображения τ не может привести нас к диагональным элементам в P_1. Поскольку отображение $P_1\to P_2$ производится с помощью $C\times C$, мы приходим к выводу, что $j<k$. Поэтому верно, что $i<j<k$. Также, из $i=C_0^m(j)$ мы имеем $m=j-i$. И наконец, $C^n(j)=k$, так что $n=k-j$. Таким образом, мы показали, что сумма $\sum'$ равна первой сумме в третьей строке в формуле (2.14).

Для элементов суммы $\sum''$ мы имеем $i=N>j$ и $i+k=j+l+N$. Поскольку $N=C_0^m(j)$ мы получаем $j=m$. С другой стороны, $C^n(N)=k$, так что $k=n$. Таким образом, сумма $\sum''$ равна первой сумме в последней строке в формуле (2.14).

Таким же образом(разделяя на две части) можно показать, что вторая сумма в последней строке формулы (2.37) равна сумме вторых членов из третьей и четвертой строки в формуле (2.14). $\blacksquare$

Прокомментируем происхождение общей классификации. Она возникает из нетривиальных(тригонометрических) пределов[2, 7, 28] для эллиптического случая, в котором классификация довольно простая. Она основана на классификации М.Атьи векторных расслоений на эллиптических кривых. Для эллиптической R-матрицы фиксируется структура полюсов(1.7) и задаются квазипериодические граничные условия на торе при помощи степеней матриц I_1^k, I_2^l $(k,l=1,...,N-1)$ размера $N\times N$, где $I_1=\mathrm{diag}(\exp(4\pi\imath/N),\exp(2\pi\imath/N),...,1)$ и $(I_2)_{ij}=\varepsilon(i=j+1\,\mathrm{mod}\,N)$. Нединамическая R матрица соответствует случаю Н.О.К.$(k,N)=1$ и Н.О.К.$(l,N)=1$. В противном случае возникают модули эллиптических кривых, которые играют роль динамических переменных.

3 Интегрируемые волчки

Здесь мы опишем релятивистские и нерелятивистские волчки, построенные при помощи R-матрицы удовлетворяющей (1.4)-(1.7). Наше рассмотрение использует результаты из из статей [18, 20]. Для релятивистской модели классическая r-матричная структура квадратичная, а в нерелятивистском случае она линейная. В релятивистском случае существуют два эквавалентных представления Лакса: в первом случае есть явная зависимость от релятивистского параметра деформации η. Это случай описывается при помощи квантовой R-матрицы. Второе представление задается при помощи классической r-матрицы, а пара Лакса в этом описании не зависит от параметра η.

Рассмотрим решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (1.4) со свойствами (1.5) и (1.6) (Вообще, достаточно чтобы R-матрица удовлетворяла только одному из условий (1.5) or (1.6)[20]. Однако, мы имеем дело с R-матрицами удовлетворяющими обоим свойствам, кроме случая $A_0 = A_1 = 0$ в формуле (2.17), где унитарность вырождена). Пусть также R-матрица раскладывается в следующий ряд в окрестности $\hbar = 0$ (классический предел):

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \frac{1}{\hbar}\, 1_N \otimes 1_N + r_{12}(z) + \hbar\, m_{12}(z) + O(\hbar^2) \tag{3.1}$$

и в окрестности $z = 0$

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \frac{1}{z}\, P_{12} + R^{\hbar,(0)}_{12} + zR^{\hbar,(1)}_{12} + O(z^2)\,, \tag{3.2}$$

$$R^{\hbar,(0)}_{12} = \frac{1}{\hbar}\, 1_N \otimes 1_N + r^{(0)}_{12} + O(\hbar)\,, \qquad r_{12}(z) = \frac{1}{z}\, P_{12} + r^{(0)}_{12} + O(z)\,. \tag{3.3}$$

Из свойства антисимметричности мы (1.5) мы получаем

$$\begin{gathered} r_{12}(z) = -r_{21}(-z)\,, \qquad m_{12}(z) = m_{21}(-z)\,, \\ R^{\hbar,(0)}_{12} = -R^{-\hbar,(0)}_{21}\,, \qquad r^{(0)}_{12} = -r^{(0)}_{21}\,. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Если Фурье-симметрия(1.15) выполняется(умножение справа R-матрицы (2.1) на P_{12} даёт $R_{ijkl} \to R_{ilkj}$.), то мы также имеем

$$\begin{gathered} R^{z,(0)}_{12} = r_{12}(z) P_{12}\,, \\ R^{z,(1)}_{12} = m_{12}(z) P_{12}\,, \\ r^{(0)}_{12} = r^{(0)}_{12} P_{12}\,. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Просуммируем результаты статьи [20]. Рассмотрим R-матрицу, которая подчиняется уравнениям (1.4)-(1.7) и разложениям (3.1)-(3.3). Тогда уравнения Лакса

$$\dot{L}(z, S) = [L(z, S), M(z, S)] \tag{3.6}$$

эквивалентны уравнениям движения

$$\dot{S} = [S, J(S)] \tag{3.7}$$

в следующих случаях

• Релятивистский волчок:

$$L^{\eta}(z,S)=\mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)S_2)\,,\qquad M^{\eta}(z,S)=-\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2) \tag{3.8}$$

и

$$J^{\eta}(S)=\mathrm{tr}_2\Big((R^{\eta,(0)}_{12}-r^{(0)}_{12})S_2\Big)\,. \tag{3.9}$$

• Нерелятивистский волчок:

$$L(z,S)=\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2)\,,\qquad M(z,S)=\mathrm{tr}_2(m_{12}(z)S_2) \tag{3.10}$$

и

$$J(S)=\mathrm{tr}_2(m_{12}(0)S_2)\,. \tag{3.11}$$

Эти формулы легко переписать в терминах компонент R-матрицы (2.1). Например, матрица Лакса (3.8) имеет следующий вид

$$L^{\eta}(z,S)=\sum_{i,j,k,l=1}^{N}R^{\eta}_{ijkl}(z)S_{lk}E_{ij}\,, \tag{3.12}$$

в силу того, что $\mathrm{tr}(E_{kl}S)=S_{lk}$. Это эквивалентно

$$L^{\eta}(z,S)=\sum_{i,j=1}^{N}L^{\eta}_{ij}(z,S)E_{ij}\,,\qquad L^{\eta}_{ij}(z,S)=\sum_{k,l=1}^{N}R^{\eta}_{ijkl}(z)S_{lk}\,, \tag{3.13}$$

а для (3.9), (3.11) мы получаем

$$\begin{gathered}J^{\eta}(S)=\sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}J^{\eta}_{ij}(S)\,,\qquad J^{\eta}_{ij}(S)=\sum_{k,l=1}^{N}(R^{\eta,(0)}_{ij,kl}-r^{(0)}_{ij,kl})S_{lk}\,,\\ J(S)=\sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}J_{ij}(S)\,,\qquad J_{ij}(S)=\sum_{k,l=1}^{N}m_{ij,kl}(0)S_{lk}\,.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Классические алгебры Склянина и r-матричные структуры. В этом разделе мы покажем, что любое решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (1.4) обладающее свойствами (1.5)-(1.7), и разложение в ряд которого в окрестности $\hbar=0$ и $z=0$ удовлетворяет формулам (3.1)-(3.4), задает классическую квадратичную пуассонову структуру(классическую алгебру Склянина). Рассмотрим квадратичную r-матричную структуру вида [29]

$$c_2\{L^{\eta}_1(z,S),L^{\eta}_2(w,S)\}=[L^{\eta}_1(z,S)L^{\eta}_2(w,S),r_{12}(z-w)]\,, \tag{3.15}$$

где $c_2\neq 0$ произвольная константа. Матрица Лакса имеет вид, указанный выше(3.8). Взяв вычет при $w=0$, мы имеем:

$$c_2\{L^{\eta}_1(z,S),S_2\}=[L^{\eta}_1(z,S)S_2,r_{12}(z)] \tag{3.16}$$

Теперь взяв вычет при $w=0$ мы получаем скобку Пуассона следующего вида

$$c_2\{S_1,S_2\}=[S_1S_2,r_{12}^{(0)}]+[L_1^{\eta,(0)}(S)S_2,P_{12}]\,,\qquad L_1^{\eta,(0)}(S)=\mathrm{tr}_3(R_{13}^{\eta,(0)}S_3)\,. \tag{3.17}$$

В покомпонентной форме (3.17) скобка Пуассона имеет вид:

$$c_2\{S_{ij},S_{kl}\}=(L_{il}^{\eta,(0)}S_{kj}-L_{kj}^{\eta,(0)}S_{il})+\sum_{a,b=1}^{N}(S_{ia}S_{kb}r_{aj,bl}^{(0)}-r_{ia,kb}^{(0)}S_{aj}S_{bl})\,, \tag{3.18}$$

где

$$L_{ij}^{\eta,(0)}=\sum_{k,l=1}^{N}R_{ij,kl}^{\eta,(0)}S_{lk}\,. \tag{3.19}$$

Доказательство эквивалентности формул (3.17) и (3.18) основано на следующем вырождении ассоциативного уравнения Янга-Бакстера (1.4)

$$R_{12}^{\hbar}(x)R_{23}^{\hbar}(y)=R_{13}^{\hbar}(x+y)r_{12}(x)+r_{23}(y)R_{13}^{\hbar}(x+y)-\partial_\hbar R_{13}^{\hbar}(x+y)\,, \tag{3.20}$$

полученного в пределе при $\eta\to\hbar$ в (1.4).

Предложение 3.1 *Для матрицы Лакса (3.8) определенной с помощью R-матрицы удовлетворяющей ассоциативному уравнению Янга-Бакстера (1.4) и вместе со свойствами (3.1)-(3.5) скобки Пуассона (3.17) эквивалентны квадратичной r-матричной структуре (3.15).*

Доказательство: Подставляя матрицу Лакса (3.8) в формулу (3.15) мы получаем следующее выражение для левой части уравнения (3.15)(R-матрицы $R_{13}^{\eta}(z)$ и $R_{24}^{\eta}(w)$ коммутируют, так как они действуют на различных компонентах тензорного произведения):

$$\mathrm{tr}_{3,4}\Big(R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)\{S_3,S_4\}\Big)\stackrel{(3.17)}{=}\mathrm{tr}_{3,4}\Big(R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)\Big([S_3S_4,r_{34}^{(0)}]+[L_3^{\eta,(0)}(S)S_4,P_{34}]\Big)\Big)\,, \tag{3.21}$$

и мы собираемся показать, что данное выражение равно выражению в правой части (3.15):

$$\text{r.h.s.}=\mathrm{tr}_{3,4}\Big(\Big(R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)r_{12}(z-w)-r_{12}(z-w)R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)\Big)S_3S_4\Big)\,. \tag{3.22}$$

Перепишем выражение в скобках в (3.22), используя формулу (3.20), которую мы представим в виде (используется также антисимметричность (1.5))

$$R_{24}^{\eta}(w)r_{12}(z-w)=-R_{21}^{\eta}(w-z)R_{14}^{\eta}(z)+r_{14}(z)R_{24}^{\eta}(w)-\partial_\eta R_{24}^{\eta}(w) \tag{3.23}$$

для первого слагаемого в (3.22), и

$$r_{12}(z-w)R_{24}^{\eta}(w)=-R_{14}^{\eta}(z)R_{21}^{\eta}(w-z)+R_{24}^{\eta}(w)r_{14}(z)-\partial_\eta R_{24}^{\eta}(w) \tag{3.24}$$

для второго слагаемого. В силу того, что $[R_{13}^{\eta}(z),\partial_\eta R_{24}^{\eta}(w)]=0$, мы имеем

$$\begin{gathered}R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)r_{12}(z-w)-r_{12}(z-w)R_{13}^{\eta}(z)R_{24}^{\eta}(w)=\\=R_{14}^{\eta}(z)R_{21}^{\eta}(w-z)R_{13}^{\eta}(z)-R_{13}^{\eta}(z)R_{21}^{\eta}(w-z)R_{14}^{\eta}(z)+\\+R_{13}^{\eta}(z)r_{14}(z)R_{24}^{\eta}(w)-R_{24}^{\eta}(w)r_{14}(z)R_{13}^{\eta}(z)\,.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Вторая строка в формуле (3.25) сокрращается после подстановки, так как она антисимметрична после переименования компонент в тензорном произведении $3 \leftrightarrow 4$. В итоге, выражение (3.22) упрощается до

$$\text{r.h.s.} = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(\Big(R^\eta_{13}(z)r_{14}(z)R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)r_{14}(z)R^\eta_{13}(z)\Big)S_3S_4\Big)\,. \tag{3.26}$$

Затем, преобразуем последнее выражение, используя дальнейшее вырождение выражения (1.4), отвечающее $z \to 0$ в формулах (3.23) и (3.24)

$$R^\eta_{13}(z)r_{14}(z) = r^{(0)}_{34}R^\eta_{13}(z) + R^\eta_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{43} - \partial_z R^\eta_{14}(z)P_{34} + \partial_\eta R^\eta_{13}(z)\,, \tag{3.27}$$

$$r_{14}(z)R^\eta_{13}(z) = R^\eta_{13}(z)r^{(0)}_{34} + R^{\eta,(0)}_{43}R^\eta_{14}(z) - \partial_z R^\eta_{13}(z)P_{34} + \partial_\eta R^\eta_{13}(z)\,. \tag{3.28}$$

Теперь выражение в скобках в формуле (3.26) преобразуется в

$$\begin{gathered}
R^\eta_{13}(z)r_{14}(z)R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)r_{14}(z)R^\eta_{13}(z) = \\
= r^{(0)}_{34}R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)R^\eta_{13}(z)r^{(0)}_{34} + \\
+ R^\eta_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{43}R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)R^{\eta,(0)}_{43}R^\eta_{14}(z) + \\
+ R^\eta_{24}(w)\partial_z R^\eta_{13}(z)P_{34} - \partial_z R^\eta_{14}(z)P_{34}R^\eta_{24}(w)\,.
\end{gathered} \tag{3.29}$$

Последняя строка в (3.29) сокращается после подстановки в (3.22). Действительно, с одной стороны

$$\mathrm{tr}_{3,4}\Big(\partial_z R^\eta_{14}(z)P_{34}R^\eta_{24}(w)S_3S_4\Big) = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(P_{34}\partial_z R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)S_3S_4\Big)\,, \tag{3.30}$$

и с другой стороны,

$$\begin{gathered}
\mathrm{tr}_{3,4}\Big(R^\eta_{24}(w)\partial_z R^\eta_{13}(z)P_{34}S_3S_4\Big) = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(\partial_z R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)P_{34}S_3S_4\Big) = \\
= \mathrm{tr}_{3,4}\Big(\partial_z R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)S_3S_4P_{34}\Big) = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(P_{34}\partial_z R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)S_3S_4\Big)\,.
\end{gathered} \tag{3.31}$$

Вторая строка в (3.29) после подстановки в (3.22) становится равной первому члену в правой части (3.21)

$$\mathrm{tr}_{3,4}\Big(\Big(r^{(0)}_{34}R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)R^\eta_{13}(z)r^{(0)}_{34}\Big)S_3S_4\Big) = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)\Big([S_3S_4, r^{(0)}_{34}]\Big)\Big)\,. \tag{3.32}$$

И наконец, третья строка в (3.29) после подстановки в (3.22) равна второму члену в правой части (3.21)

$$\begin{gathered}
\mathrm{tr}_{3,4}\Big(\Big(R^\eta_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{43}R^\eta_{24}(w) - R^\eta_{24}(w)R^{\eta,(0)}_{43}R^\eta_{14}(z)\Big)S_3S_4\Big) = \\
= \mathrm{tr}_{3,4}\Big(R^\eta_{13}(z)R^\eta_{24}(w)\Big(L^{\eta,(0)}_3(S)S_4P_{34} - P_{34}L^{\eta,(0)}_3(S)S_4\Big)\Big)\,.
\end{gathered} \tag{3.33}$$

Последнее равенство проверяется следующим образом. Покажем, что первые члены в верхней и нижней строке в формуле (3.33) равны друг другу(равенство вторых слагаемых проверяется похожим образом)

$$
\begin{gathered}
\mathrm{tr}_{3,4}\Big(R^{\eta}_{13}(z)R^{\eta}_{24}(w)L^{\eta,(0)}_{3}(S)S_4P_{34}\Big) = \mathrm{tr}_{3,4}\Big(R^{\eta}_{13}(z)L^{\eta,(0)}_{3}(S)S_4P_{34}R^{\eta}_{24}(w)\Big) = \\
= \mathrm{tr}_{3,4,5}\Big(R^{\eta}_{13}(z)R^{\eta,(0)}_{35}S_5S_4P_{34}R^{\eta}_{24}(w)\Big) = \mathrm{tr}_{3,4,5}\Big(P_{34}R^{\eta}_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{45}S_5S_3R^{\eta}_{24}(w)\Big) = \\
= \mathrm{tr}_{3,4,5}\Big(P_{34}R^{\eta}_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{45}R^{\eta}_{24}(w)S_5S_3\Big) = \mathrm{tr}_{3,4,5}\Big(R^{\eta}_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{45}R^{\eta}_{24}(w)S_5S_3P_{34}\Big) = \\
= \mathrm{tr}_{3,4,5}\Big(R^{\eta}_{14}(z)R^{\eta,(0)}_{45}R^{\eta}_{24}(w)S_5P_{34}S_4\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

Последний шаг состоит в том, чтобы взять след по третьей компоненте тензорного произведения(тогда P_{34} исчезает) и переименовать компоненту $5 \leftrightarrow 3$.

Суммируя вышесказанное: мы получили r-матричную структуру (3.15) из скобки Пуассона (3.17). Обратное утверждение требует выполнения следующего свойства: из $\mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)A_2) = 0$ должно следовать, что $A = 0$, для произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$. Это верно для рассматриваемых нами матриц, в силу их поведения в окрестности $z = 0$ (3.2). ■

В нерелятивистском случае мы получаем линейную r-матричную структуру

$$
c_1\{L_1(z,S), L_2(w,S)\} = [L_1(z,S) + L_2(w,S), r_{12}(z-w)]\,, \tag{3.35}
$$

из которой мы получаем скобку Пуассона-Ли в gl^*_N коалгебре Ли($c_1 \neq 0$ – произвольная константа):

$$
c_1\{S_1, S_2\} = [S_2, P_{12}] \tag{3.36}
$$

или

$$
c_1\{S_{ij}, S_{kl}\} = S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj}\,. \tag{3.37}
$$

Пуассоновы структуры (3.15)-(3.17) и (3.35)-(3.36) дают гамильтонианы, из которых получаются уравнения Эйлера-Арнольда (3.7). В релятивистском случае гамильтониан дается формулой

$$
H^{\mathrm{rel}} = \frac{1}{c_2}\,\mathrm{tr}(S)\,, \tag{3.38}
$$

и в нерелятивистском случае мы имеем

$$
H^{\mathrm{non-rel}} = \frac{1}{2c_1}\,\mathrm{tr}(SJ(S)\,. \tag{3.39}
$$

В релятивистском случае гамильтониан линейный, в то время как пуассонова структура квадратична(в переменных S), и наоборот в нерелятивистской модели.

3.1 Случай нестандартной тригонометрической R-матрицы

Чтобы описать волчки в явном виде, достаточно записать все R-матрицы и соответствующие коэффициенты разложений (3.8)-(3.14). Резюмируем результаты, используя R-

матрицу (2.20):

$$
\begin{gathered}
R^{\eta}_{ij,kl}(z)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\,\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)+\\
+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}+\\
+N\delta_{i+k,j+l}e^{(i-j)z+(j-k)\eta}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)+\\
+Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(\delta_{iN}e^{-jz-l\eta}-\delta_{kN}e^{lz+j\eta}\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.40}
$$

Классическая r-матрица:

$$
\begin{gathered}
r_{ij,kl}(z)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\,\coth(Nz/2)+\\
+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\Big((i-k)-\frac{N\,\mathrm{sgn}(i-k)}{2}\Big)+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)z-\mathrm{sgn}(i-k)Nz/2}}{2\sinh(Nz/2)}+\\
+Ne^{(i-j)z}\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)+Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(e^{-jz}\delta_{iN}-e^{lz}\delta_{kN}\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.41}
$$

Следующий коффициент в разложении(m-матрица) (3.1):

$$
\begin{gathered}
m_{ij,kl}(z)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N^2}{12}+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\Big(\frac{(i-k)^2}{2}-\frac{N^2}{12}-\frac{N}{2}|i-k|\Big)+\\
+N(j-k)e^{(i-j)z}\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)-Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(l\,e^{-jz}\delta_{iN}+j\,e^{lz}\delta_{kN}\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.42}
$$

Значение этой матрицы при $z=0$, входящее в обратный тензор инерции в нерелятивистском случае (3.11) или (3.14):

$$
\begin{gathered}
m_{ij,kl}(0)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N^2}{12}+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\Big(\frac{(i-k)^2}{2}-\frac{N^2}{12}-\frac{N}{2}|i-k|\Big)+\\
+N(j-k)\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)-Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(l\,\delta_{iN}+j\,\delta_{kN}\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.43}
$$

Коэффициенты из разложений (3.2) и (3.3), входящие в релятивистский обратный тензор инерции (3.9) или (3.14):

$$
\begin{gathered}
R^{\eta,(0)}_{ij,kl}=r_{ilkj}(\eta)=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\,\frac{N}{2}\coth(N\eta/2)+\\
+\,\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)\frac{Ne^{(i-k)\eta-\mathrm{sgn}(i-k)N\eta/2}}{2\sinh(N\eta/2)}+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\Big((i-k)-\frac{N\,\mathrm{sgn}(i-k)}{2}\Big)+\\
+Ne^{(j-k)\eta}\,\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)+Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(e^{-l\eta}\delta_{iN}-e^{j\eta}\delta_{kN}\Big)
\end{gathered}
\tag{3.44}
$$

и

$$
\begin{gathered}
r^{(0)}_{ij,kl}=\Big(\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon(i\neq k)+\delta_{il}\delta_{kj}\varepsilon(i\neq k)\Big)\Big((i-k)-\frac{N\,\mathrm{sgn}(i-k)}{2}\Big)+\\
+N\delta_{i+k,j+l}\Big(\varepsilon(i<j<k)-\varepsilon(k<j<i)\Big)+Ne^{-N\Lambda}\delta_{i+k,j+l+N}\Big(\delta_{iN}-\delta_{kN}\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{3.45}
$$

Пары Лакса. Матрица Лакса релятивистского волчка получается из (3.40) и имеет следующий вид. При $i=j$:

$$
\begin{gathered}
L^\eta_{ii}(z)=\frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)S_{ii}+\\
+\frac{N}{2\sinh(N\eta/2)}\left(e^{-N\eta/2}\sum_{k=1}^{i-1}e^{(i-k)\eta}S_{kk}+e^{N\eta/2}\sum_{k=i+1}^{N}e^{(i-k)\eta}S_{kk}\right)\,,
\end{gathered}
\tag{3.46}
$$

при $i<j$:

$$
L^\eta_{ij}(z)=\frac{N\exp(Nz/2+(i-j)z)}{2\sinh(Nz/2)}S_{ij}+N\sum_{k=j+1}^{N}e^{(i-j)z+(j-k)\eta}S_{i-j+k,k}\,,
\tag{3.47}
$$

и при $i>j$:

$$
\begin{gathered}
L^\eta_{ij}(z)=\frac{N\exp(-Nz/2+(i-j)z)}{2\sinh(Nz/2)}S_{ij}-N\sum_{k=1}^{j-1}e^{(i-j)z+(j-k)\eta}S_{i-j+k,k}-\\
-Ne^{-N\Lambda}e^{(i-j)z+j\eta}S_{i-j,N}+\delta_{iN}Ne^{-N\Lambda}\sum_{k=j+1}^{N}e^{-jz+(j-k)\eta}S_{k-j,k}\,.
\end{gathered}
\tag{3.48}
$$

Из определений (3.8), (3.10) и разложения (3.1) следует, что

$$
-M^\eta(z)=L(z)=\operatorname*{Res}_{\eta=0}\Big(\eta^{-1}L^\eta(z)\Big)\,,\qquad M(z)=\operatorname*{Res}_{\eta=0}\Big(\eta^{-2}L^\eta(z)\Big)\,,
\tag{3.49}
$$

а из разложения (3.2) около $z=0$ следует

$$
L^\eta(z)=\frac{1}{z}S+L^{\eta,(0)}(S)+O(z)\,,\qquad L^{\eta,(0)}(S)=\mathrm{tr}_2\Big(R^{\eta,(0)}_{12}S_2\Big)=\operatorname*{Res}_{z=0}\Big(z^{-1}L^\eta(z)\Big)\,.
\tag{3.50}
$$

Пример: GL_2 волчок. В этом случае мы имеем дело со следующей квантовой

$$
R^\hbar(z)=\begin{pmatrix}
\coth(z)+\coth(\hbar) & 0 & 0 & 0\\
0 & \sinh^{-1}(\hbar) & \sinh^{-1}(z) & 0\\
0 & \sinh^{-1}(z) & \sinh^{-1}(\hbar) & 0\\
-4\,e^{-2\Lambda}\sinh(z+\hbar) & 0 & 0 & \coth(z)+\coth(\hbar)
\end{pmatrix}
\tag{3.51}
$$

и классической

$$
r(z)=\begin{pmatrix}
\coth(z) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \sinh^{-1}(z) & 0\\
0 & \sinh^{-1}(z) & 0 & 0\\
-4\,e^{-2\Lambda}\sinh(z) & 0 & 0 & \coth(z)
\end{pmatrix}
\tag{3.52}
$$

R-матрицами. В релятивистском случае мы получаем пару Лакса

$$L^\eta(z,S)=\begin{pmatrix} S_{11}\Big(\coth(z)+\coth(\eta)\Big)+\dfrac{S_{22}}{\sinh(\eta)} & \dfrac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \\ \dfrac{S_{21}}{\sinh(z)}-4e^{-2\Lambda}S_{12}\sinh(z+\eta) & S_{22}\Big(\coth(z)+\coth(\eta)\Big)+\dfrac{S_{11}}{\sinh(\eta)} \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

$$M^\eta(z,S)=-\begin{pmatrix} \coth(z)S_{11} & \dfrac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \\ \dfrac{S_{21}}{\sinh(z)}-4e^{-2\Lambda}\sinh(z)S_{12} & \coth(z)S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

и обратный тензор инерции

$$J^\eta(S)=\begin{pmatrix} \coth(\eta)S_{11}+\dfrac{S_{22}}{\sinh(\eta)} & 0 \\ \\ -4e^{-2\Lambda}\sinh(\eta)S_{12} & \dfrac{S_{11}}{\sinh(\eta)}+\coth(\eta)S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

В нерелятивистском случае матрица Лакса равна (3.54): $L(z,S)=-M^\eta(z,S)$.

M-матрица имеет следующий вид

$$M(z,S)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2S_{11}-S_{22} & 0 \\ \\ -24\,e^{-2\Lambda}\cosh(z)S_{12} & -S_{11}+2S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Обратный тензор инерции равен

$$J(S)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2S_{11}-S_{22} & 0 \\ \\ -24\,e^{-2\Lambda}S_{12} & -S_{11}+2S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

• Релятивистский волчок (η-независимое описание):

Существует другое описание релятивистского волчка, которое похоже на оригинальную конструкцию Склянина [29]. Вместо использования квантовой R-матрицы (3.8) рассмотрим бесследовую часть нерелятивистской матрицы Лакса и прибавим к ней скалярное слагаемое $s_0 1_N$:

$$\tilde{L}(z,S)=s_0 1_N+L(z,S)-\frac{1_N}{N}\,\mathrm{tr}L(z,S)\,,\qquad s_0=\frac{\mathrm{tr}S}{N}\,, \tag{3.58}$$

где s_0 есть динамическая переменная. Фактически, это и есть гамильтониан, так как $\mathrm{tr}\tilde{L}=Ns_0$. Уравнение Лакса не изменяются, поскольку $L(z,S)$ и $\tilde{L}(z,S)$ отличаются только на скалярное слагаемое. Поэтому M-матрица для (3.58) такая же, как и в формуле (3.8). Однако, Пуассонова структура отличается. Это происходит из-за бигамильтоновой структуры моделей данного вида [15, 18].

Как было указано в [18](см. также [32]) существует взаимосвязь между матрицами Лакса (3.8) и (3.58). Как и в рациональном случае, мы имеем

$$L^\eta(z-\frac{\eta}{N},\tilde{L}(\frac{\eta}{N},S))=\frac{\mathrm{tr}(L^\eta(z-\frac{\eta}{N},S))}{\mathrm{tr}(S)}\tilde{L}(z,S)\,. \tag{3.59}$$

Эту связь можно проверить напрямую, используя явные формулы (3.46)-(3.48).

Квадратичная пуассонова структура имеет вид:

$$\{\tilde{L}_1(z,S),\tilde{L}_2(w,S)\} = \frac{1}{c_2}\,[\tilde{L}_1(z,S)\tilde{L}_2(w,S), r_{12}(z-w)]\,, \tag{3.60}$$

и из неё следует следующая скобка Пуассона:

$$c_2\{S_1,S_2\} = s_0[S_2,P_{12}] + [S_1S_2, r_{12}^{(0)}] + [\mathrm{tr}_3(r_{13}^{(0)}S_3)S_2, P_{12}]\,. \tag{3.61}$$

Последнее проверяется так же как и в η-зависимом случае (3.15)-(3.17).

3.2 Случай общей тригонометрической R-матрицы

Резюмируем все данные для интегрируемых волчков в общем случае, используя разложение R-матрицы (2.28)

$$\begin{gathered}
R^{\eta}_{12}(z) = \frac{N}{2}\Big(\coth(Nz/2)+\coth(N\eta/2)\Big)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii}+ \\
+\frac{N}{e^{N\eta}-1}\sum_{0<n<N\,,\, i=C^n(k)} e^{n\eta}E_{ii}\otimes E_{kk} + \frac{N}{e^{Nz}-1}\sum_{0<m<N\,,\, k=C_0^m(i)} e^{mz}E_{ik}\otimes E_{ki}+ \\
+\sum_{\substack{0<m<N\,,\; n>0,\\ i=C_0^m(j)\,,\; \tau^n(j,i)=(k,l)}} N\left(e^{-n\eta-mz}E_{ij}\otimes E_{kl} - e^{n\eta+mz}E_{kl}\otimes E_{ij}\right)\,,
\end{gathered} \tag{3.62}$$

Классическая r-матрица и следующий коэффициент в классическом пределе (3.1) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
r_{12}(z) = \frac{N}{2}\coth(Nz/2)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii}+ \\
+\sum_{0<n<N\,,\, i=C^n(k)}\Big(n-\frac{N}{2}\Big)E_{ii}\otimes E_{kk} + \frac{N}{e^{Nz}-1}\sum_{0<m<N\,,\, k=C_0^m(i)} e^{mz}E_{ik}\otimes E_{ki}+ \\
+\sum_{\substack{0<m<N\,,\; n>0,\\ i=C_0^m(j)\,,\; \tau^n(j,i)=(k,l)}} N\left(e^{-mz}E_{ij}\otimes E_{kl} - e^{mz}E_{kl}\otimes E_{ij}\right)
\end{gathered} \tag{3.63}$$

и

$$\begin{gathered}
m_{12}(z) = \frac{N^2}{12}\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \frac{1}{12}\sum_{0<n<N\,,\, i=C^n(k)}\Big(6n^2-6nN+N^2\Big)E_{ii}\otimes E_{kk}- \\
-\sum_{\substack{0<m<N\,,\; n>0,\\ i=C_0^m(j)\,,\; \tau^n(j,i)=(k,l)}} Nn\left(e^{-mz}E_{ij}\otimes E_{kl} + e^{mz}E_{kl}\otimes E_{ij}\right)\,.
\end{gathered} \tag{3.64}$$

Первые нетривиальные коэффициенты разложений (3.2), (3.3) имеют вид:

$$
\begin{gathered}
R_{12}^{\eta,(0)}=\frac{N}{2}\coth(N\eta/2)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii}+\\
+\frac{N}{e^{N\eta}-1}\sum_{0<n<N\,,\,i=C^n(k)}e^{n\eta}E_{ii}\otimes E_{kk}+\sum_{0<m<N\,,\,k=C_0^m(i)}\Big(m-\frac{N}{2}\Big)E_{ik}\otimes E_{ki}+\\
+\sum_{\substack{0\,<\,m\,<\,N\,,\,n\,>\,0,\\ i\,=\,C_0^m(j)\,,\,\tau^n(j,i)\,=\,(k,l)}}N\left(e^{-n\eta}E_{ij}\otimes E_{kl}-e^{n\eta}E_{kl}\otimes E_{ij}\right)
\end{gathered}
\tag{3.65}
$$

и

$$
\begin{gathered}
r_{12}^{(0)}=\sum_{0<n<N\,,\,i=C^n(k)}\Big(n-\frac{N}{2}\Big)E_{ii}\otimes E_{kk}+\sum_{0<m<N\,,\,k=C_0^m(i)}\Big(m-\frac{N}{2}\Big)E_{ik}\otimes E_{ki}+\\
+\sum_{\substack{0\,<\,m\,<\,N\,,\,n\,>\,0,\\ i\,=\,C_0^m(j)\,,\,\tau^n(j,i)\,=\,(k,l)}}N\left(E_{ij}\otimes E_{kl}-E_{kl}\otimes E_{ij}\right)\,.
\end{gathered}
\tag{3.66}
$$

4 Связь с моделью Русенаарса-Шнайдера

Рассмотрим матрицу[2]

$$
g(z,q)=\Xi(z,q)D^{-1}(q)\in\mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})\,,
\tag{4.1}
$$

где

$$
\Xi_{ij}(z,q)=e^{(i-1)(z-\bar{q}_j)}+(-1)^N e^{-(z-\bar{q}_j)}\delta_{iN}
\tag{4.2}
$$

и

$$
D_{ij}(q)=\delta_{ij}\prod_{k\neq i}\left(e^{-\bar{q}_i}-e^{-\bar{q}_k}\right).
\tag{4.3}
$$

Матрицы зависят от z и набора переменных $q_1,...,q_N$. Переменные $\bar{q}_1,...,\bar{q}_N$ получаются после перехода в систему центра масс:

$$
\bar{q}_i=q_i-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N q_k\,.
\tag{4.4}
$$

Детерминант матрицы Ξ is имеет следующий вид:

$$
\det\Xi(z,q)=e^{zN(N-1)/2}(1-e^{-Nz})\prod_{i>j}^N\left(e^{-\bar{q}_i}-e^{-\bar{q}_j}\right)\,.
\tag{4.5}
$$

Поэтому матрица $\Xi(z,q)$ вырождена при $z=0$.

Мы утверждаем, что следующая матрица

$$
L^{\mathrm{RS}}(z)=g^{-1}(z)g(z+\eta)e^{P/c}\,,\qquad P=\mathrm{diag}(p_1,p_2,...,p_N)
\tag{4.6}
$$

является матрицей Лакса для модели Русенаарса-Шнайдера. Точнее,

$$L_{ij}^{\mathrm{RS}}(z)=e^{\frac{N-2}{2}\eta}\sinh(\eta/2)\left(\coth\left(\frac{Nz}{2}\right)+\coth\left(\frac{q_i-q_j+\eta}{2}\right)\right)e^{p_j/c}\prod_{k\neq j}^{N}\frac{\sinh\left(\frac{q_j-q_k-\eta}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{q_j-q_k}{2}\right)}\,. \tag{4.7}$$

Доказательство получается прямой проверкой, которая похожа на вычисления в статьях [1, 18] в рациональном случае. Нужно ввести набор элементарных симметричных многочленов $\sigma_k(q)$ от N переменных $\{e^{-\bar{q}_1},...,e^{-\bar{q}_N}\}$

$$\prod_{k=1}^{N}(\zeta-e^{-\bar{q}_k})=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\zeta^k\sigma_k(q) \tag{4.8}$$

и N наборов функций $\{\breve{\sigma}_{k,i}(q), i=1,...,N\}$, где каждый набор определен для $N-1$ переменной $\{e^{-\bar{q}_1},...,e^{-\bar{q}_N}\}\backslash\{e^{-\bar{q}_i}\}$

$$\prod_{k\neq i}^{N}(\zeta-e^{-\bar{q}_k})=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\zeta^k\breve{\sigma}_{k,i}(q)\,. \tag{4.9}$$

Обратная матрица для Ξ имеет вид:

$$(\Xi^{-1})_{ij}(z,q)=\frac{(-1)^{j-1}e^{(N-j+1)z}}{e^{Nz}-1}\frac{\left(\breve{\sigma}_{j-1,i}(q)+e^{-\bar{q}_i}\breve{\sigma}_{j,i}(q)e^{-Nz}\right)}{\prod\limits_{k\neq i}\left(e^{-\bar{q}_i}-e^{-\bar{q}_k}\right)}\,. \tag{4.10}$$

Рассмотрим калибровочное преобразование матрицы Лакса:

$$L^{\eta}(z)=g(z)\tilde{L}^{RS}(z)g^{-1}(z)=g(z+\eta)e^{P/c}g^{-1}(z) \tag{4.11}$$

Тогда

$$L^{\eta}(z)=\mathrm{tr}\Big(R_{12}^{\eta}(z)S_2(p,q)\Big) \tag{4.12}$$

с нестандартной тригонометрической R-матрицей (2.20), при $\Lambda=\sqrt{-1}\pi$. Происхождение данной факторизации пар Лакса (4.6) и (4.11), (4.12) обсуждается в статье [31]. Другими словами, матрица в (4.12) совпадает с (3.46)-(3.48) при $\Lambda=\sqrt{-1}\pi$. Замена переменных имеет следующий вид:

$$S_{ij}(p,q)=\frac{(-1)^j\sigma_j(q)e^{(i-1)\eta}}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{k:k\neq n}(e^{-\bar{q}_n}-e^{-\bar{q}_k})}\left(e^{-(i-1)\bar{q}_n}+\frac{(-1)^N\delta_{iN}}{e^{N\eta-\bar{q}_n}}\right)\,. \tag{4.13}$$

Пуассонова структура в переменных (p,q) каноническая, т.е.

$$\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}\qquad\text{или}\qquad\{p_i,\bar{q}_j\}=\delta_{ij}-\frac{1}{N}\,. \tag{4.14}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что скобка Пуассона $\{S_{ij}(p,q),S_{kl}(p,q)\}$, посчитанная с помощью (4.14), совпадает со скобкой (3.18) при $c_2=Nc$ и $r_{12}^{(0)}$ из (3.45). Подробности даны в приложении B. В частности, при доказательстве полезно заметить, что матрица (4.13) имеет ранг 1, то есть

$$S_{ij}(p,q) = a_i(p,q) b_j(q)\,,$$

$$a_i(p,q) = \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{k:k\neq n} (e^{-\bar{q}_n} - e^{-\bar{q}_k})} \left(e^{-(i-1)\bar{q}_n} + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta - \bar{q}_n}} \right)\,, \qquad b_j(q) = (-1)^j \sigma_j(q)\,. \tag{4.15}$$

В этом случае $S_{ij}S_{kl} = S_{il}S_{kj}$, и пуассонова структура (3.18) принимает следующий (относительно простой) вид:

$$\begin{gathered}\{S_{ij}, S_{kl}\} = \frac{1}{Nc}(L_{il}^{\eta,(0)} S_{kj} - L_{kj}^{\eta,(0)} S_{il}) + \frac{2}{Nc}(k-i) S_{ij} S_{kl} + \\ + \frac{\varepsilon(i>k)}{c} \sum_{p=0}^{i-k-1} S_{i-p,j} S_{k+p,l} - \frac{\varepsilon(i<k)}{c} \sum_{p=0}^{k-i-1} S_{i+p,j} S_{k-p,l} + \\ + \frac{(-1)^N \delta_{kN}}{c} \sum_{p=1}^{i-1} S_{i-p,j} S_{p,l} - \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{c} \sum_{p=1}^{k-1} S_{pj} S_{k-p,l}\,.\end{gathered} \tag{4.16}$$

Нерелятивистский предел. Модель Калоджеро-Мозера-Сазерленда получается из полученных выше результатов в нерелятивистском пределе, где $\eta = \nu/c$ и $c \to \infty$. Матрица Лакса, получающаяся из (4.7) имеет вид

$$\begin{gathered}L_{ij}^{\rm CM}(z) = \delta_{ij}(\dot{q}_i + \nu \coth(Nz)) + \nu(1-\delta_{ij}) \Big(\coth\Big(\frac{q_i - q_j}{2}\Big) + \coth(Nz) \Big)\,, \\ \dot{q}_i = p_i + \nu(N-2) - \nu \sum_{k\neq i}^{N} \coth\Big(\frac{q_i - q_j}{2}\Big)\,.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Легко проверить, что замена $p_i \to \dot{q}_i(p,q)$ с $\dot{q}_i(p,q)$ из (4.17) есть каноническое преобразование, т.е. $\{\dot{q}_i(p,q), q_j\} = \delta_{ij}$. Таким же образом нерелятивистский волчок (3.10) получается из (4.17). Калибровочное преобразование (4.11) выполняется для также и для нерелятивистской модели [17, 31].

$$L(z) = \operatorname{tr}\Big(r_{12}(z) S_2(p,q) \Big) = g(z) L^{\rm CM}(z) g^{-1}(z)\,. \tag{4.18}$$

Вычет от обоих частей в последнем соотношении дает явную замену переменных или нерелятивистский предел (4.15):

$$\begin{gathered}S_{ij}(p,q) = a_i(p,q) b_j(q)\,, \qquad b_j(q) = (-1)^j \sigma_j(q)\,, \\ a_i(p,q) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{(p_n + (i-1)\nu)\left(e^{-(i-1)\bar{q}_n} + (-1)^N \delta_{iN} e^{\bar{q}_n}\right) - N\nu(-1)^N \delta_{iN} e^{\bar{q}_n}}{\prod\limits_{k:k\neq n} (e^{-\bar{q}_n} - e^{-\bar{q}_k})}\,.\end{gathered} \tag{4.19}$$

Скобки Пуассона $\{S_{ij}(p,q), S_{kl}(p,q)\}$ посчитанные с помощью канонической скобки (4.14) воспроизводят (3.37) при $c_1 = N$, и значения функций Казимира равны степеням константы связи в модели Калоджеро-Мозера-Сазерленда:

$$\operatorname{tr}(S^k) = \nu^k\,. \tag{4.20}$$

Таким образом, модель Калоджеро-Мозера-Сазерленда калибровочно эквивалентна нерелятивистскому волчку при специальных значениях функций Казимира, соответствующих коприсоединенной орбите группы GL_N минимальной размерности. Кроме калибровочного преобразования мы получили явную замену переменных $(p_i, q_j) \to (a_i(p,q), b_i(q))$, где b_i есть элементарные симметрические функции. Эти переменные известны в квантовой модели Калоджеро-Мозера-Сазерленда [21].

5 Заключение

В данной работе была рассмотрена общая классификация тригонометрических решений ассоциативного уравнения Янга-Бакстера, и было показано как в эту общую классификацию входят известные R-матрицы. Были выписаны данные для соответствующих интегрируемых волчков и показана эквивалентность пуассоновой и r-матричной структур. Для одного частного случая — волчка, который задается нестандартной тригонометрической R-матрицей и матрица динамических переменных которого равна 1, была показана его эквивалентность модели Русенаарса-Шнайдера в релятивистском случае и модели Калоджеро-Мозера-Сазерленда в нерелятивистском. Были найдены явные формулы замен переменных и показана эквивалентность пуассоновых структур.

A Соотношение для XXZ R-матрицы

В данном приложении мы покажем, что для R-матрицы (2.21) выполняется соотношение (2.26). Будем работать в более удобной нормировке:

$$
\begin{gathered}
R^{\hbar}_{12}(z) = (\coth(z) + \coth(\hbar)) \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} + \\
+ \frac{1}{\sinh(\hbar)} \sum_{i \neq j}^{N} E_{ii} \otimes E_{jj} + \frac{1}{\sinh(z)} \sum_{i \neq j}^{N} e^{\mathrm{sgn}(j-i)z} E_{ij} \otimes E_{ji}
\end{gathered}
\tag{A.1}
$$

Запишем произведение R-матриц в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
R^{\hbar}_{12}(z_{12}) R^{\eta}_{23}(z_{23}) = (\coth(z_{12}) + \coth(\hbar)) (\coth(z_{23}) + \coth(\eta)) \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} \otimes E_{ii} + \\
+ \frac{\coth(z_{12}) + \coth(\hbar)}{\sinh(\eta)} \sum_{i \neq j}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} \otimes E_{jj} + \frac{\coth(z_{23}) + \coth(\eta)}{\sinh(\hbar)} \sum_{i \neq j}^{N} E_{jj} \otimes E_{ii} \otimes E_{ii} + \\
+ \frac{1}{\sinh(\hbar)\sinh(\eta)} \sum_{i \neq j}^{N} E_{ii} \otimes E_{jj} \otimes E_{ii} + \\
+ \frac{\coth(z_{12}) + \coth(\hbar)}{\sinh(z_{23})} \sum_{i \neq j}^{N} e^{\mathrm{sgn}(j-i)z_{23}} E_{ii} \otimes E_{ij} \otimes E_{ji} + \frac{1}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})} \sum_{i \neq j}^{N} e^{\mathrm{sgn}(i-j)z_{13}} E_{ji} \otimes E_{ii} \otimes E_{ij} + \\
+ \frac{\coth(z_{23}) + \coth(\eta)}{\sinh(z_{12})} \sum_{i \neq j}^{N} e^{\mathrm{sgn}(j-i)z_{12}} E_{ij} \otimes E_{ji} \otimes E_{ii} +
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{e^{z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<j<k}^{N} E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}+\frac{e^{-z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<j<k}^{N} E_{kj}\otimes E_{ij}\otimes E_{jk}+\\
&\qquad+\frac{e^{z_{12}-z_{23}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<j<k}^{N} E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ij}+\\
&+\frac{e^{z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<k<j}^{N} E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}+\frac{e^{z_{23}-z_{12}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<k<j}^{N} E_{kj}\otimes E_{ij}\otimes E_{jk}+\\
&\qquad+\frac{e^{-z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}\sum_{i<k<j}^{N} E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ij}+\\
&+\frac{1}{\sinh(\hbar)\sinh(z_{23})}\sum_{i\neq j\neq k}^{N} e^{\mathrm{sgn}(k-j)z_{23}}E_{ii}\otimes E_{jk}\otimes E_{kj}+\frac{1}{\sinh(\eta)\sinh(z_{12})}\sum_{i\neq j\neq k}^{N} e^{\mathrm{sgn}(k-j)z_{23}}E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ii}+\\
&\qquad+\frac{1}{\sinh(\hbar)\sinh(\eta)}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}^{N} E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{kk}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Левая часть соотношения (2.26) имеет вид:

$$
R_{12}^{\hbar}R_{23}^{\eta}+R_{31}^{-\eta}R_{12}^{\hbar-\eta}+R_{23}^{\eta-\hbar}R_{31}^{-\hbar} \tag{A.3}
$$

т.е. второе и третье произведение отличаются от первого циклической перестановкой компонент тензорного произведения пространств и заменой переменных, $(1,2,3)\leftrightarrow(3,1,2)\leftrightarrow(2,3,1)$, $\hbar\leftrightarrow-\eta\leftrightarrow\eta-\hbar$, $\eta\leftrightarrow\hbar-\eta\leftrightarrow-\hbar$, $z_{12}\leftrightarrow z_{31}\leftrightarrow z_{23}$, $z_{23}\leftrightarrow z_{12}\leftrightarrow z_{31}$ Первая строка в (A) сокращается с соответствующими слагаемыми во втором и третьем произведении из (A.3) в силу соотношений Фэя на функцию $\coth(z)+\coth(\hbar)$. Для строк 2 и 3 мы имеем:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\coth(z_{12})+\coth(\hbar)}{\sinh(\eta)}+\frac{\coth(z_{12})+\coth(\hbar-\eta)}{\sinh(-\eta)}+\frac{1}{\sinh(\eta-\hbar)\sinh(-\hbar)}\right)\sum_{i\neq j}^{N}E_{ii}\otimes E_{ii}\otimes E_{jj}+\\
&+\left(\frac{\coth(z_{23})+\coth(\eta)}{\sinh(\hbar)}+\frac{1}{\sinh(-\eta)\sinh(\hbar-\eta)}+\frac{\coth(z_{23})+\coth(\eta-\hbar)}{\sinh(-\hbar)}\right)\sum_{i\neq j}^{N}E_{jj}\otimes E_{ii}\otimes E_{ii}+\\
&+\left(\frac{1}{\sinh(\hbar)\sinh(\eta)}+\frac{\coth(z_{31})+\coth(-\eta)}{\sinh(\hbar-\eta)}+\frac{\coth(z_{31})+\coth(-\hbar)}{\sinh(\eta-\hbar)}\right)\sum_{i\neq j}^{N}E_{ii}\otimes E_{jj}\otimes E_{ii}=0
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

строки 4-5

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\coth(z_{12})+\coth(\hbar)}{\sinh(z_{23})}+\frac{1}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{\coth(z_{31})+\coth(-\hbar)}{\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i\neq j}^{N}e^{\pm z_{23}}E_{ii}\otimes E_{ij}\otimes E_{ji}+\\
&+\left(\frac{1}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{\coth(z_{12})+\coth(\hbar-\eta)}{\sinh(-z_{13})}+\frac{\coth(z_{23})+\coth(\eta-\hbar)}{\sinh(z_{31})}\right)\sum_{i\neq j}^{N}e^{\pm z_{13}}E_{ji}\otimes E_{ii}\otimes E_{ij}+\\
&+\left(\frac{\coth(z_{23})+\coth(\eta)}{\sinh(z_{12})}+\frac{\coth(z_{31})-\coth(\eta)}{\sinh(z_{12})}+\frac{1}{\sinh(z_{23})\sinh(z_{31})}\right)\sum_{i\neq j}^{N}e^{\pm z_{12}}E_{ij}\otimes E_{ji}\otimes E_{ii}=0
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

строки 6-7

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^{z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{z_{23}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{z_{23}+z_{13}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<j<k}^{N}E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}+\\
&+\left(\frac{e^{-z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{-z_{13}-z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{-z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<j<k}^{N}E_{kj}\otimes E_{ij}\otimes E_{jk}+\\
&+\left(\frac{e^{z_{12}-z_{23}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{-z_{23}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<j<k}^{N}E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ij}=0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

строки 8-9

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^{z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{z_{12}+z_{13}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<k<j}^{N}E_{ij}\otimes E_{jk}\otimes E_{ki}+\\
&+\left(\frac{e^{z_{23}-z_{12}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{-z_{12}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<k<j}^{N}E_{kj}\otimes E_{ij}\otimes E_{jk}+\\
&+\left(\frac{e^{-z_{13}}}{\sinh(z_{12})\sinh(z_{23})}+\frac{e^{-z_{23}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{12})}+\frac{e^{-z_{13}-z_{23}}}{\sinh(-z_{13})\sinh(z_{23})}\right)\sum_{i<k<j}^{N}E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ij}=0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

предпоследняя строка

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\neq j\neq k}^{N}\left(\frac{e^{\operatorname{sgn}(k-j)z_{23}}}{\sinh(\hbar)\sinh(z_{23})}+\frac{e^{\operatorname{sgn}(k-j)z_{23}}}{\sinh(-\hbar)\sinh(z_{23})}\right)E_{ii}\otimes E_{jk}\otimes E_{kj}+\\
&+\sum_{i\neq j\neq k}^{N}\left(\frac{e^{\operatorname{sgn}(k-j)z_{12}}}{\sinh(\eta)\sinh(z_{12})}+\frac{e^{\operatorname{sgn}(k-j)z_{12}}}{\sinh(-\eta)\sinh(z_{12})}\right)E_{jk}\otimes E_{kj}\otimes E_{ii}+\\
&+\sum_{i\neq j\neq k}^{N}\left(\frac{e^{-\operatorname{sgn}(k-j)z_{13}}}{\sinh(\hbar-\eta)\sinh(-z_{13})}+\frac{e^{-\operatorname{sgn}(k-j)z_{13}}}{\sinh(\eta-\hbar)\sinh(-z_{13})}\right)E_{kj}\otimes E_{ii}\otimes E_{jk}=0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Из последней строки мы получим правую часть в формуле (2.26).

B Связь пуассоновых структур

Проверим, что канонические скобки Пуассона для модели Русенаарса согласованны со скобками Пуассона волчка. Для этого, запишем скобки Пуассона волчка в виде:

$$\{S_{ij},S_{kl}\}=\frac{1}{Nc}(L^{\eta,(0)}_{il}S_{kj}-L^{\eta,(0)}_{kj}S_{il})+\frac{1}{cN}\sum_{a,b=1}^{N}(S_{ia}S_{kb}r^{(0)}_{aj,bl}-r^{(0)}_{ia,kb}S_{aj}S_{bl}). \tag{B.1}$$

Здесь мы положили константу c_2 равной cN. Для вычисления канонических скобок Пуассона, необходимо сделать замену переменных:

$$\begin{aligned}
&q\to q-\frac{Q}{N},\ Q=\sum_{i=1}^{N}q_i\\
&p\to p-\frac{P}{N},\ P=\sum_{i=1}^{N}p_i
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Тогда S_{ij} будет иметь вид:

$$S_{ij} = e^{-P/(Nc)} e^{(i-j)Q/N} a_i(p,q) b_j(q), \tag{B.3}$$

где:

$$a_i(p,q) = \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{p\neq n}(y_n - y_p)} \left(y_n^{i-1} + \frac{(-1)^N \delta_{iN} e^{-Q}}{e^{N\eta} y_n} \right), \tag{B.4}$$

$$b_j(q) = (-1)^j \sigma_j(q), \qquad y_i = e^{-q_i}. \tag{B.5}$$

Вычислим для S_{ij} и S_{kl} каноническую скобку Пуассона:

$$\begin{gathered}
\{S_{ij}, S_{kl}\} = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial p_m} \frac{\partial S_{kl}}{\partial q_m} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial q_m} \frac{\partial S_{kl}}{\partial p_m} \right) = \\
= \sum_{m=1}^{N} \left(-\frac{1}{Nc} S_{ij} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial p_m} \right) \left(\frac{k-l}{N} S_{kl} + b_l \frac{\partial a_k}{\partial q_m} + a_k \frac{\partial b_l}{\partial q_m} \right) - \\
- \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i-j}{N} S_{ij} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial q_m} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial q_m} \right) \left(-\frac{1}{Nc} S_{kl} + b_l \frac{\partial a_k}{\partial p_m} \right) = \\
= \frac{1}{Nc}(i-j-k+l) S_{ij} S_{kl} - \frac{1}{Nc} S_{ij} \sum_{m=1}^{N} \left(b_l \frac{\partial a_k}{\partial q_m} + a_k \frac{\partial b_l}{\partial q_m} \right) + \frac{1}{Nc} S_{kl} \sum_{m=1}^{N} \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial q_m} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial q_m} \right) + \\
+ \frac{k-l}{N} S_{kl} \sum_{m=1}^{N} b_j \frac{\partial a_i}{\partial p_m} - \frac{i-j}{N} S_{ij} \sum_{m=1}^{N} b_l \frac{\partial a_k}{\partial p_m} + \\
+ b_j b_l \{a_i, a_k\} + a_k b_j \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_m} \frac{\partial b_l}{\partial q_m} - a_i b_l \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_k}{\partial p_m} \frac{\partial b_j}{\partial q_m}.
\end{gathered} \tag{B.6}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial b_j}{\partial q_m} = (-1)^j y_m \check{\sigma}_{j,m}(q), \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial p_m} = \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \frac{e^{p_m/c}}{\prod\limits_{p\neq m}(y_m - y_p)} \left(y_m^{i-1} + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta} y_m} \right), \tag{B.8}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial a_i}{\partial q_m} = \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \sum_{n\neq m}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{p\neq n}(y_n - y_p)} \frac{y_m}{y_m - y_n} \left(y_n^{i-1} + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta} y_n} \right) - \\
- \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \sum_{n\neq m}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{p\neq n}(y_n - y_p)} \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta} y_n} - \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \frac{e^{p_m/c}}{\prod\limits_{p\neq m}(y_m - y_p)} (i-1) y_m^{i-1} + \\
+ \frac{e^{(i-1)\eta}}{N} \left(\sum_{n\neq m} \frac{y_m}{y_m - y_n} \right) \frac{e^{p_m/c}}{\prod\limits_{p\neq m}(y_m - y_p)} \left(y_m^{i-1} + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta} y_m} \right).
\end{gathered} \tag{B.9}$$

Для сумм производных мы получим:

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial b_j}{\partial q_m} = (j-N) b_j \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_m} = \frac{1}{c} a_i, \tag{B.10}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial q_m} = (N-i) a_i. \tag{B.11}$$

Промежуточный результат:

$$
\begin{gathered}
\{S_{ij}, S_{kl}\} = \frac{1}{Nc} S_{ij} S_{kl} (k + j - i - l) + \\
+ b_j b_l \{a_i, a_k\} + a_k b_j \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_m} \frac{\partial b_l}{\partial q_m} - a_i b_l \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_k}{\partial p_m} \frac{\partial b_j}{\partial q_m}.
\end{gathered}
\tag{B.12}
$$

Зная зависимость $L^{\eta,(0)}$ от p и q, получим формулу:

$$
\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_m} \frac{\partial b_l}{\partial q_m} = \frac{1}{cN} L^{\eta,(0)}_{il} - \frac{1}{cN} \left(i - l + \frac{N}{2} \right) S_{il} + b_l \frac{e^{(i-1)\eta}}{cN} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{p \neq n} (y_n - y_p)} \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta} y_n}.
\tag{B.13}
$$

Осталось только посчитать скобку Пуассона между a_i и a_k:

$$
\begin{gathered}
\{a_i, a_k\} = \frac{e^{(i+k-2)\eta}}{N^2 c} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{e^{(p_n + p_m)/c}}{\prod\limits_{p \neq n} (y_n - y_p) \prod\limits_{p \neq m} (y_m - y_p)} \times \\
\times \left(\varepsilon(m \neq n) \frac{y_m}{y_m - y_n} \left(y_n^{k-1} y_m^{i-1} - y_n^{i-1} y_m^{k-1} + \frac{(-1)^N \delta_{kN}}{e^{N\eta}} \left(\frac{y_m^{i-1}}{y_n} - \frac{y_n^{i-1}}{y_m} \right) + \right. \right. \\
\left. + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta}} \left(\frac{y_n^{k-1}}{y_m} - \frac{y_m^{k-1}}{y_n} \right) \right) + \varepsilon(m \neq n) \frac{(-1)^N}{e^{N\eta}} \left(\delta_{iN} \frac{y_m^{k-1}}{y_n} - \delta_{kN} \frac{y_m^{i-1}}{y_n} \right) + \\
\left. + \delta_{mn} (i - k) y_m^{k+i-2} + \delta_{mn} (i - 1) \frac{(-1)^N \delta_{kN}}{e^{N\eta}} y_m^{i-2} - \delta_{mn} (k - 1) \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta}} y_m^{k-2} \right).
\end{gathered}
\tag{B.14}
$$

Заметим, что:

$$
y_n^{k-1} y_m^{i-1} - y_n^{i-1} y_m^{k-1} = (y_m - y_n) \begin{cases} \sum_{p=0}^{i-k-1} y_n^{p+k-1} y_m^{i-2-p}, & i > k \\ -\sum_{p=0}^{k-i-1} y_m^{p+i-1} y_m^{k-2-p}, & i < k \end{cases}
\tag{B.15}
$$

Тогда мы получим:

$$
\begin{gathered}
b_j b_l \{a_i, a_k\} = \frac{1}{c} \varepsilon(i{>}k) \sum_{p=1}^{i-k-1} a_{k+p} a_{i-p} b_j b_l - \frac{1}{c} \varepsilon(i{<}k) \sum_{p=1}^{k-i-1} a_{i+p} a_{k-p} b_j b_l + \\
+ \frac{(-1)^N \delta_{kN}}{c} \sum_{p=1}^{i-1} a_p a_{i-p} b_j b_l - \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{c} \sum_{p=1}^{k-1} a_p a_{k-p} b_j b_l + \\
+ b_j b_l \frac{e^{(i+k-2)\eta}}{N^2 c} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{e^{(p_n + p_m)/c}}{\prod\limits_{p \neq n} (y_n - y_p) \prod\limits_{p \neq m} (y_m - y_p)} \left(\varepsilon(i{>}k) y_n^{k-1} y_m^{i-1} - \varepsilon(i{<}k) y_n^{i-1} y_m^{k-1} \right)
\end{gathered}
\tag{B.16}
$$

В итоге мы получим:

$$
\begin{aligned}
\{S_{ij}, S_{kl}\} = \frac{1}{Nc}(L^{\eta,(0)}_{il} S_{kj} - L^{\eta,(0)}_{kj} S_{il}) + \frac{2}{Nc}(k-i) S_{ij} S_{kl} + \\
+ \frac{1}{c}\varepsilon(i>k) \sum_{p=0}^{i-k-1} S_{i-p,j} S_{k+p,l} - \frac{1}{c}\varepsilon(i<k) \sum_{p=0}^{k-i-1} S_{i+p,j} S_{k-p,l} + \\
+ \frac{(-1)^N \delta_{kN}}{c} \sum_{p=1}^{i-1} S_{i-p,j} S_{pl} - \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{c} \sum_{p=1}^{k-1} S_{pj} S_{k-p,l}
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Легко видеть, что данное выражение совпадает с (4.16).

Список литературы

[1] G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 305207; arXiv:1402.3189. [hep-th].

[2] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, Nucl. Phys. B503 (1997) 747–770; hep-th/9704074.

[3] V.I. Arnold, Annales de l'institut Fourier, 16:1 (1966) 319–361.
L.A. Dikii, Funct. Anal. Appl. 6:4 (1972) 326–327.
S.V. Manakov, Funct. Anal. Appl., 10:4 (1976) 328–329.
A.S. Mishenko, Funct. Anal. Appl. 4:3 (1970) 232–235.
A.S. Mishenko, A.T. Fomenko, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 12:2 (1978) 371–389.
A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky, Zap. Nauchn. Semin. LOMI, 150 (1986) 104–118.
A.V. Borisov, I.S. Mamaev, *Rigid body dynamics*, Izhevsk: RCD, 2001.

[4] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, Commun. Math. Phys. 178 (1996) 281–300; hep-th/9505091.

[5] R.J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, 1982.

[6] A.A. Belavin, V.G. Drinfeld, Funct. Anal. Appl., 16:3 (1982) 159–180.

[7] I. Burban, B. Kreussler, *Vector Bundles on Degenerations of Elliptic Curves and Yang-Baxter Equations*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 220, Num. 1035 (2012).

[8] F. Calogero, J. Math. Phys. 10 (1969) 2191–2196.
F. Calogero, J. Math. Phys. 12 (1971) 419–436.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
B. Sutherland, Physical Review A, 5:3 (1972) 1372–1376.

[9] I.V. Cherednik, Theoret. and Math. Phys., 43:1 (1980) 356–358.

[10] E. Cremmer, J.L. Gervais, Commun. Math. Phys. 134:3 (1990) 619–632.

[11] V.G. Drinfeld, J. Soviet Math., 41:2 (1988), 898–915.

[12] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Hamiltonian approach to solitons theory*, Nauka, Moscow, 1986 (in Russian) and Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[13] S. Fomin, A.N. Kirillov, Advances in geometry; Progress in Mathematics book series, Vol. 172 (1999) 147–182.

[14] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. 10:1 (1985) 63–69.

[15] B. Khesin, A. Levin, M. Olshanetsky, Commun. Math. Phys. 250 (2004) 581–612; arXiv: nlin/0309017.

[16] P.P. Kulish, E.K. Sklyanin, J. Soviet Math., 19:5 (1982) 1596–1620.

[17] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Commun. Math. Phys. 236 (2003) 93–133; arXiv:nlin/0110045.

[18] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JHEP 07 (2014) 012; arXiv:1405.7523 [hep-th].
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Nuclear Physics B 887 (2014) 400–422; arXiv: 1406.2995

[19] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JHEP 10 (2014) 109; arXiv:1408.6246 [hep-th].
A.M. Levin, M.A. Olshanetsky, A.V. Zotov, Theoret. and Math. Phys. 184:1 (2015) 924–939; arXiv:1501.07351 [math-ph].
A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016) 014003; "Exactly Solved Models and Beyond": a special issue in honour of R.J. Baxter's 75-th birthday; arXiv:1507.02617 [math-ph].

[20] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 49:39 (2016) 395202; arXiv:1603.06101.

[21] A.M. Perelomov, J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) L31B–L37.
A.M. Perelomov, J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 8563B–8576.

[22] J.H.H. Perk, C.L. Schultz, Physics Letters A, 84:8 (1981) 407–410.

[23] A. Polishchuk, Advances in Mathematics 168:1 (2002) 56–95; arXiv:math/0008156 [math.AG].

[24] A. Polishchuk, Algebra, Arithmetic, and Geometry, Progress in Mathematics book series, Volume 270, (2010) 573–617; arXiv:math/0612761 [math.QA].

[25] N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev, Leningrad Mathematical Journal, 1:1 (1990) 193–225.

[26] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider, Annals of Physics 146:1 (1986) 1–34;
S.N.M. Ruijsenaars, Commun. Math. Phys., 110:2 (1987) 191–213.

[27] I. Sechin, A. Zotov, Phys. Lett. B, 781 (2018) 1–7 , arXiv: 1801.08908.
A. Grekov, A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. 51 (2018) 315202; arXiv: 1801.00245.

[28] A. Smirnov, Central European Journal of Physics 8 (4), 542-554 Cent. Eur. J. Phys.,8:4 (2010) 542–554.

[29] E.K. Sklyanin, Fuct. Anal. Appl. 16:4 (1982) 263–270.

[30] T. Schedler, Mathematical Research Letters, 10:3 (2003) 301–321; arXiv:math/0212258 [math.QA].

[31] M. Vasilyev, A. Zotov, arXiv:1804.02777 [math-ph].

[32] A.V. Zotov, A.M. Levin, M.A. Olshanetsky, Yu.B. Chernyakov, Theoret. and Math. Phys., 156:2 (2008), 1103–1122; arXiv:0710.1072 [nlin.SI].

[33] A. Zotov, Modern Phys. Lett. A, 32:32 (2017) 1750169; arXiv: 1706.05601.