ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национально исследовательский университет)»
Физтех-школа фундаментальной и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

SLE и двумерные конформные теории

Выпускная квалификационная работа магистра

Выполнил:
студент 321 группы
Лотков Анатолий Игоревич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Горский Александр Сергеевич

ИТЭФ
2019

Содержание

1 Введение

SLE (Stochastic Loewner equation) было разработано Шраммом в его статье 2000 года [14] в контексте поиска математически строгого подхода к задаче перколяции. В ней он рассматривал непрерывный предел UST (uniform spanning trees) и LERW (Loop-erasing random walks). Уравнением, описывающее кривые получающиеся в непрыровном пределе, является как раз SLE.

Эти идеи были развиты в серии статей Ловлера, Шрамма и Вернера [11, 12, 10]. Они рассматривали непрерывный предел векторной модели O(n), модели Изинга, модели Поттса, цепочки XY, self-avoiding walks. Начиная с предположения, что SLE описывает одиночную кривую в одной из этих моделей, было получено множество свойств этих моделей: такие как значение критических экспонент, crossing probability и прочие.

Для $\kappa > 4$ кривая неоднократно пересекает себя, и следовательно ее остов K_t содержит части кривой. Но граница $H \setminus K_t$ по определению является простой кривой. Для случая $\kappa = 6$ эта кривая сама по себе является SLE с $\tilde{\kappa}$

$$\tilde{\kappa} = 16/\kappa.$$

Эта дуальность была предложена Дуплантиром [8] и доказана Беффара [5].

Так же была найдена связь между SLE и CFT в статьях Бауэра и Бернарда [2, 1, 3, 4]. В CFT, полученной из O(n) модели, точка, в которой случайная кривая касается границы соответствует вставке локального оператора, который имеет простое свойство: его корелляционная функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Эти уравнения оказываются напрямую связаны с уравнениями Фоккера-Планка, которые получаются из Броуновского процесса управляющего SLE. Таким образом, есть близкая связь между CFT и SLE.

Нас интересует связь между SLE и моделями Калоджеро. Рациональная квантовая система Калоджеро была введена и решена Франческо Калоджером в серии статей в 1969-1971 годах. В то же время тригонометрическая квантовая система Калоджеро была рассмотрена Биллон Сазерлэндом. В 1975 году Юргеном Мозером было доказано, что классическая рациональная модель Калоджеро интегрируемая для произвольного N (для $N = 3$ эта задача была решена ранее Карло Маркиоро, и в какой-то мере значительно ранее Карлом Якоби, хотя вклад Якоби был забыт и переоткрыт Аскольдом Переломовым позднее). Эти достижения в целом хорошо ложились в общую тенденцию изучения интегрируемых моделей, последующую за открытыми Морикацу Тодой интегрируемыми одномерными многочастичными задачами и достижениями Мартина Крускала вместе с коллегами в вопросе разрешимости уравнений Кортевега-де-Фриза. Кроме того понимание моделей Калоджеро было значительно углублено благодаря фундаментальным идеям Питера Лакса.

Карди в своих статьях [6, 7] с помощью стандартного соответствия между оператором Фоккера-Планка и оператора Шредингера установил связь между множественным SLE на окружности и тригонометрической квантовой моделью Калоджеро. Так как модели Калоджеро вполне хорошо изучены, мы бы хотели использовать это знание для лучшего понимания SLE. В частности нас интересуют как выглядят различные известные дуальности между тригонометрической моделью Калоджеро и другими интегрируемыми системами на языке SLE.

В статье [16] Забродин и Зотов установили соответствие между рациональными уравнениями Книжника-Замолодчикова и рациональной квантовой системой Калоджеро, а также между тригонометрическими их версиями. Это соответствие в квазиклассическом пределе сводится к известному соответствию между квантовой моделью Гаудина и классической системой Калоджеро.

Особенно нас будет интересовать связь между тригонометрической и рациональной моделями Калоджеро, полученная в статье [13]. В ней Некрасов строит симплектоморфизм между фазовыми пространствами соответствующих моделей Калоджеро с помощью матричного полярного разложения. Затем он адаптирует этот морфизм для квантовых систем. Более подробно конструкция Некрасова будет рассмотрена в следующих разделах.

2 Множественный SLE

Карди строит множественный радиальный SLE путем обобщения обычного радиального SLE. Напомним эту конструкцию. Обычный радиальный SLE описывает распределение на кривых, соединяющих выделенную точку на границе области r_1 и выделенную точку во внутренности области r_2. Так как теорема Римана об отображении позволяет нам конформно отобразить нашу область в любую другую причем так, чтобы точка r_2 перешла в любую наперед заданную точку новой области. Поэтому для удобства радиальное SLE обычно рассматривают на единичного диска U с r_2, располагающейся в нуле. Таким образом, нас интересует распределение на кривых γ, соединяющих заданную точку $e^{i\theta_0}$ на границе и ноль.

Как обычно для SLE мы рассматриваем рост этих кривых в зависимости от некоторого параметра t, который мы будем называть временем. Заметим, что в зависимости от значения параметров, эти кривые могут быть как простыми, так и касаться себя. В случае самопересечений могут появиться области, окруженные кривой. Мы будем обозначать набор таких точек вместе с самой кривой к моменту времени t остовом процессаK_t. Тогда существует конформное отображение g_t, которое переводит $U \setminus K_t$ в U, причем $g_t(0) = 0$. Остается еще один свободный параметр, который соответствует глобальному вращению. Мы фиксируем его с помощью условия, что $g_t'(0)$ действительно и положительно. Можно показать, что со временем эта величина монотонно растет и мы может это использовать для репараметризации времени, чтобы $g_t'(0) = e^t$. Это нормализованное отображение переводит конец кривой γ_t в точку $e^{i\theta_t}$ на границе.

Теорема Лёвнера говорит, что $\dot{g}_t(z)/g_t(z)$, выраженная как функция от $g_t(z)$, должна быть голоморфной всюду в $\bar{U}$, кроме простого полюса в $e^{i\theta_t}$. Так как $g_t(z)$ сохраняет единичную окружность снаружи K_t, $\dot{g}_t(z)/g_t(z)$ должна быть чисто мнимой при $|g_t(z)| = 1$, и для того, чтобы $g_t'(0) = e^t$, она должна стремиться к 1 при $g_t(z) \to 0$. Едиственное подходящее выражение имеет следующий вид:

$$\dot{g}_t(z) = -g_t(z)\frac{g_t(z) + e^{i\sqrt{\kappa}B_t}}{g_t(z) - e^{i\sqrt{\kappa}B_t}}, \tag{1}$$

где B_t - обычный Броуновский процесс с $E[B_t^2] = t$. (1) - стандартная форма радиального SLE. $g_t(z)$ переводит конец кривой γ_t в точку $e^{i\sqrt{\kappa}B_t}$ на границе, но для обобщения на случай многих кривых более удобно работать с функцией $\hat{g}_t(z;\ \theta) := g_t(z)e^{i(\theta-\sqrt{\kappa}B_t)}$, которая отображает конец кривой в $e^{i\theta}$ и после дополнительного глобального поворота удовлетворяет

$$d\hat{g}_t(z;\theta) = -\hat{g}_t(z;\theta)\frac{\hat{g}_t(z;\theta) + e^{i\theta}}{\hat{g}_t(z;\theta) - e^{i\theta}}dt - i\hat{g}_t(z;\theta)\sqrt{\kappa}dB(t) \tag{2}$$

Теперь давайте рассмотрим N кривых SLE, которые начинаются с различных точек $\{e^{i\theta_j}\}$ на границе с $1 \le j \le N$. Пусть $K_j(t)$ остов jого SLE. Для $\kappa \le 4$ это просто отрезки не пересекающихся кривых. Пусть $G_t^{(N)}(z)$ функция конформно отображающая $U \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_j(t)$ на U с $G_t^{(N)}(0) = 0$ и $\frac{d}{dt}G_t^{(N)} > 0$. Тогда мы утверждаем, что $G_t^{(N)}(z)$ может быть выбрана так, чтобы удовлетворять

$$\dot{G}_t^{(N)} = -G_t^{(N)}\sum_{j=1}^{N}\frac{G_t^{(N)} + e^{i\theta_j(t)}}{G_t^{(N)} - e^{i\theta_j(t)}} \tag{3}$$

где

$$d\theta_j(t) = \sum_{k\neq j}\cot\left(\left(\theta_j(t) - \theta_k(t)\right)/2\right)dt + \sqrt{\kappa}dB_j(t) \tag{4}$$

и $B_j(t)$ - N независимых Броуновских движений, начинающихся в нуле. Чтобы увидеть это, давайте рассмотрим инфинитезимальное преобразование $G_{t+dt}^{(N)} \circ \left(G_t^{(N)}\right)^{-1}$ и заметим, что оно может быть получим путем последовательной эволюции каждой из кривых независимо от оставшихся согласно (3) в течение времени dt:

$$G_{t+dt}^{(N)} \circ \left(G_t^{(N)}\right)^{-1} = g_{dt}^{(N)}\left(\theta_N(t)\right) \circ g_{dt}^{(N-1)}\left(\theta_{N-1}(t)\right) \circ \ldots \circ g_{dt}^{(1)}\left(\theta_1(t)\right)$$

При эволюции jого SLE, $G_t^{(N)}$ эволюционирует согласно (2), с $\theta = \theta_j(t)$ и $B(t) = B_j(t)$, но при этом остальные $\theta_k(t)$ с $k \neq j$ также эволюционируют согласно

$$d\theta_k(t) = i\frac{e^{i\theta_k(t)} + e^{i\theta_j(t)}}{e^{i\theta_k(t)} - e^{i\theta_j(t)}}dt - \sqrt{\kappa}dB_j(t) = \cot\left(\left(\theta_k(t) - \theta_j(t)\right)/2\right)dt - \sqrt{\kappa}dB_j(t) \tag{5}$$

В итоге, после эволюции каждого из SLE с $j = 1, \ldots, N$, мы получаем

$$dG_t^{(N)} = -G_t^{(N)}\sum_{j=1}^{N}\frac{G_t^{(N)} + e^{i\theta_j(t)}}{G_t^{(N)} - e^{i\theta_j(t)}}dt - iG_t^{(N)}\sqrt{\kappa}\sum_{j=1}^{N}dB_j(t)$$

где

$$d\theta_j(t) = \sum_{k\neq j}\cot\left(\left(\theta_j(t) - \theta_k(t)\right)/2\right)dt - \sqrt{\kappa}\sum_{k\neq j}dB_k(t)$$

Теперь для упрощения уравнений повернем диск U на угол $\sqrt{\kappa}\sum_{j=1}^{N}dB_j(t)$ после чего мы получим (3) и (4), как и ожидалось.

Уравнение (4) соответсвует Дайсоновскому процессу. Он может быть записа следующим образом

$$d\theta_j = -\frac{\partial V}{\partial\theta_j}dt + \sqrt{\kappa}dB_j(t)$$

где $V := \sum_{j<k}\ln\left|\sin\left(\left(\theta_j - \theta_k\right)/2\right)\right|$. Как известно, для стохастического дифференциального процесса, записанного в виде:

$$dX_t^{(i)} = b_i(x)dt + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}(x)dW_t^{(j)},$$

где $W_t^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$ - независимые Броуновские процессы, уравнение Фоккера-Планка, описывающее этот процесс выглядит следующим образом:

$$\dot{P} = -\nabla(b(x)P) + \frac{1}{2}D^2 : (\Sigma(x)P)$$

с $\Sigma = \sigma\sigma^T$. Применим это утверждение к (2), тогда мы получим такой оператор Фоккера-Планка.

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial V}{\partial\theta_j} + \frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2}.$$

Инвариантное распределение $P_0(\{\theta_j\})$ должно удовлетворять $\mathcal{L}P_0 = 0$. Инвариантное распределение для нашего оператора Фоккера-Планка имеет следующий вид

$$P_{\text{eq}}\left(\theta_1, \ldots, \theta_N\right) = \prod_{j<k}\left|\sin\left(\left(\theta_j - \theta_k\right)/2\right)\right|^{4/\kappa} \propto \prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^{\beta}$$

3 Соответствие между оператором Фоккера-Планка и оператором Шредингера.

Пусть у нас есть оператора Фоккера-Планка, записанный в следующем виде:

$$\mathcal{L}\cdot = -\nabla\left(b(x)\cdot\right) + \frac{1}{2}D^2 : \left(\Sigma(x)\cdot\right)\right),$$

где $b(x) = \{b_i(x)\}_{i=1}^d$ и $\Sigma(x) = \{\Sigma_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$, а D^2 : имеет следующий смысл:

$$D^2 : (\Sigma(x)\cdot) = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Sigma_{ij}\cdot\right)$$

Можно рассмотреть сопряжженный к нему оператор $\mathcal{L}^\dagger$ в смысле $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{L}^\dagger = b(x)\cdot\nabla + \Sigma(x) : D^2$$

Мы будем предполагать, что случайный процесс, соответствующий данному оператору Фоккера-Планка имеет единственное инвариантное распределение, удовлетворяющее стационарному уравнению Фоккера-Планка:

$$\mathcal{L}\rho_0 = 0.$$

Стационарное уравнение Фоккера-Планка может быть переписано в следующем виде $\nabla\cdot J(\rho_0) = 0$, где $J(\rho)$ - это поток вероятности имеющий следующий вид:

$$J(\rho) = b\rho - \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\Sigma(x)\rho\right).$$

Оператор $\mathcal{L}$ можно разложить на симметричную и антисимметричную часть в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d;\, \rho_0^{-1})$, чтобы проверить это мы прибавим и отнимем $J_0\cdot\nabla(\rho_0^{-1}\cdot)$ к оператору, где $J_0 = J(\rho_0)$. И после этого применим формулу для потока вероятности:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\cdot &= -\nabla(b\cdot) + \frac{1}{2}D^2 : (\Sigma\cdot) + J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot) - J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot) = \\ &= \nabla(\rho_0^{-1}(J_s - b\rho_0)\cdot) + \frac{1}{2}D^2 : (\Sigma\cdot) - J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot) = \\ &= \frac{1}{2}\nabla(\rho_0^{-1}\nabla(\Sigma\rho_0)\cdot) + \frac{1}{2}D^2 : (\Sigma\rho_0\rho_0^{-1}\cdot) - J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot) = \\ &= \frac{1}{2}\nabla(\rho_0\Sigma\nabla(\rho_0^{-1}\cdot)) - J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot) =: \mathcal{J}\cdot - \mathcal{A}\cdot\end{aligned}$$

Путем простой проверки можно удостовериться, что оператор $\mathcal{J}\cdot = \dfrac{1}{2}\nabla(\rho_0\Sigma\nabla(\rho_0^{-1}\cdot))$ симметричный в $L^2(\mathbb{R}^d;\, \rho_0^{-1})$, а оператор $\mathcal{A}\cdot = J_s\nabla(\rho_0^{-1}\cdot)$ - антисимметричный. Введем оператор Шредингера, соответствующий нашему оператору Фоккера-Планка, следующим образом:

$$H = -\rho_0^{-1/2}\mathcal{L}(\rho_0^{1/2}\cdot)$$

Вычислим явный вид данного оператора Шредингера. Для начала вычислим как действует $\rho_0^{-1/2}\mathcal{J}(\rho_0^{1/2})$ на функцию $f \in L^2(\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\rho_0^{1/2}\mathcal{J}(\rho_0^{1/2}f) &= \rho_0^{-1/2}\frac{1}{2}\nabla\left(\rho_0\Sigma\nabla\left(\rho_0^{-1}\rho_0^{1/2}f\right)\right) = \\
&= \rho_0^{-1/2}\frac{1}{2}\nabla\left(\rho_0^{1/2}\Sigma\nabla f\right) + \rho_0^{-1/2}\frac{1}{2}\nabla\left(\rho_0\Sigma(\nabla\rho_0^{-1/2})f\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla\left(\Sigma\nabla f\right) + \frac{1}{4}\Sigma(\nabla f)\rho_0^{-1}(\nabla\rho_0) - \frac{1}{4}\Sigma\rho_0^{-1}(\nabla\rho_0)(\nabla f) + \frac{1}{2}\rho_0^{-1/2}\nabla\left(\rho_0\Sigma(\nabla\rho_0^{-1/2})\right)f \\
&= \frac{1}{2}\nabla\left(\Sigma\nabla f\right) + \frac{1}{2}\rho_0^{-1/2}\nabla\left(\rho_0\Sigma(\nabla\rho_0^{-1/2})\right)f
\end{aligned}$$

Далее, так как $\mathcal{A}$ - дифференциальный оператор первого порядка, то к нему применимо правило Лейбница, и:

$$\rho_0^{-1/2}\mathcal{A}(\rho_0^{1/2}f) = \mathcal{A}(f) + \left(\rho_0^{-1/2}\mathcal{A}(\rho_0^{1/2})\right)f$$

Таким образом, наш оператор Шредингера имеет следующий вид:

$$H\cdot = -\frac{1}{2}\nabla\left(\Sigma\nabla(\cdot)\right) + W(x)f + \mathcal{A}(f),$$

где $W(x) = -\rho_0^{-1/2}\mathcal{L}(\rho_0^{1/2})$. Так как и тригонометрическая, и рациональная модели Калоджеро не имеют членов, содержащих производные первого порядка, то нас будет интересовать только случай $\mathcal{A} = 0$. Для операторов Фоккера-Планка это означает, что соответствующий стохастический процесс является обратимым.

Нужно помнить, что операторы H и $\mathcal{L}$ определены в разных пространствах. Оператор $\mathcal{L}$ определен в $L^2(\mathbb{R}^d;\, \rho_0^{-1})$ и является в нем симметричным, а оператор H определен в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и является симметричным в нем. Поэтому переход от $\mathcal{L}$ к H можно строго определить с помощью оператора U:

$$U_{\mathcal{L},H} = \rho_0^{-1/2} : L^2\left(\mathbb{R}^d; \rho_0^{-1/2}\right) \mapsto L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$$

$U_{\mathcal{L},H}$ - унитарный оператор из $L^2(\mathbb{R}^d;\, \rho_0^{-1/2})$ в $L^2(\mathbb{R}^d$

$$\langle U_{\mathcal{L},H}f, U_{\mathcal{L},H}h\rangle_{L^2} = \langle f, h\rangle_{\rho^{-1}} \quad \forall f,h \in L^2\left(\mathbb{R}^d; \rho_0^{-1}\right)$$

В терминах оператора $U_{\mathcal{L},H}$ сосответствие между оператором Шредингера и оператором Фоккера-Планка можно записать в следующем виде

$$H = -U_{\mathcal{L},H}\mathcal{L}U_{\mathcal{L},H}^{-1}$$

С помощью оператора $U_{\mathcal{L},H}$ можно установить соответствие между собственными значениями и собственными функциями операторов $\mathcal{L}$ иH. Конкретно, пусть оператор Фоккера-Планка имеет следующие собственные функции

$$\mathcal{L}\rho_k = \lambda_k\rho_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда для оператора Шредингера мы получаем:

$$\mathcal{L}\rho_k = -U^{-1}_{\mathcal{L},H} H U_{\mathcal{L},H}\rho_k = \lambda_k \rho_k,$$

отсюда

$$H U_{\mathcal{L},H}\rho_k = -\lambda_k U_{\mathcal{L},H}\rho_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

То есть оператор Шредингера имеет такие же собственные значения, как и оператор Фоккера-Планка, и собственные функции $\psi_k = U_{\mathcal{L},H}\rho_k = \rho_0^{-1/2}\rho_k$. Из этого в частности можно найти связь между между волновой функцией вакуумного состояния оператора Шредингера и инвариантным распределением оператора Фоккера-Планка

$$\psi_0 = U_{\mathcal{L},H}\rho_0 = \rho_0^{1/2}$$

Это можно переписать в следующем виде

$$\rho_0 = \psi_0^2$$

4 Связь между тригонометрической системой Калоджеро и множественным SLE

Применим описанное выше соответствие к множественному радиальному SLE. Как было упомянуто выше, оператор Фоккера-Планка, описывающий SLE имеет вид:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial V}{\partial\theta_j} + \frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2}.$$

где

$$V := \sum_{j<k} \ln\left|\sin\left(\left(\theta_j - \theta_k\right)/2\right)\right|$$

Инвариантное распределение имеет вид:

$$\rho_0 = \prod_{j<k} \left|\sin\left(\left(\theta_j - \theta_k\right)/2\right)\right|^{4/\kappa}$$

$$H = -\rho_0^{-1/2}\mathcal{L}\rho_0^{1/2}$$

Для Дайсоновского броуновского движения гамильтониан H оказывается гамильтонианом модели Калоджеро-Сазерленда

$$H = -\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} + \frac{2-\kappa}{2\kappa}\sum_{i<j}\frac{1}{\sin^2\left(\theta_i - \theta_j\right)/2} - \frac{N(N-1)}{2\kappa}$$

А его волновая функция вакуумного состояния согласно [15] имеет вид

$$\Psi = \prod_{i<j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^{\beta/2},$$

что как и ожидалось равно $\Psi = P_0^{1/2}$

5 Дуальность между рациональной и тригонометрической моделями Калоджеро

Построим дуальность между рациональной и тригонометрической системами Калоджеро согласно [13]. Рассмотрим сначала классические системы. Тригонометрическая система Калоджера описывает неразличимые частицы на окружности S^1_R радиуса R, взаимойдествующие друг с другом с помощью потенциала

$$U_I(q) = \frac{\nu^2}{4R^2 \sin^2\left(\frac{q}{2R}\right)}$$

В Гамильтоновом формализме эта система имеет следующее фазовое пространство

$$M_I = \left[T^* \left(S^1_R\right)^N\right] / \mathcal{S}_N,$$

где $\mathcal{S}_N$ - симметрическая группа. Введем канонические координаты на фазовом пространстве (p_i, q_i), где q_i угловая координата на окружности S^1_R и p_i, соответствующий ей импульс. В терминах этих координат имеет канонический вид $\Omega_I = \sum_i \delta p_i \wedge \delta q_i$. Гамильтониан для тригонометрической системы Калоджера записывается в следующем виде

$$H_I = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i \neq j} U_I\left(q_i - q_j\right). \tag{6}$$

Она также известна как модель Сазерлэнда.

Рациональная модель Калоджеро опывает систему неразличимых частих частих, которые так же, как и в рациональной модели, взаимодействоют с помощью попарного потенциала, пропорционального обратной второй степени расстояния между частицами $U_{II}(q) = \frac{\nu^2}{q^2}$. Но кроме того добавлен внешний квадратичный потенциал, чтобы ограничить разлетание частиц. Фазовое пространство выглядит таким образом:

$$M_{II} = \left[T^* \mathbb{R}^N\right] / \mathcal{S}_N$$

Параметризуем его каноническими координатами (p_i, q_i) с симплектической формой $\Omega_{II} = \sum_i \delta p_i \wedge \delta q_i$. Гамилтониан для рациональной модели Калоджеро равен

$$H_{II} = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + \frac{\omega^2 q_i^2}{2} + \sum_{i<j} U_{II}\left(q_i - q_j\right) \tag{7}$$

Как известно, обе модели, рациональная и тригонометрическая, интегрируемы и имеют семейство из N независимых Гамильтонианов в инволюции. Будем обозначать их $H^{(k)}_{I,II}$. Написанные выше Гамильтонианы (6) и (7) входят в это семейство следующим образом $H_I = H^{(1)}_I$ и $H_{II} = H^{(0)}_{II}$. Мы построим соответствие между этими двумя моделями в следующем смысле.

Мы предъявим инъективнное отображением между фазовыми пространствами тригонометрической и рациональной моделей Калоджеро

$$\pi : M_{II} \to M_I$$

Причем это отображение сохраняет симплектическую структуру. И, кроме того, переводит Гамильтонианы одной модели в Гамильтонианы другой:

$$H_{II}^{(k)} = \pi^* H_I^{(k)}.$$

Отображение π мы будем строить следующим образом. Сначала мы построим фазовые пространства тригонометрической и рациональной систем Калоджеро с помощью Гамильтоновой редукции. Мы возьмем симплектические пространства, образованные кокасательным расслоением. Введем на них N гамильтонианов в инволюции и оснанстим эти симплектические пространства действием группы Ли, сохраняющем Гамильтонина. Затем построим эквивариантное отображение между ними, сохраняющее симплектическую форму, и переводящее Гамильтонианы друг в друга. А затем спустим эту конструкцию на Гамильтонову редукцию.

5.1 Тригонометрическая модель Калоджеро

Для того, чтобы получить фазовое пространство тригонометрической системы Калоджеро, рассмотрим симплектического многообразие $X_I = T^*G \times \mathbb{C}^N$, где $G = U(N)$.

$$\tilde{\Omega}_I = i \operatorname{Tr} \delta \left(p \wedge \delta g g^{-1}\right) + \frac{1}{2i} \delta v^+ \wedge \delta v$$

где G рассматривается как матричная группа. p обозначает элемент кокасательный вектор к группе G. Элементы касательного расслоения представляются с помощью эрмитовых матриц. Введя скалярное произведение на касательном расслоении $Tr[AB], \quad A, B \in T_x G$, мы может представить элементы кокасательного расслоения также с помщью эрмитовых матриц. Введем действие группы G на X_I с помощью сопряжения на T^*G и фундаментальным представлением на $\mathbb{C}^N$. Это действие Гамильтоново со следующим отображением момента $\mu_I \ : \ X_I \to \mathfrak{g}^*$:

$$\mu_I(g, p, v) = p - g^{-1} p g - v \otimes v^+$$

Теперь применим Гамильтонову редукцию, то есть рассмотрим пространство $M_I = \mu^{-1}(-\nu\, Id)/G$ вместе с проекцией $p_I \ : \ \mu_I^{-1}(-\nu \operatorname{Id}) \to \mu^{-1}(-\nu\, Id)/G$, так как $-\nu\ Id$ инвариантно под действием Ad_g^*. В явном виде нам нужно решить уравнение:

$$p - g^{-1} p g - v \otimes v^+ = -\nu \operatorname{Id}$$

с точностью до действия группы G. С помощью этого приведем g к диагональному виду:

$$g = \exp\left(\frac{i}{R} \operatorname{diag}\left(q_1, \ldots, q_N\right)\right)$$

таким образом, зафиксировав калибровку, а затем решим уравнение для p и v. С помощью несложных выкладок получаем

$$v_i = \sqrt{\nu}$$
$$p_{ij} = Rp_i\delta_{ij} + \nu\frac{1-\delta_{ij}}{\exp\left[\frac{i(q_i-q_j)}{R}\right]-1}$$

В итоге мы получаем фазовое пространство тригонометрической модели Калоджеро:

$$M_I = \mu^{-1}(-\nu\,\mathrm{Id})/G = \left[T^*(S^1)^N\right]/\mathcal{S}_N$$

с правильной симплектической структурой:

$$\Omega_I = \sum_i \delta p_i \wedge \delta q_i$$

, удовлетворяющее $p_I^*\Omega_I = i_I^*\tilde{\Omega}_I$, где $i\ :\ \mu_I^{-1}(-\nu\,\mathrm{Id}) \to X_I$ - иммерсия.

Функции на X_I инвариантные под действием группы G спускаются на M_I, более того, функции, коммутирующие в смысле скобки Пуассона, спускаются в коммутирующие функции в смысле редуцированной скобки Пуассона. Гамильтониан H_I получается из квадратичного казимира $\mathrm{Tr}\,p^2$. Полное семество независимых гамильтонианов в инволюции строится с помощью:

$$H_I^{(k)} = \frac{1}{R^{k+1}}\,\mathrm{Tr}\,p^{k+1}, \quad k = 0,\ldots,N-1.$$

5.2 Рациональная модель Калоджеро

Для рациональной модели Калоджеро мы проведем те же самые рассуждения. Возьмем симплектическое многообразие $X_{II} = T^*\mathfrak{g}\times\mathbb{C}^N$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(N)$ с канонической симплектической формой

$$\tilde{\Omega}_{II} = \mathrm{Tr}\,\delta(P\wedge\delta Q) + \frac{1}{2i}\delta v^+ \wedge \delta v$$

где P - кокасательный вектор к $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{g}$ - линейное пространство эрмитовых матриц, то если ввести на нем скалярное произведение $Tr[AB], \quad A, B \in T_x\mathfrak{g}$, то элементы кокасательного пространства тоже можно представлять эрмитовыми матрицами. Группа G действует на X_{II} сопряжением на $T^*\mathfrak{g}$ и фундаментальным предсталением на $\mathbb{C}^N$. Это действие Гамильтоново с отображением момента

$$\mu_{II} = [P,Q] - v\otimes v^+$$

Применим Гамильтонову редукцию. Рассмотрим прообраз элемента из центра под действием отображения момента и факторизуем его под действием G (так как стабилизатор элемента из центра $\mathfrak{g}$ под действием присоединенного представления G совпадает с G). В итоге мы получаем фазовое пространство рационального Калоджеро $M_{II} = \mu_{II}^{-1}(-\nu\,\mathrm{Id})/G$ вместе с проекцией $p_{II}\ : \mu_{II}^{-1}(-\nu\,\mathrm{Id} \to \mu_{II}^{-1}(-\nu\,\mathrm{Id})/G$. В явном виде мы ищем решения уравнения

$$[P, Q] - v \otimes v^{\dagger} = -\nu\,\mathrm{Id}$$

с точностью до действия группы G. С помощью этой свободы мы приводим Q к диагональной форме

$$Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_N)$$

таким образом, фиксируя калибровку. После этого мы находим значения P и v:

$$v = \sqrt{\nu}$$

$$p_{ij} = p_i \delta_{ij} + i\nu \frac{1 - \delta_{ij}}{q_i - q_j}$$

В результате мы получили фазовое пространство рациональной системы Калоджеро

$$M_I = \left[T^* \mathbb{R}^N\right] / \mathcal{S}_N$$

с канонической симплектической формой $\Omega_{II} = \sum_i p_i \wedge q_i$, которая удовлетворяет $p_{II}^* \Omega_{II} = i_{II}^* \tilde{\Omega}_{II}$, где $i_{II}\ :\ X_{II} \to \mu_{II}^{-1}$.

Так же, как и в случае с тригонометрической моделью, функции на X_{II} инвариантные под действием группы G без проблем спускаются на M_{II}. Также Пуассон коммутирующие функции спускаются в Пуассон коммутирующие функции на редуцированном пространстве с помощью Ω_{II}. Гамильтониан H_{II} получается из квадратичного казимира $\mathrm{Tr}(P^2 + \omega^2 Q^2)$. Соответсвенно полное семейство независимых Гамильтонианов в инволюции мы получаем из

$$H_{II}^{(k+1)} = \mathrm{Tr}\left(ZZ^+\right)^{k+1}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

, где матрица Z введена следующим образом

$$Z = P + i\omega Q \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

Таким образом, матрица Z однозначно параметризует $T^*\mathfrak{g}$. В явном виде матрица Z записывается следующим образом

$$Z_{ij} = (p_i + i\omega q_i)\,\delta_{ij} + \frac{i\nu\,(1 - \delta_{ij})}{q_i - q_j}$$

5.3 Отображение π.

Отображение π строится сначала на уровне нередуцированных пространств, и затем с помощью G-эквивариантности спускается до отображения редуцированных систем. $\pi\ :\ X_{II} \to X_I$ факторизуется на две части: часть, действующую на векторное пространство, и часть, действующую на кокасательное расслоение. π действует на векторную часть $v \in \mathbb{C}^N$ единичным отображением. На кокасательную часть π действует с помощью полярного разложения. Суммируя, отображение π действует следующим образом

$$\pi(Z, v) = (p,\, g,\, v),$$
$$p = \frac{1}{\omega} Z Z^{\dagger},$$
$$g = \frac{1}{\omega^{1/2}} p^{-1/2} Z.$$

Образ π - это пространство всех пар $(p,\, g)$, где p - эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями, а g - это унитарная матрица. Это подмножество T^*G, которое мы обозначим как T^*_+G. Теперь с помощью прямолинейного вычисления можно проверить, что

$$\pi^* \Omega_{II} = \Omega_I$$

Можно видеть, что π эквиваринтна относительно действия G:

$$\pi\left(UZU^{-1}; Uv\right) = U \cdot (p, g; v) \equiv \left(UpU^{-1}, UgU^{-1}; Uv\right)$$

Кроме того, гамильтонианы $H_{II}^{(k+1)} = \operatorname{Tr}\left(ZZ^{\dagger}\right)^{k+1}$ переходят в $(\omega R)^{k+1} H_I^{(k)} = \operatorname{Tr}(\omega p)^{k+1}$. Таким образом, для получения соответствия мы должны положить

$$\omega = \frac{1}{R}.$$

Под действием отображения π квадратичный гамильтониан H_I рациональной модели Калоджеро переходит в линейный (суммарный импульс) гамильтониан $H_{II}^{(0)} = \sum_i p_i$ тригонометрической модели Калоджеро. Квадратный гамильтониан тригонометрической модели Калоджеро переходит в гамильтониан 4ой степени рациональной модели Калоджеро.

5.4 Квантовое отображение между системами Калоджеро

Волновые функции тригонометрической системы Калоджеро могут быть описаны с помощью квантовой версии редукции, описанной в предыдущей секции. Для начала мы фиксируем представление R группы G. В простейшем случаее можно взять $R = S^{N\nu}\mathbb{C}^N$. Тогда мы можем представить волновую функциюю

$$\psi(q_1, \ldots, q_N)$$

как функцию Ψ на G со значениями в R. При этом мы хотим, чтобы эта функция была эквивarианта относительно присоединненного действия группы G:

$$\Psi\left(UgU^{-1}\right) = T_R(U)\Psi(g)$$

Мы можем ограничить функцию Ψ на максимальный тор $T \subset G$, тогда, используя свойство эквивариантности Ψ, можно сделать вывод, что Ψ на максимальном торе принимает значения в T_R-инвариантном подпространстве R, которое является одномерным для нашего выбора R. Следовательно, мы получаем числовую функцию Ψ. Для того, чтобы задать волновую функцию однозначно (с точностью до фазы), мы используем все квантовые гамильтонианы $\hat{H}_I^{(k)}$, а также условия нормировки:

$$\hat{H}_I^{(k)} \Psi_\lambda = E_I^{(k)}(\lambda) \Psi_\lambda, \tag{8}$$

где λ - спектральный параметр. Теперь квантовая версия отображения π выглядит следующим образом. Имея функцию $\Psi(g)$, удовлетворяющую (8) мы можем построить голоморфную функцию $\Psi(Z)$, которая совпадает с $\Psi(g)$, когда $Z = g$. Потом мы переходим к действительной поляризации, используя соотношения по типу $Z = \frac{1}{i}\left(\frac{\delta}{\delta Q} - \omega Q\right)$. Мы приходим к функции $\chi(Q)$, которая удовлетворяет определенным G-эквивариантным свойствам. Следовательно ограничивая χ только на диагональные матрицы $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_N)$, мы получаем волновую функцию рациональной систыемы Калоджеро, которая является общей собственной функцией семейства квантовых гамильтонианов $H_{II}^{(k)}$. Тонкость этого перехода состоит в том, что квантовая версия операторов

$$\mathrm{Tr}\left(ZZ^\dagger\right)^{k+1}$$

определена с точностью до неоднозначности нормального упорядочения, которая позволяет сдвигать $\hat{H}_{II}^{(k)}$ на любую целочисленную комбинацию $\hat{H}_{II}^{(k')}$ для $k' < k$. В частности собственные значения $E_{II}^{(1)}(\lambda)$ могут отличаться от $E_I^{(0)}(\lambda)$ на независящую от λ константу.

6 Стохастический процесс из рациональной модели Калоджеро.

Возьмем рациональную модель Калоджеро в следующем виде [9]:

$$H_0 = \sum_{j=1}^{N}\left(-\partial_{x_j}^2 + x_j^2\right) + 2\lambda(\lambda - 1)\sum_{j<k}\frac{1}{\left(x_j - x_k\right)^2}$$

$$H = H_0 - E_0$$

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_j^2} \prod_{j<k}\left(x_k - x_j\right)^\lambda$$

$$E_0 = N(1 + \lambda(N-1))$$

Воспользуемся соответствием между оператором Шредингера и оператором Фоккера-Планка в обратную сторону

$$-\mathcal{L} = \rho_s^{1/2} H \rho_s^{-1/2}.$$

Известно соответствие между инвариантным распределением оператора Фоккера-Планка ρ_0 и собственной функцией вакуумного состояния Гамильтониана рациональной модели Калоджеро ψ_0.

$$\psi_0 = \rho_s^{1/2}$$

Теперь давайте выразим в явном виде соответствующий оператор Фоккера-Планка

$$-\mathcal{L} = \rho_s^{1/2} H \rho_s^{-1/2} = \psi_0 H \psi_0^{-1}$$

Введем следующие обозначения:

$$z = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$r = \sum x_i^2$$

В терминах этих переменных

$$\psi_0 = z^\lambda \exp -\frac{1}{2} r$$

Проведя вычисления, мы получаем, что оператор Фоккера-Планка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L} = \rho_s^{1/2} H \rho_s^{-1/2} = \psi_0 H \psi_0^{-1} = -\sum \partial_{x_i}^2 - 2\sum \left(-\lambda \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} + x_i \right) \partial_{x_i} - \\ - 2\lambda(\lambda-1) \sum_{i>j} (x_i - x_j)^{-2} - N - r - 2\lambda N(N-1) + \\ + \sum x_i^2 + 2\lambda(\lambda - 1) \sum_{i>j} (x_i - x_j)^2 - E_0\end{aligned}$$

Введем обозначение для дрифтового коэффициента $b_i = 2\left(\lambda \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} - x_i \right)$, тогда

$$\sum \partial_{x_i} b_i = -2\lambda \sum_{i>j} (x_i - x_j)^{-2} - N$$

$$\mathcal{L} = \sum \partial_{x_i}^2 - \sum b_i \partial_{x_i} - \sum \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$$

Если мы обозначим $\Sigma = 2\mathrm{Id}$, то оператор Фоккера-Планка примет каноническую форму:

$$\mathcal{L}\cdot = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_i(x)\cdot\right) + \frac{1}{2}D^2 : (\Sigma(x)\cdot)$$

Инварианное распределение для этого оператора равно

$$\rho_s = \psi_0^2 = z^{2\lambda}\exp\left[-r\right]$$

Такому уравнению Фоккера-Планка соответствует следующее стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t^i = \left(\lambda \sum \frac{1}{X_t^i - X_t^j} - X_t^i\right) dt + \sqrt{2} dB_t \tag{9}$$

7 Заключение.

Соответствие между множественным радиальным SLE и тригонометрической моделью Калоджеро является очень интересным фактом. SLE, изначально полученное из изучения задачи перколяции в критической точке решеточных моделей, и тригонометрическая модель Калоджеро, являющеся одной из первый интегрируемых моделей, оказываются связаны друг с другом. Кроме того, модель Калоджеро является хорошо изученой и для нее известно большое количество связей с другими интегрируемыми моделями. Представляет интерес, что означают эти дуальности на языке SLE.

В рамках данного диплома мы провели вычисление для дуальности между тригонометрическим и рациональным Калоджеро. В итоге мы получили стохастический процесс (9), это процесс Джека. Он является пределом процесса Макдональда, который в свою очередь соответствует модели Руиджинараса. В качестве дальнейшей работы будет интересно посмотреть, что обозначает дуальность между уравнениями КЗ и рациональной моделью Калоджеро на стохастическом языке.

Список литературы

[1] Michel Bauer and Denis Bernard. SLE(kappa) growth processes and conformal field theories. *Phys. Lett.*, B543:135–138, 2002.

[2] Michel Bauer and Denis Bernard. Conformal field theories of stochastic Loewner evolutions. *Commun. Math. Phys.*, 239:493–521, 2003.

[3] Michel Bauer and Denis Bernard. CFTs of SLEs: The Radial case. *Phys. Lett.*, B583:324–330, 2004.

[4] Michel Bauer and Denis Bernard. Conformal transformations and the SLE partition function Martingale. *Annales Henri Poincare*, 5:289–326, 2004.

[5] Vincent Beffara. Hausdorff dimensions for SLE_6. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0204208, Apr 2002.

[6] J. Cardy. CORRIGENDUM: Stochastic Loewner evolution and Dyson's circular ensembles. *Journal of Physics A Mathematical General*, 36(49):12343, Dec 2003.

[7] John L. Cardy. Calogero-Sutherland model and bulk boundary correlations in conformal field theory. *Phys. Lett.*, B582:121–126, 2004.

[8] Bertrand Duplantier. Conformally Invariant Fractals and Potential Theory. *prl*, 84(7):1363–1367, Feb 2000.

[9] Martin Hallnäs and Edwin Langmann. Explicit formulae for the eigenfunctions of the N-body Calogero model. *Journal of Physics A Mathematical General*, 39(14):3511–3533, Apr 2006.

[10] G. Lawler. Values of Brownian intersection exponents III: Two-sided exponents. *Annales de L'Institut Henri Poincare Section (B) Probability and Statistics*, 38(1):109–123, Dec 2002.

[11] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/9911084, Nov 1999.

[12] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0003156, Mar 2000.

[13] N. Nekrasov. On a duality in Calogero-Moser-Sutherland systems. 1997.

[14] Oded Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/9904022, Apr 1999.

[15] Bill Sutherland. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. ii. *Phys. Rev. A*, 5:1372–1376, Mar 1972.

[16] A. Zabrodin and A. Zotov. KZ-Calogero correspondence revisited. *J. Phys.*, A50(20):205202, 2017.