

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики  
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика  
(магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Проблемы теоретической физики

## **СПЕКТР ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ КХД**

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Литвинов Михаил Владимирович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Горский Александр Сергеевич,  
д-р физ.-мат. наук

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Оператора Дирака в КХД</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Модель Сакая-Сугимото как голографически дуальная КХД</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Критический режим</b>	<b>5</b>
4.1	Диагностирование критического режима . . . . .	5
4.2	Матричная модель для перехода . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Спектральная статистика в фазе конфайнмента</b>	<b>7</b>
5.1	Теория на мировом листе . . . . .	7
5.2	Как происходит делокализация? . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Спектральная статистика в фазе деконфайнмента</b>	<b>10</b>
6.1	Теория поля . . . . .	10
6.2	Граница мобильности и горизонт черной дыры. Теория на мировом листе . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>12</b>

# 1 Введение

Спектр евклидова оператор Дирака  $i\gamma_\mu D^\mu$  в КХД - это важная наблюдаемая как в фазе конфайнмента, так и в фазе деконфайнмента. Одно из самых известных соотношений для его собственных значений - тождество Кашера-Бенкса [1], связывающее киральный конденсат со спектральной плотностью:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\pi\rho(\lambda, m)}{V}, \quad (1)$$

где  $m$  - это масса кварка и  $V$  - это объем. Две матричные модели полезны для исследования спектральных свойств оператора Дирака [2]. Одна из них отвечает сектору с нулевым моментом кирального лагранжиана. Вторая обладает свойствами фермионного детерминанта, проинтегрированного по пространству модулей инстантонно-антиинстантонно ансамбля, предположительно имеющего отношения к основному состоянию КХД.

Спектральную задачу для оператора Дирака можно пробовать решать [3] инструментарием развитым в теории систем с беспорядком. Евклидов оператор Дирака в 4D был рассмотрен как гамильтониан с временной координатой, отождествленной со Швингеровским временем [3]. С другой стороны Швингеровское собственное время связано с радиальной координатой в геометрии подобной AdS в патче Пуанкаре [4, 5]. Это стартовая точка в нашем анализе спектра оператора Дирака с помощью голографического подхода. Так как радиальная эволюция может быть отождествлена с ренорм-групповым подходом [6] наше рассмотрение в некотором смысле рассматривает специфичные аспекты ренорм-группового потока в КХД.

Мы рассматриваем  $(4+1)$  гамильтониан с беспорядком, поэтому сразу же возникает стандартный вопрос, касающийся локализационных свойств собственных значения оператора Дирака в 4D пространстве. Делокализованные моды подчиняются статистике Вигнера-Дайсона и собственные значения для этих мод "отталкиваются" друг от друга, в то время как, собственные значения локализованных моды не взаимодействуют и подчиняются Пуасоновой статистике. Возможно также существование границы мобильности, которая разделяет локализованные от делокализованных мод в  $d \geq 3$ , где  $d$  - это размерность пространства. В  $1+1$  и  $2+1$  размерности большинство мод локализовано, однако, возможно также существование делокализованных мод, если топологический член присутствует в действии [7, 8, 9, 10]. Такие моды ответственны за квантовый эффект Холла в  $2+1$  случае.

Свойства спектра оператора Дирака были исследованы в решеточном КХД и результаты, найденные там, были неожиданными:

- Все моды делокализованы в фазе конфайнмента [11]
- Существует граница мобильности  $\lambda_m$  в фазе деконфайнмента [11, 13]. Низко-энергетические моды в фазе деконфайнмента локализованы, в то время как высоко-энергетические моды делокализованы.
- Граница мобильности  $\lambda_m(T)$  при  $T > T_c$  растет как функция температуры вблизи точки деконфайнмента приблизительно как [12]  $\lambda_m(T) = a(T - T_c)$ , где  $a$  - это константа. Фрактальная размерность в точке фазового перехода совпадает с фрактальной размерностью 3D унитарной моделью Андерсона [14].

Короткий обзор всех этих результатов может быть найден в [15].

В этом тезисе мы рассматриваем локализационные свойства спектра оператора Дирака с точки зрения голографического КХД. Переход из фазы конфайнмента в фазу деконфайнмента голографически соответствует изменению геометрии балка: переход от термального AdS при

$T < T_c$  к AdS-подобной черной дыре при  $T > T_c$  [16, 17]. Мы предполагаем, что делокализация всех мод в фазе конфайнмента связана в наличии доменной стенки при  $\theta = \pi$  в чистом Янг-Миллсе. Важность этого режима следует из того факта, что собственные значения оператора Дирака предположительно соответствуют кварку с мнимой массой и фаза массы может быть получена с помощью аксиальной аномалии, другими словами с помощью ненулевого  $\theta$ -члена. Кварки не связаны на доменной стенке [18], следовательно интерпретация предполагает, что кварки распространяются по пятой координате времени, по  $2 + 1$ -мерному подмногообразию 4d евклидова пространства. Естественным вопросом также является: как появление черной дыры в фазе деконфайнмента и наличие границы мобильности связаны между собой? Мы считаем, что мы нашли некоторые подтверждающие факты того, что граница мобильности отвечает области около горизонта.

Стоит сделать один комментарий [20], оказывается что переход индуцированный беспорядком для оператора Дирака отличается от перехода Андерсона нерелятивистского уравнения Шредингера. Главное отличие касается роли спектральной плотности как параметра порядка. В обычном переходе Андерсона спектральная плотность не играет никакой существенной роли и только спектральный форм-фактор и старшие спектральные корреляторы имеют значение. Мы будем интересоваться спектром оператора Дирака в  $4D$  Евклидовом пространстве, поэтому следует ожидать не Андерсонский переход.

Диплом организован следующим образом. В разделе 2 мы собрали полезные свойства касающиеся оператора Дирака в КХД. В разделе 3 мы бегло обзораем голографическую модель КХД Сакая-Сугимото. В разделе 4 мы рассматриваем разные определения локализационных свойств гамильтониана в системах с беспорядком. В разделе 5 связываем делокализацию мод в фазе конфайнмента с  $\theta = \pi$  феноменом. В разделе 6 мы делаем предположение, что локализованные моды, отделенные от остальной части спектра границей мобильности, в фазе деконфайнмента отвечают области вблизи горизонта дуальной черной дыры. Некоторые открытые вопросы сформулированы в Заключение.

## 2 Оператора Дирака в КХД

Сделаем небольшой обзор результатов, касающихся спектра оператора Дирака. Статсумма КХД:

$$Z_{QCD} = \int dA_\mu \prod_{f=1}^{N_f} \det(iD + m_f) \exp(-S_{YM}(A)) \quad (2)$$

Мы интересуемся собственными значениями оператора 4D оператора Дирака

$$\hat{D}(A)\psi_n = i\lambda_n\psi_n \quad (3)$$

которое совпадает с уравнение Дирака для мнимой массы фермионов  $m = i\lambda$ . Спектральная плотность определена следующим образом

$$\rho(\lambda) = \left\langle \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) \right\rangle_{QCD} \quad (4)$$

и при маленьких  $\lambda$  ведет себя следующим образом [1, 21]

$$\rho(\lambda) = \rho(0) + c|\lambda| + O(\lambda) \quad (5)$$

где [21]

$$c = \frac{\rho(0)^2(N_f^2 - 4)}{32N_f F_\pi^2 V} \quad (6)$$

### 3 Модель Сакая-Сугимото как голографически дуальная КХД

Рассмотрим модель Сакая-Сугимото [16, 22]

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & (4) & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \text{D4} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & & & \\
 \text{D8-}\overline{\text{D8}} & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ
 \end{array} \tag{7}$$

Она включает в себя  $N_c$  D4-бран, намотанных вокруг цилиндра с нарушающими суперсимметрию условиями для фермионов. При больших  $N_c$  цилиндр превращается в сигару. Топологически геометрия пространства следующая  $R^{3,1} \times S^4 \times (r, \phi)$  при маленьких температурах. В фазе конфайнмента сигара в координатах  $(r, \phi)$

$$ds^2 = (r/R)^{3/2} f(r) d\phi^2 + (R/r)^{3/2} \frac{dr^2}{f(r)}; \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_{kk}}{r}\right)^3, \tag{8}$$

где  $\phi$  периодическая координата. D0 инстантоны в этой геометрии протяжены по  $\phi$  и локализованы по радиальной координате.  $N_f$  D8- $\overline{\text{D8}}$  бран вставлены таким образом, что соединяются на конце сигары и расположены в  $\phi = 0, \pi$  на  $\phi$  окружности. D8 брана несет заряд  $U(N_f)$  флейворной калибровочной группы на своей мировой поверхности и матрица  $U$  псевдоскалярного мезона  $\pi_a$  определена в терминах голономии радиальной компоненты флейворного калибровочного поля

$$U = e^{it_a \pi_a} = e^{\int A_r dr} \tag{9}$$

Выше критической температуры метрика включает в себя черную дырку [16] и фазовый переход в КХД качественно отвечает переходу Хокинга-Пейдж. В точке  $T = T_c$   $\phi$  и Евклидово время  $t_E$  меняются местами.

Стоит также сделать один комментарий по поводу причин появления массивного члена  $\text{Tr} MU$  в киральном лагранжиане, полученным из модели Сакая-Сугимото редукцией. Изначально модель Сакая-Сугимото безмассовая. В работах было показано [23, 24], что можно объяснить появление этого члена инстантонами на мировой поверхности. Точнее, открытыми струнами с мировой поверхностью, вложенными в  $(r, \phi)$ , которые протяжены между левыми и правыми D8-бранами и замечает также некоторую площадь сигары. Масса приходит из действия для струны Намбу-Гото, в то время как  $U$  появляется из-за взаимодействия конца открытой струны с D8-браной. Мы интересуемся собственными значениями оператора Дирака, то есть чисто мнимыми массами. Это может быть достигнуто, если учитывать  $\theta$  член, голографически это соответствует голономии 1-формы Рамон-Рамона вдоль Калуца-Клейновской окружности[25]. С подходящим значением  $\theta$  мы получим полностью мнимые массы.

## 4 Критический режим

### 4.1 Диагностирование критического режима

В этой разделе мы будем обсуждать спектральные свойства гамильтониан с беспорядком около границы мобильности  $E_m$ . Существует несколько особенных черт этого режима с многофрактальным поведением[32]:

- Распределение расстояний между уровнями (Level spacing distribution)  $P(s)$  является ключевым индикатором перехода локализация/делокализация. Оно ведет себя как

$$\begin{cases} P_{deloc}(s) = A s^2 e^{-Bs^2} & \text{делокализованная фаза(GOE)} \\ P_{loc}(s) = e^{-\frac{s}{2\chi}} & \text{локализованная фаза} \end{cases} \tag{10}$$

где для развернутого спектра  $s_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $x_i = \int^{\lambda_i} \rho(\lambda)$ . Среднее расстояние между уровнями  $\Delta \equiv \frac{1}{\langle \rho(0) \rangle}$ . Возьмем интервал энергий  $\delta E$ ,  $\frac{\delta E}{\Delta} \equiv \bar{n} \ll N$ , в энергетическом пространстве возле  $E = 0$  и посчитаем число  $n$  уровней внутри этого интервала энергий при какой-то реализации беспорядка.

Параметр  $\chi$  в хвосте Пуассона - это сжимаемость уровней, определенная как

$$\chi = \frac{d}{d\bar{n}} \langle (n - \bar{n})^2 \rangle, \quad N \gg \bar{n} \gg 1 \quad (11)$$

- Второй индикатор - это то, что у спектрального коррелятора появляется фрактальное поведение на границе мобильности, которое отличается от статистики Вигнера-Дайсона или Пуассона.

$$R(E) \propto E^{-1 + \frac{D_2}{d}} \quad (12)$$

где  $D_2$  фрактальная размерность определенная как

$$\sum_{r,n} \langle |\Psi_n(r)|^{2p} \delta(E - E_n) \rangle \propto L^{-D_p(p-1)} \quad (13)$$

в объеме  $L^d$ ,  $d$  - это размерность пространства.

Вариативность числа уровней (level number variance)

$$\Sigma = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle \quad (14)$$

ведет себя как  $\Sigma_{crit} \propto \chi E$  в мульти-фрактальном случае, где сжимаемость уровней:

$$\chi = \frac{d - D_2}{2d} \quad (15)$$

## 4.2 Матричная модель для перехода

Существует несколько матричных моделей [28, 29, 30], который описывают локализационный переход в 3D [27]. Все они работают хорошо только вблизи границы мобильности. ([31] для обзора). Давайте обозначим самые главные черты:

- Двух матричная модели [28] включают в себя следующую функцию вероятности

$$P(H) \propto \exp \left( -\beta \text{Tr} H^2 - \beta b \text{Tr}([\Omega, H][\Omega, H]^\dagger) \right) \quad (16)$$

где  $b$  - это параметр и  $\Omega$  зафиксированная унитарная матрица  $\Omega = \text{diag} \left( \exp \left( \frac{2\pi i k}{N} \right) \right)$ .

Критический режим в этой модели наступает, когда  $b = \mu N^2$  при  $N \rightarrow \infty$ .

- Вторая одно-матричная модель включает в себя потенциал, обеспечивающий слабый кон-файнмент собственных значений [29]. Асимптотически потенциал ведет себя как:

$$V(x) \rightarrow \frac{1}{\gamma} \log^2 x, \quad x \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где  $b$  - это параметр и вероятностная мера в матричном интеграле:

$$P(H) \propto \exp \left( -\beta \text{Tr} V(H) \right) \quad (18)$$

Аналогичная критическая модель для кирального ансамбля была рассмотрена в [40].

- Третья модель была предложена в [30] и включает в себя Гауссов ансамбль независимых случайных величин ( $i \geq j$ )

$$\langle H_{ij} \rangle = 0, \quad \langle (H_{ij})^2 \rangle = \beta^{-1} \left[ 1 + \frac{(i-j)^2}{B^2} \right]^{-1} \quad (19)$$

где  $B$  - это параметр модели, для  $B \gg 1$  она отображается в суперсимметричную сигма модель. В этой модели видно мультифрактальное поведение [30] на границе мобильности.

Спектральный коррелятор во всех критических моделях тот же самый

$$R(E, t) = \langle \rho(E) \rho(E+t) \rangle = \delta(t) + Y(E, t) \quad (20)$$

для маленьких  $t$

$$Y(E, t) \propto \frac{\pi^2 \eta^2}{4} \frac{\sin^2(\pi t)}{\sinh^2(\pi^2 t \eta / 2)} \quad \beta = 2 \quad (21)$$

Параметр  $\eta = \sqrt{\mu} = \frac{\gamma}{\pi^2}$  (Для первой и второй модели соответственно), если мы предположим что  $\eta \ll 1$ . Спектральный коррелятор в этом режиме эквивалентен коррелятору плотность для свободного фермионного газа при конечной температуре пропорциональной  $\eta$ . Параметр  $\eta$  связан в фрактальной размерностью  $\eta = 1 - D_2$ . При маленьких  $\eta$  спектральная сжимаемость:

$$\chi = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} Y(E, t) dt \quad (22)$$

и это соотносится с общим соотношением (15).

Заметим, что формулы выше верны только при маленькой мультифрактальности. При больших  $t$  появляется хвост, который знает о фрактальной размерности тоже. Согласно нашему предположению режим для маленьких  $t$  соответствует области вблизи горизонта (IR), в то время как режим больших  $t$  содержит в себе информацию о UV масштабе. Так как мы работаем с чем-то похожим на аномалию - информация о фрактальной размерности может быть получена как в UV так и в IR.

## 5 Спектральная статистика в фазе конфайнмента

### 5.1 Теория на мировом листе

В фазе конфайнмента кварк представляется фундаментальной струной протяженной от пробной флейворной браны, расположенной на  $\lambda$ , до эффективной IR стенки (Рис.1). Интересующие нас координаты это  $(r, \phi)$  и термальная окружность.

**Предположение 1.** Собственные значения оператора Дирака сопряжены, в смысле фурье, радиальной координате в системе координат Пуанкаре.

Давайте сначала попробуем привести некоторую аргументацию в пользу предположения. В работе [3] было показано, что 4D евклидов оператор Дирака может выступать как гамильтониан относительно 5 фиктивной временной координаты - Швингеровского времени. С другой стороны, в работах [4, 5] швингеровское время  $\tau$  было связано с радиальной координатой  $z$  как  $\tau \propto z^2$  в координатах Пуанкаре

$$ds^2 = \frac{dx_i dx^i + dz^2}{z^2} \quad (23)$$

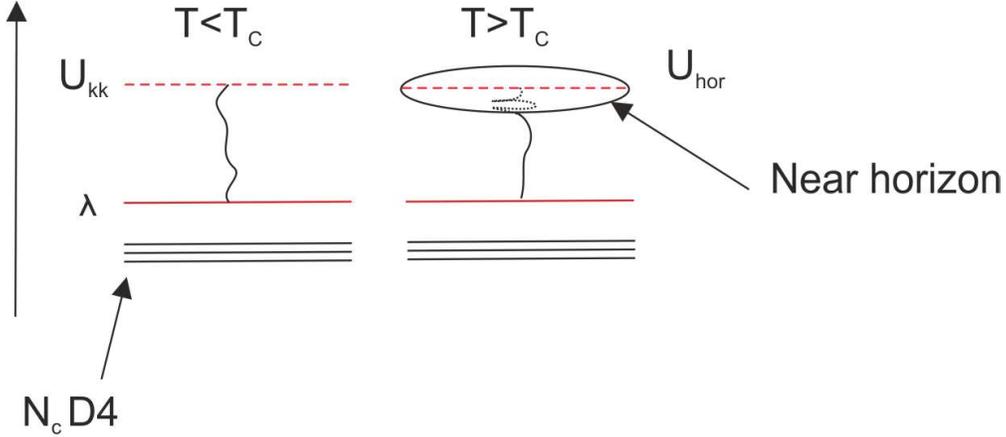


Рис. 1: Вложение струны в балк( $r = U$ )

для евклидова  $AdS_{d+1}$  пространства. Это соотношение работает как и в чистой граничной конформной теории поля [4], так и в не суперсимметричном случае в постоянном внешнем поле [5].

Как спектральная статистика граничной теории получается с точки зрения вложения струны в геометрию? Мы считаем, что с помощью сформулированного предположения можно переформулировать вопрос о локализации/делокализации энергетического спектра в вопрос о корреляции близлежащих кусков струны. Зависимы они (Wigner-Dyson) или нет (Poisson)? Мы считаем, что струна с конечным натяжением состоит из зависимых кусков. В фазе конфайнмента струна имеет конечное эффективной натяжение при всех значениях радиальной координаты:

$$T_{eff}(r) = T_0 \sqrt{g_{tt}(r)g_{xx}(r)}. \quad (24)$$

**Предположение 2.** Статистика Вигнера-Дайсона соответствует тому, что:

1. У струны конечное натяжение
2. Куски струны отталкиваются друг от друга - струна стремится быть прямой линией.

Как спектральная статистика граничной теории получается с точки зрения теории на мировом листе?

**Предположение 3.** Спектральный коррелятор в граничной теории отображается в коррелятор плотности  $\rho(x)$  на мировой поверхности струны, связанный с коллективным полем:

$$\langle \rho(\lambda)\rho(\lambda') \rangle_{boundary} \rightarrow \langle \rho(x)\rho(x') \rangle_{worldsheet} \quad (25)$$

Логика - почему это может быть правдой - такая:

- В работе [42] было показано, что спектральный коррелятор РМТ эквивалентен коррелятору плотностей двумерной теории поля для модели Калоджеро, описывающей фермионы в гармонического потенциале. Гамильтониан модели выглядит следующим образом

$$H_{Cal} = \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{\beta}{2} \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \sum_{i < j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \omega^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (26)$$

Также тот же коррелятор может быть получен в модели Лютингера скалярного поля[31]: плотность  $\rho(x, \tau)$  описывается в терминах двумерного скалярного поля следующим образом

$$\rho(x, \tau) = \rho_0 - \frac{\partial_x \Phi}{\pi} + \frac{A_K}{\pi} \cos[2\pi\rho_0 x - 2\Phi] + \dots \quad (27)$$

Коррелятор плотность-плотность поэтому может быть выражен через функцию Грина для скалярного поля  $\Phi(x, \tau)$  в  $(1+1)$ . Таким образом, если мы считаем, что на мировой поверхности струны живет скалярное поле, то мы получаем (25).

- Откуда появляется коллективное поле? Мы полагаем, что  $\Phi(s, \tau)$  в теории на мировой поверхности возникает аналогично случаю струны в геометрии сигары [36]: из-за конденсации вихрей около кончика сигары. Вихри являются следствием учета не-синглетного сектора в  $s = 1$  матричной модели [37, 38, 39]. Предположительно, что из-за этих вихрей на мировой поверхности струны появляется модель Калоджеро или эффективное коллективное описание Лютингера .

Также можно пытаться интерпретироваться коррелятор плотность-плотность как коррелятор двух вильсоновских петель. Связь между корреляторами и вильсоновскими петлями была замечена в [46] в контексте матричной В фазе конфайнмента RMT хорошо работает, поэтому спектральный коррелятор можно пробовать получать как коррелятор двух петель или двойственных к ним по Лапласу - резольвент. Возможно также задаться вопросом о смысле перехода Гросса-Оогури [47], когда связанные поверхность между двумя вильсоновскими петлями перестает существовать.

Давайте сделаем небольшой комментарий по поводу соотношения Кешера-Бенкса в фазе конфайнмента с точки зрения мировой поверхности. Попытка объяснить это соотношение была предпринята в [26], где кварковый конденсат был связан с тахионным полем в спектре открытой струны, связывающей D8-брану и анти-брану.  $\rho(0)$  появляется как тахионная мода короткой струны, расположенная возле кончика сигары. Это также может быть использовано для того, чтобы отождествить  $\lambda = 0$  как кончик сигары.

Линейный член в спектральной плотности пропорционален  $|\lambda|$  (5), что, предположительно, означает наличие острого выступа в форме струны. Коэффициент, стоящий перед линейным членом, пропорционален 2-х точечному пионному коррелятору скалярных токов [21], что, возможно, может помочь объяснить голографически не аналитичность спектральной плотности.

## 5.2 Как происходит делокализация?

Решеточные вычисления показывают [11, 13], что все собственные значения Евклидова оператора Дирака в фазе конфайнмента делокализованы, то есть ведут себя как 4d металл. Мы предлагаем качественное объяснение делокализации в фазе конфайнмента, используя топологические дефекты. Собственные значения оператора Дирака отождествляются с мнимой массой кварка. Из-за аксиальной аномалии массовая зависимость выглядит следующим образом  $m^{N_f} e^{i\theta}$ , таким образом, чтобы получить мнимые массы кварков мы можем ввести нетривиальное значение  $\theta$ , которое зависит от количество флейворов. Для  $N_f = 0$   $\theta = \pi$ , в общем случае  $\theta = \frac{\pi(N_f + 2)}{2}$ .

Считается, что при  $\theta = \pi$  у чистого Янг-Миллса вырожденное состояние вакуума и как следствие у такой теории появляются доменные стенки. Недавно было показано, что теория на доменной стенке находится в фазе деконфайнмента [18]. Мы считаем, что кварк может распространяться только по доменной стенке в этом случае. Тогда спектральный коррелятор

оператора Дирака говорит нам о том каким образом кварк распространяется по доменной стенке в эволюции по радиальной координате.

Это предположение качественно подтверждает довольно старый решеточный результат [19], где было найдено что делокализованные киральные моды оператора Дирака и фазе конфайнмента расположены на  $2 + 1$  поверхности в 4d Евклидовом пространстве, которое имеет некоторые особенные топологические свойства.

## 6 Спектральная статистика в фазе деконфайнмента

### 6.1 Теория поля

Главным вопросом в фазе деконфайнмента является интерпретация границы мобильности, найденной в решеточных вычислениях [11]. Давайте обсудим несколько качественных аргументов, подтверждающее отождествление области вблизи горизонта в голографически дуальной теории и локализованных мод в спектре оператора Дирака.

- В критической точке перехода метал-изолятор в спектре оператора Дирака можно ожидать скачок киральной проводимости в термальном КХД. Соответствующая формула типа Кубо для коррелятора нетеровских токов, генерирующих левые и правые киральные вращения:

$$i \int dx \langle J_\nu^L(x) J_\mu^R(0) \rangle = -\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_\pi^2 \quad (28)$$

Сравнение этой низко-энергетической теоремы с формулами известными из транспортных явление, говорит нам о том что  $F_\pi$  играет роль диффузионной константы в киральной материи. [41]. Таким образом, мы можем спросить себя, будет ли скачок проводимости в голографической картине? Чтобы бы быть как можно более модели независимым, давайте рассмотрим соотношение Сан-Ямомото, полученное из соотношения аномалий, в голографическом КХД [33], которое связывает 2-х и 3-х точечные корреляторы и диагонально в голографическом ренорм-групповом потоке в модели твердой стенки [34]. Из соотношения Сон-Ямамото следует следующий вид константы  $F_\pi$

$$F_\pi^{-2}(z) = \int_0^z \frac{1}{f^2(r)} dr, \quad (29)$$

которое верно для многих разумных голографических метрик.

$$ds^2 = -f(z)dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + z^2 d\Omega^2 \quad (30)$$

Беря производную этого выражения, мы сразу же видим, что критичность проводимости достигается на горизонте черной дыры, когда  $f(z) = 0$ .

- Решеточные вычисления в КХД показали, что позиция границы мобильности  $\lambda_m(T)$  при  $T > T_c$  растет как функция температуры около температуры деконфайнмента приблизительно как [12]

$$\lambda_m(T) = a(T - T_c) \quad (31)$$

$a$  - константа. Возможное голографическое объяснение такого поведение следующее: для около экстремальной черной дыры соотношение между радиальной координатой и температурой выполняется:

$$T \propto (r - r_0), \quad (32)$$

где  $r_0$  это радиус экстремальной черной дыры. Это поведение качественно соотносится с наблюдаемой линейной зависимостью температурной зависимостью границы мобильности если мы будем считать  $\lambda \propto (r - r_{kk})$ .

Напомним, что точный вид голографической метрики в фазе деконфайнмента не известен, но присутствие горизонта проходит большое количество нетривиальных проверок. Тщательное изучение зависимости  $\lambda_m(T)$  может обеспечить нас дополнительной информацией о виде голографической метрики.

Недавно новое интересное соотношение было найдено [35]. Аналог соотношения Кешера-Бенкса для спектрального формфактора:

$$R(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0) - R_{Pois}(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0) = f_A, \quad (33)$$

где  $R(\lambda_1, \lambda_2)$  - это спектральный коррелятор для оператора Дирака в фазе деконфайнмента.  $f_A$  - это коэффициент перед членом, нарушающим  $U(1)_A$  симметрию, в разложении статсуммы в терминах фермионной матрицы масс  $M$ :

$$Z(M) = \exp \left( -\frac{V_3}{T} (f_0 - f_2 \text{Tr} M^+ M - f_A (\det M + \det M^+) + O(M^4)) \right). \quad (34)$$

(33) меряет разницу между спектральным коррелятором в КХД и в случае пуассоновой статистики. Мы знаем из решеточных исследований, что возле  $\lambda = 0$  статистика Пуассона, следовательно  $f_A = 0$  и не нарушенная симметрия  $U(1)_A$ . Эта утверждение довольно противоречиво: есть много решеточных исследований противоречащих и подтверждающих эту позицию в литературе. Этот вопрос, безусловно, заслуживает дальнейшего изучения.

## 6.2 Граница мобильности и горизонт черной дыры. Теория на мировом листе

Перейдем теперь к отождествлению границы мобильности с точки зрения теории на мировом листе струны, вложенную в метрику черной дыры. Метрика черной дыры индуцирует на мировом листе термальную метрику. Температура черной дыры и на мировом листе совпадают для статического кварка. Следовательно, мы можем спросить: какой масштаб разделяет две части струны на мировом листе. Мы предположили до этого, что граница мобильности лежит в области близкой к горизонту.

**Предположение 4.** Исчезающее эффективное натяжение струны соответствует статистике Пуассона.

Продолжая отождествление корреляторов на границе с корреляторами на мировой поверхности:

- В фазе конфайнмента геометрия вложения включает в себя  $(r, t_E)$  координаты и струна, протяженная по радиальной координате, распространяется по угловой  $t_E$ . Мы начинаем с термальной эффективной теории поля для системы Калоджеро. Оказывается, что [43] RMT-Калоджеро отвечающее нулевой температуре, обобщается на случай между моделью Калоджеро при конечной температуре и критической матричной моделью. Спектральный коррелятор в критической матричной модели эквивалентен коррелятору плотность-плотность в модели Калоджера при конечной температуре при отождествлении параметра деформации  $b$  в матричной модели [43]

$$2b = \frac{\omega}{\sinh(\frac{\omega}{T})} \quad 2b + 1 = \frac{\omega \cosh(\frac{\omega}{T})}{\sinh(\frac{\omega}{T})} \quad (35)$$

Давайте напомним, что  $x_i$  в модели Калоджера age отождествляется с радиальной голографической координатой, в то время как  $\tau$  евклидова время, отождествленное с угловой координатой на гиперболической плоскости. Коррелятор плотность-плотность взят в том же евклидовом времени. Модель Калоджера рассматривается при зафиксированной константе связи, которая отвечает фермионной статистике.

- В работе [44] было сделано наблюдение о том спектральный коррелятор, может быть получен как коррелятор плотность-плотность в эффективном 2d бэкграунде "акустической черной дыре". На самом деле единственный важный момент, это то что этот бекграунд имеет эффективно температуру Хокинга. Это напоминает нам логику нашего исследования, когда термальная метрика появляется на мировом листе струны. Фрактальная размерность  $D_2$  выведена в [44] и равна

$$T \propto \pi \frac{d - D_2}{d} \quad (36)$$

## 7 Заключение

В этом дипломе мы сделали некоторый обзор известных решеточных и матричных результатов, а также сформулировали несколько предположений, касающихся свойств 4D евклидова оператора Дирака в КХД в фазе конфайнмента и деконфайнмента. Мы считаем, что делокализация всех мод в фазе конфайнмента связана с феноменом типа  $\theta = \pi$ . Кварки делокализованы на доменной стенке и могут распространяться по ним, если мы рассматриваем радиальную координату как время. Что находится в согласии с решеточными наблюдениями, касающихся расположения делокализованных мод на  $2 + 1$  многообразии в Евклидовом 4D пространстве [19]. Также было сформулировано утверждение о том как связаны собственные значения оператора Дирака с радиальной координатой в балке. Был сформулирован ответ на вопрос: как можно отличить статистику Пуассона от статистики Вигнера-Дайсона с точки зрения струны и ее натяжения? Было предложено возможное отображения спектральных корреляторов в теорию на мировом листе как в фазе конфайнмента так и в фазе деконфайнмента. Было сделано предположение о том, что в фазе деконфайнмента локализованные моды отвечают области возле горизонта черной дыры в голографически дуальной теории.

Было бы особенно интересно сравнить результат нашего обсуждения в этой работе с [45]. Там, в случае тензорной сети, было показано что критическая точка в теории с граничной Евклидовой теории является голографическим горизонтом. Причина появления такого поведения - невозможность проэволюционировать UV состояние в определенное состояние в IR с помощью RG-потока. Можно также предположить, что критическое поведение на горизонте будет точкой перехода метал-изолятор в спектре граничной евклидовой теории.

Также очень важно исследовать низко-энергетические моды оператора Дирака в фазе деконфайнмента с помощью решеточных вычислений. Если наши предположения по поводу спектра оператора Дирака верны, то это поможет нам понять близкую к черной дыре область в 5D и, возможно, узнать новое о метрике вблизи горизонта.

## Список литературы

- [1] T. Banks and A. Casher, “Chiral Symmetry Breaking in Confining Theories,” Nucl. Phys. B **169**, 103 (1980). doi:10.1016/0550-3213(80)90255-2
- [2] J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 50, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/0003017]  
R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, “Chiral random matrix models in QCD,” Acta Phys. Polon. B **29**, 3957 (1998) [hep-ph/9812376].  
G. Akemann, “Random Matrix Theory and Quantum Chromodynamics,” arXiv:1603.06011 [math-ph].
- [3] J. Stern, “Two alternatives of spontaneous chiral symmetry breaking in QCD,” [hep-ph/9801282].  
R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, “Chiral disorder in QCD,” Phys. Rev. Lett. **81**, 264 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.81.264  
J.C. Osborn and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 268, Nucl.Phys. B 525 (1998) 738
- [4] R. Gopakumar, “From free fields to AdS,” Phys. Rev. D **70**, 025009 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.025009 [hep-th/0308184].
- [5] A. Gorsky and V. Lysov, “From effective actions to the background geometry,” Nucl. Phys. B **718**, 293 (2005) doi:10.1016/j.nuclphysb.2005.04.020 [hep-th/0411063].
- [6] J. de Boer, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, “On the holographic renormalization group,” JHEP **0008**, 003 (2000) doi:10.1088/1126-6708/2000/08/003 [hep-th/9912012].
- [7] Anderson localization and the topology of classifying spaces T. Morimoto, A. Furusaki, C. Mudry Phys. Rev. B 91, 235111 (2015)
- [8] Topology vs. Anderson localization: non-perturbative solutions in one dimension A. Altland, D. Bagrets, A. Kamenev Phys. Rev. B 91, 085429 (2015)
- [9] D. Khmelnitskii, JETP Lett 38 (552, (1983)
- [10] A. Pruisken Nucl.Phys. B 235, 277 (1984)
- [11] A. M. Garcia-Garcia and J. C. Osborn, Nucl. Phys. A770, 141 (2006)  
A. M. Garcia-Garcia and J. C. Osborn, Phys. Rev. D 75,034503 (2007)
- [12] T. G. Kovacs and F. Pittler, “Poisson to Random Matrix Transition in the QCD Dirac Spectrum,” Phys. Rev. D **86**, 114515 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.114515 [arXiv:1208.3475 [hep-lat]].
- [13] M. Giordano, T. G. Kovacz and F. Pittler, Phys. Rev. Lett., 112, no. 10, 102002 (2014)  
T. G. Kovacs and R. A. Vig, “The localization transition in SU(3) gauge theory,” Phys.Rev.D97 (2018) 014502 arXiv:1706.03562 [hep-lat].
- [14] L. Ujfalusi, M. Giordano, F. Pittler, T. G. Kovács and I. Varga, “Anderson transition and multifractals in the spectrum of the Dirac operator of Quantum Chromodynamics at high temperature,” Phys. Rev. D **92**, no. 9, 094513 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.094513 [arXiv:1507.02162 [cond-mat.dis-nn]].

- [15] M. Giordano, “Localisation, chiral symmetry and confinement in QCD and related theories,” arXiv:1811.04792 [hep-lat].
- [16] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998) [hep-th/9803131].
- [17] O. Aharony, J. Marsano, S. Minwalla, K. Papadodimas, and M. Van Raamsdonk, “The Hagedorn - deconfinement phase transition in weakly coupled large N gauge -theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004) 603–696, arXiv:hep-th/0310285 [hep-th]
- [18] D. Gaiotto, Z. Komargodski and N. Seiberg, “Time-reversal breaking in QCD<sub>4</sub>, walls, and dualities in 2 + 1 dimensions,” *JHEP* **1801**, 110 (2018) doi:10.1007/JHEP01(2018)110 [arXiv:1708.06806 [hep-th]]
- [19] I.Horvath et al., *Phys. Rev. D* **67**, 011501 (2003), hep-lat/0203027  
E.-M. Ilgenfritz, K. Koller, Y. Koma, G. Schierholz, T. Streuer and V. Weinberg, “Exploring the structure of the quenched QCD vacuum with overlap fermions,” *Phys. Rev. D* **76**, 034506 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.034506  
J. Greensite, S. Olejnik, M. Polikarpov, S. Syritsyn, and V. Zakharov, *Phys. Rev. D* **71**, 114507(2005), hep-lat/0504008.
- [20] E. Fradkin *Phys. Rev. B* **33**, 3257 ,1986; *Phys. Rev. B* **33**, 3263, 198
- [21] A. V. Smilga and J. Stern, “On the spectral density of Euclidean Dirac operator in QCD,” *Phys. Lett. B* **318**, 531 (1993).
- [22] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113**, 843 (2005) doi:10.1143/PTP.113.843 [hep-th/0412141].
- [23] O. Aharony and D. Kutasov, “Holographic Duals of Long Open Strings,” *Phys. Rev. D* **78**, 026005 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.78.026005 [arXiv:0803.3547 [hep-th]].
- [24] K. Hashimoto, T. Hirayama, F. L. Lin and H. U. Yee, “Quark Mass Deformation of Holographic Massless QCD,” *JHEP* **0807**, 089 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/07/089 [arXiv:0803.4192 [hep-th]].
- [25] E. Witten, “Theta dependence in the large N limit of four-dimensional gauge theories,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2862 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.81.2862 [hep-th/9807109].
- [26] R. Casero, E. Kiritsis and A. Paredes, “Chiral symmetry breaking as open string tachyon condensation,” *Nucl. Phys. B* **787**, 98 (2007) doi:10.1016/j.nuclphysb.2007.07.009 [hep-th/0702155 [HEP-TH]].
- [27] V.E.Kravtsov, K.A.Muttalib „New Class of Random Matrix Ensembles with Multifractal Eigenvectors“, *Phys.Rev.Lett.*, **79** (1997) 1913.
- [28] A. Mirlin et al *Phys.Rev.E* **54**, 3221 (1996)
- [29] K. Muttalib et al *PRL* **71**, 471,(1993)
- [30] M. Moshe,, H.Neuberger and B. Shapiro *PRL* **73**, 1497 (1994)
- [31] V.E.Kravtsov „Random matrix representations of critical statistics“ , in the Handbook on Random Matrix Theory , arXiv:0911.0615

- [32] V. E. Kravtsov , I. V. Lerner , B. L. Altshuler , A. G. Aronov PRL, vol. 72, p.888 (1994) cond-mat/9402026.  
V.E.Kravtsov ,“Spectral Statistics at the Anderson Transition: Multifractality of Wave Functions and the Violation of the Normalization Sum Rule“ arXiv:cond-mat/9603166  
J. T. Chalker, V. E. Kravtsov, I. V. Lerner JETP Lett. 64 (1996) 386
- [33] D. T. Son and N. Yamamoto, arXiv:1010.0718 [hep-ph]
- [34] O. Dubinkin, A. Gorsky and A. Milekhin, “Son-Yamamoto relation and holographic renormalization group flows,” Phys. Rev. D **91**, 066007 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.066007 [arXiv:1412.0513 [hep-th]].
- [35] T. Kanazawa and N. Yamamoto, “U (1) axial symmetry and Dirac spectra in QCD at high temperature,” JHEP **1601**, 141 (2016) doi:10.1007/JHEP01(2016)141 [arXiv:1508.02416 [hep-th]].  
T. Kanazawa, “Chiral symmetry breaking with no bilinear condensate revisited,” JHEP **1510**, 010 (2015) doi:10.1007/JHEP10(2015)010 [arXiv:1507.06376 [hep-ph]].
- [36] V. Kazakov, I. K. Kostov, and D. Kutasov, “A Matrix model for the two-dimensional black hole,” Nucl. Phys.B622 (2002) 141–188, arXiv:hep-th/0101011 [hep-th]
- [37] D. J. Gross and I. R. Klebanov, “Vortices and the nonsinglet sector of the  $c = 1$  matrix model,” Nucl. Phys. B354 (1991) 459–474.
- [38] D. Boulatov and V. Kazakov, “One-dimensional string theory with vortices as the upside down matrix oscillator,” Int. J. Mod. Phys. A **8**, 809 (1993) doi:10.1142/S0217751X9300031X [hep-th/0012228].
- [39] J. M. Maldacena, “Long strings in two dimensional string theory and non-singlets in the matrix model,” JHEP, 09(2005) 078, arXiv:hep-th/0503112 [hep-th]  
J. Maldacena and A. Milekhin, “To gauge or not to gauge?,” JHEP **1804**, 084 (2018)
- [40] A. M. Garcia-Garcia and J. J. M. Verbaarschot, “Chiral random matrix model for critical statistics,” Nucl. Phys. B **586**, 668 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00362-X [hep-th/0003159].
- [41] R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, Phys. Lett. B **442**, 300 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)01210-6 [hep-ph/9807550].  
P.H. Damgaard, U.M. Heller, R. Niclasen and K. Rummukainen „Low-lying Eigenvalues of the QCD Dirac Operator at Finite Temperature“ hep-lat/0003021.  
F. Farchioni, P. de Forcrand, I. Hip, C.B. Lang, and K. Spittorff, hep-lat/9912004  
J.J.M. Verbaarschot, „Randomness on the Lattice“ arXiv:hep-lat/0008025
- [42] B. D. Simons, P. A. Lee and B. L. Altshuler, “Exact results for quantum chaotic systems and one-dimensional fermions from matrix models,” Nucl. Phys. B **409**, 487 (1993).
- [43] A. M. Garcia-Garcia and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. E67, 046104 (2003),
- [44] F. Franchini, V. E. Kravtsov Phys. Rev. Lett. 103: 166401,2009
- [45] S. S. Lee, “Horizon as Critical Phenomenon,” JHEP **1609**, 044 (2016) [arXiv:1603.08509 [hep-th]].

- [46] A. del Campo, J. Molina-Vilaplana and J. Sonner, “Scrambling the spectral form factor: unitarity constraints and exact results,” *Phys. Rev. D* **95**, no. 12, 126008 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.126008 [arXiv:1702.04350 [hep-th]].
- [47] D. J. Gross and H. Ooguri, “Aspects of large N gauge theory dynamics as seen by string theory,” *Phys. Rev. D* **58**, 106002 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.58.106002 [hep-th/9805129].  
K. Zarembo, ‘Wilson Loop Correlator in the AdS/CFT Correspondence“ *Phys.Lett.* B459 (1999) 527-534 hep-th/0008224